Б. В. Вишняков, А. И. Кибзун, Детерминированные эквиваленты для задач стохастического программирования с вероятностными критериями, *Автомат. и телемех.*, 2006, выпуск 6, 126–143

Автоматика и телемеханика, № 6, 2006

Стохастические системы

PACS 02.50.Fz

**© 2006 г. Б.В. ВИШНЯКОВ,
А.И. КИБЗУН, д-р физ.-мат. наук
(Московский авиационный институт)**

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ЭКВИВАЛЕНТЫ ДЛЯ ЗАДАЧ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ВЕРОЯТНОСТНЫМИ КРИТЕРИЯМИ

Рассматриваются задачи стохастического программирования с вероятностным и квантильным критериями. Для ряда частных случаев строятся детерминированные эквиваленты исходных стохастических задач. Для рассматриваемых задач устанавливаются выпуклые свойства вероятностного и квантильного критериев.

1. Введение

В технике и экономике существует множество задач, относящихся к классу задач стохастического программирования [1]. В последнее время среди этих задач наибольшее распространение получили модели с вероятностным или квантильным критериями [2]. Но несмотря на актуальность этих критериев, они, в отличие от математического ожидания, не обладают свойством линейности, а потому оказываются более сложными для исследования. Наиболее важными с точки зрения последующей оптимизации являются выпуклые свойства вероятностных критериев. Многие известные результаты в этой области собраны в обзорной статье [3].

Одним из наиболее эффективных методов решения вероятностных задач является получение для них детерминированных эквивалентов, не зависящих от случайных величин и позволяющих свести исходную задачу стохастического программирования к эквивалентной ей, но детерминированной. Иначе говоря, детерминированные эквиваленты удобны тем, что для решения детерминированных задач, эквивалентных исходным стохастическим, можно использовать стандартные методы математического программирования [4]. Первые детерминированные эквиваленты для вероятностных постановок были получены в [5, 6]. Но в [5] строятся эквиваленты, которые, по сути, нельзя назвать детерминированными. В полученных в этой работе эквивалентах присутствуют некоторые характеристики распределения (плотность вероятности, функция распределения многомерной случайной величины), зависящие от параметров оптимизации и не имеющие явного аналитического выражения. Это значит, что для решения таких эквивалентов необходимо использовать численные методы стохастического программирования. В [7, 8] исследованы далеко не все свойства полученных эквивалентов и наложены слишком сильные ограничения на параметры распределений и целевых функций. В [9] в ходе решения экономической задачи строится детерминированный эквивалент, который оказывается частным случаем полученного здесь эквивалента. В [1] приводится детерминированный эквивалент для частного случая билинейной целевой функции.

В данной статье осуществлена попытка охватить и обобщить большинство известных случаев, рассмотренных в цитированных работах, когда удается получить детерминированные эквиваленты для задач с вероятностными критериями, имеющие явное аналитическое выражение. На основании полученных детерминированных эквивалентов устанавливаются выпуклые свойства исходных вероятностных критериев.

2. Постановка задачи

Пусть задана целевая функция $\Phi(u, X)$, где $u \in U \subset \mathbb{R}^m$, $X \in \mathbb{R}^n$. Здесь вектор u – оптимизируемая стратегия, а X – случайный вектор с известным распределением и реализациями $x \in \mathbb{R}^n$.

Определим функцию вероятности

$$(2.1) \qquad P_\varphi(u) \overset{def}{=} \mathcal{P}\{\Phi(u, X) \le \varphi\},$$

где $\varphi \in \mathbb{R}^1$ – максимально допустимое значение $\Phi(u, X)$. Функция вероятности характеризует вероятность такого события, что значение целевой функции при выбранном u будет не больше заданного порога φ.

Функцией квантили будем называть функцию вида

$$(2.2) \qquad \varphi_\alpha(u) \overset{def}{=} \min\{\varphi : P_\varphi(u) \ge \alpha\},$$

где α – заданный уровень вероятности, $\alpha \in (0, 1)$. Функция квантили показывает, что значение целевой функции $\Phi(u, X)$ при выбранной стратегии u с вероятностью не меньше α будет не превосходить порог $\varphi_\alpha(u)$.

Рассмотрим три классические задачи стохастического программирования.

1. Максимизация функции вероятности:

$$(2.3) \qquad P_\varphi(u) \to \max_{u \in U}.$$

2. Минимизация функции квантили:

$$(2.4) \qquad \varphi_\alpha(u) \to \min_{u \in U}.$$

3. Задача с вероятностным ограничением:

$$(2.5) \qquad \begin{aligned} &\Phi_0(u) \to \min_{u \in U}, \\ &P_\varphi(u) \ge \alpha, \end{aligned}$$

где $\Phi_0(u)$ – некая детерминированная функция.

В данных постановках не уточняется, существует оптимальная стратегия или нет. В последнем случае под решением задачи понимается оптимизирующая последовательность стратегий.

3. Случай билинейной целевой функции и сферически симметричного распределения

Вначале рассмотрим случай, когда целевая функция имеет билинейную структуру:

$$(3.1) \qquad \Phi(u, X) = r[u^{\mathrm{T}}(AX + c)],$$

где A – некоторая матрица $m \times n$, c – фиксированный вектор размерности n, $r(\cdot): \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ – строго возрастающая непрерывная слева функция, определенная на всей числовой оси. Пусть распределение случайного вектора X сферически симметрично, т.е. его плотность можно представить в виде

$$(3.2) \qquad p_X(x) \stackrel{def}{=} f(\|x\|^2) = f(x^{\mathrm{T}}x),$$

где функция $f(t)$ определена для $t \in [0, \infty)$, неотрицательна и интегрируема по Лебегу.

Докажем следующее утверждение.

Т е о р е м а 1. *Пусть целевая функция имеет вид* (3.1), *где* $\|A^T u\| > 0$, *а плотность распределения вектора* X *имеет вид* (3.2). *Тогда*

1) *функция вероятности равна*

$$(3.3) \qquad P_\varphi(u) = F_1\left(\frac{r^{-1}(\varphi) - u^T c}{\|A^T u\|}\right),$$

где $F_1(\cdot)$ *– функция распределения первой компоненты вектора* X*;*

2) *ограничение* $P_\varphi(u) \geq \alpha$ *эквивалентно неравенству*

$$(3.4) \qquad r^{-1}(\varphi) - u^T c \geq \|A^T u\| x_{1_\alpha},$$

где x_{1_α} *– квантиль первой компоненты вектора* X *уровня* α*;*

3) *функция квантили имеет вид*

$$(3.5) \qquad \varphi_\alpha(u) = r\left(\|A^T u\| x_{1_\alpha} + u^T c\right).$$

Доказательство приведено в Приложении.

З а м е ч а н и е 1. Ограничение $\|A^{\mathrm{T}}u\| > 0$ накладывается для того, чтобы исключить неопределенность в (3.3). Оно эквивалентно условию $A^{\mathrm{T}}u \neq \mathrm{col}(0, 0, \ldots, 0)$ покомпонентно. Отсюда вытекают два случая и соответствующие им тривиальные решения:

а) $u \neq 0$,

б) $A^{\mathrm{T}}u \neq 0 \;\; \forall u \neq 0$.

Если не выполнено а), то $\Phi(0, X) \equiv r(0)$. При этом $P_\varphi(u) = 1$, если $\varphi \geq r(0)$, а $\varphi_\alpha(0) = r(0)$. Иными словами, стратегия $u = 0$ оказывается оптимальной, если она допустима, т.е. $0 \in U$.

Если не выполнено б), т.е. $A^{\mathrm{T}}u_0 = 0$ для некоторого $u_0 \neq 0 \in U$, то $\Phi(u_0, X) = r(u_0^{\mathrm{T}}c)$. При этом $P_\varphi(u_0) = 1$, если $\varphi \geq r(u_0^{\mathrm{T}}c)$, а $\varphi_\alpha(u_0) = r(u_0^{\mathrm{T}}c)$.

З а м е ч а н и е 2. Многие известные распределения сферически симметричны, например нормальное $\mathbf{N}(0, I)$, равномерное на шаре, многомерное Коши и др. В [7] рассмотрен аналогичный случай, но там предполагалось, что матрица A квадратная и симметричная и что функция $r(t) \equiv t$. Здесь же рассмотрен более широкий класс преобразований. Также в [7] не указывается аналитическое выражение для функций вероятности и квантили. В [9] рассмотрена экономическая задача минимизации квантили билинейной функции потерь. Случайные величины в [9] распределены по гауссовскому закону $\mathbf{N}(\mu, K)$. Целевая функция подходит под рассмотренную выше модель, если в (3.1) положить $A = -K^{\frac{1}{2}}$, вектор $c = (-s, -\mu_1, \ldots, -\mu_n)$ и функцию $r(t) = t$.

З а м е ч а н и е 3. Выражение $Y = AX + c$ фактически имеет смысл преобразования сферически симметрично распределенного случайного вектора X в эллиптически симметрично распределенный случайный вектор Y.

На основании теоремы 1 сформулируем детерминированные эквиваленты исследуемых задач стохастического программирования. Задача (2.3) преобразуется к виду

$$P_\varphi(u) = F_1\left(\frac{r^{-1}(\varphi) - u^{\mathrm{T}}c}{\|A^{\mathrm{T}}u\|}\right) \to \max_{u\in U}. \tag{3.6}$$

Для получения детерминированного эквивалента рассмотрим следующее утверждение.

Л е м м а 1. Пусть функция $f(t) : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ строго возрастает по t и определена для всех $t \in \mathbb{R}^1$, функция $g(u) : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1$ – произвольная. Тогда задача

$$f(g(u)) \to \max_{u\in U} \tag{3.7}$$

по поиску оптимальной стратегии эквивалентна задаче

$$g(u) \to \max_{u\in U}. \tag{3.8}$$

Доказательство приведено в Приложении.

Если функция распределения $F_1(\cdot)$ строго возрастающая, т.е. не имеющая площадок, то в силу леммы 1 задача (3.6) будет эквивалентна следующей:

$$G(u) \overset{def}{=} \frac{r^{-1}(\varphi) - u^{\mathrm{T}}c}{\|A^{\mathrm{T}}u\|} \to \max_{u\in U}. \tag{3.9}$$

Если все компоненты вектора X не имеют строго возрастающих функций распределения, то задачи (3.6) и (3.9) не будут эквивалентны в общем случае, но из решения задачи (3.9) будет вытекать решение задачи (3.6).

Согласно теореме 1 задача (2.4) примет вид

$$\varphi_\alpha(u) = r\left(\|A^{\mathrm{T}}u\| x_{1_\alpha} + u^{\mathrm{T}}c\right) \to \min_{u\in U}. \tag{3.10}$$

Так как функция $r(t)$ по предположению строго возрастает по t и определена для всех $t \in \mathbb{R}^1$, то по лемме 1 задача (3.10) эквивалентна следующей:

$$H(u) \overset{def}{=} \|A^{\mathrm{T}}u\| x_{1_\alpha} + u^{\mathrm{T}}c \to \min_{u\in U}. \tag{3.11}$$

Задача с вероятностным ограничением (2.5) примет вид

$$\begin{aligned} &\Phi_0(u) \to \max_{u\in U}, \\ &r^{-1}(\varphi) - u^{\mathrm{T}}c \geq \|A^{\mathrm{T}}u\| x_{1_\alpha}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Для выяснения выпуклых свойств функций вероятности и квантили докажем следующее утверждение. Напомним понятие из [2].

О п р е д е л е н и е 1. Скалярная функция $f(u)$, определенная на выпуклом множестве $U \in \mathbb{R}^m$, называется квазивыпуклой на U, если для любых $u_1, u_2 \in U$ и для любого $\lambda \in [0, 1]$ справедливо неравенство

$$f(\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2) \leq \max\{f(u_1), f(u_2)\};$$

аналогично, функция $f(u)$ будет квазивогнутой на U, если

$$f(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2) \geq \min\{f(u_1), f(u_2)\}. \tag{3.13}$$

Л е м м а 2. *Если $G(u) \geq 0$ для любых $u \in U$, то функции $G(u)$ и $P_\varphi(u)$ квазивогнуты на U. Если $x_{1_\alpha} \geq 0$, то функция $H(u)$ выпукла на U, а $\varphi_\alpha(u)$ квазивыпукла на U.*

Доказательство приведено в Приложении.

З а м е ч а н и е 4. Легко заметить, что условие $x_{1_\alpha} \geq 0$ для квазивыпуклости функции квантили совпадает с условием $G(u) \geq 0$ для квазивогнутости функции вероятности, так как функция $G(u)$ в функции вероятности (3.3) фактически играет роль квантили. Однако условие $G(u) \geq 0$ сложнее проверить, чем условие $x_{1_\alpha} \geq 0$.

З а м е ч а н и е 5. Еще одно достоинство детерминированных эквивалентов можно обнаружить, сравнивая задачи (3.10) и (3.11). Функция квантили в задаче (3.10) квазивыпукла, в то время как функция $H(u)$ в (3.11) выпукла, что значительно облегчает поиск экстремума. Для решения задачи (3.11) можно использовать известные методы выпуклого программирования [4]. Заметим, что задача (2.5), записанная в виде (3.12), оказывается задачей выпуклого программирования, если функция $\Phi_0(u)$ выпукла на U.

4. Случай возрастающей целевой функции относительно стратегии

Рассмотрим случай, когда целевая функция имеет следующий вид

$$\Phi(u, X) = r(s(u), X), \tag{4.1}$$

где $s(\cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1$ – некоторая функция, $r(s,x) : \mathbb{R}^1 \mathrm{x} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ – строго возрастающая, непрерывная слева по $s \in \mathbb{R}^1$ для любых $x \in \mathbb{R}^n$.

Докажем следующее утверждение:

Т е о р е м а 2. *Пусть целевая функция имеет вид* (4.1). *Тогда*

1) *функция вероятности равна*

$$P_\varphi(u) = \mathcal{P}\{-r_s^{-1}(\varphi, X) \leq -s(u)\}, \tag{4.2}$$

где $r_s^{-1}(\cdot)$ – обратная функция к $r(\cdot)$ по переменной s;

2) *ограничение $P_\varphi(u) \geq \alpha$ будет эквивалентно следующему*

$$\overline{r}_\alpha(\varphi) \leq -s(u), \tag{4.3}$$

где $\overline{r}_\alpha(\varphi) \stackrel{def}{=} \min\{\psi : \mathcal{P}\{-r_s^{-1}(\varphi, X) \leq \psi\} \geq \alpha\}$;

3) *функция квантили*

$$\varphi_\alpha(u) = \min\{\varphi : \overline{r}_\alpha(\varphi) \leq -s(u)\}. \tag{4.4}$$

Доказательство приведено в Приложении.

На основании теоремы 2 сформулируем детерминированные эквиваленты для задач (2.3), (2.4) и (2.5). Постановка (2.3) примет вид

$$P_\varphi(u) = \mathcal{P}\{-r_s^{-1}(\varphi, X) \leq -s(u)\} \to \max_{u \in U}. \tag{4.5}$$

Если функция $\overline{P}_\psi(\varphi) \stackrel{def}{=} \mathcal{P}\{-r_s^{-1}(\varphi, X) \le \psi\}$ строго возрастает по ψ, то согласно лемме 1 задача (4.5) будет эквивалентна задаче (4.6):

$$(4.6) \qquad s(u) \to \min_{u \in U}.$$

В противном случае каждое решение задачи (4.6) будет и решением задачи (4.5).

Несложно заметить, что поиск решения задачи (4.5) полностью зависит от свойств функции $s(u)$.

Постановка (2.4) с целевой функцией (4.1) примет вид

$$(4.7) \qquad \varphi_\alpha(u) = \min\{\varphi : \overline{r}_\alpha(\varphi) \le -s(u)\} \to \min_{u \in U}.$$

Если функция $\overline{\varphi}_\alpha(\psi) \stackrel{def}{=} \min\{\varphi : \overline{r}_\alpha(\varphi) \le \psi\}$ строго возрастает по ψ, то согласно лемме 1 эта задача будет эквивалентна (4.6). В противном случае каждое решение задачи (4.6) будет являться и решением задачи (4.7).

Задача с вероятностным ограничением (2.5) в силу п. 2) теоремы 2 примет вид

$$(4.8) \qquad \begin{aligned} &\Phi_0(u) \to \max_{u \in U}, \\ &\overline{r}_\alpha(\varphi) \le -s(u). \end{aligned}$$

Замечание 6. Ограничение в (4.8) проще, чем вероятностное ограничение $P_\varphi(u) \ge \alpha$. Вначале вычисляется число $\overline{r}_\alpha(\varphi)$ для фиксированных α и φ, а затем оно подставляется в ограничение $\overline{r}_\alpha(\varphi) \le -s(u)$. При проверке же условия $P_\varphi(u) \ge \alpha$ (или что то же, $\varphi_\alpha(u) \le \varphi$) необходимо вычислять функцию вероятности $P_\varphi(u)$ (или функцию квантили $\varphi_\alpha(u)$) для каждого u.

Исследуем свойства выпуклости функций вероятности и квантили. Докажем утверждение.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2 и функция $s(u)$ квазивыпукла по $u \in U$. Тогда функция вероятности $P_\varphi(u)$ квазивогнута на U, а $\varphi_\alpha(u)$ квазивыпукла на U.

Доказательство приведено в Приложении.

Замечание 7. Обратим внимание, что детерминированные эквиваленты в данном случае значительно упрощают решаемые вероятностные задачи (2.3), (2.4), (2.5). Более того, даже в случае выпуклости $S(u)$ теорема 3 гарантирует лишь квазивогнутость $P_\varphi(u)$ и квазивыпуклость $\varphi_\alpha(u)$. При этом задача (4.6), эквивалентная исходным стохастическим задачам (2.3) и (2.4), оказывается задачей выпуклого программирования.

Пример 1. Пусть $r(s, x) = s\varphi_1(x) + \varphi_2(x)$, где $\varphi_1(x) > 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $s \in \mathbb{R}^1$. Легко проверить, что выполнены все условия теоремы 2. При этом обратная функция в (4.2) будет равна

$$r_s^{-1}(\varphi, x) = \frac{\varphi - \varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}.$$

5. Случай возрастающей целевой функции относительно случайного вектора

Рассмотрим случай, когда целевая функция имеет следующий вид

$$(5.1) \qquad \Phi(u, X) = r(u, t(X)),$$

где $t(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ – некоторая измеримая функция, $r(u,t) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ – строго возрастающая и непрерывная слева по $t \in \mathbb{R}^1$ для любых $u \in \mathbb{R}^m$.

Докажем следующее утверждение.

Т е о р е м а 4. *Пусть целевая функция имеет вид* (5.1). *Тогда*

1) *функция вероятности равна*

$$P_\varphi(u) = \mathcal{P}\left\{t(X) \le r_t^{-1}(u,\varphi)\right\}, \tag{5.2}$$

где $r_t^{-1}(\cdot)$ *– обратная функция к* $r(\cdot)$ *по переменной* t;

2) *ограничение* $P_\varphi(u) \ge \alpha$ *будет эквивалентно*

$$r(u,t_\alpha) \le \varphi, \tag{5.3}$$

где $t_\alpha \overset{def}{=} \min\{s : \mathcal{P}\{t(X) \le s\} \ge \alpha\}$;

3) *функция квантили*

$$\varphi_\alpha(u) = r(u,t_\alpha). \tag{5.4}$$

Доказательство приведено в Приложении.

На основании теоремы 4 сформулируем детерминированные эквиваленты задач (2.3), (2.4) и (2.5). Постановка (2.3) примет вид

$$P_\varphi(u) = \mathcal{P}\left\{t(X) \le r_t^{-1}(u,\varphi)\right\} \to \max_{u\in U}. \tag{5.5}$$

В силу того, что

$$\mathcal{P}\left\{t(X) \le r_t^{-1}(u,\varphi)\right\} = F_T(r_t^{-1}(u,\varphi)),$$

где $F_T(\cdot)$ – функция распределения случайной величины $T \overset{def}{=} t(X)$, получим из (5.5) задачу

$$F_T(r_t^{-1}(u,\varphi)) \to \max_{u\in U}. \tag{5.6}$$

Согласно лемме 1, если $F_T(t)$ строго возрастает по t, то задача (5.6) будет эквивалентна по стратегиям задаче

$$r_t^{-1}(u,\varphi) \to \max_{u\in U}. \tag{5.7}$$

В частности, согласно [2], если существует плотность у случайного вектора X, носитель A которой есть односвязное множество, а функция $t(x)$ непрерывна на A, то $F_T(t)$ строго возрастает по t. Если $F_T(\cdot)$ не будет строго возрастающей, то каждое решение задачи (5.7) будет решением задачи (5.6).

Постановка (2.4) с целевой функцией (5.1) примет вид

$$\varphi_\alpha(u) = r(u,t_\alpha) \to \min_{u\in U}. \tag{5.8}$$

Очевидно, что данная задача уже является детерминированным эквивалентом.

Задача с вероятностным ограничением (2.5) в силу п. 2) теоремы 4 примет вид

$$\begin{aligned} &\Phi_0(u) \to \max_{u\in U}, \\ &r(u,t_\alpha) \le \varphi. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Замечание 8. Поиск решения задачи (5.7) в данном случае полностью зависит от свойств функции $r_t^{-1}(\cdot)$. Исследуем выпуклые свойства функции $r_t^{-1}(u,\varphi)$. Если $r(u,t(x))$ квазивыпукла на U для всех $x \in \mathbb{R}^n$, то обратная функция будет квазивогнутой. Действительно, в силу строгого возрастания и непрерывности слева функции $r(u,t)$ по t для всех $u \in U$ получаем

$$(5.10) \qquad U_\varphi \stackrel{def}{=} \{u \in U : r(u,t(x)) \le \varphi\} = \left\{u \in U : t(x) \le r_t^{-1}(u,\varphi)\right\}$$

для всех $\varphi \in \mathbb{R}^1, x \in \mathbb{R}^n$.

Если $r(u,t)$ квазивыпукла на U, то множество U_φ выпукло, а, значит, $r_t^{-1}(u,\varphi)$ квазивогнута на U. Кроме того согласно (5.6) функция $P_\varphi(u)$ в данном случае будет также квазивогнутой на U, так как $F_T(\cdot)$ неубывающая, а $r_t^{-1}(u,\varphi)$ квазивогнута на U.

Если же теперь $r(u,t)$ выпукла совместно по $u \in U$ и $t \in \mathbb{R}^1$, то функция $r_t^{-1}(u,\varphi)$ будет вогнутой. Это утверждение легко следует из того факта, что согласно (5.10) множество $\left\{u,t:\ r_t^{-1}(u,\varphi) \ge t\right\} = \{u,t:\ r(u,t) \le \varphi\}$, которое выпукло по $u \in U$ и $t \in \mathbb{R}^1$ одновременно. Следовательно, надграфик функции $-r_t^{-1}(u,\varphi)$ является выпуклым. Поэтому сама функция $r_t^{-1}(u,\varphi)$ будет вогнута на U. Если же функция $r_t^{-1}(u,\varphi)$ вогнута по $u \in U$, то задача максимизации функции вероятности сводится к задаче оптимизации вогнутой функции.

Если $r(u,t(x))$ выпукла (квазивыпукла) на U для всех $x \in \mathbb{R}^n$, то согласно теореме 4 функция квантили $\varphi_\alpha(u)$ будет выпуклой (квазивыпуклой) на U. При этом функция вероятности $P_\varphi(u)$ является лишь квазивогнутой на U.

Пример 2. Пусть $r(u,t) = s_1(u) + s_2(u)t$, где $s_2(u) \ge 0$ для всех $u \in U$. Такая функция удовлетворяет всем условиям теоремы 4. Обратная функция в этом случае имеет вид

$$r_t^{-1}(u,\varphi) = \frac{\varphi - s_1(u)}{s_2(u)}.$$

Заметим, что если $s_1(u)$ и $s_2(u)$ – выпуклые на U, а $t(x) > 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, то $r(u,t(x))$ будет выпукла, а $r_t^{-1}(u,\varphi)$ – вогнута на U для всех $x \in \mathbb{R}^n$ (см. рассуждения в замечании 8). Данный случай рассмотрен в [6, 8].

6. Случай квадратичной целевой функции и сферически симметричного распределения

Рассмотрим случай, когда целевая функция имеет однородную квадратичную структуру, т.е.

$$(6.1) \qquad \Phi(u,X) \stackrel{def}{=} r(u^{\mathrm{T}} A X_1 \cdot u^{\mathrm{T}} B X_2),$$

где случайные векторы X_1 и X_2 независимы, A и B – матрицы $m \times n$, $r(\cdot) : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ – строго возрастающая непрерывная слева функция, а распределения случайных векторов сферически симметричны, т.е. их плотности можно представить в виде

$$(6.2) \qquad p_1(x_1) = f_1(\|x_1\|^2), \quad p_2(x_2) = f_2(\|x_2\|^2).$$

Здесь функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ – неотрицательные интегрируемые по Лебегу при $t \in [0,\infty)$.

Т е о р е м а 5. *Пусть целевая функция имеет вид* (6.1), *а плотности распределения векторов* X_1 *и* X_2 *имеют вид* (6.2) *и, кроме того,* $\|A^T u\|\|B^T u\| > 0$ *для всех* $u \in U$. *Тогда каждое решение задачи выпуклого программирования*

$$\|A^T u\|\|B^T u\| \to \min_{u \in U} \tag{6.3}$$

будет являться и решением задач (2.3), (2.4).

Доказательство приведено в Приложении.

7. Случай аддитивной структуры целевой функции

Рассмотрим случай, когда целевая функция имеет вид

$$\Phi(u,x) = r(|t(x) + s(u)|), \tag{7.1}$$

где $r(\cdot) : \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1$ – строго возрастающая, непрерывная слева функция, $t(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \to \mathbb{R}^1$ – измеримая функция, а $s(\cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1$ – некоторая функция.

Докажем следующее утверждение.

Л е м м а 3. *Пусть целевая функция имеет вид* (7.1). *Тогда функция вероятности будет равна*

$$P_\varphi(u) = F_T\left(r^{-1}(\varphi) - s(u)\right) - F_T\left(-r^{-1}(\varphi) - s(u)\right), \tag{7.2}$$

где $F_T(\cdot)$ *– функция распределения случайной величины* $T \stackrel{def}{=} t(X)$.

Доказательство приведено в Приложении.

Т е о р е м а 6. *Пусть выполнено условие леммы 3 и плотность распределения случайной величины* $T = t(X)$ *симметрична и унимодальна относительно точки* m_T. *Тогда каждое решение задачи*

$$|m_T - s(u)| \to \min_{u \in U} \tag{7.3}$$

будет являться и решением задач (2.3), (2.4).

Доказательство приведено в Приложении.

З а м е ч а н и е 9. Если $s(u)$ выпукла на U и $s(u) \geq m_T$ для всех $u \in U$, то задача (7.3) оказывается задачей выпуклого программирования [4]. При этом легко проверить, что функция вероятности в этом случае оказывается лишь квазивогнутой, а функция квантили – квазивыпуклой.

8. Случай сепарабельной структуры целевой функции и логарифмически вогнутой меры

Рассмотрим случай, когда целевая функция имеет структуру

$$\Phi(u,x) = \max_{i=\overline{1,n}} \{r_i(s_i(u) + x_i)\}, \tag{8.1}$$

где $r_i(\cdot) : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, $i = \overline{1,n}$, – строго возрастающие, непрерывные слева функции, $s_i(\cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1$, $i = \overline{1,n}$, – некоторые функции. Напомним следующее определение.

О п р е д е л е н и е 2 ([10]). *Неотрицательная функция $f(u)$, определенная на выпуклом множестве $U \subset \mathbb{R}^m$, называется логарифмически вогнутой на U, если для любых $u_1, u_2 \in U$ и для любого $\lambda \in [0,1]$ выполняется*

$$f(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2) \geq f^{\lambda}(u_1) f^{1-\lambda}(u_2). \tag{8.2}$$

Т е о р е м а 7. Пусть целевая функция имеет вид (8.1), *функции $s_i(\cdot)$, $i = \overline{1,n}$, выпуклы на U, плотность случайного вектора X логарифмически вогнута и его компоненты x_i независимы. Тогда функция вероятности будет равна*

$$P_{\varphi}(u) = \prod_{i=1}^{n} F_i\left(r_i^{-1}(\varphi) - s_i(u)\right), \tag{8.3}$$

где $F_i(\cdot)$ – функции распределения случайных величин X_i, $i = \overline{1,n}$, и логарифмически вогнута, а функция квантили $\varphi_{\alpha}(u)$ – квазивыпукла.

Доказательство приведено в Приложении.

На основании теоремы 7 сформулируем детерминированные эквиваленты для задач (2.3) и (2.5). Вначале согласно (8.3) имеем

$$P_{\varphi}(u) = \prod_{i=1}^{n} F_i\left(r_i^{-1}(\varphi) - s_i(u)\right) \to \max_{u \in U}, \tag{8.4}$$

Предположим, что для всех $u \in U$ функция вероятности $P_{\varphi}(u) > 0$. Прологарифмируем (8.4). Учитывая строгое возрастание функции $\ln(\cdot)$, получим

$$\ln(P_{\varphi}(u)) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left\{F_i\left(r_i^{-1}(\varphi) - s_i(u)\right)\right\} \to \max_{u \in U}, \tag{8.5}$$

Задача с вероятностным ограничением (2.5) примет вид

$$\begin{gathered} \Phi_0(u) \to \min_{u \in U}, \\ \sum_{i=1}^{n} \ln\left\{F_i\left(r_i^{-1}(\varphi) - s_i(u)\right)\right\} \geq \ln(\alpha). \end{gathered} \tag{8.6}$$

По теореме 7 функция вероятности $P_{\varphi}(u)$ логарифмически вогнута на U. Но если $P_{\varphi}(u) > 0$ для всех $u \in U$, то согласно [3] $\ln(P_{\varphi}(u))$ будет вогнутой функцией на U. Поэтому полученный детерминированный эквивалент (8.5) является задачей выпуклого программирования.

Ограничение в (8.6) будет также выпуклым, а, следовательно, задача (2.5), записанная в виде (8.6), будет задачей выпуклого программирования, если функция $\Phi_0(u)$ выпукла на U.

З а м е ч а н и е 10. Многие известные распределения имеют логарифмически вогнутую плотность, например нормальное, экспоненциальное, равномерное, Коши и др. В [10] рассмотрен аналогичный случай для более частного вида целевой функции без предположения о независимости компонент вектора X. В [10] установлено, что для рассматриваемого там случая функция вероятности $P_{\varphi}(u)$ логарифмически вогнута, но в отличие от данной статьи детерминированный эквивалент в [10] получить не удалось, и не установлена квазивыпуклость функции квантили. Заметим также, что в случае целевой функции (8.1) явное выражение для функции квантили получить не удается, и квазивыпуклость функции квантили является менее конструктивным свойством, чем логарифмическая вогнутость функции вероятности: в (8.5) получена задача выпуклого программирования.

9. Заключение

В статье рассмотрены задачи стохастического программирования с вероятностным, квантильным критериями и задача с вероятностным ограничением. Данные задачи решаются для случаев билинейной целевой функции и сферически симметричного распределения, квадратичной целевой функции и сферически симметричного распределения, возрастающей целевой функции относительно стратегии, возрастающей целевой функции относительно случайного вектора, случая аддитивной структуры целевой функции. Для рассматриваемых задач устанавливаются выпуклые свойства вероятностного, квантильного критериев и их детерминированных эквивалентов. Показывается бóльшая простота использования детерминированных эквивалентов по сравнению с исходными вероятностным и квантильным критериями.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. 1. Докажем первую часть утверждения. Так как функция $r(\cdot)$ строго возрастающая и непрерывная слева, то у нее существует обратная функция $r^{-1}(\cdot)$ такая, что $r^{-1}(r(t)) = t$ и $r(r^{-1}(t)) \le t$ для всех $t \in \mathbb{R}^1$. Причем функция $r^{-1}(\cdot)$ является неубывающей. Поэтому для всех $\varphi \in \mathbb{R}^1, u \in U$ неравенства $r\left(u^{\mathrm{T}}(Ax+c)\right) \le \varphi$ и $u^{\mathrm{T}}(Ax+c) \le r^{-1}(\varphi)$ эквивалентны.

Тогда функция вероятности примет вид

$$P_\varphi(u) = \mathcal{P}\{r[u^{\mathrm{T}}(AX+c)] \le \varphi\} = \int\limits_{r[u^{\mathrm{T}}(Ax+c)]\le\varphi} p_X(x)dx = \int\limits_{u^{\mathrm{T}}(Ax+c)\le r^{-1}(\varphi)} p_X(x)dx.$$

Сделаем замену переменных $y \overset{def}{=} C^{\mathrm{T}}x$, где матрица C – ортогональная с первым столбцом $A^{\mathrm{T}}u\|A^{\mathrm{T}}u\|^{-1}$. Матрица C имеет следующие свойства:

(i) $x = Cy$;

(ii) $\|x\|^2 = x^{\mathrm{T}}x = y^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}Cy = y^{\mathrm{T}}y = \|y\|^2$;

(iii) $\det\, C = 1$, следовательно, $dx = \det\, C \cdot dy = dy$;

(iv) $u^{\mathrm{T}}AC = \left(\dfrac{u^{\mathrm{T}}AA^{\mathrm{T}}u}{\|A^{\mathrm{T}}u\|}, \underbrace{0,\ldots,0}_{N-1}\right) = \left(\dfrac{(A^{\mathrm{T}}u)^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}u}{\|A^{\mathrm{T}}u\|}, 0,\ldots,0\right) = \big(\|A^{\mathrm{T}}u\|, 0,\ldots,0\big)$,

следовательно, $u^{\mathrm{T}}Ax = u^{\mathrm{T}}ACy = \|A^{\mathrm{T}}u\|y_1$.

Так как плотность $p_X(x)$ сферически симметрична, то после ортогонального преобразования $Y \overset{def}{=} C^{\mathrm{T}}X$ новая случайная величина Y будет иметь то же распределение, что и X, т.е.

(П.1) $\qquad p_X(y) = p_Y(y)\ \forall y \in \mathbb{R}^n.$

Легко заметить, что

(П.2) $\qquad p_X(x) = f(\|x\|^2) = f(\|y\|^2) = p_X(y)$

для любых $x \in \mathbb{R}^n, y \overset{def}{=} C^{\mathrm{T}}x$.

Из (П.1) и (П.2) следует

(П.3) $\qquad p_X(x) = p_X(y) = p_Y(y)$

для любых $x \in \mathbb{R}^n, y \overset{def}{=} C^{\mathrm{T}}x$.

Учитывая свойства матрицы C, а также (П.1) и (П.3), преобразуем выражение для функции вероятности

$$P_\varphi(u) = \int\limits_{u^{\mathrm{T}}(Ax+c)\le r^{-1}(\varphi)} p_X(x)dx = \int\limits_{y_1\le \frac{r^{-1}(\varphi)-u^{\mathrm{T}}c}{\|A^{\mathrm{T}}u\|}} p_Y(y)dy = \tag{П.4}$$

$$= \int\limits_{y_1\le \frac{r^{-1}(\varphi)-u^{\mathrm{T}}c}{\|A^{\mathrm{T}}u\|}} p_X(y)dy = \int\limits_{y_1\le \frac{r^{-1}(\varphi)-u^{\mathrm{T}}c}{\|A^{\mathrm{T}}u\|}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} p_X(y)dy_2\dots dy_n\right)dy_1 =$$

$$= F_1\left(\frac{r^{-1}(\varphi)-u^{\mathrm{T}}c}{\|Au\|}\right),$$

где $F_1(\cdot)$ – функция распределения первой компоненты вектора X.

Следовательно, функция вероятности будет равна

$$P_\varphi(u) = F_1\left(\frac{r^{-1}(\varphi)-u^{\mathrm{T}}c}{\|A^{\mathrm{T}}u\|}\right). \tag{П.5}$$

2. Докажем вторую часть утверждения. По определению квантиль первой компоненты вектора X будет равна

$$x_{1_\alpha} \stackrel{def}{=} \min\{\psi : F_1(\psi) \ge \alpha\}. \tag{П.6}$$

Для функции вероятности, полученной в п. 1) данного утверждения, ограничение $P_\varphi(u) \ge \alpha$ примет вид

$$F_1\left(\frac{r^{-1}(\varphi)-u^{\mathrm{T}}c}{\|A^{\mathrm{T}}u\|}\right) \ge \alpha. \tag{П.7}$$

Положим

$$\psi^* \stackrel{def}{=} \frac{r^{-1}(\varphi)-u^{\mathrm{T}}c}{\|A^{\mathrm{T}}u\|},$$

тогда (П.7) преобразуется в следующее неравенство:

$$F_1(\psi^*) \ge \alpha. \tag{П.8}$$

Но поскольку ψ^* не обязательно есть $\min\{\psi : F_1(\psi) \ge \alpha\}$, то

$$\frac{r^{-1}(\varphi)-u^{\mathrm{T}}c}{\|A^{\mathrm{T}}u\|} \ge x_{1_\alpha}. \tag{П.9}$$

Теперь в силу сделанного предположения $\|A^{\mathrm{T}}u\| > 0$ получим

$$r^{-1}(\varphi) - u^{\mathrm{T}}c \ge \|A^{\mathrm{T}}u\|x_{1_\alpha}. \tag{П.10}$$

3. Докажем третью часть утверждения. Преобразуем неравенство (П.10) относительно φ, учитывая, что $r(r^{-1}(t)) \le t$ для всех $t \in \mathbb{R}^1$:

$$\varphi \ge r\left(\|A^{\mathrm{T}}u\|x_{1_\alpha} + u^{\mathrm{T}}c\right).$$

Теперь легко заметить, что

$$\min\{\varphi : P_\varphi(u) \geq \alpha\} = \min\left\{\varphi : \varphi \geq r\left(\|A^{\mathrm{T}}u\|x_{1_\alpha} + u^{\mathrm{T}}c\right)\right\} =$$
$$= r\left(\|A^{\mathrm{T}}u\|x_{1_\alpha} + u^{\mathrm{T}}c\right).$$

Следовательно, функция квантили по определению (2.2) примет вид

$$\varphi_\alpha(u) = r\left(\|A^{\mathrm{T}}u\|x_{1_\alpha} + u^{\mathrm{T}}c\right), \tag{П.11}$$

что и требовалось доказать.

Доказательство леммы 1. Возьмем такие $u_1, u_2 \in U$, что $g(u_2) > g(u_1)$. Тогда в силу того, что $f(t)$ возрастает и определена для всех $t \in \mathbb{R}^1$, получаем $f(g(u_2)) > f(g(u_1))$. Следовательно, если u_0 максимизирует $g(u)$, то эта стратегия максимизирует и $f(g(u))$. Если не существует такого u_0, что $g(u_0) \geq g(u)$ для всех $u \in U$, а существует лишь последовательность u_n, максимизирующая $g(u)$, то эта последовательность будет максимизирующей и для $f(g(u))$.

Если теперь, наоборот, возьмем такие $u_1, u_2 \in U$, что $f(g(u_2)) > f(g(u_1))$, то в силу свойства строгого возрастания $f(t)$ по t получаем $g(u_2) > g(u_1)$. Отсюда из задачи (3.7) следует задача (3.8). Следовательно, задачи (3.7) и (3.8) эквивалентны в смысле поиска оптимальной стратегии u.

Доказательство леммы 2. Функция $g(u) \stackrel{def}{=} \|u\|$ выпукла по u, так как она равна максимуму выпуклой функции $c^{\mathrm{T}}u$ по $c \in \mathbb{R}^n$ при условии $\|c\| = 1$. Рассмотрим неравенство

$$G(u) \geq \lambda, \tag{П.12}$$

где $\lambda \in \mathbb{R}^1$ – некая константа.

Перенесем знаменатель левой части (П.12) в правую часть. Получим

$$r^{-1}(\varphi) - u^{\mathrm{T}}c \geq \lambda\|A^{\mathrm{T}}u\|.$$

Запишем неравенство относительно u:

$$\lambda\|A^{\mathrm{T}}u\| + c^{\mathrm{T}}u \leq r^{-1}(\varphi). \tag{П.13}$$

В начале доказательства было показано, что норма вектора – выпуклая функция. Следовательно, левая часть неравенства (П.13) является выпуклой функцией при $\lambda \geq 0$. Случай $\lambda < 0$ не интересен в силу наложенного условия $G(u) \geq 0$. Неравенство (П.13) при $\lambda \geq 0$ задает выпуклое множество, следовательно, функция $G(u)$ квазивогнута при $\lambda \geq 0$.

Функция $H(u)$ выпукла на U как сумма выпуклых функций, если $x_{1_\alpha} \geq 0$. Поэтому функция квантили согласно (3.10) будет квазивыпуклой, так как функция $r(\cdot)$ неубывающая. Отсюда, вследствие теоремы об одновременной квазивогнутости функции вероятности $P_\varphi(u)$ для любого $\varphi \in \mathbb{R}^1$ и квазивыпуклости функции квантили для любого $\alpha \in (0,1)$ [2], функция вероятности $P_\varphi(u)$ будет квазивогнута на U.

Доказательство теоремы 2. По определению квазивыпуклости для любых $u_1, u_2 \in U$ и любого $\lambda \in [0,1]$ функция $s(u)$ должна обладать следующим свойством:

$$s(\widetilde{u}) \leq \max\{s(u_1), s(u_2)\}, \tag{П.14}$$

где $\widetilde{u} \stackrel{def}{=} \lambda u_1 + (1-\lambda)u_2$.

Предположим, что неравенство (П.14) выполнено для u_1, т.е.

$$s(\widetilde{u}) \le s(u_1). \tag{П.15}$$

Рассмотрим множество $\{x : r(s(\widetilde{u}), x) \le \varphi\}$. Так как $r(s, x)$ строго возрастает по $s \in \mathbb{R}^1$ для любых $x \in \mathbb{R}^n$, то в силу (П.15) получим

$$r(s(\widetilde{u}), x) \le r(s(u_1), x) \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Следовательно,

$$\{x : r(s(u_1), x) \le \varphi\} \subset \{x : r(s(\widetilde{u}), x) \le \varphi\}. \tag{П.16}$$

Отсюда, учитывая монотонность меры, получим

$$P_\varphi(u_1) = \mathcal{P}\{r(s(u_1), X) \le \varphi\} \le \mathcal{P}\{r(s(\widetilde{u}), X) \le \varphi\} = P_\varphi(\widetilde{u}).$$

Окончательно имеем

$$\min\{P_\varphi(u_1), P_\varphi(u_2)\} \le P_\varphi(\widetilde{u}),$$

что по определению доказывает квазивогнутость функции вероятности.

Теперь, основываясь на том факте, что функция квантили квазивыпукла на U для любых $\alpha \in (0,1)$ тогда и только тогда, когда функция вероятности квазивогнута на U для любых $\varphi \in \mathbb{R}1$ [2], получаем, что функция квантили будет квазивыпукла, если $s(u)$ квазивыпукла по $u \in U$.

Доказательство теоремы 3. 1. Докажем первую часть утверждения. Так как у функции $r(\cdot)$ существует неубывающая обратная $r_s^{-1}(\cdot)$ и сама $r(\cdot)$ строго возрастает и непрерывна слева, то неравенства $r(s(u), x) \le \varphi$ и $s(u) \le r_s^{-1}(\varphi, x)$ эквивалентны. Поэтому функция вероятности примет вид

$$P_\varphi(u) = \mathcal{P}\{r(s(u), X) \le \varphi\} = \mathcal{P}\{s(u) \le r_s^{-1}(\varphi, X)\} =$$
$$= \mathcal{P}\{-r_s^{-1}(\varphi, X) \le -s(u)\}.$$

2. Докажем вторую часть утверждения. Рассмотрим вероятностное ограничение $P_\varphi(u) \ge \alpha$. Из п. 1) вытекает, что это неравенство эквивалентно следующему:

$$P_\varphi(u) = \mathcal{P}\{-r_s^{-1}(\varphi, X) \le -s(u)\} \ge \alpha. \tag{П.17}$$

Введем функцию

$$\overline{r}_\alpha(\varphi) \stackrel{def}{=} \min\left\{\psi : \mathcal{P}\{-r_s^{-1}(\varphi, X) \le \psi\} \ge \alpha\right\}. \tag{П.18}$$

Положив в (П.17) $\psi \stackrel{def}{=} -s(u)$, получим из (П.18)

$$\overline{r}_\alpha(\varphi) \le -s(u). \tag{П.19}$$

Пусть теперь выполнено (П.19). Тогда из (П.18) вытекает, что

$$\mathcal{P}\{-r_s^{-1}(\varphi, X) \le -s(u)\} \ge \alpha,$$

а по п. 1) данное неравенство эквивалентно $P_\varphi(u) \ge \alpha$.

Следовательно, (П.19) есть детерминированный эквивалент вероятностному ограничению $P_\varphi(u) \geq \alpha$.

3. Докажем третью часть утверждения. Так как согласно п. 2) неравенство $P_\varphi(u) \geq \alpha$ эквивалентно неравенству (П.19), то по определению (2.2) функции квантили получим

$$\varphi_\alpha(u) \stackrel{def}{=} \min\{\varphi : P_\varphi(u) \geq \alpha\} = \min\left\{\varphi : \overline{r}_\alpha(\varphi) \leq -s(u)\right\},$$

что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 4. 1. Докажем первую часть утверждения. Так как у функции $r(\cdot)$ существует неубывающая обратная $r_t^{-1}(\cdot)$ и $r(u,t)$ строго возрастающая и непрерывная слева по t, то функция вероятности равна

$$P_\varphi(u) = \mathcal{P}\left\{r(u, t(X)) \leq \varphi\right\} = \mathcal{P}\left\{t(X) \leq r_t^{-1}(u,\varphi)\right\}.$$

2. Докажем вторую часть утверждения. Рассмотрим вероятностное ограничение $P_\varphi(u) \geq \alpha$. Из п. 1) теоремы 4 вытекает, что это неравенство эквивалентно следующему

$$P_\varphi(u) = \mathcal{P}\left\{t(X) \leq r_t^{-1}(u,\varphi)\right\} \geq \alpha. \qquad \text{(П.20)}$$

Введем функцию

$$t_\alpha \stackrel{def}{=} \min\{s :\ \mathcal{P}\{t(X) \leq s\} \geq \alpha\}. \qquad \text{(П.21)}$$

Положив в (П.21) $s = r_t^{-1}(u,\varphi)$, из (П.20) получим

$$t_\alpha \leq r_t^{-1}(u,\varphi). \qquad \text{(П.22)}$$

Подействовав на неравенство (П.22) функцией $r(\cdot)$, получим

$$r(u, t_\alpha) \leq \varphi, \qquad \text{(П.23)}$$

так как $r(\cdot)$ – строго возрастающая и непрерывная слева по t.

Пусть теперь выполнено (П.23). Оно эквивалентно (П.22). Если подставить $s \stackrel{def}{=} r_t^{-1}(u,\varphi) \geq t_\alpha$ во внутреннее неравенство в (П.21), то

$$\mathcal{P}\{t(X) \leq r_t^{-1}(u,\varphi)\} \geq \mathcal{P}\{t(X) \leq t_\alpha\} \geq \alpha.$$

Следовательно, (П.22) есть детерминированный эквивалент вероятностному ограничению $P_\varphi(u) \geq \alpha$.

3. Докажем третью часть утверждения. Так как согласно п. 2) теоремы 4 неравенство $P_\varphi(u) \geq \alpha$ эквивалентно неравенству (П.23), то по определению (2.2) функции квантили получим

$$\varphi_\alpha(u) \stackrel{def}{=} \min\{\varphi : P_\varphi(u) \geq \alpha\} = \min\{\varphi : r(u, t_\alpha) \leq \varphi\} = r(u, t_\alpha),$$

что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 5. В данном случае

$$P_\varphi(u) \stackrel{def}{=} \mathcal{P}\{r(u^{\mathrm{T}}AX_1 \cdot u^{\mathrm{T}}BX_2) \leq \varphi\} = \int\limits_{r(u^{\mathrm{T}}Ax_1 \cdot u^{\mathrm{T}}Bx_2) \leq \varphi} p_1(x)p_2(x)dx_1dx_2 =$$

$$= \int\limits_{u^{\mathrm{T}}Ax_1 \cdot u^{\mathrm{T}}Bx_2 \leq r^{-1}(\varphi)} f_1(\|x_1\|^2) f_2(\|x_2\|^2) dx_1 dx_2$$

Сделаем замены $y_1 = C_1^{\mathrm{T}} x_1$, где матрица C_1 – ортогональная с первым столбцом $\|A^{\mathrm{T}}u\|^{-1} A^{\mathrm{T}}u$, и $y_2 = C_2^{\mathrm{T}} x_2$, где матрица C_2 – ортогональная с первым столбцом $\|B^{\mathrm{T}}u\|^{-1} B^{\mathrm{T}}u$. Свойства (i), (ii) и (iii) из доказательства п. 1) теоремы 1 остаются неизменными для обеих матриц C_1 и C_2, а вместо (iv) получим для C_1:

$$u^{\mathrm{T}} A C_1 = \left(\frac{u^{\mathrm{T}} A A^{\mathrm{T}} u}{\|A^{\mathrm{T}} u\|}, \underbrace{0, 0 \ldots, 0}_{N-1} \right) = \left(\|A^{\mathrm{T}} u\|, 0, 0 \ldots, 0 \right),$$

следовательно, $u^{\mathrm{T}} A x_1 = u^{\mathrm{T}} A C_1 y_1 = \|A^{\mathrm{T}} u\| y_{1_1}$; и для C_2:

$$u^{\mathrm{T}} B C_2 = \left(\frac{u^{\mathrm{T}} B B^{\mathrm{T}} u}{\|B^{\mathrm{T}} u\|}, \underbrace{0, 0 \ldots, 0}_{N-1} \right) = \left(\|B^{\mathrm{T}} u\|, 0, 0 \ldots, 0 \right),$$

следовательно, $u^{\mathrm{T}} B x_2 = u^{\mathrm{T}} B C_2 y_2 = \|B^{\mathrm{T}} u\| y_{2_1}$.

Учитывая свойства матриц C_1 и C_2, преобразуем выражение для функции вероятности

$$\text{(П.24)} \qquad P_\varphi(u) = \int\limits_{u^{\mathrm{T}} A x_1 \cdot u^{\mathrm{T}} B x_2 \le r^{-1}(\varphi)} f_1(\|x_1\|^2) f_2(\|x_2\|^2) dx_1 dx_2 =$$
$$= \int\limits_{y_{1_1} y_{2_1} \le \frac{r^{-1}(\varphi)}{\|A^{\mathrm{T}} u\| \|B^{\mathrm{T}} u\|}} f(\|y_1\|^2) f(\|y_2\|^2) dy_1 dy_2 =$$
$$= \int\limits_{y_{1_1} y_{2_1} \le \frac{r^{-1}(\varphi)}{\|A^{\mathrm{T}} u\| \|B^{\mathrm{T}} u\|}} g_1(y_{1_1}^2) g_2(y_{2_1}^2) dy_{1_1} dy_{2_1},$$

где

$$g(y_{1_1}^2) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} f\left(y_{1_1}^2 + \sum_{i=2}^{N} y_{1_i}^2 \right) dy_{1_2} \ldots dy_{1_N},$$
$$g(y_{2_1}^2) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} f\left(y_{2_1}^2 + \sum_{i=2}^{N} y_{2_i}^2 \right) dy_{2_2} \ldots dy_{2_N}.$$

В силу неотрицательности функций $f_1(\cdot)$ и $f_2(\cdot)$ последний интеграл в (П.24) является неубывающей функцией своей верхней границы. Поэтому решая задачу

$$\text{(П.25)} \qquad \|A^{\mathrm{T}} u\| \|B^{\mathrm{T}} u\| \to \min_{u \in U},$$

решаем и задачу (2.3). Легко показать, используя прием, приведенный при доказательстве леммы 2, что критериальная функция в полученном детерминированном эквиваленте будет выпуклой. Действительно, рассмотрим квадратичную функцию

$$f(u) \stackrel{def}{=} c_1^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} u \cdot c_2^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}} u = u^{\mathrm{T}} (A c_1)(c_2^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}}) u,$$

где векторы c_1 и c_2 имеют подходящие размерности, $\|c_1\| = 1$ и $\|c_2\| = 1$. Максимум функции $f(u)$ по c_1 и c_2 будет выпуклой функцией в силу выпуклости $f(u)$ при $(Ac_1)(c_2^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}}) > 0$. Но

$$\max_{\|c_1\|=1} \max_{\|c_2\|=1} c_1^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} u \cdot c_2^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}} u = \|A^{\mathrm{T}} u\| \|B^{\mathrm{T}} u\|,$$

и максимум выпуклой функции является выпуклой функцией.

Поэтому задача (П.25) оказывается задачей выпуклого программирования [4].

Согласно [2] каждое решение задачи (2.3) для $\varphi = \varphi_\alpha$, где φ_α – оптимальное значение квантильного критерия в задаче (2.4), является решением задачи (2.4). Так как задача (П.25) не зависит от φ, то каждое ее решение будет являться также решением задачи (2.4).

Доказательство леммы 3. Так как $r(t)$ – строго возрастающая, непрерывная слева функция, то

$$\begin{aligned} P_\varphi(u) &\stackrel{def}{=} \mathcal{P}\left\{r(|t(X) + s(u)|) \le \varphi\right\} = \mathcal{P}\left\{|t(X) + s(u)| \le r^{-1}(\varphi)\right\} = \\ &= \mathcal{P}\left\{t(X) \le r^{-1}(\varphi) - s(u)\right\} - \mathcal{P}\left\{t(X) \le -r^{-1}(\varphi) - s(u)\right\}, \end{aligned}$$

откуда следует выражение (7.2).

Доказательство теоремы 6. Согласно (7.2)

$$P_\varphi(u) = \int\limits_{-r^{-1}(\varphi)-s(u)}^{r^{-1}(\varphi)-s(u)} f_T(t)dt.$$

Так как плотность $f_T(\cdot)$ симметрична и унимодальна относительно точки m_T, а длина отрезка интегрирования не зависит от u и равна $2r^{-1}(\varphi)$, то функция вероятности $P_\varphi(u)$ будет максимальна, когда будет минимальна величина $|m_T - s(u)|$. Иными словами, каждое решение задачи (7.3) будет решением задачи (2.3). Но согласно [2] каждое решение задачи (2.3) при $\varphi = \varphi_\alpha$ является решением задачи (2.4), а решение задачи (7.3) не зависит от параметра φ. Поэтому решение задачи (7.3) будет являться и решением задачи (2.4).

Доказательство теоремы 7. Так как функции $r_i(t)$ строго возрастающие, непрерывные слева, а компоненты вектора X независимы, то

$$\begin{aligned} P_\varphi(u) &\stackrel{def}{=} \mathcal{P}\left\{\max_{i=\overline{1,n}} \{r_i(s_i(u) + X_i)\} \le \varphi\right\} = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{P}\left\{r_i(s_i(u) + X_i) \le \varphi\right\} = \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathcal{P}\left\{X_i \le r_i^{-1}(\varphi) - s_i(u)\right\} = \prod_{i=1}^{n} F_i\left(r_i^{-1}(\varphi) - s_i(u)\right). \end{aligned}$$

В [2] показано, что утверждение из [11] о логарифмической вогнутости функции вероятности $P_\varphi(u)$ сохраняется, если целевая функция $\Phi(u, x)$ квазивыпукла (в [10] $\Phi(u, x)$ предполагается выпуклой) совместно по u и x, а вероятностная мера логарифмически вогнута (что гарантируется согласно [11] логарифмической вогнутостью плотности $p(x)$). Так как $\Phi(u, x)$ в данном случае совместно квазивыпукла по u и x, то функция $P_\varphi(u)$ логарифмически вогнута. Но легко проверить, сравнивая неравенства (8.2) и (3.13), что логарифмически вогнутая функция является также квазивогнутой (обратное в общем случае неверно). Таким образом, функция $P_\varphi(u)$ квазивогнута на U для любого $\varphi \in \mathbb{R}^1$. Поэтому согласно [2] функция квантили $\varphi_\alpha(u)$ квазивыпукла для любого $\alpha \in (0, 1)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Юдин Д.Б.* Математические методы управления в условиях неполной информации. М.: Сов. радио, 1974.
2. *Kibzun A.I., Kan Yu.S.* Stochastic Programming Problems with Probability and Quantile Functions. Chichester: John Wiley, 1996.
3. *Кан Ю.С., Кибзун А.И.* Свойства выпуклости функций вероятности и квантили в задачах оптимизации // АиТ. 1996. № 3. С. 82–102.
4. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1980.
5. *Symonds G.H.* Deterministic solution for a class of chance-constrained programming problems // Oper. Res. 1967. V. 15. № 3. P. 495–512.
6. *Райк Э.* О функции квантиля в стохастическом нелинейном программировании // Изв. АН ЭССР. Физ.-мат., 1971. Т. 20. № 1. С. 229–231.
7. *Лепп Р.* Детерминистические эквиваленты задач стохастического программирования с эллиптически симметричными распределениями // Изв. АН ЭССР. Физ.-мат., 1979. Т. 28. № 2. Р. 158–160.
8. *Тамм Э.* О квазивыпуклости функций вероятности и квантиля // Изв. АН ЭССР. Физ.-мат., 1976. Т. 25. № 2. С.141–143.
9. *Кан Ю.С., Тузов Н.В.* Минимизация квантили нормального распределения билинейной функции потерь // АиТ. 1998. № 11. С. 82–92.
10. *Prékopa A.* Contributions to the Theory of Stochastic Programming // Math. Program. 1973. № 64. P. 202–221.
11. *Prékopa A.* Logarithmic Concave Measures and Related Topics // Stochast. Program. ed. M.A.H. Dempster. Acad. Press. 1980. P. 63–82.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.В. Назиным.

Поступила в редакцию 31.01.2006