

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(государственный технический университет)

На правах рукописи
УДК 519.21

Вишняков Борис Ваисович

РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО ЭКВИВАЛЕНТА
И БУТСТРЕПА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТОХАСТИЧЕСКОГО
ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ФУНКЦИЯМИ ВЕРОЯТНОСТИ И КВАНТИЛИ

Специальность 05.13.01

Системный анализ, управление и обработка информации
(авиационная и ракетно-космическая техника)

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор А. И. Кибзун

Москва 2008 г.

Оглавление

Введение	6
1 Задачи вероятностной оптимизации	19
1.1. Введение	19
1.2. Основные понятия и определения	20
1.3. Постановка задач вероятностной оптимизации	25
1.3.1. Вероятностная постановка	25
1.3.2. Квантильная постановка	26
1.3.3. Постановка с вероятностным ограничением	26
1.3.4. Обзор существующих методов решения задач вероятностной оптимизации	27
1.4. Эквивалентность вероятностной и квантильной постановок	32
2 Детерминированные эквиваленты вероятностных задач	37
2.1. Введение	37
2.2. Виды рассматриваемых постановок задач	38
2.3. Случай билинейной целевой функции и сферически симметричного распределения	39
2.3.1. Определение целевой функции	39
2.3.2. Вид функций вероятности и квантили	39
2.3.3. Детерминированные эквиваленты вероятностных постановок	43
2.3.4. Выпуклые свойства вероятности и квантили	45
2.3.5. Пример использования	46
2.4. Случай возрастающей целевой функции относительно стратегии . .	47
2.4.1. Определение целевой функции	47

2.4.2.	Вид функций вероятности и квантили	47
2.4.3.	Детерминированные эквиваленты вероятностных постановок	49
2.4.4.	Выпуклые свойства функций вероятности и квантили	50
2.4.5.	Пример	51
2.5.	Случай возрастающей целевой функции относительно случайного вектора	51
2.5.1.	Определение целевой функции	51
2.5.2.	Вид функций вероятности и квантили	52
2.5.3.	Детерминированные эквиваленты вероятностных постановок	53
2.5.4.	Выпуклые свойства функций вероятности и квантили	54
2.5.5.	Пример	55
2.6.	Случай квадратичной целевой функции и сферически симметричного распределения	56
2.6.1.	Определение целевой функции	56
2.6.2.	Детерминированные эквиваленты вероятностной и квантильной постановок	56
2.7.	Случай аддитивной структуры целевой функции и унимодальной плотности	58
2.7.1.	Определение целевой функции	58
2.7.2.	Вид функции вероятности	59
2.7.3.	Детерминированные эквиваленты вероятностной и квантильной постановок	59
2.8.	Случай сепарабельной структуры целевой функции и логарифмически вогнутой меры	60
2.8.1.	Определение целевой функции	60
2.8.2.	Вид функции вероятности	61
2.8.3.	Детерминированные эквиваленты вероятностных постановок	62
3	Свойства выборочной оценки квантили и методы ее вычисления	64
3.1.	Введение	64
3.2.	Выборочная оценка квантили	65
3.3.	Асимптотическая оценка среднеквадратического отклонения	66
3.4.	Свойства выборочной оценки квантили для различных распределений	66

3.4.1.	Случай равномерного распределения	66
3.4.2.	Случай экспоненциального распределения	67
3.4.3.	Случай распределения Коши	68
3.4.4.	Аналитическая аппроксимация квантили нормального распределения	70
3.4.5.	Случай нормального распределения	75
3.4.6.	Сравнение точности оценивания для различных распределений	76
3.5.	Применение метода бутстрепа к вычислению квантили	76
3.5.1.	Идея метода бутстрепа	77
3.5.2.	Применение метода несглаженного бутстрепа к вычислению квантили	77
3.5.3.	Сглаженная оценка квантили	80
3.5.4.	Применение метода сглаженного бутстрепа к вычислению квантили	83
3.6.	Примеры вычисления бутстреп-квантилей	85
3.6.1.	Представление погрешности оценки квантили	86
3.6.2.	Вычисление квантили для равномерного распределения . . .	86
3.6.3.	Вычисление квантили для нормального распределения . . .	87
3.6.4.	Вычисление квантили для распределения Коши	89
4	Оптимизация двухшаговой модели изменения капитала	91
4.1.	Введение	91
4.2.	Постановка задачи оптимизации функции дохода	92
4.2.1.	Двухшаговая модель изменения капитала	92
4.2.2.	Анализ классической постановки Марковица	93
4.2.3.	Виды критериев принятия решений и обобщение постановки Марковица	94
4.3.	Оптимизация функции дохода по квантильному критерию	95
4.3.1.	Построение функции вероятности	95
4.3.2.	Условие эквивалентности задач оптимизации по квантильному и вероятностному критериям	97
4.3.3.	Свойства функции вероятности	99
4.4.	Оптимизация функции дохода по логарифмическому критерию . . .	102

4.5. Оптимизация функции дохода на доверительном множестве	104
4.6. Оптимизация функции дохода по критерию интегральной квантили	106
4.7. Численный пример	108
4.7.1. Постановка задачи	108
4.7.2. Сравнение оптимальных стратегий и соответствующих им значений критериев	109
4.7.3. Применение метода бутстрепа для решения задачи квантильной оптимизации	114
Заключение	117
Список литературы	119

Введение

Объектом исследования в диссертационной работе являются задачи стохастического программирования с вероятностными критериями, имеющими как явное аналитическое выражение, так и получаемыми численно или экспериментально.

В технике и экономике существует множество задач, относящихся к классу задач стохастического программирования [19, 48, 51, 54, 57, 69, 72, 75, 76]. Стохастические модели, как правило, более адекватны реальным явлениям и процессам, чем детерминированные. Поэтому стратегии (управления), полученные на основе решения задач стохастического программирования, являются более практически значимыми, чем стратегии, полученные в детерминированных постановках.

Поиск решения в практических задачах часто приходится вести в случае, когда некоторые исходные данные не являются детерминированными, известны лишь их законы распределения вероятностей. Естественный, на первый взгляд, путь анализа стохастических задач – замена случайных параметров их средними значениями и нахождение оптимальных управлений полученных таким образом детерминированных задач – не всегда оправдан и может нарушить адекватность модели изучаемого явления. Решение детерминированной задачи с усредненными параметрами может не удовлетворять условиям задачи при различных реализациях случайных факторов. Жесткая же постановка задачи в условиях неполной или неопределенной информации, когда ограничения задачи должны удовлетворяться при всех реализациях случайных параметров, либо приводит к чрезвычайно перетяжеленным решениям, неуместным в практическом применении, либо и вовсе множество допустимых решений оказывается пустым. Таким образом, простейшие пути учета случайного характера условий задачи –

замена случайных переменных их средними значениями или переход к жесткой постановке – не всегда приводит к осмысленному решению задачи стохастического программирования.

Так, во многих прикладных экономических задачах, описанных в терминах линейного программирования, коэффициенты целевой функции, элементы матрицы условий или ограничений – случайные величины. К таким задачам относятся, например, задача планирования добычи угля [54], транспортная задача в стохастической постановке [54], где спрос в пунктах потребления принимается случайной величиной, и многие другие. Наиболее распространенными на практике являются задачи, описанные в терминах нелинейного стохастического программирования. К этому классу принадлежат экономические задачи в области распределения инвестиционных вложений при управлении банковскими капиталами [16, 33, 74], организационно-технические задачи планирования добычи, обработки и хранения нефти [54], прогноза скорости ветра [72], а также задачи управления воздушным движением и планированием полетов с учетом погодных условий и многие другие прикладные задачи. В настоящее время при синтезе и анализе алгоритмов управления беспилотными летательными аппаратами, в том числе управляемыми ракетами различных классов, широкое распространение получили задачи стохастического управления. Их решению посвящены, например, работы [1, 2, 21, 35, 44, 54].

Задачи стохастического программирования, особенно при оптимизации по вероятностному критерию или с вероятностными ограничениями, являются достаточно сложными [35]. Это объясняется в основном сложностью нахождения аналитического вида вероятностного критерия (вероятности того, что потери не превысят допустимого значения) или квантильного критерия (значения потерь, которое не будет превышено с некоторой вероятностью), а также при отсутствии аналитического вида критерия сложностью построения конструктивных численных методов решения подобных задач. Тем не менее, актуальной тенденцией последнего времени является все более широкое применение вероятностных или квантильных критериев при постановке задач стохастического программирования, так как данные критерии дают возможность получения практически ценных решений и устраняют существенный

недостаток критерия в виде среднестатистического значения (математического ожидания), позволяющего получить решение оптимальное лишь в среднем, т.е. по совокупности всех реализаций, которое не гарантирует выполнение требуемых условий с заданной вероятностью, особенно когда эта вероятность оказывается весьма близкой к единице [35, 72]. Последнее весьма характерно для задач высокоточного управления ракетной техникой, задач создания высоконадежной техники, например, самолетов гражданской авиации, инвестирования капитала на рынке ценных бумаг и др. Но также стоит отметить, что несмотря на актуальность вероятностного и квантильного критериев, они, в отличие от математического ожидания, не обладают линейным свойством, а поэтому оказываются более сложными для исследования.

В качестве примера, иллюстрирующего целесообразность рассмотрения вероятностного и квантильного критериев, рассмотрим задачу, связанную с инвестированием средств в ценные бумаги. На финансовые показатели наряду со стратегией поведения на рынке ценных бумаг влияют также факторы, неконтролируемые лицом, принимающим решение. Эти факторы наиболее часто рассматриваются как случайные величины с известным распределением или с распределением из некоторого оговоренного класса. В этом случае финансовые показатели операции также являются случайными величинами. Для их сравнения, а также для выбора оптимальной стратегии поведения на рынке ценных бумаг применяются различные статистические характеристики этих показателей [46]. Например, в классической постановке Марковица [74] средний доход фиксируется и минимизируется дисперсия дохода как мера риска получить доход, отличный от среднего. Во многих случаях такая постановка не оправдана, так как слабо учитывает субъективные желания игрока. Более того, при тяжелых “хвостах” распределения постановка Марковица может быть и вовсе лишена смысла. Отметим также, что при использовании в качестве критерия среднего дохода возникает даже удивительный эффект, называемый эффектом “биржевого парадокса” [83]. Вот почему при формировании портфеля ценных бумаг в последнее время традиционным становится рассмотрение вероятностного критерия [72], квантильного критерия (или VaR-критерия) [16, 32], а также интегрального квантильного критерия (или CVaR-критерия) [33].

Важно также отметить, что явные аналитические выражения для вероятностных критериев во многих практических задачах, как правило, получить не удастся. Поэтому для проведения оптимизации по квантильному критерию приходится использовать аппроксимации, основанные на статистических оценках функции квантили. Здесь могут возникнуть две проблемы. Первая – это уменьшение количества испытаний при неизменной статистической точности оценки квантили. Иногда имитационное моделирование сложных систем на ЭВМ занимает много времени, отсюда возникает проблема сокращения числа испытаний для оценки квантили. Вторая – увеличение статистической точности при фиксированном количестве испытаний. Это наиболее часто встречающийся случай, когда имеется лишь ограниченный объем данных, например, статистическая подборка за рассматриваемый отрезок времени. Как правило, для решения задач стохастического программирования с критерием в виде функции квантили используются стохастические квазиградиентные алгоритмы [22, 23, 72]. Некоторые из этих алгоритмов [72] сходятся крайне медленно, в частности потому, что объем выборки возрастает при приближении к экстремуму. Поэтому актуальна проблема сокращения числа испытаний, а следовательно, и повышения быстродействия подобных алгоритмов. Вот почему возникает идея использования метода бутстрепа в квазиградиентных алгоритмах, который позволит при условии сохранения статистической точности вычисления квантили целевой функции уменьшить объем выборки. Метод бутстрепа отличается от традиционного выборочного тем, что он предполагает многократную обработку одних и тех же данных, заменяя выборочную оценку бутстреп-оценкой. На основе метода бутстрепа строится статистическая процедура, основными этапами которой является построение из имеющейся выборки выборочного распределения вероятностей, генерация из него новых выборок и использование полученных данных для оценивания желаемых параметров.

Таким образом, обобщая изложенное, очевидно, что проблема разработки эффективных методов поиска оптимальных стратегий в задачах стохастического программирования с использованием вероятностного и квантильного критериев является актуальной.

Целью работы является развитие метода детерминированного эквивалента и разработка алгоритмов бутстреппирования выборочной квантили в задачах стохастического программирования с вероятностными критериями. Для достижения поставленной цели предлагается:

- 1) построение детерминированных эквивалентов для ряда частных задач стохастического программирования с вероятностными критериями;
- 2) оценка асимптотической погрешности выборочной оценки функции квантили для различных распределений;
- 3) использование метода бутстрепа для сокращения объема выборки при статистическом вычислении функции квантили;
- 4) решение в качестве иллюстративного примера задачи портфельного инвестирования капитала в двухшаговой постановке.

Диссертация была поддержана грантом РФФИ N05-08-17963.

Основные результаты диссертации опубликованы в 5 статьях [4–7, 42] в журналах, входящих в Перечень ВАК, в сборниках трудов [8–10] и тезисах научных конференций [11–14].

Диссертация состоит из четырех глав, заключения и списка литературы (85 источников). Объем диссертации включает 125 машинописных страниц, включая 18 рисунков, 3 таблицы.

Краткое содержание основных результатов работы по главам состоит в следующем.

В первой главе приводятся основные понятия и определения, относящиеся к стохастическому программированию, а также к математическому и выпуклому анализу, рассматриваются различные варианты постановок задач с вероятностным и квантильным критериями, дается обзор работ по стохастическому программированию и результатов, полученных ранее. Оригинальным результатом является доказательство теоремы эквивалентности задач с вероятностным и квантильным критериями.

В диссертации доказана теорема эквивалентности задач вероятностной и квантильной оптимизации, а также следствие, которое дает возможность

установить эквивалентность вероятностных постановок лишь на том подынтервале, на котором условия эквивалентности выполняются. Пример практического использования эквивалентности вероятностной и квантильной постановок лишь на подынтервалах $\alpha \in (p_*, p^*) \subset (0, 1)$ и $\varphi \in (\varphi_*, \varphi^*) \subset \mathbb{R}^1$ приводится в главе 4 при решении задачи квантильной оптимизации функции дохода для двухшаговой модели изменения капитала.

Во второй главе получены детерминированные эквиваленты для различных задач стохастического программирования. Детерминированные эквиваленты – детерминированные задачи математического программирования, решения которых совпадают с решениями соответствующих задач стохастического программирования с вероятностными критериями. Получение детерминированных эквивалентов значительно упрощает решение вероятностных задач, поскольку для решения детерминированных задач, эквивалентных исходным стохастическим, можно использовать стандартные методы математического программирования [45, 47]. Устанавливаются выпуклые свойства приведенных детерминированных эквивалентов и исходных вероятностных критериев, которыми можно воспользоваться при реализации известных методов выпуклого программирования [47].

Рассматривается целевая функция $\Phi(u, X)$ – функция потерь, которую необходимо минимизировать. Вектор u размерности m имеет смысл управления, $u \in U$, а X – вектор случайных параметров размерности n .

Функцией вероятности при постановке задачи минимизации будем называть функцию [72]

$$P_\varphi(u) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P}\{\Phi(u, X) \leq \varphi\},$$

где $\varphi \in \mathbb{R}^1$ – некоторое допустимое значение $\Phi(u, X)$. Функция вероятности характеризует вероятность такого события, что значение целевой функции при выбранном u будет не больше заданного порога φ .

Функцией квантили при постановке задачи минимизации будем называть функцию [72]

$$\varphi_\alpha(u) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\varphi : P_\varphi(u) \geq \alpha\},$$

где α – заданный уровень вероятности, $\alpha \in (0, 1)$. Функция квантили показывает, что значение целевой функции $\Phi(u, X)$ при выбранной стратегии u с вероятностью

не меньше α будет не превосходить порог $\varphi_\alpha(u)$.

Рассмотрим три классические задачи стохастического программирования.

Максимизация функции вероятности:

$$P_\varphi(u) \rightarrow \max_{u \in U}. \quad (1)$$

Минимизация функции квантили:

$$\varphi_\alpha(u) \rightarrow \min_{u \in U}. \quad (2)$$

Задача с вероятностным ограничением:

$$\Phi_0(u) \rightarrow \min_{u \in U}, \quad (3)$$

$$P_\varphi(u) \geq \alpha,$$

где $\Phi_0(u)$ – некая детерминированная функция.

В главе 2 рассмотрены различные случаи целевых функций. Для них строятся детерминированные эквиваленты, исследуются их свойства выпуклости, а также свойства выпуклости функций вероятности и квантили. При исследовании выпуклых свойств полагается, что множество возможных стратегий U является выпуклым.

1. Целевая функция имеет билинейную структуру

$$\Phi(u, X) = r(u^T(AX + c)), \quad (4)$$

где A – некоторая матрица $m \times n$, c – фиксированный вектор размерности m , $r(t) : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ – строго возрастающая по t , непрерывная слева функция, определенная на всей числовой оси. Пусть распределение случайного вектора X сферически симметрично, то есть его плотность можно представить в виде

$$p_X(x) \stackrel{def}{=} f(\|x\|^2) = f(x^T x),$$

где функция $f(t)$ определена для $t \in [0, \infty)$, неотрицательна и интегрируема по Лебегу.

При условии, что функция распределения $F_1(t) : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ первой компоненты случайного вектора X (в силу сферической симметричности одномерные функции всех компонент случайного вектора совпадают) – строго возрастающая по t , то

есть не имеющая площадок, в диссертации для задач (1), (2), (3) получены детерминированные эквиваленты, которые при некоторых предположениях оказываются задачами выпуклого программирования.

2. Целевая функция возрастает относительно стратегии

$$\Phi(u, x) = r(s(u), X), \quad (5)$$

где $s(u) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^1$ – некоторая функция, $r(s, x) : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ – строго возрастающая, непрерывная слева по $s \in \mathbb{R}^1$ для любых $x \in \mathbb{R}^n$.

Пусть

$$\bar{r}_\alpha(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\psi : \mathcal{P}\{-r_s^{-1}(\varphi, X) \leq \psi\} \geq \alpha\}.$$

При условии, что функция $\bar{P}_\psi(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P}\{-r_s^{-1}(\varphi, X) \leq \psi\}$ строго возрастает по ψ , функция $\bar{\varphi}_\alpha(\psi) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\varphi : \bar{r}_\alpha(\varphi) \leq \psi\}$ строго возрастает по ψ , в диссертации для задач (1), (2), (3) получены детерминированные эквиваленты, которые при некоторых предположениях оказываются задачами выпуклого программирования.

3. Целевая функция возрастает относительно случайного вектора

$$\Phi(u, x) = r(u, t(X)), \quad (6)$$

где $t(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ – некоторая измеримая функция, $r(u, t) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ – строго возрастающая и непрерывная слева по $t \in \mathbb{R}^1$ для любых $u \in \mathbb{R}^m$.

При условии, что функция распределения $F_T(x)$ случайной величины $T \stackrel{\text{def}}{=} t(X)$ строго возрастает по x , для задач (1), (2), (3) получены детерминированные эквиваленты, которые при некоторых предположениях оказываются задачами выпуклого программирования.

4. Целевая функция имеет квадратичную структуру, а случайные векторы имеют сферически симметричное распределение

$$\Phi(u, X) \stackrel{\text{def}}{=} r(u^T A X_1 \cdot X_2^T B^T u), \quad (7)$$

где случайные векторы X_1 и X_2 независимы, A и B – матрицы $m \times n$, $r(t) : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ – строго возрастающая по t непрерывная слева функция, а распределения случайных векторов сферически симметричны, то есть их плотности можно представить в виде

$$p_1(x_1) = f_1(\|x_1\|^2), \quad p_2(x_2) = f_2(\|x_2\|^2).$$

В диссертации получены детерминированные эквиваленты для задач (1), (2).

5. Целевая функция имеет аддитивную структуру, а функция случайного вектора имеет унимодальную плотность

$$\Phi(u, X) = r(|t(X) + s(u)|), \quad (8)$$

где $r(t) : \mathbb{R}_+^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ – строго возрастающая по t , непрерывная слева функция, $t(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ – измеримая функция, а $s(u) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^1$ – некоторая функция. При этом пусть плотность случайной величины $T = t(X)$ унимодальна и симметрична относительно точки m_T – то есть в точке m_T достигается максимум плотности вероятности.

Для задач (1), (2) получены детерминированные эквиваленты, которые при некоторых предположениях оказываются задачами выпуклого программирования.

6. Целевая функция имеет сепарабельную структуру, а плотность распределения случайного вектора логарифмически вогнута

$$\Phi(u, x) = \max_{i=\overline{1, n}} \{r_i(s_i(u) + X_i)\}, \quad (9)$$

где $r_i(t) : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$, $i = \overline{1, n}$ – строго возрастающие, непрерывные слева функции, $s_i(u) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^1$, $i = \overline{1, n}$ – некоторые функции, X_i – независимые случайные величины, при этом плотность $p(x)$ случайного вектора X логарифмически вогнута.

Для задач (1), (3) получены детерминированные эквиваленты, которые при некоторых предположениях оказываются задачами выпуклого программирования.

Третья глава посвящена развитию и применению метода бутстрепа для численного решения задач стохастического программирования. В ней исследована точность выборочной оценки квантили для равномерного, экспоненциального и нормального распределений, распределения Коши. Также в данной главе предлагаются две бутстреп-процедуры для оценивания функции квантили: процедура несглаженного и сглаженного бутстрепа. В этих процедурах из имеющегося выборочного распределения многократно генерируется новая бутстреп-выборка и по ней вычисляется бутстреп-оценка квантили. Процедура несглаженного бутстрепа основана на извлечении бутстреп-выборки

из выборочной функции распределения имеющейся выборки. Процедура сглаженного бутстрепа основана на извлечении бутстреп-выборки из сглаженной выборочной функции распределения. Оценка квантили, полученная в результате применения несглаженного или сглаженного бутстрепа, считается как среднее значение выборочной квантили по m бутстреп-выборкам. Доказывается утверждение о сходимости сглаженной оценки квантили к истинному значению почти наверное, несглаженной оценки – по вероятности.

Пусть имеется априорная выборка $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ случайной величины $X \sim F_X(x)$. Известно [20], что выборочная оценка квантили уровня $\alpha \in (0, 1)$ по выборке X_i , $i = \overline{1, n}$, определяется как:

$$\hat{X}_\alpha(n) \stackrel{def}{=} X_{([n\alpha]+1)}, \quad (10)$$

где $[n\alpha]$ - целая часть числа $n \cdot \alpha$, т.е. смысл данной операции состоит в выборе элемента вариационного ряда выборки $X_{(i)}$ с номером $i = [n\alpha] + 1$.

В качестве погрешности выборочной оценки квантили рассмотрим асимптотическую оценку среднеквадратического отклонения. Выборочная оценка квантили (10) случайной величины X с непрерывной плотностью распределения $p(x)$ в окрестности точки x_α , в которой $p(x_\alpha) > 0$, по теореме Мостеллера [20] асимптотически нормальна:

$$\sqrt{n}(\hat{X}_\alpha(n) - x_\alpha) \xrightarrow{F} U \sim \mathbf{N}(0, \sigma_\alpha^2), \quad (11)$$

где x_α – точное значение квантили, σ_α – асимптотическое значение среднеквадратического отклонения оценки $\hat{X}_\alpha(n)$, которое равно

$$\sigma_\alpha \stackrel{def}{=} \sqrt{\frac{\alpha(1-\alpha)}{p^2(x_\alpha)}}. \quad (12)$$

Величину σ_α/\sqrt{n} , имеющую скорость сходимости $n^{-1/2}$, можно интерпретировать как точность выборочной оценки квантили. Данная величина рассматривается для различных распределений.

1. Пусть случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[a, b]$: $X \sim \mathbf{R}(a, b)$. В этом случае асимптотическая оценка погрешности выборочной оценки квантили будет равна

$$\sigma_\alpha = \sqrt{\alpha(1-\alpha)(b-a)^2}.$$

2. Пусть теперь случайная величина X имеет экспоненциальное распределение: $X \sim \mathbf{E}(\lambda)$, где $\lambda > 0$. Тогда асимптотическая оценка погрешности выборочной оценки квантили равна

$$\sigma_\alpha = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

3. Пусть случайная величина X имеет распределение Коши: $X \sim \mathbf{K}(0)$. Здесь асимптотическая оценка погрешности выборочной оценки квантили равна

$$\sigma_\alpha = \pi \sqrt{\alpha(1-\alpha)} \left(1 + [\operatorname{tg}(\pi(\alpha - 1/2))]^2\right).$$

4. Пусть случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение: $X \sim \mathbf{N}(0, 1)$. В этом случае асимптотическая оценка погрешности выборочной оценки квантили будет равна

$$\sigma_\alpha \approx \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{n(-\ln(2\pi(1-\alpha)^2))(1-\alpha)}}.$$

Для нормального распределения найдена также аппроксимация для гауссовской квантили, представимая в виде

$$\bar{x}_\alpha \stackrel{def}{=} \sqrt{W\left(\frac{1}{2\pi(1-\alpha)^2}\right)}, \quad (13)$$

где $W(t) : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ – функция Ламберта.

Доказано, что при $\alpha \rightarrow 1$ имеет место

$$\bar{x}_\alpha - x_\alpha = O(x_\alpha^{-3}),$$

где x_α – квантиль $\mathbf{N}(0, 1)$, а \bar{x}_α – ее аппроксимация (13).

Для уточнения выборочной оценки квантили предлагается использовать метод бутстрепа. Рассмотрены два алгоритма – несглаженного и сглаженного бутстрепа. В первом новые выборки извлекаются из выборочного распределения, во втором – из сглаженного распределения вероятностей. Несглаженная бутстреп-оценка квантили по m бутстреп-выборкам будет выглядеть следующим образом:

$$\hat{S}_\alpha^*(m) \stackrel{def}{=} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \hat{X}_{\alpha i}^*, \quad (14)$$

где $\hat{X}_{\alpha i}^*$ – выборочная оценка квантили (10) по i -той бутстреп-выборке.

Сглаженная бутстреп-оценка квантили по m бутстреп-выборкам будет выглядеть следующим образом:

$$\hat{R}_\alpha^*(m) \stackrel{def}{=} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \tilde{X}_{\alpha i}^*, \quad (15)$$

где $\tilde{X}_{\alpha i}^*$ – обратная функция к сглаженной функции i -того бутстреп-распределения вероятностей.

Доказано, что

$$|\hat{S}_\alpha^*(m) - x_\alpha| \xrightarrow{P} 0,$$

$$|\hat{R}_\alpha^*(m) - x_\alpha| \xrightarrow{\text{п.н.}} 0.$$

Сравнение результатов оценивания квантили при использовании выборочной оценки (10) и бутстреп-оценок (14), (15) для различных распределений с помощью численного компьютерного моделирования показало, что обе бутстреп-оценки дают возможность получить более высокую точность, чем выборочная оценка квантили.

Четвертая глава посвящена сравнению на численном примере квантильного, интегрального квантильного, логарифмического критериев, а также обобщению постановки Марковица для одной конкретной модели формирования портфеля ценных бумаг. Рассматривается задача максимизации функции дохода при двухшаговом вложении капитала в безрисковую ценную бумагу и рисковую с равномерным законом распределения ее доходности. Проводится анализ и сравнение решений задач с использованием квантильного критерия, критерия интегральной квантили, логарифмического и минимаксного критериев. Находится оптимальное значение каждого из критериев в зависимости от уровня вероятности. Предлагается способ выбора допустимого уровня доверительной вероятности, исследуются зависимости критериев от этого уровня при подстановке в критерии своих оптимальных стратегий и стратегий, оптимальных для других критериев.

На численном примере сравниваются все рассмотренные постановки. Кроме того, применен метод бутстрепа для сравнения результатов численного компьютерного моделирования с аналитическим значением квантили. Показано, что использование бутстрепирования при решении задач численной оптимизации стохастических критериев выглядит очень перспективно, особенно при небольших

экспериментальных объемах данных. Полученные бутстреп-стратегии гораздо глаже выборочных и гораздо ближе к истинным, чем выборочные. При этом значения бутстреп-критериев также ближе к оптимальному значению квантильного критерия.

1. Задачи вероятностной ОПТИМИЗАЦИИ

1.1. Введение

Задачи оптимизации по вероятностным критериям или с вероятностным ограничением имеют чрезвычайно широкую область распространения. Они встречаются как в современной технике при разработке и проектировании, например, новых методов и алгоритмов управления движением летательных аппаратов (в первую очередь беспилотных), создании бортового программного обеспечения высокоточного оружия, так и в современной экономике при разработке, например, стратегий инвестирования и управления портфелем ценных бумаг в банковском деле. Актуальность постановки данных задач управления связана с присутствием в технических и экономических системах случайных или неопределенных факторов и необходимостью быстрого принятия управленческих решений, важность которых часто трудно переоценить. Однако, задачи вероятностной оптимизации по управлению до недавнего времени рассматривались достаточно редко, что объяснялось сложностью необходимых вычислений и использования самих вероятностных критериев, а также отсутствием практически конструктивных методов решения задач.

Целью данной главы является введение в проблему решения задач стохастического программирования с вероятностным и квантильным критериями, анализ существующих методов с выявлением недостатков в проработке изучаемого вопроса. Кроме того, в главе получен оригинальный результат — теорема и ее следствие об эквивалентности задач квантильной и вероятностной оптимизации.

1.2. Основные понятия и определения

Введем основные понятия и определения, которые будут использованы в диссертации.

Пусть дана функция $\Phi(u, X)$, имеющая смысл функции потерь, которую необходимо минимизировать. Вектор u размерности m имеет смысл управления, а X – вектор случайных параметров размерности n . В силу случайности вектора X оптимизация непосредственно целевой функции $\Phi(u, x)$ невозможна, можно говорить лишь о вероятности некоторого события, связанного с функцией $\Phi(u, x)$. Следовательно, необходимо сформулировать постановку задачи, в которой решение будет находиться при оптимизации некоторого критерия, содержащего данную функцию.

Определение 1.1. Определим функцию вероятности [72]

$$P_\varphi(u) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P}\{\Phi(u, X) \leq \varphi\}, \quad (1.1)$$

где φ – некоторый допустимый уровень потерь. Функция вероятности характеризует вероятность того, что потери при выбранной стратегии u не превысят заданный порог φ .

Определение 1.2. Функцией квантили [72] называется функция вида

$$\varphi_\alpha(u) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\varphi : P_\varphi(u) \geq \alpha\}, \quad (1.2)$$

где α – заданный уровень вероятности, $\alpha \in (0, 1)$. Функция квантили показывает, что потери при выбранной стратегии u с вероятностью не меньше α не превысят значения $\varphi_\alpha(u)$. В литературе [80, 81] $\varphi_\alpha(u)$ называют также VaR-критерием.

Определение 1.3. Функцией интегральной квантили [33] называется функция вида

$$\psi_\alpha(u) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 \varphi_\beta(u) d\beta. \quad (1.3)$$

Она представляет собой усредненное значение функции квантили на отрезке $[\alpha, 1]$. Физический смысл данной функции есть усредненные потери на “хвосте” распределения. В литературе [80, 81] $\psi_\alpha(u)$ называют также CVaR-критерием.

Определение 1.4. Усредненной логарифмической функцией [71] называется функция вида

$$L(u) \stackrel{def}{=} M[\ln(\Phi(u, X))], \quad (1.4)$$

исследованную в [71].

Определение 1.5. Доверительная оценка функции квантили, согласно [72], будет выглядеть следующим образом:

$$\hat{\varphi}_\alpha(u) \stackrel{def}{=} \max_{x \in S_\alpha} \Phi(u, x), \quad (1.5)$$

где S_α — доверительной множество, имеющее вероятностную меру α .

Замечание 1.1. Аналогично можно сформулировать определения (1.1-1.3) и для функции дохода $F(u, X)$. Функции вероятности, квантили и интегральной квантили примут вид

$$\begin{aligned} P_\varphi(u) &\stackrel{def}{=} \mathcal{P}\{F(u, X) \geq \varphi\} \\ \varphi_\alpha(u) &\stackrel{def}{=} \max\{\varphi : P_\varphi(u) \geq \alpha\}, \\ \psi_\alpha(u) &\stackrel{def}{=} \frac{1}{1-\alpha} \int_0^{1-\alpha} \varphi_\beta(u) d\beta. \end{aligned}$$

Минимаксная оценка функции квантили заменяется на максиминную:

$$\hat{\varphi}_\alpha(u) \stackrel{def}{=} \min_{x \in S_\alpha} F(u, x).$$

Рассмотрим теперь случай, когда распределение случайного вектора X неизвестно. Так как не представляется возможным найти аналитический вид функций вероятности, квантили и интегральной квантили, то используют их выборочные оценки. Выборка $\{X^1, X^2, \dots, X^n\}$ будет генерировать для фиксированного u выборку $\{\Phi_1(u), \Phi_2(u), \dots, \Phi_n(u)\}$, где $\Phi_i(u) \stackrel{def}{=} \Phi(u, X^i)$ — i -ая реализация $\Phi(u, X)$. Выборка $\{\Phi_1(u), \Phi_2(u), \dots, \Phi_n(u)\}$ упорядочивается, строится вариационный ряд выборки:

$$\Phi_1^n(u) \leq \Phi_2^n(u) \leq \dots \leq \Phi_n^n(u),$$

где Φ_i^n — порядковая статистика с номером $i, i = \overline{1, n}$, для фиксированного u .

Определение 1.6. Оценка функции квантили по выборке $\Phi_i(u), i = \overline{1, n}$, будет иметь вид [72]:

$$\hat{\varphi}_\alpha(u) \stackrel{def}{=} \Phi_{[n\alpha]+1}^n(u), \quad (1.6)$$

где $[n\alpha]$ - целая часть числа $n\alpha$. Данная операция означает выбор элемента вариационного ряда выборки $\Phi_i(u)$, $i = \overline{1, n}$, с номером $[n\alpha] + 1$.

Определение 1.7. Оценку функции интегральной квантили по выборке $\Phi_i(u)$, $i = \overline{1, n}$ предлагается осуществлять следующим образом:

$$\hat{\psi}_\alpha(u) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum_{i=[n\alpha]+1}^n \Phi_i^n(u)}{n - [n\alpha] - 1}. \quad (1.7)$$

Данная операция означает усреднение оценки функции квантили (1.6) по уровням от 0 до $1 - \alpha$.

Замечание 1.2. Аналогично для функции дохода $F(u, X)$ определения (1.1) и (1.1) будут выглядеть следующим образом.

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_\alpha(u) &\stackrel{\text{def}}{=} F_{n-[n\alpha]-1}^n(u), \\ \hat{\psi}_\alpha(u) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum_{i=1}^{n-[n\alpha]-1} F_i^n(u)}{n - [n\alpha] - 1}. \end{aligned}$$

Приведем основные свойства функций вероятности и квантили из [25, 72] для функции потерь $\Phi(u, X)$, которые понадобятся при дальнейшем изложении материала в Главе 2. Функция вероятности непрерывна справа и монотонно не убывает по φ при фиксированном u . Функция квантили, как функция аргумента α , непрерывна слева и монотонно не убывает. Функция квантили связана с функцией вероятности так, что следующие два условия эквивалентны:

$$P_\varphi(u) \geq \alpha, \quad \varphi_\alpha(u) \leq \varphi.$$

Кроме того, если для любого $\varphi \in \mathbb{R}^1$ выполнено условие:

$$\mathcal{P}\{\Phi(u, X) = \varphi\} = 0, \quad (1.8)$$

то $\varphi_\alpha(u)$ строго возрастает по $\alpha \in [0, 1]$, $P_{\varphi_\alpha(u)}(u)$ для любого $\alpha \in [0, 1]$, $P_\varphi(u)$ непрерывна по φ .

Если выполнено условие:

$$\mathcal{P}\{|\Phi(u, X) - \varphi| < \varepsilon\} > 0, \quad (1.9)$$

то $P_\varphi(u)$ строго возрастает по φ , $\varphi_\alpha(u) = \varphi$ при $\alpha = P_\varphi(u)$, $\varphi_\alpha(u)$ непрерывна по $\alpha \in (0, 1)$.

Определение 1.8. Скалярная функция $f(u)$, определенная на выпуклом множестве $U \in \mathbb{R}^m$, называется выпуклой на U , если для любых $u_1, u_2 \in U$ и для любого $\lambda \in \mathbb{R}^1$ справедливо неравенство

$$f(\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2) \leq \lambda f(u_1) + (1 - \lambda)f(u_2).$$

Функция $f(u)$ будет вогнутой на U , если

$$f(\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2) \geq \lambda f(u_1) + (1 - \lambda)f(u_2).$$

Выпуклые функции играют важную роль в теории оптимизации. Главной особенностью выпуклых функций является то, что локальный минимум для них является глобальным. Наличие свойства выпуклости позволяет использовать для решения задач оптимизации с выпуклыми целевыми функциями и выпуклыми ограничениями методы выпуклой оптимизации [45, 47].

Функция квантили обладает и свойствами выпуклости [25].

Определение 1.9. Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ выпуклый носитель меры \mathcal{P} . Вероятностная мера называется квазивогнутой, если для любых выпуклых множеств $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ и любого $\lambda \in [0, 1]$ выполняется неравенство

$$\mathcal{P}(\lambda A + (1 - \lambda)B) \geq \min\{\mathcal{P}(A), \mathcal{P}(B)\}.$$

Здесь сумма $A + B$ множеств $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ и умножение на число понимаются в смысле Минковского:

$$A + B \stackrel{\text{def}}{=} \{z : z = x + y, x \in A, y \in B\}, \quad \lambda A \stackrel{\text{def}}{=} \{z : z = \lambda x, x \in A\}.$$

Определение 1.10. Скалярная функция $f(u)$, определенная на выпуклом множестве $U \in \mathbb{R}^m$, называется квазивыпуклой на U , если для любых $u_1, u_2 \in U$ и для любого $\lambda \in [0, 1]$ справедливо неравенство

$$f(\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2) \leq \max\{f(u_1), f(u_2)\}.$$

Функция $f(u)$ будет квазивогнутой на U , если

$$f(\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2) \geq \min\{f(u_1), f(u_2)\}. \quad (1.10)$$

Для выпуклой или квазивыпуклой функции $f(u)$ справедливо то обстоятельство, что множество $\{u \in U : f(u) \leq C\}$ является выпуклым для любой константы $C \in \mathbb{R}^1$.

Основным недостатком квазивыпуклых функций является тот факт, что квазивыпуклость, в отличие от выпуклости, не гарантирует достаточности необходимых условий оптимальности даже в гладком случае.

Функция вероятности, в отличие от функции квантили, как правило, не может быть выпуклой или вогнутой в силу своей ограниченности. Поэтому вследствие того, что она, как правило, подлежит максимизации, для нее вопрос о выпуклых свойствах понимается обычно как вопрос о квазивогнутости.

Определение 1.11. Неотрицательная функция $f(u)$, определенная на выпуклом множестве $U \in \mathbb{R}^m$, называется логарифмически вогнутой на U , если для любых $u_1, u_2 \in U$ и для любого $\lambda \in [0, 1]$ справедливо неравенство

$$f(\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2) \geq f^\lambda(u_1)f^{1-\lambda}(u_2). \quad (1.11)$$

Нетрудно убедиться, что всякая логарифмически вогнутая функция является и квазивогнутой. Заметим, что если функция $f(u)$ логарифмически вогнута и не равна нулю на U , то функция $\ln(f(u))$ будет вогнута на U .

Определение 1.12. Вероятностная мера \mathcal{P} называется логарифмически вогнутой на выпуклом множестве $X \in \mathbb{R}^n$, если для любых непустых выпуклых подмножеств $A, B \subset X$ и любого $\lambda \in [0, 1]$ выполняется неравенство

$$\mathcal{P}(\lambda A + (1 - \lambda)B) \geq \mathcal{P}^\lambda(A)\mathcal{P}^{1-\lambda}(B). \quad (1.12)$$

Заметим, что если мера \mathcal{P} имеет логарифмически вогнутую плотность, то она является логарифмически вогнутой [78].

Имеет место следующее утверждение [77]: если функция $\Phi(u, X)$ является выпуклой на выпуклом множестве $U \times \mathbb{R}^n$ и вероятностная мера \mathcal{P} квазивогнута (логарифмически вогнута) на носителе \mathbb{R}^n , то функция вероятности $P_\varphi(u)$ является квазивогнутой (логарифмически вогнутой) по $u \in U$.

Из логарифмической вогнутости функции вероятности $P_\varphi(u)$ фактически следует, что если $P_\varphi(u)$ не равна нулю для некоторого φ и любых $u \in U$, то $\ln(P_\varphi(u))$ будет тогда вогнутой функцией для данного φ .

1.3. Постановка задач вероятностной ОПТИМИЗАЦИИ

Пусть имеется некоторая целевая функция $\Phi(u, X)$, описывающая потери. Рассмотрим три классические задачи стохастического программирования.

1.3.1. Вероятностная постановка

Функция вероятности, согласно определению 1.1, будет равна

$$P_\varphi(u) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P}\{\Phi(u, X) \leq \varphi\},$$

где $\varphi \in \mathbb{R}^1$ – некоторый фиксированный уровень потерь.

Данная функция описывает вероятность того, что при выбранной стратегии u потери будут не выше порога φ . Для определения данной вероятности необходимо потребовать, чтобы функция $\Phi(u, x)$ была борелевской по аргументу x . Функция $P_\varphi(u)$ фактически является мерой надежности стратегии u , так как ее значение – это вероятность получения приемлемого результата. Чем ближе данная вероятность к единице, тем выше надежность выбранной стратегии u .

Исходя из физического смысла функции вероятности, очевидно, что целесообразно выбирать такую стратегию u , которая бы была наиболее надежной. То есть задача стохастического программирования с использованием вероятностной модели примет вид

$$P_\varphi(u) \rightarrow \max_{u \in U}. \quad (1.13)$$

Поэтому задачи с вероятностным критерием возникают в случае, когда необходимо найти такую стратегию u , которая бы максимизировала надежность системы. Задачи с вероятностным критерием возникают при построении алгоритмов управления летательных аппаратов, в частности управляемых ракет; здесь максимизируется вероятность того, что промах по цели не выйдет за заданный радиус поражения. В экономике задача в вероятностной постановке может возникнуть при формировании портфеля ценных бумаг, где максимизируется вероятность получения дохода не менее заданного.

1.3.2. Квантильная постановка

Теперь зафиксируем допустимый уровень надежности α , который равен значению функции вероятности, и рассмотрим только те стратегии u , которые допустимы по надежности, т.е. удовлетворяют неравенству

$$P_{\varphi(u)}(u) \geq \alpha. \quad (1.14)$$

В данном неравенстве зависимость $\varphi(u)$ введена с тем, чтобы учесть, что ограничение (1.14) может иметь место для различных значений φ . Так как в силу монотонности функции распределения для всех $\psi > \varphi$ из неравенства $P_{\varphi}(u) \geq \alpha$ следует неравенство $P_{\psi}(u) \geq \alpha$, то значений $\varphi(u)$, удовлетворяющих (1.14), будет множество. Поэтому выберем такую стратегию, для которой значение $\varphi(u)$ минимально.

Функция квантили, согласно определению 1.2, будет равна

$$\varphi_{\alpha}(u) \stackrel{def}{=} \min\{\varphi : P_{\varphi}(u) \geq \alpha\},$$

где $\alpha \in (0, 1)$ – допустимый уровень надежности.

Данная функция имеет смысл величины потерь, гарантированных с заданной вероятностью α . То есть при использовании стратегии u реальные потери не превзойдут уровень $\varphi_{\alpha}(u)$ с вероятностью α . Очевидно, что целесообразно выбрать такую стратегию, чтобы уровень потерь был минимален. То есть задача стохастического программирования с использованием квантильной модели примет вид

$$\varphi_{\alpha}(u) \rightarrow \min_{u \in U}. \quad (1.15)$$

Задачи с квантильным критерием возникают в случае, когда необходимо найти такую стратегию u , которая бы минимизировала потери. Область их применения часто совпадает с областью применения задач с вероятностным критерием. Но, в отличие от вероятностного критерия, который минимизирует вероятность превысить допустимый уровень потерь, квантильный критерий минимизирует саму величину потерь при фиксированном уровне α .

1.3.3. Постановка с вероятностным ограничением

Задачи с вероятностным ограничением возникают в основном в двух случаях:

1) в задачах планирования и управления в условиях неполной информации, когда требуется жесткая постановка, но при этом множество стратегий оказывается пустым. В таких ситуациях задача становится осмысленной только если допустить нарушение ограничений на некотором множестве состояний природы;

2) если исключение невязок условий задачи при относительно редко встречающихся состояниях природы не окупается достигаемым при этом эффектом от оптимизации целевой функции.

В качестве целевой функции $\Phi_0(u)$ обычно принимают выпуклые функции. Также в задачах стохастического линейного программирования за целевую функцию часто принимают математическое ожидание или дисперсию линейной формы. При этом вероятность превышения линейной формой некоторого заданного порога α описывается вероятностным ограничением.

В общем виде задача с вероятностным ограничением выглядит так:

$$\Phi_0(u) \rightarrow \min_{u \in U}, \quad (1.16)$$

$$P_\varphi(u) \geq \alpha.$$

1.3.4. Обзор существующих методов решения задач вероятностной оптимизации

Рассмотрим работы [54, 69, 72], в которых содержатся обобщения многих результатов по стохастическому программированию. В книге [54] рассмотрены три группы методов стохастического программирования: методы прогнозирования поведения сложных систем, методы управления в условиях риска и неопределенности и методы адаптации и обучения (стохастическая аппроксимация). Исследованы одноэтапные, двухэтапные и многоэтапные задачи стохастического программирования, проблемы сглаживания и экстраполяции случайной функции, обобщенные задачи фильтрации и прогноза, одномерная и многомерная стохастическая аппроксимация. В работе [69] описаны основные вопросы раздела стохастического программирования, в том числе нахождение вероятностных мер, детерминированных эквивалентов, решение многоэтапных задач оптимизации. В книге рассмотрен раздел динамических систем, включая

принцип Беллмана, детерминированные и стохастические деревья решений, а также препроцессинг данных – уменьшение размерности задачи, проверка на разрешимость – и задачи, связанные с системами массового обслуживания. В книге [72] рассмотрены задачи стохастического программирования с вероятностным и квантильным критериями. Исследованы прикладные модели в производстве и экономике с вероятностным и квантильным критериями, свойства функции вероятности и квантили, в том числе их непрерывность и дифференцируемость, выпуклость для некоторых классов задач. Также изложены методы нахождения функций вероятности и квантили, определения нижних и верхних границ для данных функций, условия эквивалентности вероятностной и квантильной постановок, соотношение задачи квантильной оптимизации с минимаксной, описаны методы численной оптимизации функций вероятности и квантили. В диссертации предлагаются другие условия эквивалентности вероятностной и квантильной постановок (см. раздел 1.4), развиваются методы решения задач стохастического программирования в вероятностной и квантильной постановках. Стоит признать, что условия эквивалентности, полученные в работе [24], содержат в себе условия, полученные в диссертации. Но их проверка требует точных вычислений максимума функции вероятности по управлению для различного уровня потерь, что представляет собой не всегда выполнимую на практике трудоемкую задачу.

В работе [54] приводится детерминированный эквивалент для частного случая билинейной целевой функции, общий прием построения детерминированных эквивалентов для задачи с детерминированной целевой функцией и набором вероятностных ограничений, в работе [72] даны определения и отдельные примеры построения детерминированных эквивалентов. В работах [39, 50, 54] исследованы далеко не все свойства некоторых полученных эквивалентов и, кроме того, наложены слишком сильные ограничения на параметры распределений и целевых функций. В работе [26] в ходе решения экономической задачи строится детерминированный эквивалент, который оказывается частным случаем полученного в настоящей работе в Главе 2. В работе [73] решается экстремальная задача, в которой за критерий принимается значение интеграла от сферически симметричной функции по сильно вытянутому множеству с заданным центром.

Решение данной задачи применяется для построения детерминированного эквивалента квадратичной функции. Глава 2 диссертации посвящена развитию метода детерминированных эквивалентов для гораздо более широкого спектра задач.

В работах [25, 50, 77, 78] исследуются выпуклые свойства функций вероятности и квантили. В [25] проводятся исследования свойств выпуклости функций вероятности и квантили в моделях стохастического программирования и стохастического оптимального управления. Даются определения выпуклости (вогнутости), квазивыпуклости (квазивогнутости), g -выпуклости (g -вогнутости), логарифмической вогнутости. Также вводится понятие частично g -вогнутых функций и вероятностных мер. Рассматриваются теоремы о выпуклых свойствах функций вероятности и квантили для различных целевых функций, о связи логарифмической вогнутости и g -вогнутости. Основным результатом работы [50] является доказательство связи квазивыпуклости функции квантили и квазивогнутости функции вероятности. В работах [77, 78] исследуются свойства логарифмической вогнутости плотности распределения, функции вероятности. В статье [78] доказываются теоремы о связи логарифмической вогнутости плотности распределения с вероятностной мерой, функцией распределения. В работе [77] доказано несколько теорем об обладании функции вероятности свойством логарифмической вогнутости в ряде частных случаев, приведены соответствующие примеры. В Главе 2 используются и развиваются результаты, полученные в данных работах для исследования свойств выпуклости детерминированных эквивалентов, а также выпуклости функции квантили и вогнутости функции вероятности.

В работе [27] предложен стохастический квазиградиентный алгоритм решения задачи квантильной оптимизации, позволяющий определить как оптимальную стратегию, так и оптимальное значение целевой функции. В статье [36] исследуются процедуры построения ядерных оценок функции квантили, предложен стохастический квазиградиентный алгоритм, построенный на основе ядерных оценок. Доказано, что оценка, полученная в результате использования алгоритма, является несмещенной и имеет минимальную дисперсию в классе ядер с конечным носителем. В работе [29] в одной из глав описаны свойства ядра и

рассмотрена задача вложения капитала в бонды (бескупонные ценные бумаги с фиксированным доходом). Исходная задача в квантильной постановке заменена детерминированной аппроксимацией – задачей нелинейного программирования при детерминированных ограничениях. Интересной особенностью данной задачи является то, что математическое ожидание функции дохода не существует, а следовательно неприменим и подход Марковица (см. Главу 4). В статье [43] рассматривается задача минимаксного оценивания в многомерной линейной регрессионной модели, содержащей неопределенные параметры и случайные величины. Для оптимизации алгоритма оценивания используется минимаксный подход. Доказано, что если неопределенные параметры не ограничены, а вектор случайных параметров имеет известное распределение с известными средним и ковариацией, то линейная минимаксная оценка будет совпадать с наилучшей (в среднем квадратичном) линейной несмещенной оценкой. Показано, что если для случайных параметров доступна лишь априорная информация о первых двух моментах, то разумно ограничиться лишь линейными методами оценивания. В работе [28] получены результаты о том, что наихудшая квантиль (берется максимум по множеству вероятностных мер из класса Бармиша) характеризующая качество системы, в “среднем” намного оптимистичнее гарантирующей оценки в виде максимума функции потерь.

К численным методам решения задач стохастического программирования относятся процедуры стохастической аппроксимации [3, 41]. В книге [3] изложены результаты по обоснованию и применению метода стохастической аппроксимации. Описываются методы Роббинса-Монро, Кифера-Вольфовица, метод “вверх-вниз”. В работе [41] рассматриваются методы решения задач, к которым, например, относится задача нахождения точки максимума функции, если каждое измеренное значение этой функции содержит случайную ошибку. Большое внимание уделено сходимости и модификации методов стохастической аппроксимации. Стохастические квазиградиентные методы [19, 51] в некотором смысле объединяют идеи методов случайного поиска и стохастической аппроксимации и позволяют решать как задачи нелинейного, так и стохастического программирования. Книга [19] посвящена численным методам решения нелинейных экстремальных задач вероятностной природы. Основное

внимание в ней уделяется развитию стохастических процедур поиска экстремума в задачах с ограничениями, для решения которых невозможно применить известные методы нелинейного программирования. Такие задачи являются типичными для различных приложений из области исследования операций. Наиболее сложными оказываются функции, встречающиеся в задачах стохастического программирования: обычно они имеют негладкий характер, неизвестны точные значения производных и значения самих функций. В книге [19] на примере различных задач указаны способы построения стохастических квазиградиентов. Работа [51] является в некотором смысле обобщением и продолжением работы [19]. В ней развиваются идеи алгоритмов квазиградиентного типа решения задач выпуклого стохастического программирования с негладкими функционалами цели и ограничений. В этой книге с единой точки зрения рассматривается вопрос построения адаптивных процедур регулирования параметров для различных градиентных алгоритмов оптимизации и теории игр: формируются критерии, определяющие качество регулировок, затем для регулировки параметров применяется итерационный алгоритм, работающий в этом классе задач.

В работах [18, 52] изложены различные методы работы с выборкой. Книга [18] посвящена порядковым статистикам. Большое внимание уделено распределениям порядковых статистик, оценкам и приближениям для этих моментов. Рассмотрены приложения порядковых статистик к теории оценивания, к проверке статистических гипотез. Рассмотрены “быстрые” (short-cut) методы, предназначенные главным образом для нормальных выборок, задача исключения резко выделяющихся “аномальных” наблюдений. Исследована асимптотическая теория порядковых статистик. Получены асимптотическое совместное распределение квантилей, асимптотическое распределение экстремального (крайнего) значения для некоторого вида распределений. В книге [52] описан метод бутстрапа (bootstrap). Предполагается, что имеющиеся n значений образуют генеральную совокупность, из которой извлекаются выборки с возвращением объема n с равными вероятностями извлечения каждого значения. Всего извлекается m выборок, по каждой из них строится оценка интересующего параметра исходной случайной величины, а затем полученные оценки усредняются. Сама по себе идея “размножения выборок” была предложена

М.Кенуем еще в 40-х годах (см. также [30]) в методе “складного ножа” (jackknife). “Размножение выборок” при этом осуществляется путем исключения одного наблюдения. В Главе 3 развиваются идеи численного решения задач стохастического программирования по квантильному критерию. При численной оптимизации функции квантили предлагается заменить выборочную оценку квантили ее бутстреп-оценкой.

В работах [16, 32] рассматривается задача оптимального управления портфелем ценных бумаг или оптимизации билинейной функции [26], которая тесно связана с задачей об оптимальном портфеле. В частности, в [32] рассматривается задача поиска позиционного управления билинейной системой по квантильному критерию, предполагается одинаковое усеченное нормальное распределение доходностей на каждом шаге. В [16], как и в данной работе, рассматривается двухшаговая задача поиска оптимального управления портфельными инвестициями с помощью позиционного управления по вероятностному и квантильному критериям, однако в ней предполагается одинаковое равномерное распределение доходностей на каждом шаге. Задача квантильной оптимизации сводится к оптимизации функционала вероятности и для поиска оптимальной стратегии используется метод динамического программирования. В работе [26] рассматривается задача управления билинейной системой по квантильному критерию с нормальным распределением случайных величин на каждом шаге. Задача квантильной оптимизации решается как при отсутствии, так и при наличии ограничений, моделирующих риск разорения. В Главе 4 на основе разработанного в Главах 1 и 3 математического инструментария дается решение задачи оптимизации двухшаговой модели изменения капитала по различным критериям: квантильному, максиминному, логарифмическому и критерию интегральной квантили. Результаты сравниваются.

1.4. Эквивалентность вероятностной и квантильной постановок

Существует много задач стохастического программирования, найти решение которых в квантильной постановке либо не представляется возможным в силу,

например, отсутствия явного аналитического вида функции квантили, либо нахождение решения затруднено из-за сложного вида функции квантили. Однако при этом решение в вероятностной постановке существует. Поэтому в силу схожести вероятностной и квантильной постановок возникает вопрос о некоторых условиях их эквивалентности.

Пусть рассматривается $F(u, X)$ - функция дохода, где $u \in U$, X - случайный вектор с носителем $A \subset \mathbb{R}^n$.

Для формулировки условий теоремы рассмотрим множество

$$N(u) \stackrel{def}{=} \begin{cases} (F_*(u), F^*(u)], & F_*(u) = -\infty, F^*(u) < +\infty \\ [F_*(u), F^*(u)], & F_*(u) > -\infty, F^*(u) < +\infty \\ [F_*(u), F^*(u)), & F_*(u) > -\infty, F^*(u) = +\infty \\ (F_*(u), F^*(u)), & F_*(u) = -\infty, F^*(u) = +\infty \end{cases}, \quad (1.17)$$

где $F_*(u) = \inf_{x \in A} F(u, x)$, а $F^*(u) = \sup_{x \in A} F(u, x)$.

Если, например, $F(u, x)$ непрерывна по $x \in A$ для всех $u \in U$, а A - компакт, то максимум и минимум в (1.17) достигаются, причем $N(u) \neq \emptyset$ для всех $u \in U$.

Пусть $u \in U$. Введем два условия:

$$\mathcal{P}\{X : F(u, X) = \varphi\} = 0, \quad \forall \varphi \in N(u), \quad (1.18)$$

$$\mathcal{P}\{X : |F(u, X) - \varphi| < \varepsilon\} > 0, \quad \varphi \in \text{int}N(u), \varepsilon > 0. \quad (1.19)$$

Смысл условий (1.18) и (1.19) уже был описан в комментариях к формулам (1.8) и (1.9).

Пусть H - множество, являющееся объединением всех возможных множеств $N(u)$:

$$H \stackrel{def}{=} \bigcup_{u \in U} N(u). \quad (1.20)$$

Рассмотрим вспомогательные задачи для $\alpha \in (0, 1)$ и $\varphi \in H$,

$$u_\alpha = \arg \max_{u \in U} \varphi_\alpha(u), \quad (1.21)$$

$$u_\varphi = \arg \max_{u \in U} P_\varphi(u), \quad (1.22)$$

Определим два множества U_α и U_φ оптимальных стратегий u_α и u_φ соответственно, удовлетворяющих (1.21), (1.22):

$$U_\alpha = \operatorname{Arg\,max}_{u \in U} \varphi_\alpha(u), \quad \alpha \in (0, 1),$$

$$U_\varphi = \operatorname{Arg\,max}_{u \in U} P_\varphi(u), \quad \varphi \in H.$$

Перед доказательством теоремы эквивалентности рассмотрим две леммы.

Лемма 1.1. Если выполнено условие (1.18), то

1. *функция $\varphi_\alpha(u)$ является строго убывающей по $\alpha \in (0, 1)$;*
2. *$P_\psi(u) = \alpha$ при $\psi = \varphi_\alpha(u)$ для всех $\alpha \in (0, 1)$;*
3. *функция $P_\varphi(u)$ является непрерывной по $\varphi \in \operatorname{int} N(u)$.*

Доказательство Леммы 1.1 повторяет доказательство леммы 2.2 [35] для функции дохода $F(u, X) = -\Phi(u, X)$.

Лемма 1.2. Если выполнено условие (1.19), то

1. *функция $P_\varphi(u)$ является строго убывающей по $\varphi \in N(u)$;*
2. *$\varphi_\alpha(u) = \psi$ при $\alpha = P_\psi(u)$ для всех $\psi \in \operatorname{int} N(u)$;*
3. *функция $\varphi_\alpha(u)$ является непрерывной по $\alpha \in (0, 1)$.*

Доказательство Леммы 1.2 повторяет доказательство леммы 2.3 [35] для функции дохода $F(u, X) = -\Phi(u, X)$.

Рассмотрим теорему об эквивалентности вероятностной и квантильной постановок.

Теорема 1.1. Если для всех $u \in U$ выполнены условия (1.18), (1.19), то задачи (1.21), (1.22) эквивалентны, т. е.:

- 1) *пусть $\alpha \in (0, 1)$ и существует стратегия $u_\alpha \in U_\alpha$ со значением критерия $\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_\alpha(u_\alpha)$, тогда $U_\varphi \neq \emptyset$ и $U_\varphi \subset U_\alpha$;*
- 2) *пусть $\varphi \in H$ и существует стратегия $u_\varphi \in U_\varphi$ со значением критерия $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} P_\varphi(u_\varphi)$, тогда $U_\alpha \neq \emptyset$ и $U_\alpha \subset U_\varphi$.*

Доказательство теоремы 1.1. 1) Пусть существует стратегия u_α , являющаяся оптимальной для задачи (1.21). Обозначим $\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_\alpha(u_\alpha)$ и рассмотрим решение u_φ задачи (1.22). Функция вероятности $P_\varphi(u_\varphi) = \mathcal{P}\{x : F(u_\varphi, X) \geq \varphi_\alpha(u_\alpha)\}$. Если для всех $u \in U$ выполнено условие (1.18), то из Леммы 1.1 следует $P_\varphi(u_\varphi) = \alpha$. Откуда следует, что $\varphi_\alpha(u_\varphi) \geq \varphi$. Так как $\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_\alpha(u_\alpha)$, то u_φ – решение задачи (1.21), следовательно, выполнено первое условие эквивалентности, т.е. $U_\varphi \subset U_\alpha$.

2) Пусть существует стратегия u_φ , являющаяся оптимальной для задачи (1.22). Обозначим $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} P_\varphi(u_\varphi)$. Если для всех $u \in U$ выполнено условие (1.19), то из Леммы 1.2 следует $\varphi_\alpha(u_\varphi) = \varphi$. Пусть u_α – оптимальная стратегия для задачи (1.21) со значением функционала $\varphi_\alpha(u_\alpha) = \psi$. Но тогда $\psi \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_\alpha(u_\alpha) \geq \varphi_\alpha(u_\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi$. Отсюда, в силу убывания функционала $P_\varphi(u)$ по φ , получим $P_\psi(u_\alpha) \leq P_\varphi(u_\alpha)$. Так как $\psi \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_\alpha(u_\alpha)$, то по определению функции квантили получаем $P_\psi(u_\alpha) \geq \alpha$. Но так как α выбрана равной $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} P_\varphi(u_\varphi)$, то получаем неравенство $P_\varphi(u_\varphi) \leq P_\varphi(u_\alpha)$. Отсюда u_α – оптимальная стратегия для постановки (1.22), следовательно, выполнено второе условие эквивалентности, т.е. $U_\alpha \subset U_\varphi$.

Следствие 1.1. Если функция вероятности $P_\varphi(u)$ не достигает максимума в единице, то утверждение теоремы остается в силе, если множества $\alpha \in (0, 1)$ и $\varphi \in H$ заменить на множества $\alpha \in (p_*, p^*)$ и $\varphi \in H_1 \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi_*, \varphi^*)$, где

$$p_* \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\varphi \in N(u), u \in U} P_\varphi(u), \quad p^* \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\varphi \in N(u), u \in U} P_\varphi(u), \quad (1.23)$$

$$\varphi_* \stackrel{\text{def}}{=} \max_{u \in U} \varphi_{p^*}(u), \quad \varphi^* \stackrel{\text{def}}{=} \max_{u \in U} \varphi_{p_*}(u).$$

Замечание 1.3. Множества эквивалентности в следствии при определенных условиях обобщаются на

- 1) отрезки: $\alpha \in [p_*, p^*]$ и $\varphi \in H_1 = [\varphi_*, \varphi^*]$;
- 2) полуинтервалы типа: $\alpha \in (p_*, p^*]$ и $\varphi \in H_1 = [\varphi_*, \varphi^*)$;
- 3) полуинтервалы типа: $\alpha \in [p_*, p^*)$ и $\varphi \in H_1 = (\varphi_*, \varphi^*]$.

Исходя из следствия 1.1, можно рассматривать эквивалентность вероятностной и квантильной постановок не на интервалах $\alpha \in (0, 1)$ или $\varphi \in H$, а лишь на некоторых подынтервалах $\alpha \in (p_*, p^*)$ и $\varphi \in (\varphi_*, \varphi^*)$. Данный подход применим

тогда, когда условия теоремы выполнены лишь для некоторых α и φ . Пусть, например, не удастся найти функцию квантили и получить решение задачи квантильной оптимизации. Функция вероятности при этом имеет явный вид, оптимальная стратегия может быть найдена, но условия теоремы выполнены не для всех $\varphi \in H$. Однако можно выделить такой интервал $\varphi \in H_1 \subset H$, для которого условия теоремы 1.1 выполнены, и по следствию 1.1 на нем устанавливается эквивалентность решений u_φ и u_α .

Замечание 1.4. В книге [35] рассмотрена похожая теорема эквивалентности вероятностной и квантильной постановок, но в ней по-другому определяются множества возможных значений α и φ . В отличие от теоремы в [35], в Теореме 1.1 диссертации изначально рассматривается задача квантильной оптимизации для всех $\alpha \in (0, 1)$. При этом множество H определяется исходя из целевой функции $F(u, X)$, так как это представляется более логичным в силу того, что минимальное и максимальное значения функции квантили не всегда возможно найти, например, в силу отсутствия аналитического представления функции квантили. Далее при невозможности выполнения условий для всех $\alpha \in (0, 1)$ рассматривается следствие Теоремы 1.1, которое устанавливает эквивалентность лишь на указанных выше подинтервалах. Как уже было отмечено в обзоре литературы, условия эквивалентности, полученные в работе [24], содержат в себе условия, полученные в диссертации. Но их проверка требует точных вычислений максимума функции вероятности по управлению для различного уровня потерь, что представляет собой сложную, трудоемкую задачу, не всегда выполнимую на практике.

2. Детерминированные эквиваленты вероятностных задач

2.1. Введение

Построение детерминированных эквивалентов исходных задач стохастического программирования, не зависящих от случайных величин, является одним из наиболее эффективных методов решения вероятностных задач оптимизации. Детерминированные эквиваленты удобны тем, что для решения детерминированных задач, эквивалентных исходным стохастическим, можно использовать стандартные методы математического программирования [47]. В данной главе сделана попытка охватить и обобщить большинство случаев, когда удастся получить имеющие явное аналитическое выражение детерминированные эквиваленты для исходных задач с вероятностным (1.13) и квантильным (1.15) критериями. Также рассматривается задача с вероятностным ограничением (1.16). Строятся детерминированные эквиваленты для:

- билинейной целевой функции и сферически симметричного распределения случайного вектора;
- возрастающей целевой функции относительно стратегии;
- возрастающей целевой функции относительно случайного вектора;
- квадратичной целевой функции и сферически симметричного распределения случайного вектора;
- целевой функции аддитивной структуры;

- целевой функции сепарабельной структуры и логарифмически вогнутой меры.

Устанавливаются выпуклые свойства полученных детерминированных эквивалентов и исходных вероятностных критериев. При исследовании выпуклых свойств полагается, что множество возможных стратегий U является выпуклым.

2.2. Виды рассматриваемых постановок задач

Пусть задана целевая функция $\Phi(u, X)$, где $u \in U \subset \mathbb{R}^m$. Здесь вектор u играет роль оптимизируемой стратегии, а X – случайного вектора с известным распределением и реализациями $x \in \mathbb{R}^n$.

Рассмотрим три классические задачи стохастического программирования (1.13), (1.15), (1.16).

1. Максимизация функции вероятности:

$$P_\varphi(u) \rightarrow \max_{u \in U}. \quad (2.1)$$

2. Минимизация функции квантили:

$$\varphi_\alpha(u) \rightarrow \min_{u \in U}. \quad (2.2)$$

3. Задача с вероятностным ограничением:

$$\Phi_0(u) \rightarrow \min_{u \in U}, \quad (2.3)$$

$$P_\varphi(u) \geq \alpha,$$

где $\Phi_0(u)$ – некая детерминированная функция.

Вся “случайность” в задаче 3 находится в вероятностном ограничении на допустимые стратегии. В данных постановках не уточняется, существует ли оптимальная стратегия или нет. Если не существует оптимальной стратегии, то под решением задачи понимается оптимизирующая последовательность стратегий.

2.3. Случай билинейной целевой функции и сферически симметричного распределения

Рассмотрим случай, когда целевая функция имеет билинейную структуру, а случайный вектор X имеет сферически симметричное распределение.

2.3.1. Определение целевой функции

Пусть целевая функция имеет билинейную структуру

$$\Phi(u, X) = r(u^T(AX + c)), \quad (2.4)$$

где A – некоторая матрица $m \times n$, c – фиксированный вектор размерности m , $r(t) : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ – строго возрастающая по t , непрерывная слева функция, определенная на всей числовой оси. Пусть распределение случайного вектора X сферически симметрично, то есть его плотность можно представить в виде

$$p_X(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(\|x\|^2) = f(x^T x), \quad (2.5)$$

где функция $f(t)$ определена для $t \in [0, \infty)$, неотрицательна и интегрируема по Лебегу.

Найдем детерминированные эквиваленты задач (2.1), (2.2) и (2.3) для данного вида целевой функции.

2.3.2. Вид функций вероятности и квантили

Докажем следующее утверждение.

Теорема 2.1. Пусть целевая функция имеет вид (2.4), где $\|A^T u\| > 0$, а распределение вектора X имеет вид (2.5). Тогда

1) функция вероятности

$$P_\varphi(u) = F_1\left(\frac{r^{-1}(\varphi) - u^T c}{\|A^T u\|}\right), \quad (2.6)$$

где $F_1(x) : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ – функция распределения первой компоненты X_1 вектора X ;

2) ограничение $P_\varphi(u) \geq \alpha$ эквивалентно неравенству [72]

$$r^{-1}(\varphi) - u^T c \geq \|A^T u\|_{x_{1\alpha}}, \quad (2.7)$$

где $x_{1\alpha}$ – квантиль первой компоненты вектора X уровня α ;

3) функция квантили имеет вид

$$\varphi_\alpha(u) = r(\|A^T u\|_{x_{1\alpha}} + u^T c). \quad (2.8)$$

Доказательство теоремы 2.1.

1. Докажем первую часть утверждения. Так как функция $r(t)$ строго возрастающая по t и непрерывная слева, то у нее существует обратная функция $r^{-1}(t)$ такая, что $r^{-1}(r(t)) = t$ и $r(r^{-1}(t)) \leq t$ для всех $t \in \mathbb{R}^1$. Причем функция $r^{-1}(t)$ является неубывающей по t . Поэтому для всех $\varphi \in \mathbb{R}^1, u \in U$ неравенства $r(u^T(Ax + c)) \leq \varphi$ и $u^T(Ax + c) \leq r^{-1}(\varphi)$ эквивалентны.

Тогда функция вероятности примет вид

$$P_\varphi(u) = \mathcal{P}\{r(u^T(Ax + c)) \leq \varphi\} = \int_{r(u^T(Ax + c)) \leq \varphi} p_X(x) dx = \int_{u^T(Ax + c) \leq r^{-1}(\varphi)} p_X(x) dx.$$

Сделаем замену переменных $y \stackrel{\text{def}}{=} C^T x$, где матрица C – ортогональная с первым столбцом $A^T u \|A^T u\|^{-1}$. Матрица C имеет следующие свойства:

(i) $x = Cy$;

(ii) $\|x\|^2 = x^T x = y^T C^T C y = y^T y = \|y\|^2$;

(iii) $\det C = 1$, следовательно, $dx = \det C \cdot dy = dy$;

(iv) $u^T A C = \left(\frac{u^T A A^T u}{\|A^T u\|}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1} \right) = \left(\frac{(A^T u)^T A^T u}{\|A^T u\|}, 0, \dots, 0 \right) = (\|A^T u\|, 0, \dots, 0),$

следовательно, $u^T A x = u^T A C y = \|A^T u\| y_1$.

Так как плотность $p_X(x)$ сферически симметрична, то после ортогонального преобразования $Y \stackrel{\text{def}}{=} C^T X$ новая случайная величина Y будет иметь то же распределение, что и X , т. е.

$$p_X(y) = p_Y(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n. \quad (2.9)$$

Легко заметить, что

$$p_X(x) = f(\|x\|^2) = f(\|y\|^2) = p_X(y) \quad (2.10)$$

для любых $x \in \mathbb{R}^n, y \stackrel{\text{def}}{=} C^T x$.

Из (2.9) и (2.10) следует

$$p_X(x) = p_X(y) = p_Y(y). \quad (2.11)$$

Учитывая свойства матрицы C , а также (2.9) и (2.11), преобразуем выражение для функции вероятности

$$P_\varphi(u) = \int_{u^T(Ax+c) \leq r^{-1}(\varphi)} p_X(x) dx = \int_{y_1 \leq \frac{r^{-1}(\varphi) - u^T c}{\|A^T u\|}} p_Y(y) dy = \int_{y_1 \leq \frac{r^{-1}(\varphi) - u^T c}{\|A^T u\|}} p_X(y) dy = \quad (2.12)$$

$$= \int_{y_1 \leq \frac{r^{-1}(\varphi) - u^T c}{\|A^T u\|}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} p_X(y) dy_2 \dots dy_n \right) dy_1 = F_1 \left(\frac{r^{-1}(\varphi) - u^T c}{\|A^T u\|} \right),$$

где $F_1(x)$ – функция распределения первой компоненты вектора X .

Следовательно, функция вероятности будет равна

$$P_\varphi(u) = F_1 \left(\frac{r^{-1}(\varphi) - u^T c}{\|A^T u\|} \right). \quad (2.13)$$

2. Докажем вторую часть утверждения. По определению квантиль первой компоненты вектора X будет равна

$$x_{1\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\psi : F_1(\psi) \geq \alpha\}. \quad (2.14)$$

Для функции вероятности, полученной в п. 1) данного утверждения, ограничение $P_\varphi(u) \geq \alpha$ примет вид

$$F_1 \left(\frac{r^{-1}(\varphi) - u^T c}{\|A^T u\|} \right) \geq \alpha. \quad (2.15)$$

Положим

$$\psi^* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{r^{-1}(\varphi) - u^T c}{\|A^T u\|},$$

тогда (2.15) преобразуется в следующее неравенство:

$$F_1(\psi^*) \geq \alpha. \quad (2.16)$$

Но поскольку ψ^* не обязательно есть $\min\{\psi : F_1(\psi) \geq \alpha\}$, то

$$\frac{r^{-1}(\varphi) - u^T c}{\|A^T u\|} \geq x_{1\alpha}. \quad (2.17)$$

Теперь в силу сделанного предположения $\|A^T u\| > 0$ получим

$$r^{-1}(\varphi) - u^T c \geq \|A^T u\| x_{1_\alpha}. \quad (2.18)$$

3. Докажем третью часть утверждения. Преобразуем неравенство (2.18) относительно φ , учитывая, что $r(r^{-1}(t)) \leq t$ для всех $t \in \mathbb{R}^1$:

$$\varphi \geq r(\|A^T u\| x_{1_\alpha} + u^T c).$$

Теперь легко заметить, что

$$\begin{aligned} \min \{ \varphi : P_\varphi(u) \geq \alpha \} &= \min \{ \varphi : \varphi \geq r(\|A^T u\| x_{1_\alpha} + u^T c) \} = \\ &= r(\|A^T u\| x_{1_\alpha} + u^T c). \end{aligned}$$

Следовательно, функция квантили по определению (1.2) примет вид

$$\varphi_\alpha(u) = r(\|A^T u\| x_{1_\alpha} + u^T c), \quad (2.19)$$

что и требовалось доказать.

Замечание 2.1. В пункте 1) Теоремы 2.1 присутствует функция распределения $F_1(x)$ и квантиль x_{1_α} первой компоненты вектора X . На самом деле на месте $F_1(x)$ может стоять функция распределения любой компоненты вектора X , так как у случайных векторов, имеющих сферически симметричное распределение, одномерные функции распределения компонент совпадают.

Замечание 2.2. Пункт 2) Теоремы 2.1 был получен в работе [72], но в диссертации доказывается другим образом.

Замечание 2.3. Ограничение $\|A^T u\| > 0$ накладывается для того, чтобы исключить неопределенность в (2.6). Оно эквивалентно условию $A^T u \neq \text{col}(0, 0, \dots, 0)$ покомпонентно. Отсюда вытекают два случая и соответствующие им тривиальные решения:

а) $u \neq 0$,

б) $A^T u \neq 0 \quad \forall u \neq 0$.

Если не выполнено а), то $\Phi(0, X) \equiv r(0)$. При этом $P_\varphi(u) = 1$, если $\varphi \geq r(0)$, и $\varphi_\alpha(0) = r(0)$. Иными словами, стратегия $u = 0$ оказывается оптимальной, если она допустима, т.е. $0 \in U$.

Если не выполнено б), то есть $A^T u_0 = 0$ для некоторого $u_0 \neq 0 \in U$, то $\Phi(u_0, X) = r(u_0^T c)$. При этом $P_\varphi(u_0) = 1$, если $\varphi \geq r(u_0^T c)$, и $\varphi_\alpha(u_0) = r(u_0^T c)$.

Замечание 2.4. Многие известные распределения сферически симметричны, например, нормальное $\mathbf{N}(0, I)$, равномерное на шаре, многомерное Коши и др. В работе [39] рассмотрен аналогичный случай, но там предполагалось, что матрица A квадратная и симметричная, а также предполагалось, что функция $r(t) \equiv t$. Здесь же рассмотрен более широкий класс преобразований. Также в работе [39] не указывается аналитическое выражение для функций вероятности и квантили.

Замечание 2.5. Выражение $Y \stackrel{\text{def}}{=} AX + c$, стоящее в аргументе целевой функции, можно рассматривать как преобразование сферически симметрично распределенного случайного вектора X в эллиптически симметрично распределенный случайный вектор Y . Поэтому постановка с целевой функцией (2.4) легко обобщается и на эллиптически симметричное распределение.

2.3.3. Детерминированные эквиваленты вероятностных постановок

На основании Теоремы 2.1 сформулируем детерминированные эквиваленты исследуемых задач стохастического программирования. Задача (2.1) преобразуется к виду

$$P_\varphi(u) = F_1 \left(\frac{r^{-1}(\varphi) - u^T c}{\|A^T u\|} \right) \rightarrow \max_{u \in U}. \quad (2.20)$$

Для получения детерминированного эквивалента рассмотрим следующее утверждение.

Лемма 2.1. Пусть функция $f(t) : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ строго возрастает по t и определена для всех $t \in \mathbb{R}^1$, функция $g(u) : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^1$ — произвольная. Тогда задача

$$f(g(u)) \rightarrow \max_{u \in U} \quad (2.21)$$

по поиску оптимальной стратегии эквивалентна задаче

$$g(u) \rightarrow \max_{u \in U} \quad (2.22)$$

Доказательство леммы 2.1. Возьмем такие $u_1, u_2 \in U$, что $g(u_2) > g(u_1)$. Тогда в силу того, что $f(t)$ возрастает и определена для всех $t \in \mathbb{R}^1$, получаем $f(g(u_2)) > f(g(u_1))$. Следовательно, если u_0 максимизирует $g(u)$, то эта стратегия

максимизирует и $f(g(u))$. Если не существует такого u_0 , что $g(u_0) \geq g(u)$ для всех $u \in U$, а существует лишь последовательность u_n , максимизирующая $g(u)$, то эта последовательность будет максимизирующей и для $f(g(u))$.

Если теперь, наоборот, возьмем такие $u_1, u_2 \in U$, что $f(g(u_2)) > f(g(u_1))$, то в силу свойства строгого возрастания $f(t)$ по t получаем $g(u_2) > g(u_1)$. Отсюда из задачи (2.21) следует задача (2.22). Следовательно, задачи (2.21) и (2.22) эквивалентны в смысле поиска оптимальной стратегии u .

Если функция распределения $F_1(x)$ – строго возрастающая по x , то есть не имеющая площадок, то в силу Леммы 2.1 задача (2.20) будет эквивалентна следующей

$$G(u) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{r^{-1}(\varphi) - u^T c}{\|A^T u\|} \rightarrow \max_{u \in U}. \quad (2.23)$$

Если все компоненты вектора X не имеют строго возрастающих функций распределения, то задачи (2.20) и (2.23) не будут эквивалентны в общем случае, но из решения задачи (2.23) будет вытекать решение задачи (2.20).

Согласно Теореме 2.1 задача (2.2) примет вид

$$\varphi_\alpha(u) = r(\|A^T u\|_{x_{1_\alpha}} + u^T c) \rightarrow \min_{u \in U}. \quad (2.24)$$

Так как функция $r(t)$ по предположению строго возрастает по t и определена для всех $t \in \mathbb{R}^1$, то по Лемме 2.1 задача (2.24) эквивалентна следующей

$$H(u) \stackrel{\text{def}}{=} \|A^T u\|_{x_{1_\alpha}} + u^T c \rightarrow \min_{u \in U}. \quad (2.25)$$

Задача с вероятностным ограничением (2.3) примет вид

$$\Phi_0(u) \rightarrow \min_{u \in U}, \quad (2.26)$$

$$r^{-1}(\varphi) - u^T c \geq \|A^T u\|_{x_{1_\alpha}}.$$

Для оптимизации наиболее важными являются выпуклые свойства функций вероятности, квантили, а также их детерминированных эквивалентов.

Замечание 2.6. Детерминированные эквиваленты (2.23), (2.25), (2.26) получены с помощью доказанных в диссертации Теоремы 2.1 и Леммы 2.1 самостоятельно. Детерминированные эквиваленты (2.23), (2.26) и похожий на (2.25) уже были получены в работе [72], но по Лемме 2.1 удалось улучшить детерминированный эквивалент (2.25).

2.3.4. Выпуклые свойства вероятности и квантили

Для выяснения выпуклых свойств функций вероятности и квантили докажем следующее утверждение. Воспользуемся определением 1.10 квазивыпуклости и квазивогнутости, данным в главе 1.

Лемма 2.2. Если $G(u) \geq 0$ для любых $u \in U$, то функции $G(u)$ и $P_\varphi(u)$ квазивогнуты на U . Если $x_{1_\alpha} \geq 0$, то функция $H(u)$ – выпукла на U , а $\varphi_\alpha(u)$ – квазивыпукла на U .

Доказательство леммы 2.2. Функция $g(u) \stackrel{def}{=} \|u\|$ выпукла по u , так как она равна максимуму выпуклой функции $c^T u$ по $c \in \mathbb{R}^n$ при условии $\|c\| = 1$. Рассмотрим неравенство

$$G(u) \geq \lambda, \quad (2.27)$$

где $\lambda \in \mathbb{R}^1$ – некая константа.

Перенесем знаменатель левой части (2.27) в правую часть. Получим

$$r^{-1}(\varphi) - u^T c \geq \lambda \|A^T u\|.$$

Запишем неравенство относительно u :

$$\lambda \|A^T u\| + c^T u \leq r^{-1}(\varphi). \quad (2.28)$$

В начале доказательства было показано, что норма вектора – выпуклая функция. Следовательно, левая часть неравенства (2.28) является выпуклой функцией при $\lambda \geq 0$. Случай $\lambda < 0$ не интересен в силу наложенного условия $G(u) \geq 0$. Неравенство (2.28) при $\lambda \geq 0$ задает выпуклое множество, следовательно, функция $G(u)$ квазивогнута при $\lambda \geq 0$.

Функция $H(u)$ выпукла на U как сумма выпуклых функций, если $x_{1_\alpha} \geq 0$. Поэтому функция квантили согласно (2.24) будет квазивыпуклой, так как функция $r(t)$ неубывающая. Отсюда, вследствие теоремы об одновременной квазивогнутости функции вероятности $P_\varphi(u)$ для любого $\varphi \in \mathbb{R}^1$ и квазивыпуклости функции квантили для любого $\alpha \in (0, 1)$ [72], функция вероятности $P_\varphi(u)$ будет квазивогнута на U .

Замечание 2.7. Легко заметить, что условие $x_{1_\alpha} \geq 0$ для квазивыпуклости функции квантили совпадает с условием $G(u) \geq 0$ для квазивогнутости функции

вероятности, так как функция $G(u)$ в функции вероятности (2.6) фактически играет роль квантили. Однако условие $G(u) \geq 0$ сложнее проверить, чем условие $x_{1_\alpha} \geq 0$.

Замечание 2.8. Еще одно достоинство детерминированных эквивалентов можно обнаружить, сравнивая задачи (2.24) и (2.25). Функция квантили в задаче (2.24) квазивыпукла, в то время как функция $H(u)$ в (2.25) выпукла, что значительно облегчает поиск экстремума. Для решения задачи (2.25) можно использовать известные методы выпуклого программирования [47]. Заметим, что задача (2.3), записанная в виде (2.26), оказывается задачей выпуклого программирования, если функция $\Phi_0(u)$ выпукла на U .

2.3.5. Пример использования

В работе [26] рассмотрена экономическая задача минимизации квантили билинейной функции потерь вида

$$\Phi(u, X) = - \left(u_0 s + \sum_{i=1}^n u_i X_i \right), \quad (2.29)$$

где u_0 – доля капитала, вкладываемая в безрисковое предприятие с гарантированным доходом в размере $s\%$ годовых, $u_i, i = \overline{1, n}$ – доля капитала, вкладываемая в i -ую ценную бумагу, $X_i, i = \overline{1, n}$ – случайная доходность i -ой ценной бумаги. Случайный вектор X распределен по гауссовскому закону $\mathbf{N}(\mu, K)$. В работе [26] способом, отличным от предложенного в данной работе, получен детерминированный эквивалент функции квантили, равный

$$Q_\alpha(u) = x_\alpha \sqrt{\tilde{u}^T K \tilde{u}} - s u_0 - \mu^T \tilde{u}, \quad (2.30)$$

где $\tilde{u} \stackrel{\text{def}}{=} (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$, x_α – квантиль стандартного нормального распределения уровня α .

Целевая функция $\Phi(u, X)$, определенная в (2.29), подходит под рассмотренную выше модель, если в (2.4) положить вектор $c = (-s, -\mu_1, \dots, -\mu_n)^T$, функцию $r(t) = t$, а матрицу A размерности $(n+1) \times (n+1)$ равной

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & -K^{\frac{1}{2}} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Воспользовавшись результатами, полученными в данном разделе, легко найти выражение для функции квантили в приведенной постановке:

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha(u) &= \|A^T u\|_{x_{1_\alpha}} + u^T c = x_{1_\alpha} \sqrt{u^T A A^T u} - s u_0 - \mu^T \tilde{u} = \\ &= x_{1_\alpha} \sqrt{\tilde{u}^T K \tilde{u}} - s u_0 - \mu^T \tilde{u},\end{aligned}\tag{2.31}$$

что полностью совпадает с функцией квантили (2.30), полученной в работе [26].

2.4. Случай возрастающей целевой функции относительно стратегии

Рассмотрим случай, когда целевая функция имеет сепарабельную структуру по стратегии и возрастает относительно нее.

2.4.1. Определение целевой функции

Пусть целевая функция имеет следующий вид

$$\Phi(u, x) = r(s(u), X),\tag{2.32}$$

где $s(u) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^1$ – некоторая функция, $r(s, x) : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ – строго возрастающая, непрерывная слева по $s \in \mathbb{R}^1$ для любых $x \in \mathbb{R}^n$.

Найдем детерминированные эквиваленты задач (2.1), (2.2) и (2.3) для данного вида целевой функции.

2.4.2. Вид функций вероятности и квантили

Докажем следующее утверждение:

Теорема 2.2. Пусть целевая функция имеет вид (2.32). Тогда

1) функция вероятности

$$P_\varphi(u) = \mathcal{P}\{-r_s^{-1}(\varphi, X) \leq -s(u)\},\tag{2.33}$$

где $r_s^{-1}(\varphi, x)$ – обратная функция к $r(s, x)$ по переменной s для каждого x ;

2) ограничение $P_\varphi(u) \geq \alpha$ будет эквивалентно следующему [72]

$$\bar{r}_\alpha(\varphi) \leq -s(u),\tag{2.34}$$

где $\bar{r}_\alpha(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\psi : \mathcal{P}\{-r_s^{-1}(\varphi, X) \leq \psi\} \geq \alpha\}$;

3) функция квантили

$$\varphi_\alpha(u) = \min\{\varphi : \bar{r}_\alpha(\varphi) \leq -s(u)\}. \quad (2.35)$$

Доказательство теоремы 2.2. 1. Докажем первую часть утверждения. Так как у функции $r(s, x)$ существует неубывающая по φ обратная $r_s^{-1}(\varphi, x)$, а сама $r(s, x)$ строго возрастает и непрерывна слева по s , то неравенства $r(s(u), x) \leq \varphi$ и $s(u) \leq r_s^{-1}(\varphi, x)$ эквивалентны. Поэтому функция вероятности примет вид

$$\begin{aligned} P_\varphi(u) &= \mathcal{P}\{r(s(u), X) \leq \varphi\} = \\ &= \mathcal{P}\{s(u) \leq r_s^{-1}(\varphi, X)\} = \mathcal{P}\{-r_s^{-1}(\varphi, X) \leq -s(u)\}. \end{aligned}$$

2. Докажем вторую часть утверждения. Рассмотрим вероятностное ограничение $P_\varphi(u) \geq \alpha$. Из п. 1) вытекает, что это неравенство эквивалентно следующему:

$$P_\varphi(u) = \mathcal{P}\{-r_s^{-1}(\varphi, X) \leq -s(u)\} \geq \alpha. \quad (2.36)$$

Введем функцию

$$\bar{r}_\alpha(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\psi : \mathcal{P}\{-r_s^{-1}(\varphi, X) \leq \psi\} \geq \alpha\}. \quad (2.37)$$

Положив в (2.36) $\psi \stackrel{\text{def}}{=} -s(u)$, получим из (2.37)

$$\bar{r}_\alpha(\varphi) \leq -s(u). \quad (2.38)$$

Пусть теперь выполнено (2.38). Тогда из (2.37) вытекает, что

$$\mathcal{P}\{-r_s^{-1}(\varphi, X) \leq -s(u)\} \geq \alpha,$$

а по п. 1) данное неравенство эквивалентно $P_\varphi(u) \geq \alpha$.

Следовательно, (2.38) есть детерминированный эквивалент вероятностному ограничению $P_\varphi(u) \geq \alpha$.

3. Докажем третью часть утверждения. Так как согласно п. 2) неравенство $P_\varphi(u) \geq \alpha$ эквивалентно неравенству (2.38), то по определению (1.2) функции квантили получим

$$\varphi_\alpha(u) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\varphi : P_\varphi(u) \geq \alpha\} = \min\{\varphi : \bar{r}_\alpha(\varphi) \leq -s(u)\},$$

что и требовалось доказать.

Замечание 2.9. Вероятностное ограничение, приведенное в пункте 2) Теоремы 2.2, получено ранее в работе [72] и совпадает с результатом диссертации.

2.4.3. Детерминированные эквиваленты вероятностных постановок

На основании Теоремы 2.2 сформулируем детерминированные эквиваленты для задач (2.1), (2.2) и (2.3). Постановка (2.1) примет вид

$$P_\varphi(u) = \mathcal{P}\{-r_s^{-1}(\varphi, X) \leq -s(u)\} \rightarrow \max_{u \in U}. \quad (2.39)$$

Если функция $\bar{P}_\psi(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P}\{-r_s^{-1}(\varphi, X) \leq \psi\}$ строго возрастает по ψ , то согласно Лемме 2.1 задача (2.39) будет эквивалентна задаче (2.40):

$$s(u) \rightarrow \min_{u \in U}. \quad (2.40)$$

В противном случае каждое решение задачи (2.40) будет и решением задачи (2.39), но, нужно отметить, не каждое решение задачи (2.39) будет решением задачи (2.40).

Несложно заметить, что поиск решения задачи (2.39) полностью зависит от свойств функции $s(u)$.

Постановка (2.2) с целевой функцией (2.32) примет вид

$$\varphi_\alpha(u) = \min\{\varphi : \bar{r}_\alpha(\varphi) \leq -s(u)\} \rightarrow \min_{u \in U}. \quad (2.41)$$

Если функция $\bar{\varphi}_\alpha(\psi) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\varphi : \bar{r}_\alpha(\varphi) \leq \psi\}$ строго возрастает по ψ , то согласно Лемме 2.1 эта задача будет эквивалентна (2.40). В противном случае каждое решение задачи (2.40) будет являться и решением задачи (2.41).

Задача с вероятностным ограничением (2.3) в силу п. 2) Теоремы 2.2 примет вид

$$\Phi_0(u) \rightarrow \min_{u \in U}, \quad (2.42)$$

$$\bar{r}_\alpha(\varphi) \leq -s(u).$$

Замечание 2.10. Ограничение в (2.42) проще, чем вероятностное ограничение $P_\varphi(u) \geq \alpha$. Вначале вычисляется число $\bar{r}_\alpha(\varphi)$ для фиксированных α и φ , а затем оно подставляется в ограничение $\bar{r}_\alpha(\varphi) \leq -s(u)$. При проверке же условия $P_\varphi(u) \geq \alpha$ (или что то же, $\varphi_\alpha(u) \leq \varphi$), необходимо вычислять функцию вероятности $P_\varphi(u)$ (или функцию квантили $\varphi_\alpha(u)$) для каждого u .

Далее рассмотрим выпуклые свойства функций вероятности, квантили и их детерминированных эквивалентов.

2.4.4. Выпуклые свойства функций вероятности и квантили

Исследуем свойства выпуклости функций вероятности и квантили. Докажем утверждение.

Теорема 2.3. Пусть выполнены условия Теоремы 2.2 и функция $s(u)$ квазивыпукла по $u \in U$. Тогда функция вероятности $P_\varphi(u)$ квазивогнута на U , а $\varphi_\alpha(u)$ – квазивыпукла на U .

Доказательство теоремы 2.3. По определению квазивыпуклости для любых $u_1, u_2 \in U$ и любого $\lambda \in [0, 1]$ функция $s(u)$ должна обладать следующим свойством:

$$s(\tilde{u}) \leq \max\{s(u_1), s(u_2)\}, \quad (2.43)$$

где $\tilde{u} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2$.

Предположим, что неравенство (2.43) выполнено для u_1 , т. е.

$$s(\tilde{u}) \leq s(u_1). \quad (2.44)$$

Рассмотрим множество $\{x : r(s(\tilde{u}), x) \leq \varphi\}$. Так как $r(s, x)$ строго возрастает по $s \in \mathbb{R}^1$ для любых $x \in \mathbb{R}^n$, то в силу (2.44) получим

$$r(s(\tilde{u}), x) \leq r(s(u_1), x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Следовательно,

$$\{x : r(s(u_1), x) \leq \varphi\} \subset \{x : r(s(\tilde{u}), x) \leq \varphi\}. \quad (2.45)$$

Отсюда, учитывая монотонность меры, получим

$$P_\varphi(u_1) = \mathcal{P}\{r(s(u_1), X) \leq \varphi\} \leq \mathcal{P}\{r(s(\tilde{u}), X) \leq \varphi\} = P_\varphi(\tilde{u}).$$

Окончательно имеем

$$\min\{P_\varphi(u_1), P_\varphi(u_2)\} \leq P_\varphi(\tilde{u}),$$

что по определению доказывает квазивогнутость функции вероятности.

Теперь, основываясь на том факте, что функция квантили квазивыпукла на U для любых $\alpha \in (0, 1)$ тогда и только тогда, когда функция вероятности квазивогнута на U для любых $\varphi \in \mathbb{R}^1$ [72], получаем, что функция квантили будет квазивыпукла, если $s(u)$ квазивыпукла по $u \in U$.

Замечание 2.11. Обратим внимание, что детерминированные эквиваленты в данном случае значительно упрощают решаемые вероятностные задачи (2.1), (2.2), (2.3). Более того, даже в случае выпуклости $s(u)$ Теорема 2.3 гарантирует лишь квазивогнутость $P_\varphi(u)$ и квазивыпуклость $\varphi_\alpha(u)$. При этом задача (2.40), эквивалентная исходным стохастическим задачам (2.1), (2.2), оказывается задачей выпуклого программирования.

2.4.5. Пример

Пусть целевая функция имеет вид

$$\Phi(u, x) = r(s(u), X),$$

где $r(s, X) = s\varphi_1(X) + \varphi_2(X)$, при этом $\varphi_1(x) > 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n, s \in \mathbb{R}^1$. Легко проверить, что выполнены все условия Теоремы 2.3. При этом обратная по s функция в (2.33) будет равна

$$r_s^{-1}(\varphi, x) = \frac{\varphi - \varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}.$$

По Теореме 2.3 множество решений задачи (2.40) будет входить в множество решений задач вероятностной и квантильной оптимизации.

2.5. Случай возрастающей целевой функции относительно случайного вектора

Рассмотрим случай, когда целевая функция имеет сепарабельную структуру по случайному вектору и возрастает относительно него.

2.5.1. Определение целевой функции

Пусть целевая функция имеет следующий вид

$$\Phi(u, x) = r(u, t(X)), \tag{2.46}$$

где $t(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ – некоторая измеримая функция, $r(u, t) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ – строго возрастающая и непрерывная слева по $t \in \mathbb{R}^1$ для любых $u \in \mathbb{R}^m$.

Найдем детерминированные эквиваленты задач (2.1), (2.2) и (2.3) для данного вида целевой функции.

2.5.2. Вид функций вероятности и квантили

Докажем следующее утверждение.

Теорема 2.4. Пусть целевая функция имеет вид (2.46). Тогда

1) функция вероятности

$$P_\varphi(u) = \mathcal{P} \{t(X) \leq r_t^{-1}(u, \varphi)\}, \quad (2.47)$$

где $r_t^{-1}(u, \varphi)$ – обратная функция к $r(u, t)$ по переменной t для каждого u ;

2) ограничение $P_\varphi(u) \geq \alpha$ будет эквивалентно [72]

$$r(u, t_\alpha) \leq \varphi, \quad (2.48)$$

где $t_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \min\{s : \mathcal{P}\{t(X) \leq s\} \geq \alpha\}$;

3) функция квантили [72]

$$\varphi_\alpha(u) = r(u, t_\alpha). \quad (2.49)$$

Доказательство теоремы 2.4. 1. Докажем первую часть утверждения. Так как у функции $r(u, t)$ существует неубывающая по φ обратная $r_t^{-1}(u, \varphi)$, а $r(u, t)$ строго возрастающая и непрерывная слева по t , то функция вероятности равна

$$P_\varphi(u) = \mathcal{P} \{r(u, t(X)) \leq \varphi\} = \mathcal{P} \{t(X) \leq r_t^{-1}(u, \varphi)\}.$$

2. Докажем вторую часть утверждения. Рассмотрим вероятностное ограничение $P_\varphi(u) \geq \alpha$. Из п. 1) Теоремы 2.4 вытекает, что это неравенство эквивалентно следующему

$$P_\varphi(u) = \mathcal{P} \{t(X) \leq r_t^{-1}(u, \varphi)\} \geq \alpha. \quad (2.50)$$

Введем функцию

$$t_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \min\{s : \mathcal{P}\{t(X) \leq s\} \geq \alpha\}. \quad (2.51)$$

Положив в (2.51) $s = r_t^{-1}(u, \varphi)$, из (2.50) получим

$$t_\alpha \leq r_t^{-1}(u, \varphi). \quad (2.52)$$

Поддействовав на неравенство (2.52) функцией $r(u, t)$, получим

$$r(u, t_\alpha) \leq \varphi, \quad (2.53)$$

так как $r(u, t)$ – строго возрастающая и непрерывная слева по t .

Пусть теперь выполнено (2.53). Оно эквивалентно (2.52). Если подставить $s \stackrel{\text{def}}{=} r_t^{-1}(u, \varphi) \geq t_\alpha$ во внутреннее неравенство в (2.51), то

$$\mathcal{P}\{t(X) \leq r_t^{-1}(u, \varphi)\} \geq \mathcal{P}\{t(X) \leq t_\alpha\} \geq \alpha.$$

Следовательно, (2.52) есть детерминированный эквивалент вероятностному ограничению $P_\varphi(u) \geq \alpha$.

3. Докажем третью часть утверждения. Так как согласно п. 2) Теоремы 2.4 неравенство $P_\varphi(u) \geq \alpha$ эквивалентно неравенству (2.53), то по определению (1.2) функции квантили получим

$$\varphi_\alpha(u) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\varphi : P_\varphi(u) \geq \alpha\} = \min\{\varphi : r(u, t_\alpha) \leq \varphi\} = r(u, t_\alpha),$$

что и требовалось доказать.

Замечание 2.12. Результаты Теоремы 2.4 получены самостоятельно и совпадают с результатами, полученными ранее в работе [72].

2.5.3. Детерминированные эквиваленты вероятностных постановок

На основании Теоремы 2.4 сформулируем детерминированные эквиваленты задач (2.1), (2.2) и (2.3). Постановка (2.1) примет вид

$$P_\varphi(u) = \mathcal{P}\{t(X) \leq r_t^{-1}(u, \varphi)\} \rightarrow \max_{u \in U}. \quad (2.54)$$

В силу того, что

$$\mathcal{P}\{t(X) \leq r_t^{-1}(u, \varphi)\} = F_T(r_t^{-1}(u, \varphi)),$$

где $F_T(x) : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ – функция распределения случайной величины $T \stackrel{\text{def}}{=} t(X)$, получим из (2.54) задачу

$$F_T(r_t^{-1}(u, \varphi)) \rightarrow \max_{u \in U}. \quad (2.55)$$

Согласно Лемме 2.1, если $F_T(t)$ строго возрастает по t , то задача (2.55) будет эквивалентна по стратегиям задаче

$$r_t^{-1}(u, \varphi) \rightarrow \max_{u \in U}. \quad (2.56)$$

В частности, согласно [72], если существует плотность у случайного вектора X , носитель A которой есть односвязное множество, а функция $t(x)$ непрерывна на A , то $F_T(t)$ – строго возрастает по t . Если $F_T(x)$ не будет строго возрастающей по x , то каждое решение задачи (2.56) будет решением задачи (2.55).

Постановка (2.2) с целевой функцией (2.46) примет вид

$$\varphi_\alpha(u) = r(u, t_\alpha) \rightarrow \min_{u \in U}. \quad (2.57)$$

Очевидно, что данная задача уже является детерминированным эквивалентом, так как содержит только детерминированную характеристику t_α случайной величины.

Задача с вероятностным ограничением (2.3) в силу п. 2) Теоремы 2.4 примет вид

$$\Phi_0(u) \rightarrow \min_{u \in U}, \quad (2.58)$$

$$r(u, t_\alpha) \leq \varphi.$$

З а м е ч а н и е 2.13. Полученные в диссертации детерминированные эквиваленты (2.57) и (2.58) совпадают с полученными ранее в работе [72].

Исследуем свойства выпуклости детерминированных эквивалентов, функций вероятности и квантили.

2.5.4. Выпуклые свойства функций вероятности и квантили

Поиск решения задачи (2.56) в данном случае полностью зависит от свойств функции $r_t^{-1}(u, \varphi)$. Исследуем выпуклые свойства функции $r_t^{-1}(u, \varphi)$. Если $r(u, t(x))$ квазивыпукла на U для всех $x \in \mathbb{R}^n$, то обратная функция будет

квазивогнутой. Действительно, в силу строго возрастания и непрерывности слева функции $r(u, t)$ по t для всех $u \in U$ получаем

$$U_\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in U : r(u, t(x)) \leq \varphi\} = \{u \in U : t(x) \leq r_t^{-1}(u, \varphi)\} \quad (2.59)$$

для всех $\varphi \in \mathbb{R}^1, x \in \mathbb{R}^n$.

Если $r(u, t)$ квазивыпукла на U , то множество U_φ выпукло, а значит $r_t^{-1}(u, \varphi)$ квазивогнута на U . Кроме того, согласно (2.55), функция $P_\varphi(u)$ в данном случае будет также квазивогнутой на U , так как $F_T(x)$ – неубывающая по x , а $r_t^{-1}(u, \varphi)$ – квазивогнута на U .

Если же теперь $r(u, t)$ выпукла совместно по $u \in U$ и $t \in \mathbb{R}^1$, то функция $r_t^{-1}(u, \varphi)$ будет вогнутой. Это утверждение легко следует из того факта, что, согласно (2.59), множество $\{u, t : r_t^{-1}(u, \varphi) \geq t\} = \{u, t : r(u, t) \leq \varphi\}$, которое выпукло по $u \in U$ и $t \in \mathbb{R}^1$ одновременно. Следовательно, надграфик функции $-r_t^{-1}(u, \varphi)$ является выпуклым. Поэтому сама функция $r_t^{-1}(u, \varphi)$ будет вогнута на U . Если же функция $r_t^{-1}(u, \varphi)$ вогнута по $u \in U$, то задача максимизации функции вероятности сводится к задаче оптимизации вогнутой функции.

Если $r(u, t(x))$ выпукла (квазивыпукла) на U для всех $x \in \mathbb{R}^n$, то согласно Теореме 2.4, функция квантили $\varphi_\alpha(u)$ будет выпуклой (квазивыпуклой) на U . При этом функция вероятности $P_\varphi(u)$ является лишь квазивогнутой на U .

2.5.5. Пример

Пусть целевая функция имеет вид

$$\Phi(u, x) = r(u, t(X)),$$

где $r(u, t) = s_1(u) + s_2(u)t$, причем $s_2(u) > 0$ для всех $u \in U$. Такая функция удовлетворяет всем условиям Теоремы 2.4. Обратная функция в этом случае имеет вид

$$r_t^{-1}(u, \varphi) = \frac{\varphi - s_1(u)}{s_2(u)}.$$

Заметим, что если $s_1(u)$ и $s_2(u)$ – выпуклые на U , а функция $t(x) > 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, то $r(u, t)$ будет выпукла на U , а $r_t^{-1}(u, \varphi)$ – вогнута на U для всех $x \in \mathbb{R}^n$ (см. рассуждения в параграфе 2.5.4).

По Теореме 2.4 множество решений задач (2.56) и (2.57) будет входить в множество решений задач вероятностной и квантильной оптимизации.

2.6. Случай квадратичной целевой функции и сферически симметричного распределения

Рассмотрим случай, когда целевая функция имеет квадратичную структуру, а случайные векторы имеют сферически симметричное распределение.

2.6.1. Определение целевой функции

Пусть целевая функция имеет однородную квадратичную структуру, то есть

$$\Phi(u, X) = r(u^T A X_1 \cdot X_2^T B^T u), \quad (2.60)$$

где случайные вектора X_1 и X_2 независимы, A и B – матрицы $m \times n$, $r(t) : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ – строго возрастающая непрерывная слева функция, а распределения случайных векторов сферически симметричны, то есть их плотности можно представить в виде

$$p_1(x_1) = f_1(\|x_1\|^2), \quad p_2(x_2) = f_2(\|x_2\|^2). \quad (2.61)$$

Найдем детерминированные эквиваленты задач (2.1) и (2.2) для данного вида целевой функции.

2.6.2. Детерминированные эквиваленты вероятностной и квантильной постановок

Здесь функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ – неотрицательные интегрируемые по Лебегу при $t \in [0, \infty)$.

Теорема 2.5. Пусть целевая функция имеет вид (2.60), а плотности распределения векторов X_1 и X_2 имеют вид (2.61) и, кроме того,

$\|A^T u\| \|B^T u\| > 0$ для всех $u \in U$. Тогда каждое решение задачи

$$\|A^T u\| \|B^T u\| \rightarrow \min_{u \in U} \quad (2.62)$$

будет являться и решением задач (2.1), (2.2).

Доказательство теоремы 2.5. В данном случае

$$P_\varphi(u) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P}\{r(u^T A X_1 \cdot u^T B X_2) \leq \varphi\} = \int_{r(u^T A x_1 \cdot u^T B x_2) \leq \varphi} p_1(x) p_2(x) dx_1 dx_2 =$$

$$\int_{u^T A x_1 \cdot u^T B x_2 \leq r^{-1}(\varphi)} f_1(\|x_1\|^2) f_2(\|x_2\|^2) dx_1 dx_2$$

Сделаем замены $y_1 = C_1^T x_1$, где матрица C_1 – ортогональная с первым столбцом $\|A^T u\|^{-1} A^T u$, и $y_2 = C_2^T x_2$, где матрица C_2 – ортогональная с первым столбцом $\|B^T u\|^{-1} B^T u$. Свойства (i), (ii) и (iii) из доказательства п. 1) Теоремы 2.1 остаются неизменными для обеих матриц C_1 и C_2 , а вместо (iv) получим для C_1 :

$$u^T A C_1 = \left(\frac{u^T A A^T u}{\|A^T u\|}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-1} \right) = (\|A^T u\|, 0, 0, \dots, 0),$$

следовательно, $u^T A x_1 = u^T A C_1 y_1 = \|A^T u\| y_{11}$; и для C_2 :

$$u^T B C_2 = \left(\frac{u^T B B^T u}{\|B^T u\|}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-1} \right) = (\|B^T u\|, 0, 0, \dots, 0),$$

следовательно, $u^T B x_2 = u^T B C_2 y_2 = \|B^T u\| y_{21}$.

Учитывая свойства матриц C_1 и C_2 , преобразуем выражение для функции вероятности

$$P_\varphi(u) = \int_{u^T A x_1 \cdot u^T B x_2 \leq r^{-1}(\varphi)} f_1(\|x_1\|^2) f_2(\|x_2\|^2) dx_1 dx_2 = \quad (2.63)$$

$$\int_{y_{11} y_{21} \leq \frac{r^{-1}(\varphi)}{\|A^T u\| \|B^T u\|}} f(\|y_1\|^2) f(\|y_2\|^2) dy_1 dy_2 =$$

$$= \int_{y_{11} y_{21} \leq \frac{r^{-1}(\varphi)}{\|A^T u\| \|B^T u\|}} g_1(y_{11}^2) g_2(y_{21}^2) dy_{11} dy_{21},$$

где

$$g(y_{11}^2) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(y_{11}^2 + \sum_{i=2}^n y_{1i}^2) dy_{12} \dots dy_{1n},$$

$$g(y_{2_1}^2) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(y_{2_1}^2 + \sum_{i=2}^n y_{2_i}^2) dy_{2_2} \dots dy_{2_n}.$$

В силу неотрицательности функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ последний интеграл в (2.63) является неубывающей функцией своей верхней границы. Поэтому решая задачу нелинейного программирования

$$\|A^T u\| \|B^T u\| \rightarrow \min_{u \in U}, \quad (2.64)$$

решаем и задачу (2.1).

Согласно [72] каждое решение задачи (2.1) для $\varphi = \varphi_\alpha$, где φ_α – оптимальное значение квантильного критерия в задаче (2.2), является решением задачи (2.2). Так как задача (2.64) не зависит от φ , то каждое ее решение будет являться также решением задачи (2.2).

Замечание 2.14. Стоит отметить, что в данной задаче возможно сделать обобщение на произвольное число сомножителей вида $u^T A_i X_i$, $i = \overline{1, n}$.

2.7. Случай аддитивной структуры целевой функции и унимодальной плотности

Рассмотрим случай, когда целевая функция имеет аддитивную структуру, а функция случайного вектора имеет унимодальную плотность.

2.7.1. Определение целевой функции

Пусть целевая функция имеет следующий вид

$$\Phi(u, X) = r(|t(X) + s(u)|), \quad (2.65)$$

где $r(t) : \mathbb{R}_+^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ – строго возрастающая по t , непрерывная слева функция, $t(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ – измеримая функция, а $s(u) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^1$ – некоторая функция. При этом пусть плотность случайной величины $T = t(X)$ унимодальна и симметрична относительно точки m_T – то есть в точке m_T достигается максимум плотности вероятности.

Найдем детерминированные эквиваленты задач (2.1) и (2.2) для данного вида целевой функции.

2.7.2. Вид функции вероятности

Докажем следующее утверждение.

Лемма 2.3. Пусть целевая функция имеет вид (2.65). Тогда функция вероятности будет равна

$$P_\varphi(u) = F_T(r^{-1}(\varphi) - s(u)) - F_T(-r^{-1}(\varphi) - s(u)), \quad (2.66)$$

где $F_T(x) : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ – функция распределения случайной величины $T \stackrel{\text{def}}{=} t(X)$.

Доказательство леммы 2.3. Так как $r(t)$ – строго возрастающая, непрерывная слева функция, то

$$\begin{aligned} P_\varphi(u) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P}\{r(|t(X) + s(u)|) \leq \varphi\} = \mathcal{P}\{|t(X) + s(u)| \leq r^{-1}(\varphi)\} = \\ &= \mathcal{P}\{t(X) \leq r^{-1}(\varphi) - s(u)\} - \mathcal{P}\{t(X) \leq -r^{-1}(\varphi) - s(u)\}, \end{aligned}$$

откуда следует выражение (2.66).

2.7.3. Детерминированные эквиваленты вероятностной и квантильной постановок

Теорема 2.6. Пусть выполнено условие Леммы 2.3 и плотность распределения случайной величины $T = t(X)$ симметрична и унимодальна относительно точки m_T . Тогда каждое решение задачи

$$|m_T + s(u)| \rightarrow \min_{u \in U} \quad (2.67)$$

будет являться и решением задач (2.1), (2.2).

Доказательство теоремы 2.6. Согласно (2.66)

$$P_\varphi(u) = \int_{-r^{-1}(\varphi)-s(u)}^{r^{-1}(\varphi)-s(u)} f_T(t) dt.$$

Так как плотность $f_T(x)$ симметрична и унимодальна относительно точки m_T , а длина отрезка интегрирования не зависит от u и равна $2r^{-1}(\varphi)$, то функция

вероятности $P_\varphi(u)$ будет максимальна, когда будет минимальна величина $|m_T + s(u)|$. Иными словами, каждое решение задачи (2.67) будет решением задачи (2.1). Но согласно [72] каждое решение задачи (2.1) при $\varphi = \varphi_\alpha$ является решением задачи (2.2), а решение задачи (2.67) не зависит от параметра φ . Поэтому решение задачи (2.67) будет являться и решением задачи (2.2).

Замечание 2.15. Если $s(u)$ – выпукла на U и $s(u) \geq -m_T$ для всех $u \in U$, то задача (2.67) оказывается задачей выпуклого программирования [47]. При этом легко проверить, что функция вероятности в этом случае оказывается лишь квазивогнутой, а функция квантили – квазивыпуклой.

2.8. Случай сепарабельной структуры целевой функции и логарифмически вогнутой меры

Рассмотрим случай, когда целевая функция имеет сепарабельную структуру, а вероятностная мера случайных величин логарифмически вогнута.

2.8.1. Определение целевой функции

Пусть целевая функция имеет следующую структуру

$$\Phi(u, x) = \max_{i=\overline{1, n}} \{r_i(s_i(u) + X_i)\}, \quad (2.68)$$

где $r_i(t) : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$, $i = \overline{1, n}$ – строго возрастающие, непрерывные слева функции, $s_i(u) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^1$, $i = \overline{1, n}$ – некоторые функции, X_i – независимые случайные величины, при этом плотность $p(x)$ случайного вектора X логарифмически вогнута. Определение логарифмической вогнутости дано в разделе 1.2.

Найдем детерминированные эквиваленты задач (2.1) и (2.3) для данного вида целевой функции.

2.8.2. Вид функции вероятности

Теорема 2.7. Пусть целевая функция имеет вид (2.68), функции $s_i(u)$, $i = \overline{1, n}$ выпуклы на U , плотность случайного вектора X логарифмически вогнута и его компоненты X_i независимы. Тогда функция вероятности будет равна

$$P_\varphi(u) = \prod_{i=1}^n F_i(r_i^{-1}(\varphi) - s_i(u)), \quad (2.69)$$

где $F_i(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ – функции распределения случайных величин X_i , $i = \overline{1, n}$, и она будет логарифмически вогнута, а функция квантили $\varphi_\alpha(u)$ – квазивыпукла.

Доказательство теоремы 2.7. Так как функции $r_i(t)$ строго возрастающие, непрерывные слева, а компоненты вектора X независимы, то

$$\begin{aligned} P_\varphi(u) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P} \left\{ \max_{i=\overline{1, n}} \{r_i(s_i(u) + X_i)\} \leq \varphi \right\} = \prod_{i=1}^n \mathcal{P} \{r_i(s_i(u) + X_i) \leq \varphi\} = \\ &= \prod_{i=1}^n \mathcal{P} \{X_i \leq r_i^{-1}(\varphi) - s_i(u)\} = \prod_{i=1}^n F_i(r_i^{-1}(\varphi) - s_i(u)). \end{aligned}$$

В [72] показано, что утверждение из [78] о логарифмической вогнутости функции вероятности $P_\varphi(u)$ сохраняется, если целевая функция $\Phi(u, x)$ квазивыпукла (в [77] $\Phi(u, x)$ предполагается выпуклой) совместно по u и x , а вероятностная мера логарифмически вогнута (что гарантируется согласно [78] логарифмической вогнутостью плотности $p(x)$). Так как $\Phi(u, x)$ в данном случае совместно квазивыпукла по u и x , то функция $P_\varphi(u)$ логарифмически вогнута. Но легко проверить, сравнивая неравенства (1.10) и (1.11), что логарифмически вогнутая функция является также квазивогнутой (обратное в общем случае неверно). Таким образом, функция $P_\varphi(u)$ квазивогнута на U для любого $\varphi \in \mathbb{R}^1$. Поэтому согласно [72] функция квантили $\varphi_\alpha(u)$ квазивыпукла для любого $\alpha \in (0, 1)$.

2.8.3. Детерминированные эквиваленты вероятностных постановок

На основании Теоремы 2.7 сформулируем детерминированные эквиваленты для задач (2.1) и (2.3). Вначале, согласно (2.69), имеем

$$P_\varphi(u) = \prod_{i=1}^n F_i(r_i^{-1}(\varphi) - s_i(u)) \rightarrow \max_{u \in U}, \quad (2.70)$$

Предположим, что для всех $u \in U$ функция вероятности $P_\varphi(u) > 0$. Прологарифмируем выражение в (2.70). Учитывая строгое возрастание функции $\ln(t)$ по t , получим

$$\ln(P_\varphi(u)) = \sum_{i=1}^n \ln \{F_i(r_i^{-1}(\varphi) - s_i(u))\} \rightarrow \max_{u \in U}, \quad (2.71)$$

Задача с вероятностным ограничением (2.3) примет вид

$$\Phi_0(u) \rightarrow \min_{u \in U}, \quad (2.72)$$

$$\sum_{i=1}^n \ln \{F_i(r_i^{-1}(\varphi) - s_i(u))\} \geq \ln(\alpha),$$

По Теореме 2.7 функция вероятности $P_\varphi(u)$ логарифмически вогнута на U . Но если $P_\varphi(u) > 0$ для всех $u \in U$, то, согласно [25], $\ln(P_\varphi(u))$ будет вогнутой функцией на U . Поэтому полученный детерминированный эквивалент (2.71) является задачей выпуклого программирования.

Ограничение в (2.72) будет также выпуклым, а, следовательно, задача (2.3), записанная в виде (2.72), будет задачей выпуклого программирования, если функция $\Phi_0(u)$ выпукла на U .

Замечание 2.16. Многие известные распределения имеют логарифмически вогнутую плотность, например, нормальное, экспоненциальное, равномерное, Коши и др. В [77] рассмотрен аналогичный случай для более частного вида целевой функции без предположения о независимости компонент вектора X . В [77] установлено, что для рассматриваемого там случая функция вероятности $P_\varphi(u)$ логарифмически вогнута, но, в отличие от данной статьи, детерминированный эквивалент в [77] получить не удалось, и не установлена квазивыпуклость функции квантили. Заметим также, что в случае целевой функции (2.68) явное выражение для функции квантили получить не удастся, и

квазивыпуклость функции квантили является менее конструктивным свойством, чем логарифмическая вогнутость функции вероятности: в (2.71) получена задача выпуклого программирования.

3. Свойства выборочной оценки квантили и методы ее вычисления

3.1. Введение

Во многих прикладных задачах оптимизации статистических критериев возникает проблема сокращения количества испытаний для повышения быстродействия вычислительных алгоритмов. Например, в задачах управления подвижными объектами существует проблема оценивания терминальной точности, характеризующей, например, промах этих объектов относительно заданной цели. На движение объекта, как правило, влияют различные случайные факторы, например, случайные ошибки измерения координат цели, выставки датчиков. Поэтому в качестве терминальной точности обычно используют квантиль промаха объекта. В связи с тем, что распределение промаха на практике часто не бывает известно, то квантиль в этих случаях оценивают методом статистических испытаний. Так как численное моделирование движения объекта может занимать много времени на ЭВМ, то возникает проблема сокращения числа испытаний для оценки квантили промаха. Для решения этой проблемы предлагается воспользоваться методом бутстрепа. Бутстреп-процедура может рассматриваться как способ управления выборкой в ходе обработки данных. Метод бутстрепа отличается от традиционного выборочного метода тем, что он предполагает многократную обработку различных частей одних и тех же данных и сопоставление результатов. Использование бутстреп-процедур позволяет при неизменном объеме выборки повысить точность оценки.

Смыслом метода бутстрепа, представляющим собой статистическую процедуру, является построение из уже имеющейся выборки ее выборочного

распределения вероятностей, с помощью которого извлекаются новые случайные выборки. Бутстреп был предложен Эфроном в [60] как альтернатива методу “складного ножа” [30]. В случае выборки из независимых одинаково-распределенных случайных величин процедура бутстрепа сводится к выбору данных из исходной выборки с возвращением [52].

Для того, чтобы понять, насколько хорошо оценивается выборочная квантиль различных распределений при различных значениях уровня доверительной вероятности, в начале данной главы исследована точность классической выборочной оценки функции квантили для равномерного, экспоненциального и нормального распределений, а также для распределения Коши.

3.2. Выборочная оценка квантили

Вначале определим классическую выборочную оценку квантили. Пусть имеется априорная выборка $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ случайной величины $X \sim F_X(x)$. Упорядочим выборку $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ и построим ее вариационный ряд:

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)},$$

где $X_{(i)}$ - порядковая статистика с номером i , $i = \overline{1, n}$.

Тогда выборочная оценка квантили уровня $\alpha \in (0, 1)$ по выборке X_i , $i = \overline{1, n}$, определяется согласно [20] следующим образом:

$$\hat{X}_\alpha(n) \stackrel{def}{=} X_{([n\alpha]+1)}, \quad (3.1)$$

где $[n\alpha]$ - целая часть числа $n \cdot \alpha$, т.е. смысл данной операции состоит в выборе элемента вариационного ряда выборки $X_{(i)}$ с номером $i = [n\alpha] + 1$.

Как известно, одной из основных характеристик любых оценок является погрешность. В качестве погрешности выборочной оценки квантили рассмотрим асимптотическую оценку среднеквадратического отклонения.

3.3. Асимптотическая оценка среднеквадратического отклонения

Выборочная оценка квантили (3.1) случайной величины X с непрерывной плотностью распределения $p(x)$ в окрестности точки x_α , в которой $p(x_\alpha) > 0$, по теореме Мостеллера [20] асимптотически нормальна:

$$\sqrt{n}(\hat{X}_\alpha(n) - x_\alpha) \xrightarrow{F} U \sim N(0, \sigma_\alpha^2), \quad (3.2)$$

где x_α — точное значение квантили, σ_α — асимптотическое значение среднеквадратического отклонения оценки $\hat{X}_\alpha(n)$, которое равно

$$\sigma_\alpha \stackrel{def}{=} \sqrt{\frac{\alpha(1-\alpha)}{p^2(x_\alpha)}}. \quad (3.3)$$

Заметим, что согласно [18] у выборочной квантили $\hat{X}_\alpha(n)$ всегда существует математическое ожидание, если n достаточно велико, даже тогда, когда сама случайная величина не имеет моментов, например в случае распределения Коши.

Величину σ_α/\sqrt{n} , имеющую скорость сходимости $n^{-1/2}$, можно интерпретировать как точность выборочной оценки квантили.

3.4. Свойства выборочной оценки квантили для различных распределений

Согласно [15] порядковые статистики имеют три области притяжения при увеличении объема выборки в зависимости от вида распределения (финитные распределения, распределения с “легкими” хвостами, распределения с “тяжелыми” хвостами). Рассмотрим четыре известных распределения, представляющих эти три области, и исследуем асимптотические значения σ_α выборочной оценки для этих распределений. С этой целью попробуем найти аналитическое значение квантили x_α в зависимости от α и получить разложение σ_α при $\alpha \rightarrow 0$ и $\alpha \rightarrow 1$.

3.4.1. Случай равномерного распределения

Пусть случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[a, b]$: $X \sim R(a, b)$.

Тогда ее плотность вероятности будет равна

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 0, & x > b. \end{cases} \quad (3.4)$$

Зафиксируем $\alpha \in (0, 1)$. В этом случае $x_\alpha \in (a, b)$. Поэтому

$$p(x_\alpha) = \frac{1}{b-a}. \quad (3.5)$$

Подставляя выражение (3.5) в (3.3), получим

$$\sigma_\alpha = \sqrt{\alpha(1-\alpha)(b-a)^2}. \quad (3.6)$$

Отсюда видно, что для случайной величины, распределенной равномерно на отрезке $[a, b]$, асимптотическая оценка среднеквадратического отклонения σ_α минимальна при $\alpha \rightarrow 0$ и $\alpha \rightarrow 1$ и максимальна для $\alpha = 1/2$.

3.4.2. Случай экспоненциального распределения

Пусть теперь случайная величина X имеет экспоненциальное распределение: $X \sim \mathbf{E}(\lambda)$, где $\lambda > 0$.

Ее плотность вероятности будет равна

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

Легко найти аналитическое выражения для квантили

$$x_\alpha = -\frac{\ln(1-\alpha)}{\lambda}, \quad \alpha \in (0, 1). \quad (3.8)$$

Подставляя выражение (3.8) для квантили в плотность вероятности (3.7), получим

$$p(x_\alpha) = \lambda e^{\ln(1-\alpha)} = \lambda(1-\alpha). \quad (3.9)$$

С учетом (3.9), (3.3) находим

$$\sigma_\alpha = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}. \quad (3.10)$$

Из выражения (3.10) видно, что для случайной величины, распределенной экспоненциально с параметром λ , асимптотическая оценка среднеквадратического отклонения σ_α минимальна при $\alpha \rightarrow 0$ и является возрастающей функцией по $\alpha \in (0, 1)$. Примечательно, что при $\alpha \rightarrow 1$ асимптотическая оценка среднеквадратического отклонения σ_α будет стремиться к бесконечности. Следовательно, квантиль экспоненциального распределения оценивается тем хуже, чем ближе α к единице.

Также из (3.10) легко заметить, что скорость стремления асимптотической оценки среднеквадратического отклонения к бесконечности при $\alpha \rightarrow 1$ пропорциональна $(\sqrt{1 - \alpha})^{-1}$.

3.4.3. Случай распределения Коши

Пусть случайная величина X имеет распределение Коши: $X \sim \mathbf{K}(0)$.

Плотность вероятности в данном случае будет равна

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + x^2}. \quad (3.11)$$

Нетрудно найти значение квантили в зависимости от α

$$x_\alpha = \operatorname{tg}(\pi(\alpha - 1/2)). \quad (3.12)$$

Подставляя выражение (3.12) для квантили в плотность вероятности (3.11), получим

$$p(x_\alpha) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + [\operatorname{tg}(\pi(\alpha - 1/2))]^2}. \quad (3.13)$$

С учетом (3.13) и (3.3) находим

$$\sigma_\alpha = \pi \sqrt{\alpha(1 - \alpha)} (1 + [\operatorname{tg}(\pi(\alpha - 1/2))]^2). \quad (3.14)$$

Построим график σ_α (рис. 3.1).

Из рис. 3.1 видно, что для случайной величины с распределением Коши асимптотическая оценка среднеквадратического отклонения σ_α минимальна для значения $\alpha = 1/2$. Также видим, что σ_α является убывающей функцией по α для $\alpha \in (0, 1/2)$ и возрастающей функцией по α для $\alpha \in (1/2, 1)$. При $\alpha \rightarrow 0$ и $\alpha \rightarrow 1$ асимптотическая оценка σ_α будет стремиться к бесконечности. Следовательно,

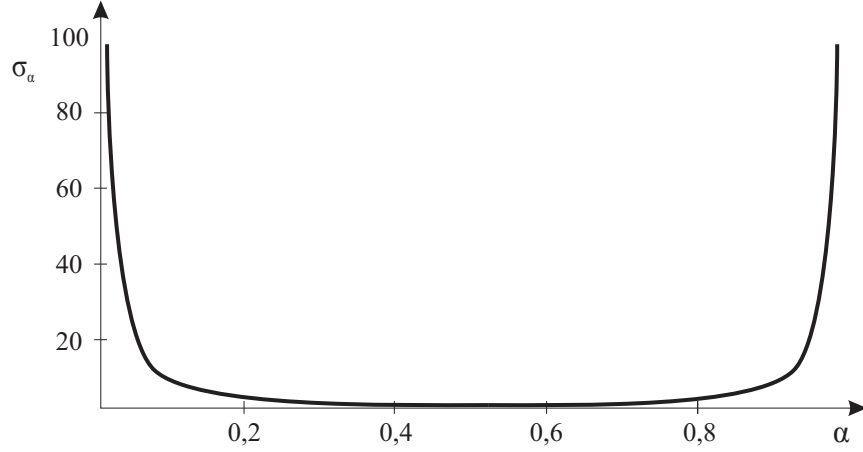


Рис. 3.1. Асимптотическая оценка среднеквадратического отклонения для распределения Коши.

квантиль распределения Коши оценивается тем хуже, чем ближе α к нулю или единице.

Теперь, пользуясь равенством $\operatorname{tg}(\pi(\alpha - 1/2)) = \operatorname{ctg}(\pi(1 - \alpha))$, а также разложением в ряд Лорана котангенса [17] по степеням $\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \pi(1 - \alpha)$:

$$\operatorname{ctg}(\gamma) = \frac{1}{\gamma} - \frac{\gamma}{3} - \frac{\gamma^3}{45} + O(\gamma^5),$$

получаем ряд для асимптотической оценки среднеквадратического отклонения σ_α в окрестности $\alpha = 1$

$$\sigma_\alpha = \frac{\sqrt{\alpha}}{\pi(\sqrt{1 - \alpha})^3} + \frac{\pi\sqrt{\alpha(1 - \alpha)}}{3} + O((1 - \alpha)^{5/2}). \quad (3.15)$$

Отсюда видно, что скорость стремления асимптотической оценки среднеквадратического отклонения к бесконечности при $\alpha \rightarrow 1$ пропорциональна $(\sqrt{1 - \alpha})^{-3}$.

Разложение асимптотической оценки среднеквадратического отклонения (3.15) в ряд при $\alpha \rightarrow 0$ имеет ту же структуру, что и ряд в окрестности $\alpha = 1$:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sqrt{1 - \alpha}}{\pi(\sqrt{\alpha})^3} + \frac{\pi\sqrt{\alpha(1 - \alpha)}}{3} + O(\alpha^{5/2}). \quad (3.16)$$

Следовательно, скорость стремления асимптотической оценки среднеквадратического отклонения к бесконечности при $\alpha \rightarrow 0$ пропорциональна $(\sqrt{\alpha})^{-3}$.

3.4.4. Аналитическая аппроксимация квантили нормального распределения

Перед рассмотрением нормального распределения необходимо построить асимптотическую оценку самой квантили, так как аналитического выражения для гауссовской квантили не существует в явном виде, и, следовательно, не представляется возможным исследовать точность выборочной оценки квантили.

Обозначим через $\Phi(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$, функцию распределения для случайной величины $X \sim N(0, 1)$, называемую также функцией Лапласа. Так как $\Phi(x)$ непрерывна и строго возрастает, то квантиль x_α однозначно находится из уравнения $\Phi(x_\alpha) = \alpha$. Для того, чтобы найти аналитическое выражение асимптотической оценки среднеквадратического отклонения σ_α в зависимости от α , рассмотрим представление функции Лапласа $\Phi(x)$ с помощью отношения Миллса [66]:

$$\Phi(x) = 1 - p(x)R(x). \quad (3.17)$$

Здесь $p(x)$ – плотность распределения нормально распределенной случайной величины, $R(x)$ – отношения “хвоста” распределения к плотности вероятности. Фактически $R(x)$ здесь выполняет роль такого множителя, чтобы равенство (3.17) выполнялось:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$
$$R(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Данное отношение полезно тем, что для функции $R(x)$ существует множество разложений, аппроксимирующих ее. Воспользуемся разложением Лапласа для отношения Миллса. Представим функцию $R(x)$ в виде [66]:

$$R(x) = \frac{1}{x} + O(x^{-3}). \quad (3.18)$$

Обозначим $\bar{R}(x) = 1/x$.

Данное разложение является аппроксимацией функции $R(x)$ при достаточно больших x , а это как раз и требуется при разложении асимптотической оценки среднеквадратического отклонения σ_α , так как $x_\alpha \rightarrow \infty$ при $\alpha \rightarrow 1$. Подставляя

в функцию распределения (3.17) вместо $R(x)$ ее представление (3.18), получим аппроксимацию функции Лапласа при больших x :

$$\Phi(x) = 1 - p(x)R(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{-\frac{x^2}{2}} + e^{-\frac{x^2}{2}}O(x^{-3}). \quad (3.19)$$

Тогда введем

$$\bar{\Phi}(x) \stackrel{def}{=} 1 - p(x)\bar{R}(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (3.20)$$

Так как функция (3.20) непрерывна и строго возрастает по x для $x > 0$, то приближенное значение \bar{x}_α квантили x_α однозначно находится из уравнения

$$\bar{\Phi}(\bar{x}_\alpha) = \alpha.$$

Подставляя в него выражение для функции (3.20), получим уравнение

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{x}_\alpha}}e^{-\bar{x}_\alpha^2/2} = \alpha. \quad (3.21)$$

Решение уравнения (3.21) можно найти с помощью функции Ламберта $W(z)$ [58]. Функция Ламберта определяется через соотношение

$$z = W(z)e^{W(z)}, \quad (3.22)$$

где z – любое, в общем случае комплексное, число. Из (3.22) для $z \geq 0$ получаем

$$\sqrt{z} = \sqrt{W(z)}e^{\frac{1}{2}W(z)}.$$

Теперь, положив

$$z_\alpha \stackrel{def}{=} 1 / (2\pi(1 - \alpha)^2), \quad (3.23)$$

получим уравнение относительно z_α :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}(1 - \alpha)} = \sqrt{W(z_\alpha)}e^{\frac{1}{2}W(z_\alpha)}. \quad (3.24)$$

Далее, преобразовывая (3.24), находим

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi W(z_\alpha)}}e^{-\frac{1}{2}W(z_\alpha)} = \alpha. \quad (3.25)$$

Сравнивая (3.25) и (3.21), а также учитывая, что функция $\bar{\Phi}(x)$ непрерывная и строго возрастающая по $x \in \mathbb{R}^1$, заключаем, что величина

$$\bar{x}_\alpha = \sqrt{W(z_\alpha)}$$

удовлетворяет уравнению (3.21).

Следовательно, решение (3.21) запишется в виде

$$\bar{x}_\alpha = \sqrt{W\left(\frac{1}{2\pi(1-\alpha)^2}\right)}. \quad (3.26)$$

Теорема 3.1. Для нормального распределения $N(0,1)$ при $\alpha \rightarrow 1$ имеет место

$$\bar{x}_\alpha - x_\alpha = O(x_\alpha^{-3}), \quad (3.27)$$

где x_α - квантиль $N(0,1)$, а \bar{x}_α - ее аппроксимация (3.26).

Доказательство теоремы 3.1. Из (3.19) и (3.20) следует, что

$$\Phi(x_\alpha) - \bar{\Phi}(x_\alpha) = e^{-x_\alpha^2/2} O(x_\alpha^{-3}).$$

Учитывая, что $\Phi(x_\alpha) = \alpha$, определим x_α как корень уравнения

$$\bar{\Phi}(x_\alpha) = \alpha - e^{-x_\alpha^2/2} O(x_\alpha^{-3}). \quad (3.28)$$

Известно [58], что для больших $z \in \mathbb{R}^1$ функция $W(z)$ представима в виде

$$W(z) = \ln(z) - \ln(\ln(z)) + O\left(\frac{\ln(\ln(z))}{\ln(z)}\right). \quad (3.29)$$

Для сходимости $\Delta x_\alpha \stackrel{def}{=} \bar{x}_\alpha - x_\alpha \rightarrow 0$ достаточно доказать сходимость $\bar{x}_\alpha^2 - x_\alpha^2 \rightarrow 0$. Поэтому рассмотрим разность $\bar{x}_\alpha^2 - x_\alpha^2$ при $\alpha \rightarrow 1$ с учетом формулы (3.26), представления (3.28) и разложения (3.29):

$$\begin{aligned} \bar{x}_\alpha^2 - x_\alpha^2 &= -\ln(2\pi(1-\alpha)^2) + \ln\left(2\pi(1-\alpha + e^{-x_\alpha^2/2} O(x_\alpha^{-3}))^2\right) + \\ &+ \ln(-\ln(2\pi(1-\alpha)^2)) + \ln\left(-\ln(2\pi(1-\alpha + e^{-x_\alpha^2/2} O(x_\alpha^{-3}))^2)\right) + \\ &+ O\left(\frac{\ln(\ln(z_\alpha))}{\ln(z_\alpha)}\right) = -2\ln\left(1 - \frac{e^{-x_\alpha^2/2} O(x_\alpha^{-3})}{1-\alpha}\right) + \\ &\ln\left(\frac{\ln(\sqrt{2\pi}(1-\alpha))}{\ln(\sqrt{2\pi}(1-\alpha + e^{-x_\alpha^2/2} O(x_\alpha^{-3})))}\right) + O\left(\frac{\ln(\ln(z_\alpha))}{\ln(z_\alpha)}\right), \end{aligned}$$

где z_α определено в (3.23).

Так как $z_\alpha = (2\pi(1-\alpha)^2)^{-1} \rightarrow \infty$ при $\alpha \rightarrow 1$, то для сходимости $\bar{x}_\alpha - x_\alpha \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 1$ необходимо доказать, что при $\alpha \rightarrow 1$ верно

$$q_1(\alpha) \stackrel{def}{=} \frac{e^{-x_\alpha^2/2} O(x_\alpha^{-3})}{1-\alpha} \rightarrow 0,$$

$$q_2(\alpha) \stackrel{def}{=} 1 - \frac{\ln(\sqrt{2\pi}(1 - \alpha))}{\ln(\sqrt{2\pi}(1 - \alpha + e^{-x_\alpha^2/2}O(x_\alpha^{-3})))} \rightarrow 0.$$

Учитывая, что $\alpha = \Phi(x_\alpha)$, запишем $q_1(\alpha)$ в виде

$$q_1(\alpha) = \frac{e^{-x_\alpha^2/2}O(x_\alpha^{-3})}{1 - \Phi(x_\alpha)}.$$

Теперь, воспользовавшись (3.19), получим $1 - \Phi(x_\alpha) = p(x_\alpha)R(x_\alpha)$. Отсюда, учитывая вид $p(x_\alpha)$, а также (3.18), находим

$$q_1(\alpha) = \frac{O(x_\alpha^{-3})}{R(x)} = \frac{O(x_\alpha^{-3})}{x_\alpha^{-1} + O(x_\alpha^{-3})} = O(x_\alpha^{-2}).$$

Очевидно, что $q_1(\alpha) \rightarrow 0$, так как $x_\alpha \rightarrow \infty$ при $\alpha \rightarrow 1$.

Далее, снова пользуясь подстановкой $1 - \Phi(x_\alpha) = p(x_\alpha)R(x_\alpha)$ в $q_2(\alpha)$, получаем

$$q_2(\alpha) = 1 - \frac{\ln(e^{-x_\alpha^2/2}(x_\alpha^{-1} + O(x_\alpha^{-3})))}{\ln(e^{-x_\alpha^2/2}(x_\alpha^{-1} + O(x_\alpha^{-3})) + e^{-x_\alpha^2/2}O(x_\alpha^{-3}))} \rightarrow 0 \text{ при } \alpha \rightarrow 1.$$

Таким образом, из $q_1(\alpha) \rightarrow 0$ и $q_2(\alpha) \rightarrow 0$ получаем $\bar{x}_\alpha - x_\alpha \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 1$.

Теперь построим график функции Лапласа $\Phi(x)$ и $\bar{\Phi}(x)$ (рис. 3.2).

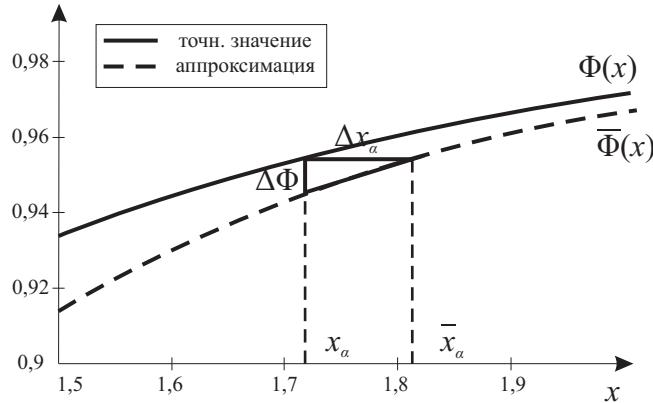


Рис. 3.2. Истинное значение функции Лапласа и ее аппроксимация.

Отметим, что обе функции непрерывны и строго возрастают по x . Найдём производные этих функций:

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi(x)}{dx} &= \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}, \\ \frac{d\bar{\Phi}(x)}{dx} &= \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} + \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}x^2}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что

$$\bar{\Phi}'(x) = \Phi'(x) \left(1 + \frac{1}{x^2}\right). \quad (3.30)$$

Рассмотрим точки $x = x_\alpha$ и $x = \bar{x}_\alpha$. По построению $\bar{\Phi}(\bar{x}_\alpha) = \Phi(x_\alpha)$, тогда с учетом (3.20) и (3.19) рассмотрим разность

$$\begin{aligned}\Delta\bar{\Phi}(x_\alpha) &\stackrel{def}{=} \bar{\Phi}(\bar{x}_\alpha) - \bar{\Phi}(x_\alpha) = \Phi(x_\alpha) - \bar{\Phi}(x_\alpha) = \\ &= e^{-x_\alpha^2/2} O(x_\alpha^{-3}) = \Phi'(x_\alpha) O(x_\alpha^{-3}).\end{aligned}\quad (3.31)$$

Теперь запишем приращение $\Delta\bar{\Phi}(x_\alpha)$ в виде ряда

$$\Delta\bar{\Phi}(x_\alpha) = \bar{\Phi}'(x_\alpha)\Delta x_\alpha + \frac{\bar{\Phi}''(x_\alpha)(\Delta x_\alpha)^2}{2!} + \dots + \frac{\bar{\Phi}^{(n+1)}(x_\alpha)(\Delta x_\alpha)^{n+1}}{(n+1)!} + \dots, \quad (3.32)$$

где $\Delta x_\alpha = \bar{x}_\alpha - x_\alpha \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 1$, как было показано выше.

Найдем общую формулу для производных n -го порядка:

$$\begin{aligned}\left. \frac{d^2\bar{\Phi}(x)}{dx^2} \right|_{x=x_\alpha} &= -\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \left(x + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3} \right) \Big|_{x=x_\alpha} = -\Phi'(x_\alpha)x_\alpha(1 + O(x_\alpha^{-2})), \\ &\dots \\ \left. \frac{d^{n+1}\bar{\Phi}(x)}{dx^{n+1}} \right|_{x=x_\alpha} &= (-1)^n \Phi'(x_\alpha)x_\alpha^n(1 + O(x_\alpha^{-2})).\end{aligned}$$

При подстановке производных функции $\bar{\Phi}(x_\alpha)$ в (3.32) $\Delta\bar{\Phi}(x_\alpha)$ примет вид

$$\begin{aligned}\Delta\bar{\Phi}(x_\alpha) &= \frac{\Phi'(x_\alpha)}{x_\alpha}(1 + O(x_\alpha^{-2})) \left(\Delta x_\alpha x_\alpha - \frac{(\Delta x_\alpha x_\alpha)^2}{2!} + \dots + \right. \\ &\left. + (-1)^n \frac{(\Delta x_\alpha x_\alpha)^{n+1}}{(n+1)!} + \dots \right) = \frac{\Phi'(x_\alpha)}{x_\alpha}(1 + O(x_\alpha^{-2}))(1 - e^{-\Delta x_\alpha x_\alpha}).\end{aligned}$$

Из (3.31) и (3.32), приравнивая правые части, находим

$$\frac{\Phi'(x_\alpha)}{x_\alpha}(1 + O(x_\alpha^{-2}))(1 - e^{-\Delta x_\alpha x_\alpha}) = \Phi'(x_\alpha) O(x_\alpha^{-3}).$$

Далее, сокращая на $\Phi'(x_\alpha)$, получим

$$1 - e^{-\Delta x_\alpha x_\alpha} = O(x_\alpha^{-2}). \quad (3.33)$$

Отсюда видно, что в силу стремления правой части выражения (3.33) к нулю левая часть также должна стремиться к нулю при $\alpha \rightarrow 1$. А это возможно, только если выражение $\Delta x_\alpha x_\alpha \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 1$.

Следовательно, раскладывая экспоненту в ряд до первого порядка малости, находим

$$\Delta x_\alpha x_\alpha + o(\Delta x_\alpha x_\alpha) = O(x_\alpha^{-2}).$$

Отсюда имеем скорость сходимости

$$\Delta x_\alpha = O(x_\alpha^{-3}).$$

3.4.5. Случай нормального распределения

Теперь, получив оценку квантили нормального распределения, получим и асимптотическую оценку среднеквадратического отклонения $\bar{\sigma}_\alpha(n)$.

Для этого, как и в доказательстве Теоремы 3.1, воспользуемся аппроксимацией функции Ламберта для больших $z \in \mathbb{R}^1$:

$$W(z) = \ln(z) - \ln(\ln(z)) + O\left(\frac{\ln(\ln(z))}{\ln(z)}\right). \quad (3.34)$$

Найдем второе приближение квантили нормального распределения x_α . Подставляя (3.34) в (3.26), получим

$$\bar{\bar{x}}_\alpha \approx \sqrt{\ln\left(\frac{1}{2\pi(1-\alpha)^2}\right) - \ln\left(\ln\left(\frac{1}{2\pi(1-\alpha)^2}\right)\right)}. \quad (3.35)$$

Поэтому согласно (3.11) имеем

$$p(\bar{\bar{x}}_\alpha) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{1}{2\pi(1-\alpha)^2}\right) - \ln\left(\ln\left(\frac{1}{2\pi(1-\alpha)^2}\right)\right)\right)\right\} = \quad (3.36)$$

$$\frac{1-\alpha}{\sqrt{\ln(2\pi(1-\alpha)^2)}}.$$

С учетом (3.36) и (3.3) находим

$$\sigma_\alpha \approx \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{n(-\ln(2\pi(1-\alpha)^2))(1-\alpha)}}. \quad (3.37)$$

При $\alpha \rightarrow 1$ асимптотическая оценка σ_α будет стремиться к бесконечности. Следовательно, квантиль нормального распределения также оценивается тем хуже, чем ближе α к единице.

Аналогичные рассуждения можно привести также и для $\alpha \rightarrow 0$, применив аппроксимацию функции Лапласа в виде

$$\bar{\Phi}(x) = p(x)\bar{R}(x),$$

где $\bar{R}(x) = -1/x$.

Из (3.37) видно, что скорость стремления асимптотической оценки среднеквадратического отклонения к бесконечности при $\alpha \rightarrow 1$ пропорциональна $(\sqrt{-(1-\alpha)\ln(1-\alpha)})^{-1}$. Аналогично скорость стремления асимптотической оценки среднеквадратического отклонения к бесконечности при $\alpha \rightarrow 0$ пропорциональна $(\sqrt{-(\alpha)\ln(\alpha)})^{-1}$.

3.4.6. Сравнение точности оценивания для различных распределений

Построим графики стремления асимптотической оценки среднеквадратического отклонения к бесконечности при $\alpha \rightarrow 1$ для нормального, экспоненциального распределений и распределения Коши (рис. 3.3).

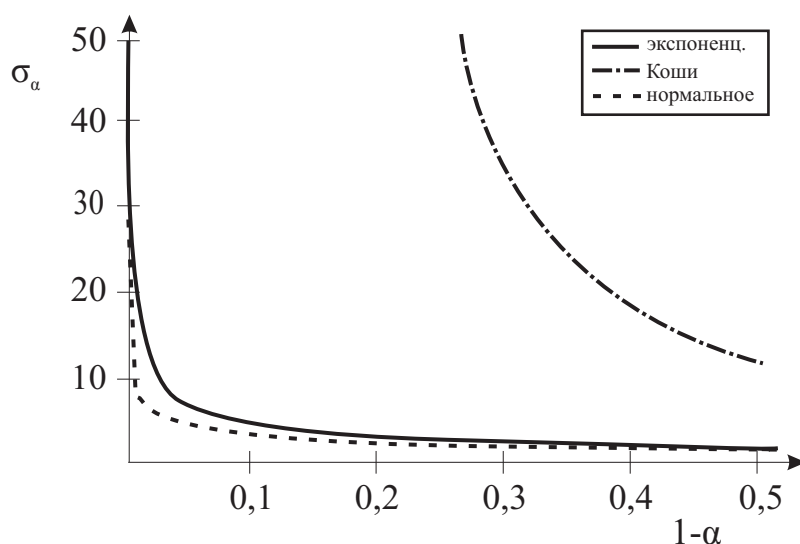


Рис. 3.3. Поведение асимптотической оценки среднеквадратического отклонения σ_α при $\alpha \rightarrow 1$ для нормального, экспоненциального и Коши распределений.

Из рис. 3.3 видно, что лучше всего оценивается квантиль нормального распределения, потом экспоненциального и, наконец, заметно хуже всех оценивается квантиль распределения Коши.

3.5. Применение метода бутстрепа к вычислению квантили

Рассмотрим процедуры несглаженного и сглаженного бутстрепа в применении к оцениванию квантили.

3.5.1. Идея метода бутстрепа

Как уже было описано в разделе 3.1, метод бутстрепа представляет собой статистическую процедуру, основной идеей которой является построение из уже имеющейся выборки выборочного распределения вероятностей, откуда извлекаются новые случайные выборки.

На рис. 3.4 представлена иллюстрация процедуры бутстрепа в применении к оцениванию квантили.

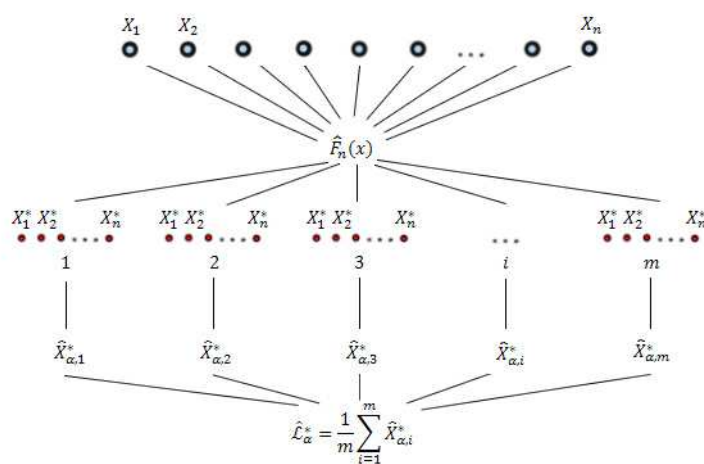


Рис. 3.4. Представление процедуры бутстрепа.

После извлечения новых выборок для каждой подсчитывается желаемая статистика, результаты по всем m выборкам комплексуются.

3.5.2. Применение метода несглаженного бутстрепа к вычислению квантили

В [60] описывается бутстреп-процедура для оценки медианы выборочного распределения. Применим идею, использованную в данной работе, для построения бутстреп-процедуры вычисления квантили.

Пусть имеется наблюдаемая реализация $\{x_1, \dots, x_n\}$ случайной выборки $\{X_1, \dots, X_n\}$. Здесь $X_i, i = \overline{1, n}$, - независимые, одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $F_X(x)$, т.е. $X_i \sim F_X(x)$.

Предлагается следующая бутстреп-процедура для оценки квантили:

1) по реализации $\{x_1, \dots, x_n\}$ построить реализацию $F_n^*(x)$ выборочной функции распределения $\hat{F}_n(x)$, полагая, что каждая из точек $x_i, i = \overline{1, n}$, апостериорной выборки имеет массу $1/n$;

2) для новой функции распределения $F_n^*(x)$ сформировать новую случайную выборку объема n , называемую бутстреп-выборкой:

$$X_i^* \sim F_n^*(x), i = \overline{1, n},$$

статистические свойства которой не совпадают со свойствами исходной выборки $\{X_1, \dots, X_n\}$, так как $F_X(x) \neq F_n^*(x)$ почти для всех $x \in \mathbb{R}^n$;

3) оценить квантиль для реализации $\{x_1^*, \dots, x_n^*\}$ бутстреп-выборки $\{X_1^*, \dots, X_n^*\}$ по классической формуле

$$\hat{x}_\alpha^* = x_{([n\alpha]+1)}^*,$$

где $x_{(k)}^*$ – k -тый член апостериорного вариационного ряда бутстреп-выборки.

4) провести пункты 2) – 3) m раз, где m – желаемое число бутстреп-оценок квантили;

5) полученные m бутстреп-оценок квантили усреднить по формуле

$$\hat{s}_\alpha^*(m) \stackrel{def}{=} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \hat{x}_{\alpha i}^*. \quad (3.38)$$

З а м е ч а н и е 3.1. Легко заметить, что при фиксированном объеме выборки n и заданном уровне доверительной вероятности α единственным параметром данного алгоритма является m - число бутстреп-выборок.

З а м е ч а н и е 3.2. Математическое ожидание выборочной квантили (возможно, кроме экстремальных порядковых статистик: $i = 1$ и $i = n$) всегда существует даже в случае распределений с тяжелыми хвостами [18], поэтому усреднение бутстреп-оценок квантили корректно. А вопрос существования математического ожидания выборочной квантили не связан с вопросом существования математического ожидания самой случайной величины, которого, например, не существует в распределении Коши.

Очевидно, что данная процедура будет давать различные результаты для различных видов распределения, так как она связана с вычислением порядковых статистик, которые, как известно [15], имеют три области

притяжения. Аналогично [85] можно показать, что скорость сходимости данной процедуры будет соответствовать скорости сходимости выборочной оценки квантили, т.е. $O(1/\sqrt{n})$. Но за счет использования дополнительной информации при вычислении бутстреп-оценки можно предположить, что точность при небольших значениях n будет выше, чем при применении выборочной оценки квантили. Проверим это предположение на примере равномерного, нормального распределений, а также распределения Коши, для которых выше была исследована скорость сходимости выборочной оценки квантили [72].

Кроме того, можно рассчитывать, что бутстреп-оценка будет обладать более гладкими свойствами, чем выборочная оценка, что крайне важно для сходимости рекуррентных алгоритмов оптимизации функции квантили, использующих идею стохастической аппроксимации.

Пусть

$$Z_n(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P} \left\{ \sqrt{n}(X_\alpha^* - \hat{X}_\alpha) \leq t \right\} - \mathcal{P} \left\{ \sqrt{n}(\hat{X}_\alpha - x_\alpha) \leq t \right\}, \quad (3.39)$$

где X_α^* – априорная оценка квантили по бутстреп-выборке $\{X_1^*, \dots, X_n^*\}$, \hat{X}_α – выборочная оценка квантили по исходной выборке $\{X_1, \dots, X_n\}$, x_α – точное значение квантили.

В статье [61] приведено утверждение

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |Z_n(t)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0. \quad (3.40)$$

Отсюда из теоремы Бахадура [55] о сходимости выборочной оценки квантили \hat{X}_α к истинному значению x_α по вероятности, получаем, что

$$|X_\alpha^* - x_\alpha| \xrightarrow{P} 0. \quad (3.41)$$

Пусть теперь у нас имеется m бутстреп выборок по n элементов каждая $\{X_{1,i}^*, \dots, X_{n,i}^*\}, i = \overline{1, m}$, полученных вышеуказанным способом из выборочной функции распределения $F_n^*(x)$. Несглаженная бутстреп-оценка квантили будет иметь вид:

$$\hat{S}_\alpha^*(m) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \hat{X}_{\alpha i}^*. \quad (3.42)$$

Теорема 3.2. Для предложенной несглаженной бутстреп-оценки квантили вида (3.42) справедливо

$$|\hat{S}_\alpha^*(m) - x_\alpha| \xrightarrow{P} 0,$$

Доказательство теоремы 3.2. Из [18] следует, что даже для распределений, у которых не существует математическое ожидание, существует математическое ожидание оценки квантили. Так как каждая несглаженная бутстреп-оценка по одной бутстреп-выборке сходится по вероятности к истинному значению квантили x_α (3.41), то и их усредненная сумма также сходится к истинному значению квантили, то есть

$$|\hat{S}_\alpha^*(m) - x_\alpha| \xrightarrow{P} 0.$$

3.5.3. Сглаженная оценка квантили

Перед рассмотрением процедуры сглаженного бутстрепа для оценки квантили необходимо доказать несколько утверждений о сглаженной оценке квантили.

Пусть имеется наблюдаемая реализация $\{x_1, \dots, x_n\}$ случайной выборки $\{X_1, \dots, X_n\}$ $X_i, i = \overline{1, n}$, - независимые, одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $F_X(x)$, т.е. $X_i \sim F_X(x)$.

Пусть также выбрана дважды непрерывно дифференцируемая функция $K(t) : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$, производная которой $k(t) : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ обладает следующими свойствами

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(t) dt = 1, \quad (3.43)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t \cdot k(t) dt = 0. \quad (3.44)$$

Сглаженную оценку $\tilde{F}_n(x)$ функции распределения $F_X(x)$ по выборке $\{X_1, \dots, X_n\}$ определим по формуле

$$\tilde{F}_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K((x - X_i)/h_n), \quad (3.45)$$

где $h_n > 0$ есть некоторый коэффициент сглаживания, зависящий от n .

Покажем сходимость сглаженной выборочной функции распределения $\tilde{F}_n(x)$ к истинной функции распределения $F_X(x)$.

Теорема 3.3. Если $K(t)$ - дважды непрерывно дифференцируемая функция, производная которой $k(t)$ ограничена, а также обладает свойствами (3.43) и (3.44), $h_n^2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, а также существует плотность $p(x)$ такая, что $p(x_\alpha) > 0$ и $p'(x) < \infty$ для любых $x \in \mathbb{R}^1$, то

$$\sup_{|x-x_\alpha|<\varepsilon} |\tilde{F}_n(x) - F_X(x)| \xrightarrow{\text{п.н.}} 0, \quad (3.46)$$

для некоторого достаточно малого фиксированного $\varepsilon > 0$.

Доказательство теоремы 3.3. Воспользовавшись определением интеграла по Риману, перепишем (3.45) в виде

$$\tilde{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K((x - X_i)/h_n) = \int_{-\infty}^{\infty} K((x - t)/h_n) \hat{F}_n(dt). \quad (3.47)$$

Теперь, подставляя (3.47) в разность сглаженной выборочной и истинной функций распределения, получим

$$\begin{aligned} \tilde{F}_n(x) - F_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} K((x - t)/h_n) \hat{F}_n(dt) - F(t) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} K((x - t)/h_n) \hat{F}_n(dt) - F(t) + \int_{-\infty}^{\infty} K((x - t)/h_n) F(dt) \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} K((x - t)/h_n) F(dt). \end{aligned}$$

Сгруппировав интегралы, а также воспользовавшись свойством нормировки (3.43) функции $k(t)$, получим

$$\begin{aligned} \tilde{F}_n(x) - F_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} K((x - t)/h_n) (\hat{F}_n - F)(dt) + \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} K((x - t)/h_n) F(dt) - F(t) = \\ &= \frac{1}{h_n} \int_{-\infty}^{\infty} k((x - t)/h_n) (\hat{F}_n(t) - F(t)) dt + \int_{-\infty}^{\infty} k(t) (F(x - h_n t) - F(t)) dt. \end{aligned}$$

Теперь сделаем замену переменных в первом интеграле и, пользуясь разложением в ряд функции распределения в точке x из окрестности $|x - x_\alpha| < \varepsilon$,

получим

$$\begin{aligned}\tilde{F}_n(x) - F_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} k(t)(\hat{F}_n(x - h_nt) - F(x - h_nt))dt + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} k(t)p'(x - \theta h_nt)h_n^2 t^2 / 2 dt.\end{aligned}\quad (3.48)$$

Так как истинная функция распределения $F(x)$ непрерывна по условию, то по теореме Гливенко-Кантелли [20]

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^1} |\hat{F}_n(x) - F(x)| \xrightarrow{\text{п.н.}} 0 \quad (3.49)$$

для всех $x \in \mathbb{R}^1$.

Так как в первом слагаемом (3.48) аргументы $x - h_nt$ выборочной и истинной функций распределения одинаковы и принадлежат пространству действительных чисел, то для них справедливо утверждение (3.49). По условию $k(x)$ ограничена на всей числовой прямой для любых $x \in \mathbb{R}^1$. Отсюда получаем, что подинтегральное выражение сходится к нулю почти наверное.

Также подинтегральное выражение второго члена можно ограничить функцией:

$$|k(t)(\hat{F}_n(x - h_nt) - F(x - h_nt))| \leq 2k(t)$$

для всех где $x \in \mathbb{R}^1$, а интеграл от функции $k(t)$ по свойству (3.43) ограничен.

Таким образом, если рассмотреть первое слагаемое формулы (3.48) по реализациям, то к нему применима теорема Лебега, следовательно оно сходится к нулю почти наверное. Второе же слагаемое (3.48) есть $O(h_n^2)$, отсюда получим:

$$\sup_{|x - x_\alpha| < \epsilon} |\tilde{F}_n(x) - F_X(x)| \xrightarrow{\text{п.н.}} 0. \quad (3.50)$$

Теперь, после доказательства сходимости сглаженной функции распределения к ее истинному значению почти наверное, рассмотрим сходимость и сглаженной квантили к ее истинному значению.

Теорема 3.4. При выполнении условий Теоремы 3.3

$$|\tilde{X}_\alpha - x_\alpha| \xrightarrow{\text{п.н.}} 0, \quad (3.51)$$

где \tilde{X}_α есть квантиль распределения $\tilde{F}_X(x)$, то есть $\tilde{X}_\alpha = \tilde{F}_X^{-1}(\alpha)$ по всем реализациям.

Доказательство теоремы 3.4. По определению квантили для непрерывной функции, $x_\alpha = F_X^{-1}(\alpha)$ и $\tilde{X}_\alpha = \tilde{F}_X^{-1}(\alpha)$. Рассмотрим снова разность $\tilde{F}_n(x) - F_X(x)$. В качестве аргумента подставим аналитическое значение квантили x_α . Получим

$$\begin{aligned} |\tilde{F}_X(x_\alpha) - F_X(x_\alpha)| &= |\tilde{F}_X(x_\alpha) - \alpha| = \\ &= |\tilde{F}_X(x_\alpha) - \tilde{F}_X(\tilde{x}_\alpha)| = \tilde{p}(x_\alpha + \theta(\tilde{X}_\alpha - x_\alpha))|\tilde{X}_\alpha - x_\alpha| \end{aligned}$$

где $\tilde{p}(x)$ есть соответствующая $\tilde{F}_n(x)$ плотность распределения, $\theta \in (0, 1)$.

Теперь поскольку $|\tilde{F}_X(x_\alpha) - F_X(x_\alpha)|$ по Теореме 3.3 сходится к нулю почти наверное, а плотность $\tilde{p}(x)$ ограничена для любых $x \in \mathbb{R}$ по условию, то получаем

$$|\tilde{X}_\alpha - x_\alpha| \xrightarrow{\text{п.н.}} 0.$$

Следовательно, доказана сходимость сглаженной квантили почти наверное к истинному значению.

3.5.4. Применение метода сглаженного бутстрепа к вычислению квантили

Теперь рассмотрим идею сглаженного бутстрепа.

Пусть снова имеется наблюдаемая реализация $\{x_1, \dots, x_n\}$ случайной выборки $\{X_1, \dots, X_n\}$ $X_i, i = \overline{1, n}$, - независимые, одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $F_X(x)$, т.е. $X_i \sim F_X(x)$.

Предлагается следующая бутстреп-процедура для оценки квантили:

1) по реализации $\{x_1, \dots, x_n\}$ построить реализацию $F_n^*(x)$ сглаженной выборочной функции распределения $\tilde{F}_n(x)$:

$$F_n^*(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K((x - x_i)/h_n);$$

2) для новой функции распределения $F_n^*(x)$ сформировать новую случайную выборку объема n , называемую бутстреп-выборкой:

$$X_i^* \sim F_n^*(x), \quad i = \overline{1, n};$$

3) по реализации $\{x_1^*, \dots, x_n^*\}$ выборки $\{X_1^*, \dots, X_n^*\}$ построить сглаженную оценку $\tilde{F}_n^*(x)$ функции распределения $\tilde{F}_n(x)$ по формуле

$$\tilde{F}_n^*(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K((x - x_i^*)/h_n); \quad (3.52)$$

4) оценить квантиль по формуле

$$\tilde{x}_\alpha^* = \tilde{F}_n^{*-1}(x);$$

5) провести пункты 2) – 4) m раз, где m – желаемое число бутстреп-оценок квантили;

6) полученные m бутстреп-оценок квантили усреднить:

$$\hat{r}_\alpha^*(m) \stackrel{def}{=} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \tilde{x}_{\alpha i}^*. \quad (3.53)$$

Лемма 3.1. При выполнении условий Теоремы 3.3 бутстреп оценка квантили сходится к реализации выборочной оценки квантили почти наверное

$$|\tilde{X}_\alpha^* - F_n^{*-1}(\alpha)| \xrightarrow{\text{п.н.}} 0.$$

Доказательство Леммы 3.1 в точности повторяет доказательство Теорем 3.3 и 3.4, приложенное к бутстреп выборке $\{X_1^*, \dots, X_n^*\}$.

З а м е ч а н и е 3.3. В Лемме 3.1 доказана сходимостъ бутстреп оценки квантили к реализации сглаженной оценки квантили, которая может быть получена на шаге 1 алгоритма сглаженного бутстрепа как $F_n^{*-1}(\alpha)$. Необходимо заметить, что $F_n^*(\alpha)$ есть реализация $\tilde{F}_n(\alpha)$, поэтому $F_n^{*-1}(\alpha)$ есть число.

Теорема 3.5. Если $K(t)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция, производная которой $k(t)$ ограничена, а также обладает свойствами (3.43) и (3.44), $h_n^2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, а также существует плотность $p(x)$ такая, что $p(x_\alpha) > 0$ и $p'(x) < \infty$ для любых $x \in \mathbb{R}^1$, то

$$|\tilde{X}_\alpha^* - x_\alpha| \xrightarrow{\text{п.н.}} 0.$$

Доказательство теоремы 3.5. По Теореме 3.3

$$|\tilde{X}_\alpha - x_\alpha| \xrightarrow{\text{п.н.}} 0,$$

по Лемме 3.1

$$|\tilde{X}_\alpha^* - F_n^{*-1}(\alpha)| \xrightarrow{\text{п.н.}} 0.$$

Число $F_n^{*-1}(\alpha)$ есть реализация \tilde{X}_α , о чем уже упоминалось ранее. Так как имеет место сходимостъ почти на верное, то для каждой реализации $F_n^{*-1}(\alpha)$ есть сходимостъ числовой последовательности

$$|F_n^{*-1}(\alpha) - x_\alpha| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3.54)$$

Поэтому комплексируя результаты Теоремы 3.3 и Леммы 3.1, а также (3.54), получим

$$|\tilde{X}_\alpha^* - x_\alpha| \xrightarrow{\text{п.н.}} 0.$$

Таким образом, доказана сходимостъ почти на верное сглаженной бутстреп-оценки квантили по одной бутстреп-выборке. Пусть теперь у нас имеется m бутстреп выборок по n элементов каждая $\{X_{1,i}^*, \dots, X_{n,i}^*\}, i = \overline{1, m}$, полученных вышеуказанным способом из сглаженной выборочной функции распределения $F_n^*(x)$.

Сглаженная бутстреп-оценка имеет вид:

$$\hat{R}_\alpha^*(m) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \tilde{X}_{\alpha i}^*. \quad (3.55)$$

Теорема 3.6. В условии Теоремы 3.5

$$|\hat{R}_\alpha^*(m) - x_\alpha| \xrightarrow{\text{п.н.}} 0.$$

Доказательство теоремы 3.6. Из [18] следует, что даже для распределений, у которых не существует математическое ожидание, существует математическое ожидание оценки квантили. Так как каждая сглаженная бутстреп-оценка по одной выборке сходится почти на верное к истинному значению квантили x_α , то и их усредненная сумма также сходится к истинному значению квантили, то есть

$$|\hat{R}_\alpha^*(m) - x_\alpha| \xrightarrow{\text{п.н.}} 0.$$

3.6. Примеры вычисления бутстреп-квантилей

Исследуем поведение предложенной бутстреп-оценки при вычислении квантилей некоторых из рассмотренных выше распределений. Для проведения

численного моделирования была разработана математическая модель, реализованная в среде программирования MathCad на ЭВМ.

3.6.1. Представление погрешности оценки квантили

Исследование точности данной оценки будем проводить на всем интервале $\alpha \in (0, 1)$. Разобьем данный интервал на k точек $\alpha_1, \dots, \alpha_k$.

Погрешность выборочной оценки квантили $\hat{x}_\alpha(n)$ относительно истинного значения $x_\alpha(n)$ по k точкам $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ интервала $\alpha \in (0, 1)$ оценим величиной

$$\hat{\sigma} \stackrel{def}{=} \sqrt{\frac{n}{k-1} \sum_{i=1}^k \left(\frac{\hat{x}_{\alpha_i}^{(n)} - x_{\alpha_i}}{\sigma_{\alpha_i}} \right)^2}. \quad (3.56)$$

Погрешность бутстреп-оценки квантили $\hat{s}_\alpha^*(m)$ относительно истинного значения x_α по тем же k точкам интервала $\alpha \in (0, 1)$ оценим величиной

$$\tilde{\sigma}(m) \stackrel{def}{=} \sqrt{\frac{n}{k-1} \sum_{i=1}^k \left(\frac{\hat{s}_{\alpha_i}^*(m) - x_{\alpha_i}}{\sigma_{\alpha_i}} \right)^2}. \quad (3.57)$$

Для подсчета данных погрешностей применим равномерное разбиение интервала $\alpha \in (0, 1)$ на k точек $\alpha_i, i = \overline{1, k}$.

3.6.2. Вычисление квантили для равномерного распределения

Пусть случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[-1, 1]$: $X \sim \mathbf{R}(-1, 1)$. В этом случае выборочная и бутстреп-оценки квантили в зависимости от уровня α по отношению к функции квантили будут иметь вид, изображенный на рис. 3.5.

На всех рисунках $\Delta_\alpha = \hat{x}_\alpha^{(n)} - x_\alpha$ – ошибка выборочной оценки, $\Delta_\alpha^* = \hat{s}_\alpha^*(m) - x_\alpha$ – ошибка несглаженной бутстреп оценки.

Величину отклонения выборочной и бутстреп оценок квантили от истинного значения квантили можно наблюдать на рис. 3.6.

Из рис. 3.5 видно, что бутстреп-оценка имеет значительно более гладкий вид по α , чем выборочная оценка. Отметим, что из результатов обработки данных следует, что с увеличением числа m бутстреп-выборок гладкость графика бутстреп-оценки квантили повышается.

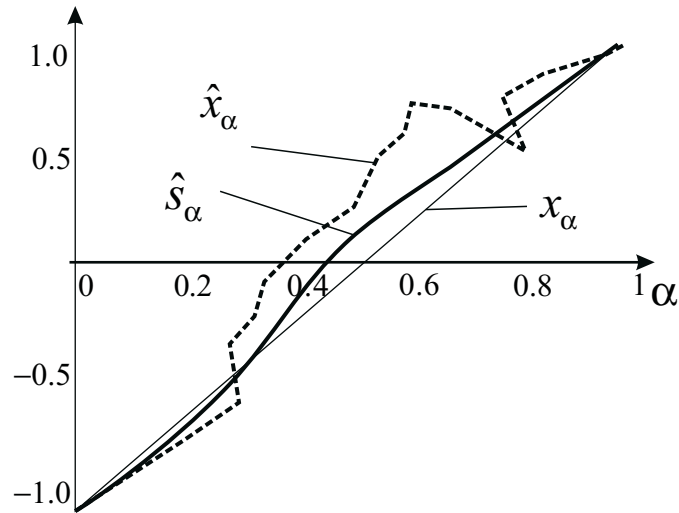


Рис. 3.5. Выборочная и бутстреп оценки квантили равномерного распределения при $n = 100, m = 100$.

погрешность	n=50	n=100	n=500	n=1000
$\hat{\sigma}$	0,632	0,682	0,781	0,798
$\tilde{\sigma}, m=100$	0,453	0,490	0,732	0,754
$\tilde{\sigma}, m=500$	0,464	0,490	0,754	0,748
$\tilde{\sigma}, m=5000$	0,479	0,471	0,742	0,722

Таблица 3.1. Среднеквадратическая погрешность выборочной и бутстреп оценок квантили для равномерного распределения для различных m и n .

Теперь рассмотрим значения среднеквадратических отклонений $\hat{\sigma}$ и $\tilde{\sigma}(m)$ в зависимости от объема выборки n и числа m сгенерированных бутстреп-выборок. Результаты расчетов приведены в табл. 3.1 для $k = 50$.

Из табл. 3.1 видно, что бутстреп-оценка дает бóльшую точность, чем выборочная оценка (примерно на 20-30%) при объеме выборки $n \leq 100$. Кроме того, видно, что увеличение количества бутстреп-выборок при $m > 100$ в данном случае не влияет на точность бутстреп-оценки.

3.6.3. Вычисление квантили для нормального распределения

Пусть теперь случайная величина X имеет нормальное распределение $X \sim N(0, 1)$.

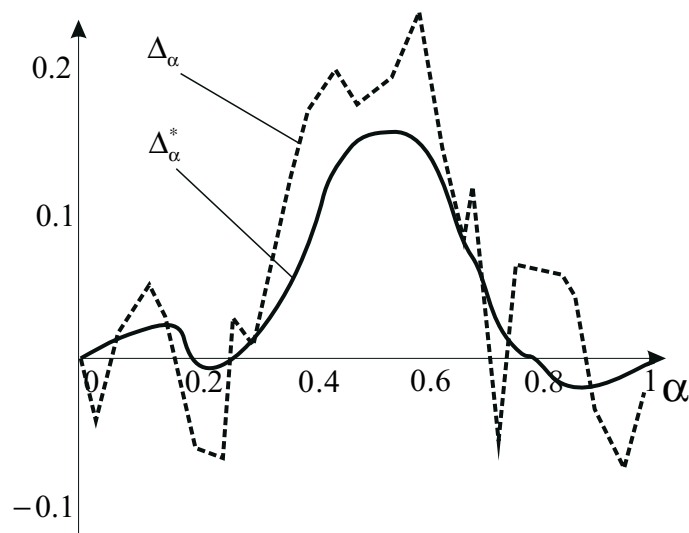


Рис. 3.6. Отклонение выборочной и бутстреп оценок квантили равномерного распределения от истинного значения при $n = 100, m = 100$.

Величина отклонения выборочной и бутстреп оценок квантили от истинного значения квантили нормального распределения показана на рис. 3.7.

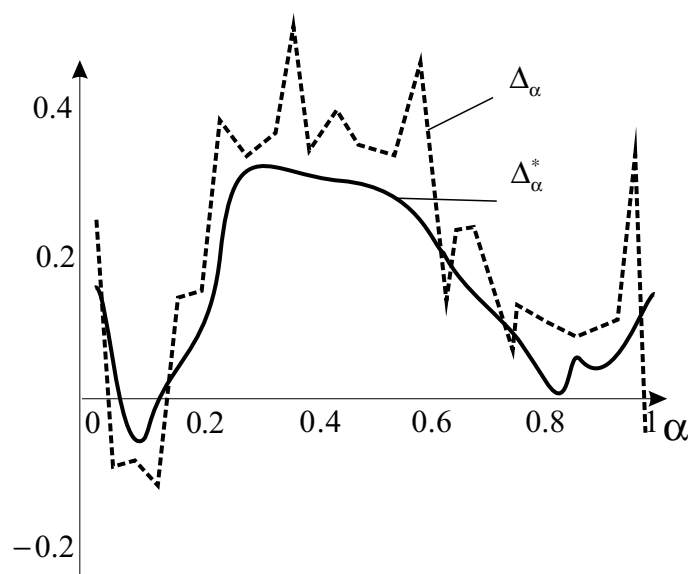


Рис. 3.7. Отклонение выборочной и бутстреп оценок квантили нормального распределения от истинного значения при $n = 100, m = 100$.

Характер графика бутстреп-оценки на рис. 3.7 аналогичен предыдущему на рис. 3.6. Кроме того, из рис. 3.7 видно, что в силу стремления асимптотической оценки среднеквадратического отклонения (3.37) выборочной оценки квантили к

бесконечности при $\alpha \rightarrow 0$ и при $\alpha \rightarrow 1$ выборочная и бутстреп оценки квантили дают все меньшую точность при приближении α к 0 и 1.

Теперь рассмотрим значения среднеквадратических отклонений $\hat{\sigma}$ и $\tilde{\sigma}(m)$ в зависимости от объема выборки n и числа сгенерированных бутстреп-выборок m . Данные для нормально распределенной случайной величины X указаны в табл. 3.2 для $k = 50$.

погрешность	n=50	n=100	n=500	n=1000
$\hat{\sigma}$	0,466	0,894	1,013	1,057
$\tilde{\sigma}$, m=100	0,255	0,726	0,852	0,968
$\tilde{\sigma}$, m=500	0,246	0,732	0,852	1,008
$\tilde{\sigma}$, m=5000	0,247	0,679	0,851	1,005

Таблица 3.2. Среднеквадратическая погрешность выборочной и бутстреп оценок квантили нормального распределения для различных m и n .

Опять же видно, что бутстреп-оценка дает гораздо бóльшую точность (20-40%), чем выборочная оценка при объемах выборки $n \leq 100$. Снова отметим, что увеличение количества бутстреп-выборок при $m > 100$ и в данном случае не дает повышение точности оценивания.

3.6.4. Вычисление квантили для распределения Коши

Пусть теперь случайная величина X имеет распределение Коши $X \sim \mathbf{K}(0)$.

На рис. 3.8 показана величина отклонения выборочной и бутстреп оценок квантили от истинного значения квантили для распределения Коши.

Характер графика бутстреп-оценки на рис. 3.8 аналогичен предыдущим. Также отметим, что в данном случае в силу стремления асимптотической оценки среднеквадратического отклонения (3.14) выборочной оценки квантили к бесконечности при $\alpha \rightarrow 0$ и при $\alpha \rightarrow 1$ выборочная и бутстреп оценки квантили дают все бóльшую погрешность при приближении α к 0 и 1.

Исследуем зависимость среднеквадратических отклонений $\hat{\sigma}$ и $\tilde{\sigma}(m)$ от объема выборки n и числа сгенерированных бутстреп-выборок m . Результаты обработки данных для случайной величины X , распределенной по закону Коши, приведены

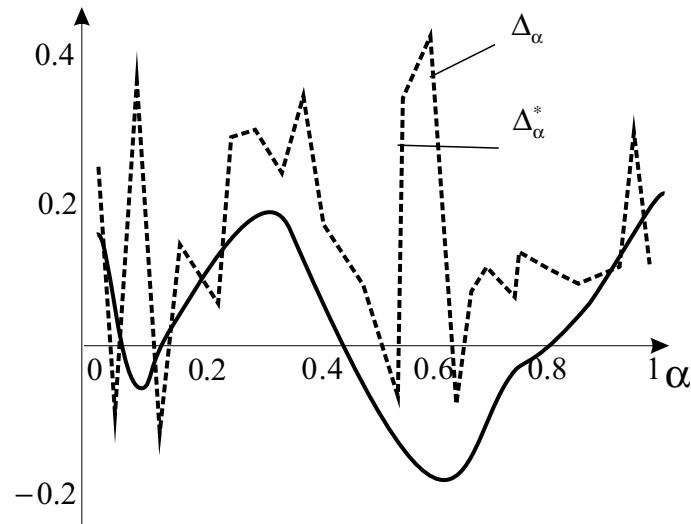


Рис. 3.8. Отклонение выборочной и бутстреп оценок квантили распределения Коши от истинного значения при $n = 100, m = 100$.

в табл. 3.3 для $k = 50$.

погрешность	n=50	n=100	n=500	n=1000
$\hat{\sigma}$	1,469	1,149	0,484	0,826
$\tilde{\sigma}, m=100$	1,356	1,040	0,470	0,811
$\tilde{\sigma}, m=500$	1,333	1,068	0,447	0,768
$\tilde{\sigma}, m=5000$	1,317	1,041	0,432	0,787

Таблица 3.3. Среднеквадратическая погрешность выборочной и бутстреп оценок квантили распределения Коши для различных m и n .

Для распределения Коши бутстреп-оценка снова дает большую точность, чем выборочная оценка, но увеличение точности оказывается чуть меньшим, чем для равномерного и нормального распределений (5-10%). Данный факт можно объяснить большой асимптотической погрешностью распределения Коши при значениях α близких к нулю и единице. Увеличение количества бутстреп-выборок практически не сказывается на точности бутстреп-оценки.

4. Оптимизация двухшаговой модели изменения капитала

4.1. Введение

В задачах, связанных с оптимизацией распределения ресурсов в финансовой сфере, используются различные показатели для оценки риска или доходности финансовых операций [33, 46, 74]. На финансовые показатели наряду со стратегией влияют также и неконтролируемые факторы. Эти факторы обычно рассматриваются как случайные величины с известным распределением, или с распределением из некоторого оговоренного класса. В этом случае финансовые показатели операции также являются случайными величинами.

В данной главе рассматривается задача максимизации функции дохода при двухшаговом вложении капитала в безрисковую ценную бумагу и рисковую с равномерным законом распределения ее доходности. Проводится анализ и сравнение решений задач с использованием квантильного критерия, критерия интегральной квантили, логарифмического и минимаксного критериев. Находится оптимальное значение каждого из критериев в зависимости от выбранного уровня вероятности. Предлагается способ выбора допустимого уровня доверительной вероятности, исследуются зависимости критериев от этого уровня при подстановке в критерии своих оптимальных стратегий и стратегий, оптимальных для других критериев. Также производится сравнение получаемого с помощью компьютерного статистического моделирования численного решения данной задачи при использовании выборочной и бутстреп оценок функции квантили с оптимальным значением решения.

4.2. Постановка задачи оптимизации функции дохода

Рассмотрим двухшаговую задачу формирования портфеля ценных бумаг, в которой определяется оптимальная стратегия поведения на рынке в течение двух временных периодов.

4.2.1. Двухшаговая модель изменения капитала

Пусть средства вкладываются в два типа финансовых инструментов: надежного, но приносящего небольшой доход b на единицу вложенного капитала (например, банковский депозит) и рискового, имеющего случайную доходность X_i по окончании i -го временного периода (например, акции, которые в среднем более прибыльные, чем безрисковый инструмент), т.е. $\mathbf{M}[X_i] > b$, $i = \overline{1, N}$. Вложение осуществляется на протяжении N периодов времени. Цель вложения – достижение максимального дохода после окончания N -го периода. Если предположить, что на каждом шаге применяется одна и та же стратегия $u = \text{col}(u_0, u_1)$ разделения капитала, то капитал на конец N -го периода будет равен:

$$C_N = C_0 \prod_{i=1}^N (1 + u_0 b + u_1 X_i),$$

где u_0 – доля капитала, вкладываемая в безрисковый инструмент, u_1 – в рисковый, а C_0 – начальный капитал. Случайные величины X_i , $i = \overline{1, N}$, предполагаются независимыми в совокупности и имеющими равномерные распределения с носителями $[-1, a_i]$, $a_i > 0$, $i = \overline{1, N}$. Такой выбор носителей имеет экономический смысл: $X_i = -1$ означает полный крах i -го финансового инструмента (при вложении в него всего капитала – $u_1 = 1$), а $X_i = a_i$ соответствует его максимальной доходности, которая может изменяться от года к году. Выбор при постановке данной задачи равномерного распределения вызван тем, что оно является в некотором смысле наихудшим для игрока, принимающего решение [31]. Предполагается также, что на бирже запрещена операция short-sale – покупка бумаг в долг. Поэтому появляются дополнительные ограничения на компоненты вектора u : $u_0 \geq 0$; $u_1 \geq 0$. Также, если учесть, что u_0 и u_1 – доли капитала, появляется ограничение $u_0 + u_1 \leq 1$.

Рассмотрим случай двухшагового вложения капитала $N = 2$, а начальный капитал без ограничения общности положим равным $C_0 = 1$, т.е. будем измерять величину капитала в относительных единицах. Тогда функция дохода примет вид:

$$F(u, X) \stackrel{\text{def}}{=} (1 + u_0 b + u_1 X_1)(1 + u_0 b + u_1 X_2), \quad (4.1)$$

$$X \stackrel{\text{def}}{=} \text{col}(X_1, X_2), \quad u \stackrel{\text{def}}{=} \text{col}(u_0, u_1),$$

где u_0 и u_1 – оптимизируемые переменные, а X_1 и X_2 – случайные величины, имеющие равномерный закон распределения с носителем

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \{X_1, X_2 : -1 \leq X_1 \leq a_1, -1 \leq X_2 \leq a_2\}.$$

Рассмотрим множество допустимых стратегий

$$U \stackrel{\text{def}}{=} \{u_0, u_1 : u_0 + u_1 \leq 1, u_0 \geq 0, u_1 \geq 0\}.$$

4.2.2. Анализ классической постановки Марковица

Цель формирования портфеля ценных бумаг состоит в максимизации дохода. Так как функция $F(u, X)$ случайна, то рассматриваемая задача может быть сформулирована в различных стохастических постановках. Например, за критерий можно взять математическое ожидание целевой функции:

$$\Phi_0(u) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{M}[F(u, X)].$$

Однако, из работ [72, 83] известно, что критерий “средний доход” плохо описывает задачу вложения средств в рискованные финансовые инструменты. Например, при максимизации среднего дохода возникает так называемый “биржевой парадокс” [83], когда при многократном повторении выбранной стратегии средний доход стремится к бесконечности, а вероятность разорения — к единице. Также в работе [29] показано, что при вложении капитала в бонды (бескупонные ценные бумаги с фиксированным доходом) “средний доход” просто не существует. Задача максимизации дохода рассматривалась во многих работах, например в [16, 32, 83], и для поиска оптимальной стратегии применялись различные критерии.

Рассмотрим классическую постановку Марковица:

$$\mathbf{M}[F(u, X)] = \text{const},$$

$$D[F(u, X)] \rightarrow \min_{u \in U}.$$

Эта постановка в данном случае будет малоприменима, поскольку в силу присутствия ограничения $u_0 + u_1 \leq 1$ она вырождается в решение системы двух уравнений с двумя неизвестными:

$$(1 + u_0 b + u_1 m_1)(1 + u_0 b + u_1 m_2) = \text{const},$$

$$u_0 + u_1 = 1,$$

где $m_1 = \mathbf{M}[X_1]$, $m_2 = \mathbf{M}[X_2]$, которое в большинстве случаев не будет учитывать желаний брокера при игре на бирже из-за своей тривиальности. При этом, в силу вырождения данной постановки в систему уравнений, получается, что совершенно не учитывается “рисковость” самих ценных бумаг, разброс цен на которые относительно среднего может быть достаточно велик.

Для усовершенствования и обобщения постановки Марковица в рамках рассматриваемой задачи предлагается использовать четыре критерия: квантильный, критерий интегральной квантили, логарифмический критерий и минимаксный критерий.

4.2.3. Виды критериев принятия решений и обобщение постановки Марковица

Рассмотрим четыре постановки задачи оптимизации для выбора оптимальной стратегии вложения капитала как развитие постановки Марковица:

1. Квантильная постановка:

$$u_\alpha = \arg \max_{u \in U} \varphi_\alpha(u). \quad (4.2)$$

2. Логарифмическая постановка:

$$u_L = \arg \max_{u \in U} L(u). \quad (4.3)$$

3. Доверительная постановка:

$$\hat{u}_\alpha = \arg \max_{u \in U} \min_{x \in S_\alpha} F(u, x), \quad (4.4)$$

где S_α — доверительное множество, имеющее вероятностную меру α .

4. Интегральная квантильная постановка:

$$v_\alpha = \arg \max_{v \in U} \psi_\alpha(v). \quad (4.5)$$

Отметим, что задача (4.3) для одношаговой модели решена в [72]. Решения задач (4.2), (4.4), (4.5) существенным образом зависят от доверительного уровня вероятности α , поэтому его определение играет важную роль. При выборе величины α предлагается руководствоваться одним из следующих способов.

1. Фиксируется допустимый уровень риска оказаться в убытке:

$$P(u_\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P}\{F(u_\alpha, X) < 1\} \leq p \quad (4.6)$$

и решается уравнение относительно α : $\alpha^* = \max\{\alpha : P(u_\alpha) \leq p\}$.

2. Фиксируются допустимые средние убытки:

$$R(u_\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \mathbf{M}[F(u_\alpha, X) | F(u_\alpha, X) < 1] \leq m \quad (4.7)$$

и решается уравнение относительно α : $\alpha^* = \max\{\alpha : R(u_\alpha) \leq m\}$.

Введение дополнительных условий (4.6) или (4.7) в постановки задач (4.2), (4.4), (4.5) можно рассматривать как естественное обобщение постановки Марковица, так как критерий var (дисперсия) заменен на VaR (квантиль), а средний доход – на условные средние потери (4.7) или же риск оказаться в убытке (4.6). Также стоит отметить, что возможны и другие обобщения постановки Марковица.

4.3. Оптимизация функции дохода по квантильному критерию

В данном разделе рассмотрим задачу квантильной оптимизации (4.2) функции дохода (4.1) для всех $\alpha \in (0, 1)$.

4.3.1. Построение функции вероятности

Пусть X_1 и X_2 - независимые случайные величины, имеющие равномерный закон распределения: $X_1 \sim \mathbf{R}(-1, a_1)$, $X_2 \sim \mathbf{R}(-1, a_2)$. Для решения сформулированной задачи оптимизации (4.2) вначале найдем аналитическое

выражение для функции вероятности. С этой целью на носителе A вероятностной меры построим доверительное множество

$$S^+ \stackrel{def}{=} \{X : F(u, X) \leq \varphi\},$$

графически представленное на рис. 4.1.

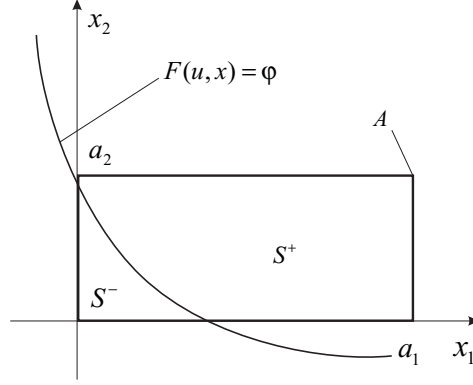


Рис. 4.1. Доверительное множество.

Для введенных обозначений функция вероятности будет равна:

$$P_\varphi(u) = \frac{\text{mes}[S^+]}{\text{mes}[S^+ + S^-]} = 1 - \frac{\text{mes}[S^-]}{\text{mes}[S^+ + S^-]}.$$

При подстановке аналитических выражений для лебеговых мер “mes” множеств S^+ и S^- , представляющих собой интегральные выражения для вычисления площади под кривой, получим

$$P_\varphi(u) = \begin{cases} r(u, \varphi), & u_1 > 0, \\ 0, & u_1 = 0, \varphi > (b+1)^2, \\ 1, & u_1 = 0, \varphi \leq (b+1)^2, \end{cases} \quad (4.8)$$

где $c \stackrel{def}{=} \text{mes}A = (1+a_1)(1+a_2)$ – положительное число, так как $a_1 > -1$, $a_2 > -1$, а

$$r(u, \varphi) \stackrel{def}{=} 1 - \frac{1}{cu_1^2} \left[(u_1 - bu_0 - 1)^2 - \varphi + \varphi \ln \frac{\varphi}{(u_1 - bu_0 - 1)^2} \right].$$

Для простоты изложения выражение (4.8) для функции вероятности рассчитано при выполнении условия, связывающего параметры φ и u :

$$\varphi \leq (1 + u_0 b + u_1 \min(a_1, a_2))(1 + u_0 b - u_1), \quad (4.9)$$

так как рассмотрен только случай, в котором линия уровня $F(u, x) = \varphi$ отсекает левый нижний угол на носителе вероятностной меры.

Найдем такое $u^* = \text{col}(u_0^*, u_1^*)$, при котором правая часть неравенства (4.9) максимальна. Легко установить, что

$$u_1^* = \frac{1}{2} \frac{(2b + 1 - \min(a_1, a_2))}{(b - \min(a_1, a_2))}, \quad u_0^* = 1 - u_1^*. \quad (4.10)$$

При этом соответствующий u^* уровень φ^* можно найти, решив численно [37] уравнение

$$\frac{\partial P_\varphi(1 - u_1, u_1)}{\partial u_1} \Big|_{u_1=u^*} = 0 \quad (4.11)$$

относительно φ . Таким образом, выражение (4.8) будет иметь место для всех $\varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*$, где $\varphi_* = (b + 1)^2$ – минимальное из возможных значений φ .

Полное выражение для функции вероятности было получено автором аналитически, исследовано, но в силу громоздкости в данной работе не приводится. Однако все положения, приведенные ниже, сохраняются.

4.3.2. Условие эквивалентности задач оптимизации по квантильному и вероятностному критериям

В условиях Теоремы 1.1 рассмотрим множество стратегий

$$U_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{u_0, u_1 : u_0 + u_1 \leq 1, u_0 \geq 0, u_1 > 0\}$$

Легко проверить, что множество H (1.20) примет вид

$$H = [0, (a_1 + 1)(a_2 + 1)], \quad (4.12)$$

так как

$$\min_{x \in A, u \in U_1} F(u, x) = 0, \quad \max_{x \in A, u \in U_1} F(u, x) = (a_1 + 1)(a_2 + 1).$$

Тогда по следствию 1.1 заменим множества $\alpha \in (0, 1)$ и $\varphi \in H$ на множества $\alpha \in (p_*, p^*)$ и $\varphi \in H_1 \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi_*, \varphi^*)$, где

$$p_* \stackrel{\text{def}}{=} P_{\varphi^*}(1 - u^*, u^*), \quad p^* \stackrel{\text{def}}{=} \max_{\varphi \in N(u), u \in U_1} P_\varphi(u), \quad \varphi_* \stackrel{\text{def}}{=} (b + 1)^2, \quad (4.13)$$

значение φ^* определено в (4.11), u^* – в (4.10).

На основании следствия Теоремы 1.1 задача оптимизации по вероятностному критерию для целевой функции вида (4.1) будет эквивалентна задаче оптимизации по квантильному критерию на U_1 . Более подробно эквивалентность задач вероятностной и квантильной оптимизации рассматривается в Лемме 4.1.

Лемма 4.1. Модель (4.1) обладает следующими свойствами:

- (i) условия (1.18), (1.19) выполняются для всех $u \in U_1$;
- (ii) функция $P_\varphi(u)$ непрерывна и строго убывает по $\varphi \in H_1$ для любого $u \in U_1$;
- (iii) для любого $\alpha \in (p_*, p^*)$ существует стратегия $u_{\varphi_\alpha} \in U_\alpha$ и $U_\alpha \equiv U_{\varphi_\alpha}$, где φ_α – корень уравнения $P_\varphi(u_\varphi) = \alpha$.

Доказательство леммы 4.1. (i) Условие (1.18) выполняется, так как, во-первых, в силу линейности функции (4.1) как по x_1 , так и по x_2 справедливо равенство $\text{mes}\{x : F(u, x) = \varphi\} = 0$ для любых $\varphi \in N(u), u \in U_1$. Во-вторых, существует плотность вероятности у случайного вектора X .

Условие (1.19) выполняется также, так как, с одной стороны, функция (4.1) непрерывна и не ограничена по $x = \text{col}(x_1, x_2)$, с другой стороны, множество $B \stackrel{\text{def}}{=} \{x : |F(u, x) - \varphi| < \varepsilon\}$ открыто для всех $\varphi \in \mathbb{R}^1, u \in U_1, \varepsilon > 0$. Кроме того, по определению (1.17) множества $N(u)$ имеем $A \cap B \neq \emptyset$ для всех $\varphi \in N(u), u \in U_1, \varepsilon > 0$, где A – носитель меры.

(ii) Непрерывность и монотонное убывание функции вероятности по $\varphi \in H_1$ для любых $u \in U_1$ следуют из (i) (см. Леммы 1.1 и 1.2 из Главы 1).

(iii) Докажем вначале существование стратегии $u_\varphi \in U_\varphi$. Для этого рассмотрим полное множество допустимых стратегий U как продолжение множества U_1 , т.е. $U = U_1 \cup \{u_1 = 0\}$. Заметим, что согласно (ii) функция вероятности $P_\varphi(u)$ непрерывна по $u \in U$. В силу непрерывности функции вероятности на компактном множестве по теореме Вейерштрасса получаем, что функция вероятности достигает на данном множестве своего максимума. Но в точке $u_1 = 0$ максимум функции вероятности не будет достигаться, так как при $\varphi \in H_1$ функция вероятности $P_\varphi(u_0, 0) = 0$ для любых $u_0 \in [0, 1]$. Следовательно, максимум функции вероятности достигается на множестве U_1 . Далее, по Следствию 1.1, используя условие эквивалентности, получаем, что для любого $\alpha \in (p_*, p^*)$ существует стратегия u_{φ_α} и $u_{\varphi_\alpha} \in U_\alpha$, где φ_α – корень уравнения $P_\varphi(u_\varphi) = \alpha$.

Замечание 4.1. Из Леммы 4.1 следует, что по следствию Теоремы 1.1

решение задачи квантильной оптимизации при $\alpha \in (p_*, p^*)$ эквивалентно решению задачи максимизации функции вероятности при $\varphi \in H_1$. Поэтому при $\alpha \in (p_*, p^*)$ можно заменить задачу (1.21) на задачу (1.22) с последующим поиском оптимального значения φ_α критерия $\varphi_\alpha(u)$ из условия $P_\varphi(u_\varphi) = \alpha$.

4.3.3. Свойства функции вероятности

Для облегчения выбора алгоритма поиска решения, а также для установления некоторых свойств решения, рассмотрим свойства функции вероятности $P_\varphi(u)$.

Лемма 4.2. Функция $P_\varphi(u) \equiv P_\varphi(u_0, u_1)$ возрастает по u_0 для любых $\varphi \in H_1, u_1 \in (0, 1]$.

Доказательство леммы 4.2. Вначале покажем, что первая производная функции $F(u_0, u_1, x)$, определенной в (4.1), по u_0 положительна для любых $u_1 \in (0, 1]$ и $x \in A$. Действительно,

$$\frac{\partial F(u_0, u_1, x)}{\partial u_0} = b(2 + 2u_0b + u_1x_1 + u_1x_2).$$

Так как $u_0 \geq 0$, $u_1 > 0$ и $x_1 > -1$, $x_2 > -1$, данная производная будет больше нуля, следовательно, функция дохода строго возрастает по u_0 при фиксированных $u_1 \in (0, 1]$ и $x \in A$.

Далее, поскольку для любых $\varphi \in H_1, u \in U_1$ $A \cap \{F(u, x) \leq \varphi\} \neq \emptyset$ и плотность равномерного распределения $p(x) > 0$ для всех $x \in A$, функция вероятности $P_\varphi(u) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P}\{F(u, X) \geq \varphi\}$ будет тоже строго возрастать по u_0 для любых $\varphi \in H_1, u_1 \in (0, 1]$.

В силу возрастания функции вероятности по одной из переменных (Лемма 4.2), ограниченности и структуры множества допустимых стратегий U_1 можно подставить ограничение $u_0 + u_1 = 1$ в функцию $P_\varphi(u)$, а дальнейшую оптимизацию проводить только по переменной u_1 :

$$\bar{P}_\varphi(u_1) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{u_0 \in [0, 1]} P_\varphi(u_0, u_1) = P_\varphi(1 - u_1, u_1).$$

Тогда функция вероятности при выполнении условия (4.9), которое преобразуется в неравенство

$$\varphi \leq (1 + (1 - u_1)b + u_1 \min(a_1, a_2))(1 + (1 - u_1)b - u_1), \quad (4.14)$$

примет вид:

$$\bar{P}_\varphi(u_1) = 1 - \frac{1}{cu_1^2} \left[(1+b)^2(1-u_1)^2 - \varphi + \varphi \ln \frac{\varphi}{(1+b)^2(1-u_1)^2} \right]. \quad (4.15)$$

Таким образом, задача (1.22) при $\varphi \in H_1$ эквивалентна задаче

$$u_1^\varphi = \arg \max_{u_1 \in (0,1]} \bar{P}_\varphi(u_1). \quad (4.16)$$

Лемма 4.3. Функция $\bar{P}_\varphi(u_1)$, определенная в (4.15), вогнута по $u_1 \in (0, 1]$ для любых $\varphi \in H_1$.

Доказательство леммы 4.3. Для доказательства этой леммы исследуем вторую производную от функции вероятности $\bar{P}_\varphi(u_1)$ по $u_1 \in (0, 1]$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{P}_\varphi(u_1)}{\partial^2 u_1} = \frac{1}{c^2 u_1^4} \left\{ (b+1)^2 u_1^2 + \frac{\varphi u_1^2}{(1-u_1)^2} + 4(b+1)^2 u_1(1-u_1) - \right. \\ \left. - \frac{4\varphi u_1}{(1-u_1)} + 3(b+1)^2(1-u_1)^2 - 3\varphi + 3\varphi \ln \frac{\varphi}{(b+1)^2(1-u_1)^2} \right\}. \end{aligned}$$

Если теперь положим $\varphi > (b+1)^2$, то

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{P}_\varphi(u_1)}{\partial^2 u_1} < \frac{2(b+1)^2}{c^2 u_1^4} \left\{ -u_1^2 - \frac{u_1^2}{(1-u_1)^2} - 4u_1(1-u_1) + \right. \\ \left. + \frac{4u_1}{(1-u_1)} - 3(1-u_1)^2 + 3 - 3 \ln \frac{1}{(1-u_1)^2} \right\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим выражение в фигурных скобках, так как множитель, стоящий при нем, заведомо больше нуля. Преобразуем его и обозначим:

$$f(u_1) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2u_1^3 - 9u_1^2 + 6u_1}{(1-u_1)^2} + 6 \ln(1-u_1).$$

Исследуем эту функцию. В нуле она, очевидно, равна нулю, т.е. $f(0) = 0$. Докажем, что на отрезке $(0, 1]$ данная функция убывает по u_1 . Для этого найдем ее производную:

$$\frac{\partial f(u_1)}{\partial u_1} = -\frac{2u_1^3}{(1-u_1)^3}.$$

Видно, что $\frac{\partial f(u_1)}{\partial u_1} < 0$ для любых $u_1 \in (0, 1)$. При $u_1 = 1$ производная равна $-\infty < 0$. Следовательно, сама функция $f(u_1) < 0$ при $u_1 \in (0, 1]$.

Таким образом, вторая производная от функции вероятности меньше нуля, что доказывает ее вогнутость для любых $u_1 \in (0, 1]$ при $\varphi > (b+1)^2$, т.е. при $\varphi \in H_1$.

Из Леммы 4.3 следует, что функция вероятности $\bar{P}_\varphi(u_1)$ имеет единственный максимум и, следовательно, задача (4.16) имеет единственное решение на

отрезке $u_1 \in (0, 1]$. Аналитически оно не находится из-за необходимости решения трансцендентного уравнения, а численно это решение можно легко найти в силу вогнутости исследуемой функции при использовании одного из известных методов выпуклой оптимизации [45, 47].

Таким образом, согласно замечанию к Лемме 4.1, решение u_α задачи (1.21) при $\alpha \in (p_*, p^*)$ можно найти из условия $\bar{P}_\varphi(u_1^\varphi) = \alpha$. При этом $u_1^\alpha = u_1^{\varphi_\alpha}$.

Пусть теперь $\alpha \in [p^*, 1]$. Для получения решения задачи (1.21) исследуем поведение функции вероятности $\bar{P}_\varphi(u_1^\varphi)$ на множестве $\varphi \in H \setminus H_1 = (0, (b+1)^2]$.

Лемма 4.4. *Оптимальное значение $\bar{P}_\varphi(u_1^\varphi)$ функции вероятности имеет разрыв по φ при $\varphi = (b+1)^2$, и $\bar{P}_\varphi(u_1^\varphi) = 1$, $u_1^\varphi = 0$ для всех $\varphi \in (0, (b+1)^2]$, причем $p^* = 1 - 2(b+1)^2/c$.*

Доказательство леммы 4.4. Найдем значение функции вероятности $\bar{P}_\varphi(u_1)$ при $\varphi = (b+1+\delta)^2$ и $u_1 = \varepsilon$, где $\varepsilon \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0$. При данных значениях параметров мы фактически пытаемся достичь уровня φ немного выше $(b+1)^2$ – максимального уровня дохода, обеспечиваемого банком с вероятностью 1, начав вкладывать деньги в ценные бумаги. А значение функции вероятности при данном φ и будет как раз искомым уровнем p_1 , определенным в (4.13):

$$\begin{aligned} \bar{P}_\varphi(u_1) = 1 - \lim_{\varepsilon, \delta \rightarrow 0} \frac{1}{c\varepsilon^2} \{ (1+b)^2(1-\varepsilon)^2 - (b+1+\delta)^2 + \\ + (b+1+\delta)^2 \ln \frac{(b+1+\delta)^2}{(1+b)^2(1-\varepsilon)^2} \}. \end{aligned}$$

Очевидно, что если у функции вероятности есть разрыв при $\varphi = (b+1)^2$, то его величина равна:

$$\begin{aligned} Z &\stackrel{def}{=} \lim_{\varepsilon, \delta \rightarrow 0} \frac{1}{c\varepsilon^2} \{ (1+b)^2(1-\varepsilon)^2 - (b+1+\delta)^2 + \\ &\quad + (b+1+\delta)^2 \ln \frac{(b+1+\delta)^2}{(1+b)^2(1-\varepsilon)^2} \} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(b+1)^2}{c\varepsilon^2} \left\{ (1-\varepsilon)^2 - 1 + \ln \frac{1}{(1-\varepsilon)^2} \right\} = \\ &= \frac{(b+1)^2}{c} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ 1 - 2 \frac{\varepsilon + \ln(1-\varepsilon)}{\varepsilon^2} \right\}. \end{aligned}$$

Разложим теперь $\ln(1-\varepsilon)$ в ряд по степеням ε до второй степени:

$$\ln(1-\varepsilon) = -\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} - o(\varepsilon^2).$$

Подставляя это разложение в выражение для величины разрыва, получим

$$Z = \frac{(b+1)^2}{c} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ 1 - 2 \frac{-\frac{\varepsilon^2}{2} - o(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2} \right\} = 2 \frac{(b+1)^2}{c}.$$

Следовательно, оптимальное значение функции вероятности действительно имеет разрыв при $\varphi = (b+1)^2$, величина которого равна $2(b+1)^2/c$. А искомый уровень вероятности

$$p^* = 1 - Z = 1 - \frac{2(b+1)^2}{c}.$$

Данный разрыв функции вероятности возникает из-за того, что повышая требуемый уровень φ над значением $(b+1)^2$, мы вынуждены вкладывать деньги в акции, из-за чего сразу появляется вероятность попадания в “критическую” область – т. е. область, из которой невозможно ни при каких стратегиях получить заданный уровень $\varphi > (b+1)^2$.

Для значений $\alpha \in [p^*, 1]$ решение задачи квантильной оптимизации легко найти в силу следствия (1.1), так как $u_{\varphi_\alpha} \in U_\alpha$. Поэтому решение u_α будет иметь вид:

$$u_0^\alpha = 1, u_1^\alpha = 0.$$

При этом оптимальное значение критерия будет равно $\varphi_\alpha(u_\alpha) = (b+1)^2$. Это вытекает из Леммы 4.4.

4.4. Оптимизация функции дохода по логарифмическому критерию

В данном разделе рассмотрим задачу оптимизации в постановке с логарифмическим критерием (4.3).

Пусть X_1 и X_2 - независимые случайные величины, имеющие равномерный закон распределения: $X_1 \sim \mathbf{R}[-1, a_1]$, $X_2 \sim \mathbf{R}[-1, a_2]$. Для решения задач оптимизации (4.3) вначале найдем аналитическое выражение для усредненной логарифмической функции:

$$\begin{aligned} L(u) &\stackrel{def}{=} M[\ln\{(1 + u_0 b + u_1 X_1)(1 + u_0 b + u_1 X_2)\}] = \\ &= \sum_{i=1}^2 \frac{1}{u_1(a_i + 1)} \{g(u, a_i) - g(u, -1) - (a_i + 1)u_1\}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

где

$$g(u, y) \stackrel{def}{=} (1 + u_0b + u_1y) \ln(1 + u_0b + u_1y).$$

Лемма 4.5. Функция $L(u) \equiv L(u_0, u_1)$ возрастает по u_0 для любого $u_1 \in [0, 1]$.

Доказательство леммы 4.5. Для доказательства леммы достаточно, чтобы первая производная $L(u_0, u_1)$ по u_0 была положительна.

$$\frac{\partial L(u_0, u_1)}{\partial u_0} = \frac{b}{u_1} \sum_{i=1}^2 \frac{\ln(1 + u_0b + u_1a_i) - \ln(1 + u_0b - u_1)}{(a_i + 1)}.$$

Очевидно, что $\ln(1 + u_0b + u_1a_i) > \ln(1 + u_0b - u_1)$ при $a_1 > -1$ и $a_2 > -1$, так как $\ln(t)$ – строго возрастающая по t функция. Следовательно, производная от усредненной логарифмической функции по u_0 положительна. Отсюда сама усредненная логарифмическая функция – строго возрастающая функция по u_0 для любого $u_1 \in [0, 1]$.

В силу возрастания усредненной логарифмической функции по одной из переменных (Лемма 4.5), ограниченности и структуры множества допустимых стратегий U можно подставить ограничение $u_0 + u_1 = 1$ в функцию $L(u)$ и дальнейшую оптимизацию проводить по одной из переменных. Введем обозначение

$$\bar{L}(u_1) \stackrel{def}{=} \max_{u_0 \in U} L(u_0, u_1) = L(1 - u_1, u_1).$$

Тогда усредненная логарифмическая функция примет вид:

$$\bar{L}(u_1) = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{u_1(a_i + 1)} \{g(u_1, a_i) - g(u_1, -1) - (a_i + 1)u_1\}, \quad (4.18)$$

где

$$g(u_1, y) \stackrel{def}{=} (1 + b(1 - u_1) + u_1y) \ln(1 + b(1 - u_1) + u_1y).$$

Лемма 4.6. Функция $\bar{L}(u_1)$, определенная в (4.18), строго вогнута по $u_1 \in [0, 1]$.

Доказательство леммы 4.6. Распишем усредненную логарифмическую функцию в таком виде:

$$L(u_1) = M[\ln(1 + (1 - u_1)b + u_1X_1)] + M[\ln(1 + (1 - u_1)b + u_1X_2)].$$

Математическое ожидание вогнутой функции – вогнутая функция, и сумма двух функций – вогнутая функция. Следовательно, для доказательства

вогнутости усредненной логарифмической функции достаточно доказать вогнутость функции

$$l(u_1) \stackrel{def}{=} \ln(1 + (1 - u_1)b + u_1x)$$

для всех x .

Для этого возьмем от нее вторую производную:

$$\frac{\partial^2 l(u_1)}{\partial^2 u_1} = -\frac{(x - b)^2}{(1 + b(1 - u_1) + u_1x)^2}.$$

Очевидно, что вторая производная функции $l(u_1)$ отрицательна, следовательно, сама функция вогнута, а значит, вогнута и усредненная логарифмическая функция, что и требовалось доказать.

Из Леммы 4.6 следует, что усредненная логарифмическая функция имеет единственный максимум и, следовательно, задача имеет единственное решение на отрезке $u_1 \in [0, 1]$. Аналитически оно снова не может быть найдено в силу необходимости решения трансцендентного уравнения, а численно это решение находится при использовании одного из известных методов выпуклой оптимизации [45, 47] в силу строгой вогнутости скалярной функции.

4.5. Оптимизация функции дохода на доверительном множестве

В данном разделе рассмотрим задачу минимаксной оптимизации функции квантили в постановке (4.4) для всех $\alpha \in (0, 1)$.

Определим доверительное множество (рис. 4.2):

$$S_\alpha \stackrel{def}{=} \{X : -1 \leq X_1 \leq a_1, -1 \leq X_2 \leq a_2, X_1 + X_2 \geq l_\alpha\}, \quad (4.19)$$

где l_α выбирается такой, что $\mathcal{P}(S_\alpha) = \alpha$.

Тогда согласно [72] оценка функции квантили будет выглядеть следующим образом:

$$\hat{\varphi}_\alpha(u) \stackrel{def}{=} \min_{x \in S_\alpha} F(u, x) \leq \varphi_\alpha(u). \quad (4.20)$$

Таким образом, максиминная задача (4.4) примет вид:

$$\hat{u}_\alpha = \arg \max_{u \in U} \hat{\varphi}_\alpha(u). \quad (4.21)$$

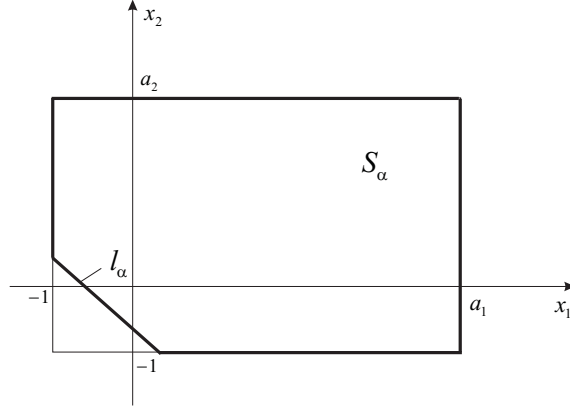


Рис. 4.2. Доверительное множество.

Отыщем ее решение. Вначале найдем l_α из условия $\mathcal{P}(S_\alpha) = \alpha$:

$$l_\alpha = \begin{cases} \sqrt{2(1-\alpha)c} - 2, & \alpha > 1 - \alpha_0, \\ \frac{(1-\alpha)c}{a_*+1} + \frac{a_*+1}{2} - 2, & \alpha_0 \leq \alpha \leq 1 - \alpha_0, \\ a_1 + a_2 - \sqrt{2\alpha c}, & \alpha < \alpha_0. \end{cases} \quad (4.22)$$

Теперь найдем оценку функции квантили:

$$\hat{\varphi}_\alpha(u) = \begin{cases} (1 + u_0b - u_1)(1 + u_0b + (l_\alpha + 1)u_1), & \alpha > \alpha_0, \\ (1 + u_0b + a^*u_1)(1 + u_0b + (l_\alpha - a^*)u_1), & \alpha \leq \alpha_0. \end{cases} \quad (4.23)$$

Здесь

$$\alpha_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2c}(a_* + 1)^2, a_* \stackrel{\text{def}}{=} \min\{a_1, a_2\}, a^* \stackrel{\text{def}}{=} \max\{a_1, a_2\}.$$

Лемма 4.7. *Функция $\hat{\varphi}_\alpha(u) \equiv \hat{\varphi}_\alpha(u_0, u_1)$ строго возрастает по u_0 для любого $u_1 \in [0, 1]$.*

Доказательство леммы 4.7. Для доказательства леммы достаточно, чтобы первая производная $\hat{\varphi}_\alpha(u_0, u_1)$ по u_0 была положительна. Рассмотрим

$$\frac{\partial \hat{\varphi}_\alpha(u_0, u_1)}{\partial u_0} = b(2 + 2u_0b + l_\alpha u_1).$$

В силу того, что $l_\alpha < 2$ при $\alpha < 1$, производная оценки функции квантили будет положительна. При $\alpha = 1$ решением задачи, очевидно, будет $u_0 = 1, u_1 = 0$ и, следовательно, производная снова будет положительна. Отсюда оценка функции квантили на данном доверительном множестве – строго возрастающая функция по u_0 .

В силу возрастания оценки функции квантили по одной из переменных (Лемма 4.7), ограниченности и структуры множества допустимых стратегий U можно подставить ограничение $u_0 + u_1 = 1$ в функцию $\hat{\varphi}_\alpha(u)$ и дальнейшую оптимизацию проводить по одной из переменных:

$$\bar{\hat{\varphi}}_\alpha(u_1) \stackrel{def}{=} \max_{u_0 \in U} \hat{\varphi}_\alpha(u_0, u_1) = \hat{\varphi}_\alpha(1 - u_1, u_1).$$

Тогда значительно упрощается поиск оптимальной стратегии в задаче оптимизации оценки функции квантили:

$$\hat{u}_1^\alpha = \arg \max_{u_1 \in [0,1]} \bar{\hat{\varphi}}_\alpha(u_1). \quad (4.24)$$

Решение данной задачи можно найти аналитически. Оно имеет вид:

$$\hat{u}_1^\alpha = \begin{cases} \begin{cases} 0, & b - l_\alpha - 1 > 0 \\ \max \left\{ 0, \frac{1}{2} - \frac{b+1}{2(l_\alpha+1-b)} \right\}, & b - l_\alpha - 1 \leq 0 \end{cases}, & \alpha > \alpha_0, \\ \begin{cases} \begin{cases} 0, & \bar{\hat{\varphi}}_\alpha(0) > \bar{\hat{\varphi}}_\alpha(1) \\ 1, & \bar{\hat{\varphi}}_\alpha(1) \leq \bar{\hat{\varphi}}_\alpha(0) \end{cases}, & \gamma > 0 \\ \min \left\{ 1, \max \left\{ 0, -\frac{(b+1)(l_\alpha-2b)}{2(a^*-b)(l_\alpha-a^*-b)} \right\} \right\}, & \gamma \leq 0 \end{cases}, & \alpha \leq \alpha_0, \end{cases} \quad (4.25)$$

где $\gamma = (a^* - b)(l_\alpha - a^* - b) > 0$.

4.6. Оптимизация функции дохода по критерию интегральной квантили

В данном разделе рассмотрим задачу оптимизации интегральной функции квантили в постановке (4.5) для всех $\alpha \in (0, 1)$.

Исследуем зависимость $\psi_\alpha(v)$, где обозначение вектора управления u заменено на v в целях различимости оптимальных стратегий по квантильному критерию u_α и по критерию интегральной квантили v_α на графиках в численном примере.

Лемма 4.8. Функция $\psi_\alpha(v) \equiv \psi_\alpha(v_0, v_1)$ не убывает по v_0 для любого $v_1 \in [0, 1]$.

Доказательство леммы 4.8. В доказательстве Леммы 4.2 показано, что первая производная $F(v_0, v_1, x)$ по v_0 положительна.

Так как согласно [81]

$$\psi_\alpha(v_0, v_1) = \arg \max_{\varphi \in \mathbb{R}^1} \left\{ \varphi - \frac{1}{1-\alpha} \mathbf{M} [\max\{0, \varphi - F(v_0, v_1, X)\}] \right\},$$

то $\psi_\alpha(v_0, v_1)$ будет не убывать по v_0 для всех $v_1 \in [0, 1]$ и $x \in A$. Действительно, функция $-F(v_0, v_1, x)$ является строго убывающей по v_0 , поэтому функция $\max\{0, (\varphi - F(v_0, v_1, x))\}$ будет невозрастающей по v_0 для всех $v_1 \in [0, 1]$, $x \in A$ и $\varphi \in \mathbb{R}^1$. Следовательно, функция

$$f(v_0, v_1, \varphi) \stackrel{def}{=} \left\{ \varphi - \frac{1}{1-\alpha} \mathbf{M}[\max\{0, \varphi - F(v_0, v_1, X)\}] \right\}$$

будет неубывающей по v_0 для всех $v_1 \in [0, 1]$ и $\varphi \in \mathbb{R}^1$. А значит, и $\psi_\alpha(v_0, v_1)$ – неубывающая функция по v_0 для всех $v_1 \in [0, 1]$.

В силу возрастания функции интегральной квантили по одной из переменных, ограниченности и структуры множества допустимых стратегий U можно подставить ограничение $v_0 + v_1 = 1$ в функцию $\psi_\alpha(v)$ и дальнейшую оптимизацию проводить только по v_1 :

$$v_1^\alpha = \arg \max_{v_1 \in [0,1]} \bar{\psi}_\alpha(v_1), \quad (4.26)$$

где

$$\bar{\psi}_\alpha(v_1) \stackrel{def}{=} \psi_\alpha(1 - v_1, v_1).$$

Решение задачи (4.26) не удастся получить аналитически, поэтому в данном случае воспользуемся методом статистических испытаний для поиска зависимости функции интегральной квантили от стратегии u .

Пусть имеются выборки $\{X_1^1, X_1^2, \dots, X_1^n\}$ и $\{X_2^1, X_2^2, \dots, X_2^n\}$, генерирующие для фиксированного u выборку $\{F_1(u), F_2(u), \dots, F_n(u)\}$, где $F_i(u) \stackrel{def}{=} F(u, X^i)$ – i -ая реализация $F(u, X)$. Выборка $\{F_1(u), F_2(u), \dots, F_n(u)\}$ упорядочивается, строится вариационный ряд выборки:

$$F_1^n(u) \leq F_2^n(u) \leq \dots \leq F_n^n(u),$$

где F_i^n – порядковая статистика с номером $i, i = \overline{1, n}$, для фиксированного u .

Оценка функции квантили по выборке $F_i(u)$, $i = \overline{1, n}$, будет иметь вид (1.2):

$$\hat{\varphi}_\alpha(u) \stackrel{def}{=} F_{n-[n\alpha]-1}^n(u), \quad (4.27)$$

где $[n\alpha]$ – целая часть числа $n\alpha$. Данная операция означает выбор элемента вариационного ряда выборки $F_i(u)$, $i = \overline{1, n}$, с номером $n - [n\alpha]$. Такая оценка, как известно [20], асимптотически нормальна.

Оценку функции интегральной квантили по выборке $F_i(u)$, $i = \overline{1, n}$ примет вид (1.3):

$$\hat{\psi}_\alpha(u) \stackrel{def}{=} \frac{\sum_{i=1}^{n-[n\alpha]-1} F_i^n(u)}{n - [n\alpha] - 1}. \quad (4.28)$$

Данная операция означает усреднение оценки функции квантили (4.27) по уровням от 0 до $1 - \alpha$.

Оптимальные стратегии для задачи максимизации $\bar{\psi}_\alpha(v_1)$ по v_1 можно найти, решая задачу оптимизации для каждого α из $[0, 1]$. Подставляя оптимальные стратегии в функцию интегральной квантили, можно найти ее оптимальное значение в зависимости от α . Недостатком описанного численного подхода является приближенность решения, точность которого существенно зависит от объема выборки.

4.7. Численный пример

4.7.1. Постановка задачи

Рассмотрим задачи оптимизации (4.2), (4.3), (4.4), (4.5) с целевой функцией (4.1) для сравнения эффективности стратегий, полученных при оптимизации по рассмотренным критериям.

Положим параметры доходностей рискованных и безрисковых финансовых инструментов равными, например, $a_1 = 1$, $a_2 = 2.25$, $b = 0.1$. Тогда функция (4.1) будет выглядеть следующим образом:

$$F(u, X) \stackrel{def}{=} (1 + 0.1 \cdot u_0 + u_1 X_1)(1 + 0.1 \cdot u_0 + u_1 X_2), \quad (4.29)$$

где u_0 – доля капитала, вкладываемая в безрисковый финансовый инструмент, а u_1 – в рискованный. Случайные величины X_1 и X_2 предполагаются независимыми в совокупности и имеющими равномерные распределения с носителями $[-1, 1]$ и $[-1, 2.25]$ соответственно. То есть максимальная прибыль от первой ценной бумаги будет равна 1, от второй бумаги составит 2.25. Напомним, что множество допустимых стратегий игрока имеет вид:

$$U \stackrel{def}{=} \{u_0, u_1 : u_0 + u_1 \leq 1, u_0 \geq 0, u_1 \geq 0\}.$$

Решение задачи ищется аналитически с применением полученных выражений для задачи оптимизации функции дохода на доверительном множестве, численно с применением методов выпуклой оптимизации для задач оптимизации по квантильному и логарифмическому критериям, методом статистических испытаний в постановке с критерием интегральной квантили. Результаты решения данных задач сравниваются между собой и анализируются.

Кроме того, проводится численное моделирование с последующей оптимизацией методом стохастических квазиградиентов [19] функции дохода по квантильному критерию (4.2) с использованием выборочной оценки квантили и предложенных в Главе 3 бутстреп-процедур для оценки квантили. Полученные результаты для бутстрепа и выборочной оценок сравниваются, показывается преимущество бутстрепирования в задачах квантильной оптимизации с использованием численных методов стохастического программирования.

Для проведения расчетов используется компьютерное моделирование. Разработан пакет прикладных программ в средах программирования MathCad и Visual C++.

4.7.2. Сравнение оптимальных стратегий и соответствующих им значений критериев

Семейство оптимальных стратегий u_1 по четырем критериям, описанным выше, в зависимости от уровня вероятности α показано на рис. 4.3. Стратегии найдены как решения соответствующих задач оптимизации (4.2)-(4.5) с помощью расчетов на ЭВМ. При нахождении квантильных стратегий использовалось полное выражение для функции вероятности, более сложное, чем (4.15), которое, как было замечено выше, верно только при $\varphi \in H_1$.

Здесь u_1^α – стратегия, полученная при оптимизации квантильного критерия (4.2), v_1^α – стратегия, полученная при оптимизации критерия интегральной квантили (4.5), \hat{u}_1^α – стратегия, полученная при оптимизации минимаксного критерия (4.4), v_1^L – стратегия, полученная при оптимизации логарифмического критерия Келли (4.3).

Значения рассматриваемых критериев для различных оптимальных стратегий приведены на рис. 4.4. Построение интегральной функции квантили проводилось

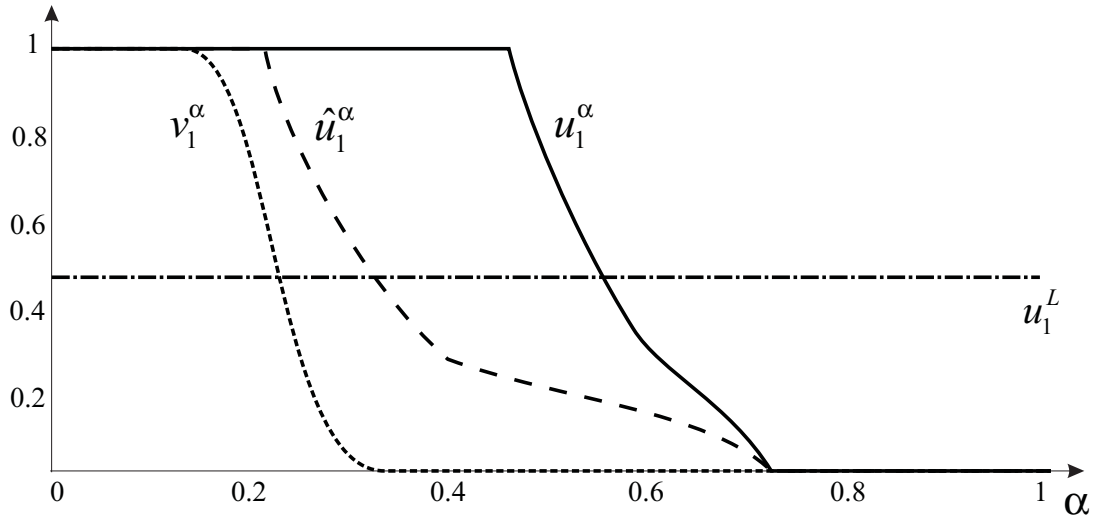


Рис. 4.3. Оптимальные стратегии.

методом статистических испытаний, описанном в разделе 4.5, на ЭВМ.

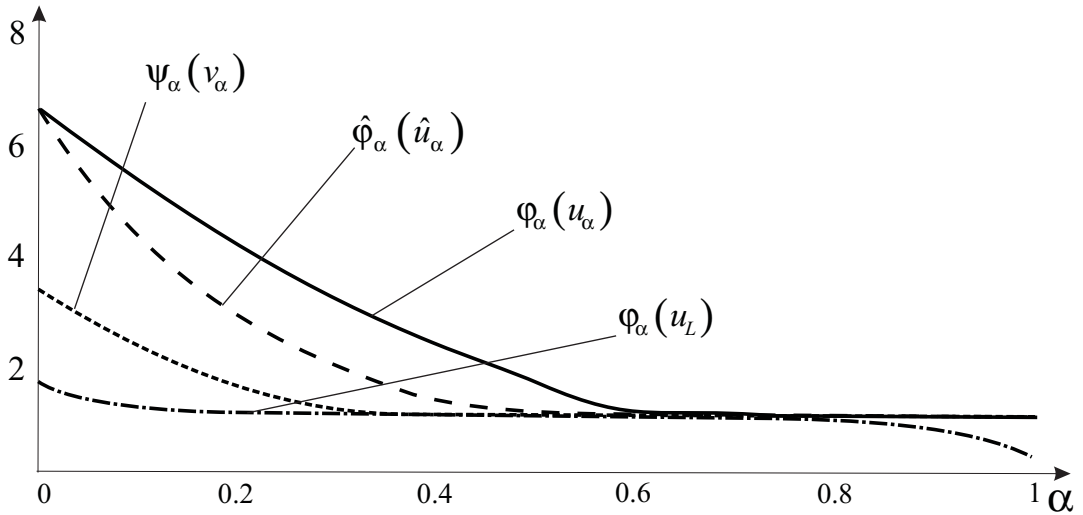


Рис. 4.4. Доход.

Следует отметить, что при вычислении $\varphi_\alpha(u_\alpha)$ и $\psi_\alpha(v_\alpha)$ с помощью метода статистических испытаний точность оценки интегральной функции квантили оказывается выше точности оценки функции квантили при одном и том же объеме выборки. Эффект сглаживания связан с интегральной природой функции $\psi_\alpha(v_\alpha)$.

Вероятности оказаться в убытке (4.6), подсчитанные для различных критериев, приведены на рис. 4.5. Данные зависимости от α были найдены с использованием метода статистических испытаний.

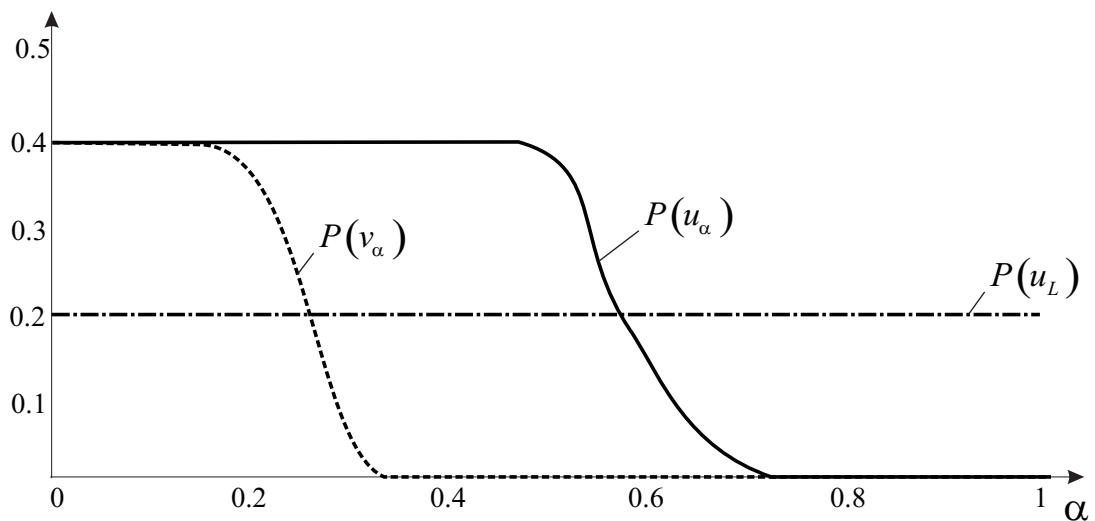


Рис. 4.5. Вероятность оказаться в убытке.

Средний доход $M[F(u, X)]$ и средние убытки (4.7) для квантильного и логарифмического критериев приведены на рис. 4.6. Зависимости от α были также найдены методом статистических испытаний.

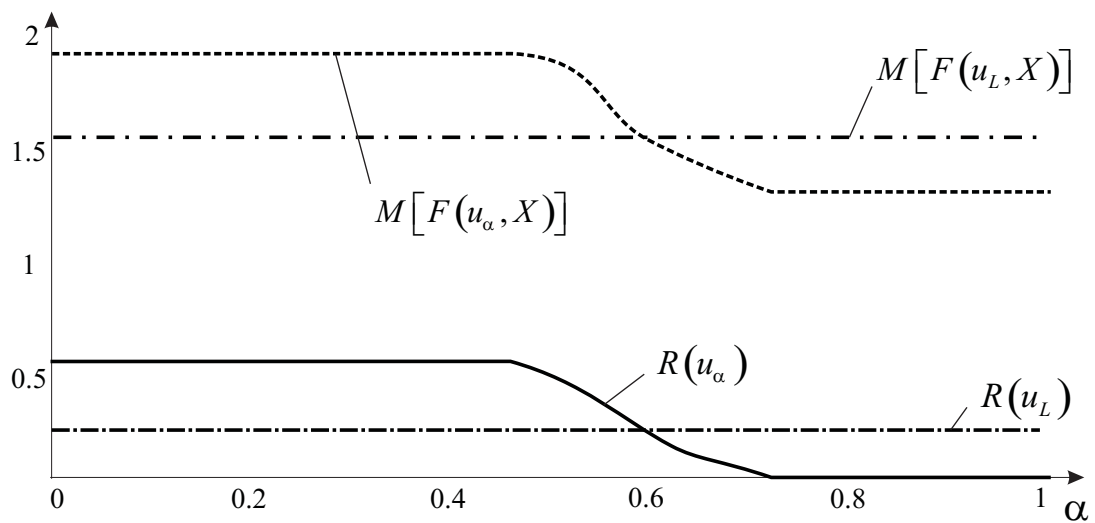


Рис. 4.6. Средний доход и средние потери.

Из рис. 4.3 видно, что стратегия u_α , полученная при оптимизации интегральной функции квантили, малоприспособна для использования, так как является сильно перестраховочной. Эта стратегия дает невысокое значение критерия (рис. 4.4), но при этом вероятность оказаться в убытке (рис. 4.5) будет равна нулю уже при выборе доверительного уровня больше $\alpha = 0.32$. Также отметим, что функция

интегральной квантили получается гораздо более гладкой, чем функция квантили. Этот факт не только облегчает поиск оптимальных стратегий, но и влияет на точность найденных решений.

Также заметим, что часть капитала, вкладываемая в банк согласно стратегии u_α , равна единице уже при вероятности $\alpha = 0.677$. Т. е. начиная вкладывать деньги в акции, игрок уже сильно рискует: $\alpha \leq 0.677$. Этот интересный факт объясняется разрывом функции вероятности $P_\varphi(u_\varphi)$ при уровне $\varphi = (b + 1)^2$ (Лемма 4.4).

Логарифмическая стратегия, поделившая в данном примере капитал практически пополам между акциями и безрисковыми вложениями, с вероятностью 0.2 может привести к убыткам (рис. 4.5) в размере почти четверти начального капитала (рис. 4.6). При этом значение квантильного критерия (рис. 4.4) будет наименьшим из рассмотренных. Поэтому использование логарифмической стратегии при двухшаговой игре на бирже оказывается малоэффективным.

На рис. 4.7 и 4.8 приведены зависимости функции квантили от α для различных стратегий. Значение квантили на оптимальных стратегиях u_α и стратегиях, оптимальных для доверительной оценки квантили \hat{u}_α , приведены на рис. 4.7. Значение квантили на оптимальных стратегиях u_α и стратегиях, оптимальных для интегральной функции квантили v_α , приведены на рис. 4.8.

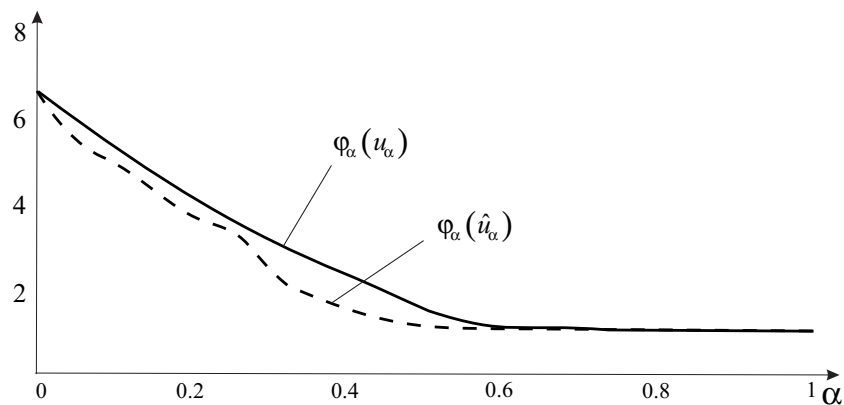


Рис. 4.7. Значение квантили на оптимальных и доверительных стратегиях.

Значения квантили на оптимальных стратегиях u_α и доверительных стратегиях \hat{u}_α (рис. 4.7) больше совпадают, чем значения квантили на

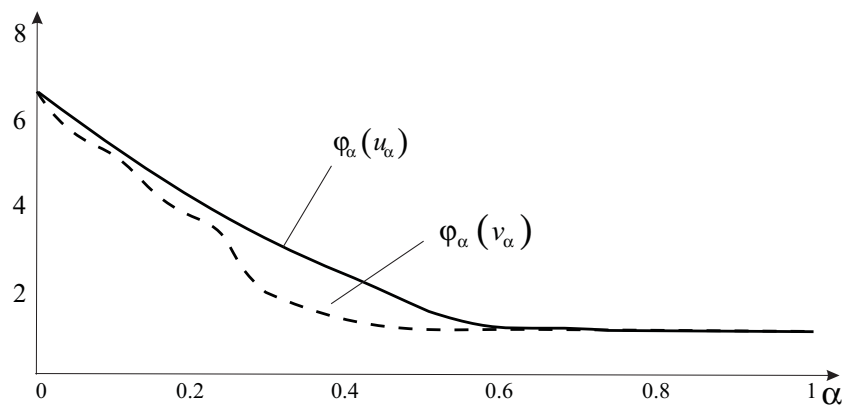


Рис. 4.8. Значение квантили на оптимальных стратегиях и стратегиях интегральной квантили.

стратегиях u_α и v_α . Этот эффект имеет место даже при использовании в минимаксном подходе довольно простого доверительного множества. Плюсом доверительных стратегий является также то, что значение квантильного критерия на них практически совпадает с оптимальным значением самого квантильного критерия.

Отметим, что с помощью метода статистических испытаний были найдены оптимальные стратегии для рассматриваемых задач и при использовании законов распределений случайных доходностей X_1 и X_2 , отличных от равномерного, например, усеченного нормального и усеченного экспоненциального. Характер всех приведенных выше зависимостей от α остался примерно таким же: то есть оптимальное управление u_1 равно единице при значениях α , близких к нулю, после этого следует плавный спад значения стратегии до нуля при значениях α , близких к единице.

Таким образом, наилучший результат в вышеприведенных исследованиях был достигнут с использованием квантильного критерия. Доход, гарантируемый с вероятностью α , оказался выше значений дохода для других критериев. При этом средние потери при использовании квантильного критерия значительно меньше ожидаемого дохода.

4.7.3. Применение метода бутстрепа для решения задачи квантильной оптимизации

В данном параграфе предлагается сравнить точность выборочной оценки квантили с точностью бутстреп-оценки квантили на примере модели двухшагового планирования портфеля ценных бумаг.

Рассматривается задача (4.29) в квантильной постановке (4.2). При ее решении применяется статистическое компьютерное моделирование. Соответствующий пакет прикладных программ и его графический интерфейс (см. рис. 4.9 и 4.10) реализован на ЭВМ в средах MathCad и Visual C++.

Пусть распределение случайных величин X_1 и X_2 не известно, а даны лишь выборки $\{X_1^1, X_1^2, \dots, X_1^n\}$ и $\{X_2^1, X_2^2, \dots, X_2^n\}$, генерирующие для фиксированного u выборку $\{F_1(u), F_2(u), \dots, F_n(u)\}$, где $F_i(u) \stackrel{\text{def}}{=} F(u, X^i)$ – i -ая реализация $F(u, X)$. Здесь n – некоторое число реализаций. Очевидно, что в данном случае аналитически решить задачу планирования портфеля ценных бумаг (4.29) не представляется возможным, поэтому используется метод статистических испытаний. Выборка $\{F_1(u), F_2(u), \dots, F_n(u)\}$ упорядочивается, строится вариационный ряд выборки:

$$F_1^n(u) \leq F_2^n(u) \leq \dots \leq F_n^n(u),$$

где F_i^n – порядковая статистика с номером $i, i = \overline{1, n}$, для фиксированного u .

Аналогично и для бутстреп-выборок – i -тые бутстреп-выборки $\{X_{1i}^{*1}, X_{1i}^{*2}, \dots, X_{1i}^{*n}\}$ и $\{X_{2i}^{*1}, X_{2i}^{*2}, \dots, X_{2i}^{*n}\}$ будут генерировать для фиксированного u выборку $\{F_{1i}^*(u), F_{2i}^*(u), \dots, F_{ni}^*(u)\}$.

Перестроенная для задачи максимизации i -тая несглаженная бутстреп-оценка функции квантили, аналогично с (4.27), по бутстреп-выборке $F_i^*(u)$, $i = \overline{1, n}$ примет вид:

$$\hat{\varphi}_{\alpha i}^*(u) \stackrel{\text{def}}{=} F_{n-[n\alpha]-1}^{*n}(u). \quad (4.30)$$

Аналогично получается сглаженная бутстреп-оценка $\tilde{\varphi}_{\alpha i}^*(u)$.

Несглаженная (3.38) и сглаженная (3.53) бутстреп-оценки квантили для функции потерь они будут выглядеть следующим образом:

$$\hat{S}_{\alpha}^*(m, u) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \hat{\varphi}(u)_{\alpha i}^*,$$

$$\hat{R}_\alpha^*(m, u) \stackrel{def}{=} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \tilde{\varphi}(u)_{\alpha i}^*,$$

где \hat{S}_α^* – несглаженная, а \hat{R}_α^* – сглаженная бутстреп-оценки квантили, m – параметр бутстреп-процедуры, $\hat{\varphi}_{\alpha i}^*$ и $\tilde{\varphi}_{\alpha i}^*$ – реализации несглаженной и сглаженной бутстреп-оценок квантили по i -той выборке.

Оптимизация функции квантили проводилась двумя различными методами – методом дихотомии, представляющий собой наиболее робастную процедуру оптимизации, и методом стохастических квазиградиентов. Оба метода дали примерно одинаковый результат. Значения стратегий и соответствующих им критериев сравним с полученными в разделе 4.2 оптимальными значениями стратегий и критерия. Для определенности положим размер выборки n равный 100, а параметр бутстреп-процедур m равный 100.

На рис. 4.9 изображены оптимальная стратегия u_1^α , стратегия \hat{u}_1^α , полученная при оптимизации выборочной функции квантили, стратегии $\hat{u}_1^{S\alpha}$ и $\hat{u}_1^{R\alpha}$, полученные при оптимизации с использованием несглаженной и сглаженной бутстреп-оценок квантили соответственно.

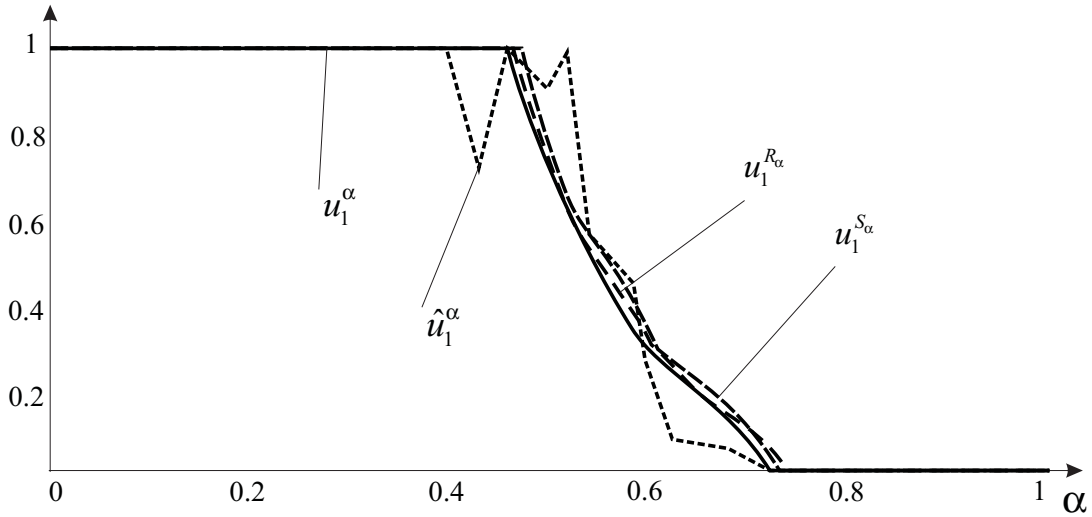


Рис. 4.9. Оптимальные стратегии.

Из рис. 4.9 видно, что стратегии, полученные при использовании бутстреп-процедур значительно ближе к истинному значению квантили. При этом стратегия $\hat{u}_1^{R\alpha}$ практически совпадает с истинным значением стратегии u_1^α . Стратегия же \hat{u}_1^α , полученная при оптимизации выборочной функции квантили не только

проигрывает по точности обеим стратегиям, полученным при оптимизации с использованием бутстреп-оценок, но также наблюдается довольно сильное ее “биение”. Стратегии $\hat{u}_1^{S\alpha}$ и $\hat{u}_1^{R\alpha}$ значительно глаже.

На рис. 4.10 показаны соответствующие стратегиям на рис. 4.9 значения критериев.

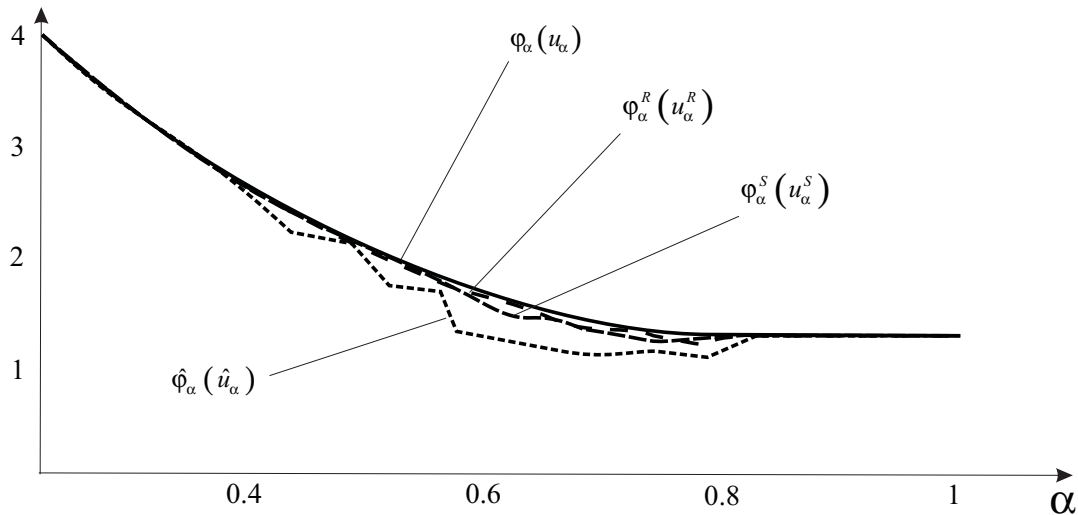


Рис. 4.10. Оптимальное значение критерия.

Из рис. 4.9 еще рано было делать выводы об улучшениях, связанных с использованием бутстреп-оценки квантили вместо выборочной оценки при оптимизации, так как большой разброс в значениях стратегии может практически не отразиться на значении критерия. Но из рис. 4.10 видно, что значение критерия, полученное при оптимизации выборочной функции квантили, гораздо меньше оптимального значения и значений критериев, полученных при оптимизации с использованием бутстреп-оценки функции квантили.

Таким образом, использование бутстрепирования при решении задач численной оптимизации стохастических критериев, выглядит очень перспективно, особенно при небольших экспериментальных объемах данных. Полученные бутстреп-стратегии гораздо глаже выборочных и гораздо ближе к истинным, чем выборочные. При этом значение бутстреп-критерия получается ближе к оптимальному.

Заключение

В диссертации исследуются задачи стохастического программирования с функциями вероятности и квантили. В частности, в первой главе диссертации доказана теорема эквивалентности задач в вероятностной и квантильной постановке, область применения данной теоремы расширена за счет приведенного следствия. Во второй главе построены детерминированные эквиваленты для различных постановок задач стохастического программирования с вероятностным, квантильным критериями, а также для задачи с вероятностным ограничением. Исследованы свойства выпуклости полученных детерминированных эквивалентов, а также самих функций вероятности и квантили. Указаны преимущества построенных детерминированных эквивалентов по сравнению с исходными задачами оптимизации. В третьей главе проведен анализ асимптотической погрешности выборочной оценки функции квантили для различных распределений, а также предложена и доказана процедура бутстреппирования выборочной оценки квантили, которая за счет дополнительной обработки данных позволяет сократить объем используемой выборки или увеличить точность оценивания квантили при неизменном объеме выборки. В четвертой главе решена задача оптимизации двухшаговой модели вложения капитала по различным вероятностным критериям. Также рассмотрен пример применения метода бутстрепа при численной оптимизации функции квантили для данной задачи. Показано преимущество использования бутстреп-процедуры оценки квантили вместо классического выборочного оценивания.

Основным итогом диссертации является развитие метода детерминированного эквивалента и построение алгоритмов бутстреппирования квантили, которые позволяют решать задачи стохастического программирования с вероятностными критериями как аналитически, так и численно.

Основные результаты, выносимые на защиту:

- 1) построены детерминированные эквиваленты вероятностных задач для различных случаев целевых функций, исследованы свойства выпуклости как функций вероятности и квантили, так и соответствующих им детерминированных эквивалентов;
- 2) получены аналитические оценки асимптотической точности выборочной оценки квантили для равномерного, экспоненциального, нормального распределений, распределения Коши;
- 3) разработаны несглаженная и сглаженная бутстреп-процедуры для оценки квантили, доказана их сходимость по вероятности и почти наверное;
- 4) получена аналитическая аппроксимация квантили гауссовского распределения;
- 5) решена задача оптимизации двухшаговой модели портфельного инвестирования капитала по различным вероятностным критериям, произведено сравнение выборочной и бутстреп оценок квантили с истинным значением квантили.

Список литературы

1. *Беллман Р.* Динамическое программирование. М.: Ин.Лит., 1960.
2. *Брайсон А., Хо Ю-Ши* Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972.
3. *Вазан М.* Стохастическая аппроксимация. М.: Мир, 1972.
4. *Вишняков Б.В., Кибзун А.И.* Оптимизация двухшаговой модели изменения капитала по различным статистическим критериям // Автоматика и Телемеханика, 2005, No. 7. С. 126 – 143.
5. *Вишняков Б.В., Кибзун А.И.* Детерминированные эквиваленты для задач стохастического программирования с вероятностными критериями // Автоматика и Телемеханика, 2006, No. 6. С. 126 – 143.
6. *Вишняков Б.В., Кибзун А.И.* Применение метода бутстрепа для оценивания функции квантили // Автоматика и Телемеханика, 2007, No. 11. С. 46 – 60.
7. *Вишняков Б.В., Визильтер Ю.В.* Исследование поведения авторегрессионных фильтров в задаче выделения и анализа движения на цифровых видеопоследовательностях // Вестник компьютерных и информационных технологий, 2008, No. 8. С. 2 – 8.
8. *Вишняков Б.В.* Оптимизация двухшаговой модели изменения капитала // Проектирование, конструирование и производство авиационной техники. М: изд-во МАИ, 2005, С. 140 – 145.
9. *Вишняков Б.В., Кибзун А.И.* Задача квантильной оптимизации билинейной функции // труды межд. конф. “Моделирование и анализ безопасности и риска в сложных системах”, Санкт-Петербург, 2004, С. 74 – 79.

10. Вишняков Б.В., Кибзун А.И. Меры риска в двухшаговой модели изменения капитала // труды межд. конф. “Моделирование и анализ безопасности и риска в сложных системах”, Санкт-Петербург, 2005, С. 93 – 98.
11. Вишняков Б.В. Оптимизация двухшаговой модели изменения капитала // тезисы конференции “Новые информационные технологии в научных исследованиях и образовании”, Рязань, 2005, С. 137 – 138.
12. Вишняков Б.В., Кибзун А.И. Детерминированные эквиваленты для вероятностных задач оптимизации // тезисы межд. конф. “Системный анализ, управление и навигация”, Евпатория, 2006, С. 175.
13. Вишняков Б.В., Кибзун А.И. Применение метода бутстрепа для оценивания терминальной точности движущегося объекта // тезисы межд. конф. “Системный анализ, управление и навигация”, Евпатория, 2007, С. 132 – 133.
14. Вишняков Б.В., Кибзун А.И. Применение и сравнение методов несглаженного и сглаженного бутстрепа для оценивания квантили // тезисы межд. конф. “Системный анализ, управление и навигация”, Евпатория, 2008, С. 257 – 259.
15. Галамбош Я. Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик. М.: Наука, 1984.
16. Григорьев П.В., Кан Ю.С. Оптимальное управление по квантильному критерию портфелем ценных бумаг // АиТ, 2004. No. 2. С. 179-197.
17. Девит Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1978.
18. Дейвид Г. Порядковые статистики. М.: Наука, 1979.
19. Ермольев Ю.М. Методы стохастического программирования. М.: Наука, 1976.
20. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Математическая статистика. М.: Высшая школа, 1984.
21. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971.

22. Кан Ю.С. Квазиградиентный алгоритм минимизации функции квантили // Известия РАН. Теория и системы управления, 1996. No.2, С. 81 – 86.
23. Кан Ю.С. О сходимости одного стохастического квазиградиентного алгоритма оптимизации // АиТ, 2003. No.2, С. 100 – 116.
24. Кан Ю.С. Оптимизация управления по квантильному критерию // АиТ, 2001. No.5, С. 77 – 88.
25. Кан Ю.С., Кибзун А.И. Свойства выпуклости функций вероятности и квантили в задачах оптимизации // АиТ, 1996. No.3, С. 82 – 102.
26. Кан Ю.С., Тузов Н.В. Минимизация квантили нормального распределения билинейной функции потерь // АиТ, 1998. No.11. С. 82 – 92.
27. Кан Ю.С. О сходимости одного стохастического квазиградиентного алгоритма квантильной оптимизации // АиТ, 2003. No 1. С 100 – 117.
28. Кан Ю.С., Сысоев А.В. Сравнение квантильного и гарантирующего подходов при анализе систем // АиТ, 2007. No 1. С. 57 – 67.
29. Кан Ю.С. Оптимизация портфелей ценных бумаг с учетом риска. М.: МАИ, 2008.
30. Кенуй М.Г. Быстрые статические вычисления. М.: Статистика, 1979.
31. Кибзун А.И. О наихудшем распределении в задачах стохастической оптимизации с функцией вероятности // АиТ, 1998. No.11. С. 104 – 116.
32. Кибзун А.И., Кузнецов Е.А. Оптимальное управление портфелем ценных бумаг // АиТ, 2001. No.9. С. 101 – 113.
33. Кибзун А.И., Кузнецов Е.А. Сравнение критериев VaR и CVaR // АиТ, 2003. No.7. С. 153 – 165.
34. Кибзун А.И., Кузнецов Е.А. Выпуклые свойства функции квантили в задачах стохастического программирования // АиТ, 2004. No.2. С. 33 – 42.
35. Кибзун А.И., Малышев В.В. Анализ и синтез высокоточного управления летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1987.

36. *Кибзун А.И., Матвеев Е.Л.* Оптимизация функции квантили на основе ядерных оценок // *АиТ*, 2007. No.1. С 187 – 189.
37. *Киреев В.И., Пантелеев А.В.* Численные методы в примерах и задачах. М., Высшая школа, 2008.
38. *Колмогоров А.Н.* Интерполирование и экстраполирование случайных последовательностей. // *Изв. АН СССР*, 1941, Т.5. No 1. С. 3 – 14.
39. *Лепп Р.* Детерминистические эквиваленты задач стохастического программирования с эллиптически симметричными распределениями // *Изв. АН ЭССР. Физ.-мат.*, 1979. No.2(28). С. 158 – 160.
40. *Лепп Р.* Исследования эстонских ученых по стохастическому программированию // *Изв. АН ЭССР. Физ.-мат.*, 1982. No.8. С. 57 – 64.
41. *Невельсон М.Б., Хасъминский Р.З.* Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1972.
42. *Панарин С.И., Вишняков Б.В., Кибзун А.И.* Оболочка системы дистанционного обучения по математическим курсам // *Вестник компьютерных и информационных технологий*, 2008, No. 10. С. 43 – 48.
43. *Панков А.Р., Семенихин К.В.* О минимаксном оценивании по вероятностному критерию // *АиТ*, 2007. No. 3. С. 66 – 82.
44. *Пантелеев А.В.* Оптимальные нелинейные системы управления: синтез при неполной информации. М.: Вузовская книга, 2008.
45. *Пантелеев А.В., Летова Т.А.* Методы оптимизации в примерах и задачах. М., Высшая школа, 2002.
46. *Первозванский А.А., Первозванская Т.М.* Финансовый рынок: расчет и риск. М.: Инфра-М, 1994.
47. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.

48. Райк Э. О функции квантили в задачах стохастического нелинейного программирования // Изв. АН ЭССР. Физ.-мат., 1971. 24. No. 1. С. 3 – 8.
49. Растринин Л.А. Теория статистических методов поиска. М.: Наука, 1968.
50. Тамм Э. О квазивыпуклости функций вероятности и квантиля // Изв. АН ЭССР Физ.-мат., 1976. Т.25. No.2. С.141 – 143.
51. Урасьев С.П. Адаптивные алгоритмы стохастической оптимизации и теории игр. М.: Наука, 1990.
52. Эфрон Б. Нетрадиционные методы многомерного статистического анализа. М.: Финансы и статистика, 1988.
53. Юдин Д.Б. Задачи и методы стохастического программирования. М.: Советское радио, 1979.
54. Юдин Д.Б. Математические методы управления в условиях неполной информации // М.: Советское радио, 1974.
55. Bahadur R.R. A note on quantiles in large samples // Ann. Math. Statist., 1966, No. 37. P. 577 – 580.
56. Beran R., Ducharme G.R. Asymptotic Theory for Bootstrap Methods in Statistic. Les Publications CRM, Centre de recherches mathematiques, 1991.
57. Birge J., Louveau F. Introduction to Stochastic Programming. Springer Verlag, New York, 1997.
58. Corless R.M., Gonnet G.H., Hare D.E.G., Jeffrey D.J., and Knuth D.E. On The Lambert W Function // Advances in Computational Mathematics, 1996. Vol. 5. P. 329 – 359.
59. Davison A.C., Hinkley D.V. Bootstrap Methods and Their Application. U.K.: Cambridge University Press., 1997.
60. Efron B. Bootstrap methods: Another look at jackknife // Ann. Statist., 1979. Vol. 7, No.1. P. 1 – 25.

61. *Falk M., Kaufmann E.* Coverage probabilities of bootstrap-confidence intervals for quantiles // The Annals of Statistics, 1991. Vol. 19, No. 1. P. 485 – 495.
62. *Falk M. Reiss R.-D.* Weak convergence of smoothed and nonsmoothed bootstrap quantile estimates // The Annals of Probability, Vol. 17, No. 1, P. 362 – 371.
63. *Hall P.* Methodology and theory for the bootstrap, in Engle R.F. and McFadden D.F., eds. Handbook of Econometrics, 1986. Ch. 39. P. 2341 – 2381.
64. *Hall P.* The Bootstrap and Edgeworth Expansion. N.Y.: Springer-Verlag, 1992.
65. *Hall P., Horowitz J.L., Jing B.-Y.* On blocking rules for the bootstrap with depended data // Biometrika, 1995. No. 85. P. 561 – 574.
66. *Harold Ruben* A New Asymptotic Expansion for the Normal Probability Integral and Mill's Ratio // Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), 1962. Vol. 24, No. 1. P. 177 – 179.
67. *Horowitz J.L.* Bootstrap methods in econometrics: theory and numerical performance // in Kreps D.M. Wallis K.F., eds. Advance in Economics and Econometrics: Theory and Applications. Seventh World Congress, 1997. Vol. 3. Ch. 7. P. 188 – 222.
68. *Horowitz J.L.* The Bootstrap. // J.J. Heckman & E.E. Leamer (ed.) Handbook of Econometrics , Ch. 52, P. 3159 – 3228, 2001.
69. *Kall P., Wallace S.W.* Stochastic Programming // Chichester: John Wiley & Sons, 1994.
70. *Kan Yu. S., Mistrukov A. A.* On the equivalence in stochastic programming with probability and quantile objectives // Lect. Notes Econom. Math. Syst. V. 458. / Eds. K. Marti and P. Kall. Berlin: Springer, 1998. P. 145 – 153.
71. *Kelly J.* A new Interpretation of Information Rate // Bell Syst. Tec. J. 1956. No. 35. P. 917 – 926.
72. *Kibzun A.I., Kan Yu.S.* Stochastic Programming Problems with Probability and Quantile Functions // Chichester: John Wiley & Sons, 1996.

73. *Lepp R., Olman V.* An Inequality for Integrals with Spherically Symmetric Functions And Its Application to Optimization // Acad. of Sciences of the ESSR, 1980. No.2. P. 133 – 139.
74. *Markowitz H.M.* Portfolio Selection // J. Finance. 1952. No.7(1). P. 77 – 91.
75. *Marti K.* Stochastic Optimization Methods. 2nd ed. Springer, 2008.
76. *Prékopa A.* Stochastic Programming. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995.
77. *Prékopa A.* Logarithmic Concave Measures and Related Topics // Stochastic Programming. Acad. Press., 1980. P. 63 – 82.
78. *Prékopa A.* On Logarithmic Concave Measures and Functions// Acta Sci. Math. V.34. P. 325 – 343.
79. *Quenouille M.H.* Approximate tests of correlation in time series // J. Roy. Statist. Soc. Ser. B., 1949. P. 68 – 84.
80. *Rockafellar R.T., Uryasev S.* Optimization of conditional value-at-risk. // The Journal of Risk, 2000. Vol. 2, No. 3, P. 21 – 41.
81. *Rockafellar, R.T, Uryasev S.* Conditional value-at-risk for general loss distribution // J. Banking & Finance, 2002. No.26. P. 1443 – 1471.
82. *Symonds G.H.* Deterministic solution for a class of chance-constrained programming problems // Operation research, 1967. V. 15. No.3. P. 495 – 512.
83. *Székey, G.J.* Paradoxes in Probability Theory and Mathematical Statistics // Budapest: Akademiai Kiado, 1986.
84. *Wiener N.* Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series. New-York, 1949.
85. *Yvonne H.S. Ho, Stephen M.S. Lee* Iterated smoothed bootstrap confidence intervals for population quantiles // The Annals of Statistics, 2005, Vol. 33, No. 1. P. 437 – 462.