Автоматика и телемеханика, № 2, 2013

Стохастические системы, системы массового обслуживания

© 2013 г. **А.И. КИБЗУН**, д-р физ.-мат. наук,
А.И. ЧЕРНОБРОВОВ
(Московский авиационный институт)

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ЗАДАЧ С КРИТЕРИЯМИ В ФОРМЕ КВАНТИЛИ И ИНТЕГРАЛЬНОЙ КВАНТИЛИ[1]

Исследуется связь задач стохастического программирования с критериями в форме квантили (VaR) и интегральной квантили (CVaR). Устанавливаются условия, когда решения в этих задачах совпадают и когда различаются. Рассматриваются разные случаи вида функции потерь и функции распределения случайного вектора. В частности, исследована задача с билинейной функцией потерь, к которой сводится задача формирования портфеля ценных бумаг.

1. Введение

Задачи стохастического программирования с критериями в форме квантили и интегральной квантили встречаются в многих прикладных задачах [1], в частности в задачах управления летательными аппаратами, где квантиль характеризует гарантированный с заданной вероятностью промах [2]. Свойства функции квантили (VaR-критерия) детально изучены в [1], а свойства функции интегральной квантили (CVaR-критерия) – в [3, 4]. Оба эти критерия достаточно часто применяются для задач из финансовой сферы, в частности для построения инвестиционного портфеля [5, 6].

Тем не менее взаимосвязь этих критериев изучена не полно. Можно отметить работу [4], в которой предложен метод вычисления CVaR-критерия, основанный на минимизации некоторой вспомогательной функции, минимум которой достигается в точке VaR. В [5] установлена связь между определением CVaR из [4] как условного математического ожидания от функции потерь при условии, что ее значения больше VaR, и определением CVaR из [5] как среднего значения VaR относительно уровня доверительной вероятности. В [7] рассмотрена обобщённая постановка задачи Марковица, где вместо среднего значения функции дохода рассматривается условный средний доход (CVaR), а вместо дисперсии дохода – VaR-критерий, который минимизируется.

---

[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 11-07-00315-а, № 11-07-90407-Укр_ф_а и № 11-07-13102-офи-м-2011-РЖД).

Отметим, что функция квантили существует всегда для любого распределения функции потерь, а для функции интегральной квантили необходимо существование среднего значения функции потерь. Но при этом CVaR обладает выпуклыми свойствами в тех случаях, когда выпуклость VaR не гарантируется. Оба эти критерия тесно связаны между собой. В частности, интегральную квантиль можно использовать как оценку квантили сверху. Более того, при уровне вероятности, близком к единице, значения этих критериев оказываются близкими. Поэтому возникает естественный вопрос о близости оптимальных стратегий для данных критериев и о поиске условий, когда эти стратегии совпадают.

В данной статье детально исследуется связь между решениями задач с критериями в форме VaR и CVaR. В частности, устанавливаются условия, когда оптимальные стратегии в этих задачах совпадают и когда они различаются для разных видов функции потерь. В работе рассмотрены случаи, когда функция потерь возрастает относительно стратегии, когда функция потерь возрастает относительно случайной величины, а также случай вырожденной биквадратичной функции потерь. Подробно исследована задача с билинейной функцией потерь, к которой сводится, например, задача формирования портфеля ценных бумаг [1].

2. Основные определения и вспомогательные утверждения

Пусть $\Phi(u, X) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ – функция потерь, где X – случайный вектор с реализациями $x \in \mathbb{R}^n$ и абсолютно непрерывной функцией распределения $F_X(x)$, индуцирующей вероятностную меру $\mathcal{P}$, определенную на борелевских множествах из $\mathbb{R}^n$. В дальнейшем везде предполагается, что $\Phi(u, x)$ определена для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $u \in U$, где $U \subset \mathbb{R}^m$ — выпуклый компакт.

Определим также функцию вероятности

$$P_\varphi(u) \triangleq \mathcal{P}\{\Phi(u, X) \leqslant \varphi\}, \quad \varphi \in \mathbb{R}^1. \tag{2.1}$$

Определим функцию квантили (VaR)

$$[\Phi(u, X)]_\alpha \triangleq \varphi_\alpha(u) \triangleq \min\{\varphi : P_\varphi(u) \geqslant \alpha\}, \quad \alpha \in (0, 1), \tag{2.2}$$

и функцию интегральной квантили (CVaR)

$$\{\Phi(u, X)\}_\alpha \triangleq \psi_\alpha(u) \triangleq \frac{1}{1-\alpha} \int\limits_\alpha^1 \varphi_\beta(u) d\beta, \quad \alpha \in (0, 1). \tag{2.3}$$

Также определим «верхний» и «нижний» CVaR уровня α:

$$\psi_\alpha^+(u) \triangleq \mathbf{M}[\Phi(u, X) | \Phi(u, X) > \varphi_\alpha(u)],$$

$$\psi_\alpha^-(u) \triangleq \mathbf{M}[\Phi(u, X) | \Phi(u, X) \geqslant \varphi_\alpha(u)].$$

Рассмотрим некоторые свойства квантили и интегральной квантили как характеристик случайных величин.

Для любой случайной величины X и для любого $\alpha \in (0,1)$ верно [1, с. 86]:

$$[X+t]_\alpha = [X]_\alpha + t \quad \forall t \in \mathbb{R}^1; \tag{2.4}$$

$$[tX]_\alpha = t[X]_\alpha \quad \forall t \geqslant 0. \tag{2.5}$$

Аналогичными свойствами обладает и интегральная квантиль при условии, что $\{X\}_\alpha < \infty$:

$$\{X+t\}_\alpha = \{X\}_\alpha + t \quad \forall t \in \mathbb{R}^1; \tag{2.6}$$

$$\{tX\}_\alpha = t\{X\}_\alpha \quad \forall t \geqslant 0. \tag{2.7}$$

Замечание 1. Может оказаться, что $\{X\}_\alpha = \infty$, даже если для всех $\alpha \in (0,1)$ выполняется неравенство $|[X]_\alpha| < \infty$, например, если X имеет распределение Коши.

Лемма 1. Для любой случайной величины X неравенство $[X]_\alpha > 0$ выполняется для всех $\alpha \in (0,1)$ тогда и только тогда, когда $X > 0$ почти наверное.

Лемма 2. Если $\mathbf{M}[X] < \infty$, то для любого $\alpha \in (0,1)$ справедливо неравенство

$$\mathbf{M}[X] \leqslant \{X\}_\alpha. \tag{2.8}$$

Следующую теорему можно рассмотреть как альтернативное определение функции интегральной квантили.

Теорема 1 [5]. *Если для некоторого $u \in U$ выполнено условие $|\psi_\alpha(u)| < \infty$, то функция $\psi_\alpha(u)$ представима в виде*

$$\psi_\alpha(u) = \lambda_\alpha(u)\varphi_\alpha(u) + (1-\lambda_\alpha(u))\psi_\alpha^+(u), \tag{2.9}$$

где

$$\lambda_\alpha(u) \triangleq \frac{P_{\varphi_\alpha(u)}(u) - \alpha}{1-\alpha}. \tag{2.10}$$

В [3] показана связь между квантилью, интегральной квантилью, «верхним» и «нижним» CVaR через следующее неравенство, если выполнены условия теоремы 1:

$$\varphi_\alpha(u) \leqslant \psi_\alpha^-(u) \leqslant \psi_\alpha(u) \leqslant \psi_\alpha^+(u) \quad \forall \alpha \in (0,1). \tag{2.11}$$

Замечание 2. Данное неравенство позволяет получить верхнюю оценку функции квантили. Поэтому, минимизируя $\psi_\alpha(u)$ по $u \in U$, можно косвенно минимизировать и $\varphi_\alpha(u)$.

Согласно [1, с. 78; 3] функции квантили и интегральной квантили являются неубывающими по параметру α. Кроме того, оказывается, что функция интегральной квантили имеет еще одно представление.

Теорема 2 [4]. *Если* $\mathbf{M}[\Phi(u, X)] < \infty$ *для некоторого* $u \in U$, *то*

$$\psi_\alpha(u) = \min_{\varphi \in \mathbb{R}^1} \left(\varphi + \frac{1}{1-\alpha} \mathbf{M}[\max\{\Phi(u, X) - \varphi,\ 0\}] \right), \quad \alpha \in (0,1), \tag{2.12}$$

$$\varphi_\alpha(u) = \arg \min_{\varphi \in \mathbb{R}^1} \left(\varphi + \frac{1}{1-\alpha} \mathbf{M}[\max\{\Phi(u, X) - \varphi,\ 0\}] \right). \tag{2.13}$$

Замечание 3. Отметим, что условие $\mathbf{M}[\Phi(u, X)] < \infty$ для некоторого $u \in U$ эквивалентно условию $\mathbf{M}[\max\{\Phi(u, X), 0\}] < \infty$ для того же u.

Напомним также некоторые другие свойства, которыми обладают эти функции и которые понадобятся в дальнейшем.

Теорема 3 [1, с. 88]. *Пусть для некоторого* $u \in U$ *выполняется условие* $\mathbf{M}[\max\{\Phi(u, X), 0\}] < \infty$. *Тогда для любого* $\alpha \in (0,1)$ *функция интегральной квантили принимает конечное значение,* $|\psi_\alpha(u)| < \infty$.

Теорема 4 [4]. *Если* $\Phi(u, x)$ *выпукла по* u *на выпуклом множестве* $U \subset \subset \mathbb{R}^m$ *для всех* $x \in \mathbb{R}^n$ *и* $\mathbf{M}[\Phi(u, X)] < \infty$ *для всех* $u \in U$, *то функция* $\psi_\alpha(u)$ *также выпукла по* u *на* U.

Напомним также, что операция $\mathrm{Arg}\min(\cdot)$ обладает следующими свойствами [8]:

$$\mathrm{Arg}\min_{u \in U} (g(u) + t) = \mathrm{Arg}\min_{u \in U} g(u) \quad \forall t \in \mathbb{R}^1, \tag{2.14}$$

$$\mathrm{Arg}\min_{u \in U} (g(u)t) = \mathrm{Arg}\min_{u \in U} g(u) \quad \forall t > 0. \tag{2.15}$$

Введем обозначения для множества решений задачи квантильной оптимизации

$$U_\alpha^\varphi = \mathrm{Arg}\min_{u \in U} \varphi_\alpha(u), \quad u_\alpha^\varphi = \arg\min_{u \in U} \varphi_\alpha(u), \tag{2.16}$$

и для множества решений задачи оптимизации интегральной квантили

$$U_\alpha^\psi = \mathrm{Arg}\min_{u \in U} \psi_\alpha(u), \quad u_\alpha^\psi = \arg\min_{u \in U} \psi_\alpha(u). \tag{2.17}$$

Множество решений задачи с критерием в виде математического ожидания обозначим

$$U^{\mathbf{M}} = \mathrm{Arg}\min_{u \in U} \mathbf{M}[\Phi(u, X)], \quad u^{\mathbf{M}} = \arg\min_{u \in U} \mathbf{M}[\Phi(u, X)]. \tag{2.18}$$

Определение 1. Будем говорить, что решение одной из задач (2.16), (2.17), (2.18) *частично эквивалентно решению другой задачи, если множество решений первой не пусто и оно является подмножеством решений второй.*

Определение 2. Будем говорить, что одна из задач (2.16), (2.17), (2.18) *эквивалентна другой тогда, когда множества их решений совпадают.*

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 3 [1, с. 232]. *Пусть функция* $r(t) : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ *строго возрастает и определена для всех* $t \in \mathbb{R}^1$, *функция* $g(u) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1$ *– произвольная. Тогда задачи*

$$U' = \operatorname{Arg}\min_{u \in U} r(g(u)),$$

$$U^* = \operatorname{Arg}\min_{u \in U} g(u) \qquad (2.19)$$

– эквивалентны.

Рассмотрим детерминированную задачу (2.19) для некоторой функции $g(u) : U \to \mathbb{R}^1$.

Лемма 4. Если задача (2.19) *частично эквивалентна задаче* (2.16) *для всех* $\alpha \in (0,1)$ *и* $\mathbf{M}[\Phi(u,X)] < \infty$ *для всех* $u \in U$, *то задача* (2.19) *частично эквивалентна задаче* (2.17) *для всех* $\alpha \in (0,1)$.

Другими словами, если существует стратегия, которая является оптимальной по квантильному критерию сразу для всех $\alpha \in (0,1)$, то она будет являться оптимальной и для критерия в форме интегральной квантили.

3. Функция потерь, возрастающая относительно стратегии

Пусть функция потерь имеет вид

$$\Phi(u,X) = r(s(u),X), \qquad (3.1)$$

где $s(\cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1$, $r(s,x) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ – строго возрастающая непрерывная слева функция по $s \in \mathbb{R}^1$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, X – случайный вектор с известной функцией распределения $F_X(x)$.

Замечание 4. В разных прикладных задачах $r(\cdot)$ может играть роль функции полезности. Например, в моделях из сферы страхования можно использовать функцию $r(s,X) = -\exp\{-sX/L\}$, где X – случайная величина, характеризующая ущерб от какого-либо события в денежном выражении, L – 1 рубль, $s > 0$ – безразмерный коэффициент противления риску. Данная функция отражает предпочтения человека, не склонного к риску [9].

Лемма 5 [10]. *Пусть функция* $\Phi(u,x)$ *имеет вид* (3.1). *Тогда задача*

$$U^* = \operatorname{Arg}\min_{u \in U} s(u) \qquad (3.2)$$

эквивалентна задаче (2.16) *для всех* $\alpha \in (0,1)$.

Сформулируем аналогичную лемму для интегральной квантили.

Лемма 6. Пусть функция $\Phi(u,x)$ *имеет вид* (3.1) *и* $\mathbf{M}[\Phi(u,X)] < \infty$ *для всех* $u \in U$. *Тогда задача* (3.2) *эквивалентна задаче* (2.17) *для всех* $\alpha \in$ $\in (0,1)$.

Доказательство следует непосредственно из лемм 4 и 5.

Следствием из этих лемм является следующий результат.

Следствие 1. Пусть $\Phi(u,X) = r(s(u)f_1(X) + f_2(X))$, *где* $r(\cdot) : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ – *строго возрастающая непрерывная слева функция,* $s(u) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1$ – *некоторая функция,* $f_1(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, $f_2(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ – *измеримые функции,* $f_1(x) > 0$ *и* $\mathbf{M}[\Phi(u,X)] < \infty$ *для всех* $u \in U$. *Тогда задача* (3.2) *эквивалентна задачам* (2.16), (2.17) *для всех* $\alpha \in (0,1)$.

Замечание 5. Данный результат является ожидаемым, так как иллюстрирует случай равномерно оптимальной стратегии, т.е. одной и той же стратегии оптимальной для любых распределений X, при этом значения критериев VaR и CVaR могут сильно различаться.

4. Функция потерь, линейная относительно случайной величины

Рассмотрим следующую лемму.

Лемма 7. Пусть $\Phi(u,X) = s_1(u) + s_2(u)f_1(X)$, *где* $f_1(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ – *некоторая измеримая функция,* $s_1(u) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1$, $s_2(u) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^+$ – *неотрицательная функция,* $\mathbf{M}[f_1(X)] < \infty$ *и*

$$U_* \triangleq \operatorname{Arg}\min_{u\in U} s_1(u) \cap \operatorname{Arg}\min_{u\in U} s_2(u) \neq \varnothing.$$

Тогда

i) *если* $\mathbf{M}[f_1(X)] > 0$, *то для всех* $\alpha \in (0,1)$ *задачи* (2.17), (2.18) *полностью эквивалентны,* $U_\alpha^\psi = U^{\mathbf{M}} = U_*$;

ii) *если* $[f_1(X)]_\beta > 0$ *для некоторого* $\beta \in (0,1)$, *то для всех* $\alpha \in [\beta,1)$ *задачи* (2.16), (2.17) *полностью эквивалентны,* $U_\alpha^\varphi = U_\alpha^\psi = U_*$.

Замечание 6. Одновременное выполнение условий $\mathbf{M}[f_1(X)] > 0$ и $[f_1(X)]_\beta > 0$ для некоторого $\beta \in (0,1)$ влечет за собой $U_\alpha^\varphi = U_\alpha^\psi = U^{\mathbf{M}} = U_*$ для всех $\alpha \in [\beta,1)$.

Замечание 7. Легко видеть, что если $f_1(X) > 0$ почти наверное, то одновременно выполняются условия $\mathbf{M}[f_1(X)] > 0$ и $[f_1(X)]_\alpha > 0$ для всех $\alpha \in (0,1)$. Это следует из леммы 1 и из того, что если $f_1(X) > 0$ почти наверное, то $\mathbf{M}[f_1(X)] > 0$.

Рассмотрим простой пример, который иллюстрирует "разнонаправленность" критериев VaR и CVaR, т.е. когда минимизация квантили ведет к максимизации интегральной квантили и наоборот.

Пример 1. Пусть $\Phi(u,X) = uX$, $U = [0,1] \subset \mathbb{R}^1$ и X имеет равномерное распределение на отрезке $[a,b]$, т.е. $X \sim \mathcal{R}(a,b)$. Для любого $\alpha \in (0,1)$ можно выбрать такие параметры a и b, что решения задач (2.16) и (2.17) будут не совпадать. Более того, решения будут противоположными, а именно $u_\alpha^\varphi = 0$, а $u_\alpha^\psi = 1$. Для этого достаточно, чтобы были выполнены неравенства:

$$[X]_\alpha < 0, \qquad \{X\}_\alpha > 0.$$

Для равномерного распределения значения VaR и CVaR можно найти аналитически, поэтому

$$[X]_\alpha = (b-a)\alpha + a < 0, \qquad \{X\}_\alpha = \frac{(b-a)(1+\alpha)}{2} + a > 0.$$

Решая данную систему, можно показать, что если $\alpha \in \left(\frac{-2a}{b-a} - 1, \frac{-a}{b-a}\right)$, то решения задач (2.16) и (2.17) не будут совпадать.

Если $\alpha = 0{,}95$, то параметры можно взять равными, например $a = -30$, $b = 1$.

Данный пример иллюстрирует то, что стратегии, оптимальные для VaR и CVaR, могут не просто различаться, а быть противоположными. Поэтому актуален поиск случаев, когда стратегии, оптимальные для этих критериев, совпадают.

Пример 2. Рассмотрим пример, когда $f_1(x) > 0$ для всех $\alpha \in (0,1)$. Пусть $\Phi(u, X) = s_1(u) + s_2(u)X$, где $s_1(u) = \sin(u) + u$, $s_2(u) = u^8$, $U = [0,3] \subset \mathbb{R}^1$, X имеет равномерное распределение на отрезке $[1, 100]$, т.е. $X \sim \mathcal{R}(1, 100)$. Тогда решение задач (2.16), (2.17), (2.18) будет:

$$U_* = \operatorname{Arg}\min_{u \in U} s_1(u) \cap \operatorname{Arg}\min_{u \in U} s_2(u) = \{0\} \cap \{0\} = \{0\}.$$

Рассмотрим некоторое обобщение линейной функции. Пусть функция потерь имеет вид

$$\Phi(u, X) = r(u, f(X)), \tag{4.1}$$

где $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ – некоторая измеримая функция, определенная на всей числовой оси, $r(u, f) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ – строго возрастающая непрерывная слева функция по $f \in \mathbb{R}^1$ для всех $u \in \mathbb{R}^m$, а X – случайный вектор с известной функцией распределения $F_X(x)$.

Лемма 8 [10]. *Пусть функция потерь имеет вид* (4.1) *и* $\mathbf{M}[\Phi(u, X)] < \infty$ *для всех* $u \in U$ *. Тогда для всех* $u \in U$ *и* $\alpha \in (0,1)$ *выполняется*

$$\varphi_\alpha(u) = r(u, [f(X)]_\alpha).$$

Очевидным следствием из этой леммы является следующее утверждение.

Следствие 2. Пусть функция потерь имеет вид (4.1). *Тогда для всех* $u \in U$ *и* $\alpha \in (0,1)$ *выполняется*

$$\psi_\alpha(u) = \frac{1}{1-\alpha} \int\limits_\alpha^1 r(u, [f(X)]_\beta) d\beta.$$

Замечание 8. Для функции (4.1) получены детерминированные эквиваленты для VaR и CVaR критериев, но получить условия эквивалентности задач (2.16) и (2.17) оказывается затруднительным.

Обобщая результаты этого раздела и раздела 3, сформулируем утверждение для функции $\Phi(u, X)$, обладающей более сложной структурой.

Теорема 5. Пусть $\Phi(u, X) = r(s_1(u) + s_2(u) f_1(X) + f_2(X))$, $r(\cdot) : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ *– строго возрастающая непрерывная слева функция,* $s_1(u) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1$ *– некоторая функция,* $s_2(u) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^+$ *– неотрицательная на* U *функция,*

$f_1(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ и $f_2(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ – измеримые функции, $f_1(x) > 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{M}[\Phi(u, X)] < \infty$ для всех $u \in U$ и

$$U_* \triangleq \operatorname{Arg} \min_{u \in U} s_1(u) \cap \operatorname{Arg} \min_{u \in U} s_2(u) \neq \varnothing. \tag{4.2}$$

Тогда для всех $\alpha \in (0, 1)$ задача (4.2) *будет частично эквивалентна задачам* (2.16), (2.17) *и эквивалентна задаче* (2.18).

Доказательство следует непосредственно из лемм 3, 7 и следствия 1.

5. Функция потерь с билинейной структурой

Перейдем к изложению основного результата статьи.

Будем предполагать, что функция распределения $F_X(x)$ случайного вектора X абсолютно непрерывна, т.е. существует плотность вероятности $p_X(x)$. Пусть функция потерь имеет вид

$$\Phi(u, X) = r(u^{\mathrm{T}} AX + u^{\mathrm{T}} c), \tag{5.1}$$

где A – некоторая $(m \times n)$-матрица, c – фиксированный вектор размерности m, $r(t) : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ – строго возрастающая непрерывная слева функция. Пусть распределение случайного вектора X сферически симметрично, т.е. его плотность можно представить в виде

$$p_X(x) \triangleq f(||x||^2) = f(x^{\mathrm{T}} x), \tag{5.2}$$

где функция $f(\cdot)$ в (5.2) является неотрицательной для любого значения $||x||^2$.

Замечание 9. Частным случаем функции потерь вида (5.1) является функция, где i-й элемент вектора X характеризует случайную доходность от инвестиций в i-й финансовый инструмент, а c – доходность безрисковой ценной бумаги. Если все X_i имеют одинаковые параметры нормального распределения и независимы, то вектор X имеет сферически симметричное распределение.

Пусть $[X_1]_\alpha$ – квантиль уровня α первой компоненты вектора X.

Для функции квантили известен следующий результат.

Лемма 9 [10]. *Пусть функция потерь имеет вид* (5.1), *где* $||A^{\mathrm{T}} u|| > 0$, *а распределение X имеет вид* (5.2). *Тогда*

$$\varphi_\alpha(u) = r(||A^{\mathrm{T}} u||[X_1]_\alpha + u^{\mathrm{T}} c).$$

Из леммы 9 и определения (2.3) непосредственно следует, что в этом случае при выполнении условия $\mathbf{M}[\Phi(u, X)] < \infty$ для всех $u \in U$ справедливо

$$\psi_\alpha(u) = \frac{1}{1 - \alpha} \int\limits_\alpha^1 r(||A^{\mathrm{T}} u||[X_1]_\beta + u^{\mathrm{T}} c) d\beta. \tag{5.3}$$

Замечание 10. Если предположить, что $r(t) = t$, то из (5.3) следует для этого случая, что

$$\psi_\alpha(u) = ||A^{\mathrm{T}}u||\{X_1\}_\alpha + u^{\mathrm{T}}c.$$

Рассмотрим утверждение теоремы 6.

Теорема 6. Пусть функция потерь имеет вид (5.1), *где* $c = 0$ *и* $||A^{\mathrm{T}}u|| > 0$, *а распределение* X *имеет вид* (5.2), $[X_1]_\beta > 0$ *для некоторого* $\beta \in (0,1)$, *причем* $\mathbf{M}[\Phi(u,X)] < \infty$ *для всех* $u \in U$. *Тогда для всех* $\alpha \in [\beta, 1)$ *задачи* (2.16), (2.17) *эквивалентны, т.е.*

$$U_\alpha^\varphi = U_\alpha^\psi = U_* \triangleq \operatorname{Arg}\min_{u \in U} ||A^{\mathrm{T}}u||.$$

Данная модель может быть использована для оптимизации инвестиционного портфеля. Более подробно примеры для такой модели будут рассмотрены далее для случая симметричной функции распределения.

Рассмотрим случай симметричной функции распределения.

Определение 3. Будем говорить, что распределение n*-мерного случайного вектора* $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^{\mathrm{T}}$ *симметрично, если его функция распределения* $F_X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *не изменяется при всех перестановках входящих в нее переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Замечание 11. Легко видеть, что если распределение случайного вектора сферически симметрично, то оно симметрично. А если X_i, $i = \overline{1,m}$, – независимые в совокупности одинаково распределенные случайные величины, то распределение вектора $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^{\mathrm{T}}$ также симметрично.

Рассмотрим случай, когда целевая функция имеет структуру

$$\Phi(u, X) = -u^{\mathrm{T}}X = -\sum_{i=1}^{m} u_i X_i, \tag{5.4}$$

где вектор X имеет симметричное распределение.

Сформулируем задачу (2.16), где множество допустимых стратегий

$$U = \left\{ u : \sum_{i=1}^{m} u_i \leqslant 1,\ u_i \geqslant 0,\ i = \overline{1,m} \right\}. \tag{5.5}$$

Аналогично сформулируем задачу (2.17), где множество U допустимых стратегий также имеет вид (5.5).

Такая модель встречается при распределении ограниченных ресурсов $u \in$ $\in U$ по проектам X, имеющим случайную природу. Одним из характерных примеров является задача об оптимизации инвестиционного портфеля. Обе постановки хорошо известны [3, 7]. Легко построить примеры, когда данные постановки приводят к разным результатам. Поэтому вопрос о том, когда задачи (2.16), (2.17) частично эквивалентны, для такой модели является актуальным.

Замечание 12. При распределении ресурсов в одинаковые (симметричные) активы ожидаемым результатом является равномерное распределение капитала по всем активам. Однако, как будет показано далее, для критерия в форме математического ожидания такое решение является лишь одним из множества оптимальных, а для VaR-критерия оказывается либо единственно оптимальным, либо неоптимальным (в зависимости от выборы параметра α). При этом равномерное распределение капитала оказывается оптимальным для критерия CVaR при любых α.

Часто на практике решение таких задач находится на множестве

$$U' \triangleq \left\{ u : \sum_{i=1}^{m} u_i = 1,\ u_i \geqslant 0,\ i = \overline{1,m} \right\}. \tag{5.6}$$

Тогда множество (5.5) можно сузить до множества (5.6). Чтобы сформулировать условия, когда это можно сделать, введем определения.

Определение 4. Множество

$$K_\alpha = \bigcap_{||c||=1} \{x : c^{\mathrm{T}} x \leqslant [c^{\mathrm{T}} X]_\alpha\}, \quad \alpha \in (0,1),$$

где X – n-мерный случайный вектор, называется α-ядром вероятностной меры, порожденной в $\mathbb{R}^n$ распределением вектора X.

Определение 5. Ядро K_α называется регулярным, если любое замкнутое полупространство, содержащее ядро, является α-доверительным множеством.

Замечание 13. Ядро K_α является выпуклым компактным множеством. Многие известные многомерные распределения имеют регулярное ядро, например равномерное на круге, нормальное распределение и распределение Коши.

Теорема 7 [1, с. 208]. *Если $\Phi(u, X) = u^{\mathrm{T}} X + c$, а $\alpha \in (0,1)$ и распределение X имеет регулярное α-ядро K_α, то*

$$\varphi_\alpha(u) = \max_{x \in K_\alpha} (u^{\mathrm{T}} x + c), \quad \alpha \in (0,1).$$

Замечание 14. Из теоремы 7 следует, что $\varphi_\alpha(u)$ выпукла на $\mathbb{R}^n$, так как максимум линейной функции является выпуклой функцией. Из этой теоремы также следует, что

$$[X + Y]_\alpha \leqslant [X]_\alpha + [Y]_\alpha, \quad \alpha \in (0,1), \tag{5.7}$$

если распределение случайного вектора (X, Y) имеет регулярное ядро K_α, так как

$$[X + Y]_\alpha = \max_{(x,y) \in K_\alpha} (x + y) \leqslant \max_{x \in K_\alpha} x + \max_{y \in K_\alpha} y = [X]_\alpha + [Y]_\alpha.$$

Замечание 15. Согласно теореме 4 для билинейной функции потерь функция $\psi_\alpha(u)$ будет выпуклой на $\mathbb{R}^n$. Более того, согласно [3] $\psi_\alpha(u)$ будет сублинейной. Поэтому для любых случайных величин X и Y будет выполнено неравенство

$$\{X+Y\}_\alpha \leqslant \{X\}_\alpha + \{Y\}_\alpha, \quad \alpha \in (0,1). \tag{5.8}$$

Заметим, что неравенство (5.8) для интегральной квантили выполняется без каких-либо предположений о мере $\mathcal{P}$, если, конечно, $\{X\}_\alpha$ и $\{Y\}_\alpha$ существуют.

Лемма 10. Если α-ядро распределения случайного вектора X регулярно и при этом хотя бы для одного $i \in \{1,\ldots,m\}$ верно $[-X_i]_\alpha < 0$, то решение задачи (2.16) *находится на множестве* (5.6).

Рассмотрим аналогичную лемму для функции интегральной квантили.

Лемма 11. Если $\mathbf{M}[\sum_{i=1}^m X_i] < \infty$ и при этом хотя бы для одного $i \in \in \{1,\ldots,m\}$ верно $\{-X_i\}_\alpha < 0$, то решение задачи (2.17) *находится на множестве* (5.6).

Для удобства дальнейшего изложения будем рассматривать задачи (2.16) и (2.17) в $(m-1)$-мерном пространстве. Будем использовать следующие обозначения для вектора стратегий и целевой функции

$$\bar{u} \triangleq (u_1, u_2, \ldots, u_{m-1})^{\mathrm{T}},$$

$$\bar{\Phi}(\bar{u}, X) \triangleq -\left(\sum_{i=1}^{m-1} u_i X_i + \left(1 - \sum_{i=1}^{m-1} u_i\right) X_m\right).$$

Определим для них функцию квантили $\bar{\varphi}_\alpha(\bar{u})$ и функцию интегральной квантили $\bar{\psi}_\alpha(\bar{u})$. Сформулируем задачу (2.16) в $(m-1)$-мерном пространстве:

$$\bar{U}_\alpha^\varphi = \operatorname{Arg}\min_{\bar{u}\in\bar{U}} \bar{\varphi}_\alpha(\bar{u}), \tag{5.9}$$

где

$$\bar{U} = \left\{\bar{u} : \sum_{i=1}^{m-1} u_i \leqslant 1,\ u_i \geqslant 0,\ i = \overline{1, m-1}\right\}. \tag{5.10}$$

Сформулируем задачу (2.17) в $(m-1)$-мерном пространстве:

$$\bar{U}_\alpha^\psi = \operatorname{Arg}\min_{\bar{u}\in\bar{U}} \bar{\psi}_\alpha(\bar{u}), \tag{5.11}$$

где $\bar{U}$ определено в (5.10).

Очевидно, что задача (2.16) для функции (5.4) с множеством (5.5) и задача (5.9) эквивалентны, если расширить $(m-1)$-мерный вектор задачи (5.9) до m-мерного путем добавления в него переменной $u_m = 1 - \sum_{i=1}^{m-1} u_i$, т.е. $u = = (\bar{u}^{\mathrm{T}}, 1 - \sum_{i=1}^{m-1} u_i)^{\mathrm{T}}$.

Аналогично задача (2.17) для функции (5.4) с множеством (5.5) и задача (5.11) эквивалентны, если расширить $(m-1)$-мерный вектор задачи (5.11) до m-мерной путем добавления в него переменной $u_m = 1 - \sum_{i=1}^{m-1} u_i$.

Приведем несколько вспомогательных лемм, которые будут необходимы для дальнейшего изложения.

Определение 6. Будем называть функцию $\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_{m-1})$ *симметричной относительно точки* $u^* = (u_1^*, u_2^*, \ldots, u_{m-1}^*)^{\mathrm{T}}$ *тогда, когда эта функция удовлетворяет для любого* Δ *системе из* $m-1$ *соотношений*

$$\begin{cases} \varphi(u_1^* - \Delta, u_2^*, \ldots, u_{m-1}^*) &= \varphi(u_1^* + \Delta, u_2^*, \ldots, u_{m-1}^*), \\ \varphi(u_1^*, u_2^* - \Delta, \ldots, u_{m-1}^*) &= \varphi(u_1^*, u_2^* + \Delta, \ldots, u_{m-1}^*), \\ \ldots & \\ \varphi(u_1^*, u_2^*, \ldots, u_{m-1}^* - \Delta) &= \varphi(u_1^*, u_2^*, \ldots, u_{m-1}^* + \Delta). \end{cases}$$

Лемма 12. Если $\bar{\Phi}(\bar{u}, X) = -\sum_{i=1}^{m-1} u_i X_i - (1 - \sum_{i=1}^{m-1} u_i) X_m$ *и* X *обладает симметричным распределением, то функция* $\bar{\varphi}_\alpha(\bar{u})$ *симметрична относительно точки* $\bar{u}^* = (\frac{1}{m}, \ldots, \frac{1}{m})^{\mathrm{T}}$.

Лемма 13. Если $\Phi(u, X) = -\sum_{i=1}^{m-1} u_i X_i - (1 - \sum_{i=1}^{m-1} u_i) X_m$ *и* X *обладает симметричным распределением, таким что* $\mathbf{M}[X_i] < \infty$, $i = \overline{1, m}$, *то функция* $\bar{\psi}_\alpha(u)$ *симметрична относительно точки* $\bar{u}^* = (\frac{1}{m}, \ldots, \frac{1}{m})^{\mathrm{T}}$.

Теорема 8. Пусть $\Phi(u, X) = -\sum_{i=1}^{m} u_i X_i$, X *обладает симметричным распределением, таким что* α*-ядро является регулярным и* $[-X_i]_\alpha < 0$, $\mathbf{M}[X_i] = \mu < \infty$ *для всех* $i = \overline{1, m}$ *и множество* U *допустимых стратегий имеет вид* (5.6). *Тогда задачи* (2.16), (2.17) *частично эквивалентны задаче* (2.18) *и их решением является*

$$u_\alpha^\varphi = u_\alpha^\psi = (1/m, \ldots, 1/m)^{\mathrm{T}},$$
$$\varphi_\alpha(u_\alpha^\varphi) = \frac{1}{m}\left[-\sum_{i=1}^{m} X_i\right]_\alpha,$$
$$\psi_\alpha(u_\alpha^\psi) = \frac{1}{m}\left\{-\sum_{i=1}^{m} X_i\right\}_\alpha.$$

Рассмотрим пример одноэтапной модели инвестирования в две ценные бумаги. Считаем, что ценные бумаги обладают случайными доходностями X_1 и X_2. Пусть u_1 и u_2 – доли капитала, вложенные в ценные бумаги X_1 и X_2 соответственно. Задача (2.16) формулируется так: необходимо найти доли капитала (u_1 и u_2) таким образом, чтобы с вероятностью α гарантировать минимальные потери. Задача (2.17) – так: необходимо найти доли капитала таким образом, чтобы в среднем в неблагоприятных случаях (вероятность которых $1-\alpha$) потери были минимальными.

Пример 3. Пусть $\Phi(u, X) = \bar{\Phi}(u_1, X) = -u_1 X_1 - u_2 X_2$, где $X_1, X_2 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ – независимы. Множество $U = \{u_1 + u_2 = 1, u_1 \geqslant 0, u_2 \geqslant 0\}$. Найдем u_α^φ и u_α^ψ при $\alpha > 1/2$. Для удобства выразим u_2 через u_1, используя ограничение в U, $u_2 = 1 - u_1$, и подставим это выражение в функцию потерь, получим $\Phi(u, X) = -u_1 X_1 - (1 - u_1) X_2$. Используя результат, полученный в [1, с. 25], можно выписать явный вид квантили и интегральной квантили:

$$\varphi_\alpha(u) = [Y]_\alpha\sqrt{u^2\sigma^2 + (1-u_1)^2\sigma^2} - (u_1\mu + (1-u_1)\mu) =$$
$$= [Y]_\alpha\sigma\sqrt{u_1^2 + (1-u_1)^2} - \mu,$$
$$\psi_\alpha(u) = \{Y\}_\alpha\sqrt{u_1^2\sigma^2 + (1-u_1)^2\sigma^2} - (u_1\mu + (1-u_1)\mu) =$$
$$= \{Y\}_\alpha\sigma\sqrt{u_1^2 + (1-u_1)^2} - \mu,$$

где $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Так как $\alpha > 1/2$, то $[Y]_\alpha > 0$ и, следовательно, $\{Y\}_\alpha > 0$. Из этого следует, что $\varphi_\alpha(u)$ и $\psi_\alpha(u)$ – выпуклые функции. Таким образом, учитывая (2.14), (2.15) и то, что корень – функция возрастающая, получим

$$u_\alpha^\varphi = u_\alpha^\psi = \arg\min_{u_1}(u_1^2 + (1-u_1)^2).$$

Из условия

$$\frac{d}{du_1}(u_1^2 + (1-u_1)^2) = 0$$

легко найти, что $u_1^* = 1/2$, $u_2^* = 1 - u_1 = 1/2$. А это, очевидно, совпадает с утверждением теоремы 8, так как в данном случае $m = 2$ и ядро гауссовой меры регулярно при $\alpha > 1/2$.

Замечание 16. Стоит отметить, что при $\alpha < 1/2$ функция квантили в примере по-прежнему остается симметричной функцией, но при этом не выпуклой, а вогнутой. Таким образом, решение задачи будет находиться на границе множества, т.е. либо $u_1 = 0$, либо $u_0 = 1$, что полностью противоречит ожидаемому результату. Также нетрудно заметить, что в данном примере $\psi_\alpha(u)$ выпукла по u на множестве U для любого $\alpha \in (0,1)$. Действительно, $\psi_\alpha(u)$ выпукла тогда, когда $\{Y\}_\alpha \geqslant 0$. Но $\{Y\}_\alpha \geqslant \mathbf{M}[Y] = 0$ для любого $\alpha \in (0,1)$. А так как функция $\{Y\}_\alpha$ не убывает по α, то $\{Y\}_\alpha \geqslant 0$ для любого $\alpha \in (0,1)$.

Теорема 8 легко обобщается на следующий случай.

Теорема 9. Пусть $\Phi(u,X) = r(-\sum_{i=1}^m f_i(u_i)X_i)$, *где* X *имеет симметричное распределение с регулярным ядром и* $[-X_i]_\alpha < 0$ *для всех* $i \in \{1,2,\ldots,m\}$, $r(t) : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ *– строго возрастающая непрерывная слева функция,* $f_i(u_i) : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ *– такие функции, что их обратные функции* $f_i^{-1}(v) : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ *однозначно определены в точке* C/m, $i = \overline{1,m}$, *и множество допустимых стратегий* $U = \{u : \sum_{i=1}^m f_i(u_i) \leqslant C,\ f_i(u_i) \geqslant 0,\ i = \overline{1,m}\}$. *Тогда решением задачи* (2.16) *будет являться вектор* $u_\alpha^\varphi = (f_1^{-1}(\frac{C}{m}),\ldots,f_m^{-1}(\frac{C}{m}))^{\mathrm{T}}$.

Замечание 17. Легко заметить, что для выпуклости $\psi_\alpha(u)$ предположение о регулярности ядра избыточно. В рассматриваемом случае функция потерь билинейная, а значит выпуклая по $u \in \mathbb{R}^m$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, поэтому по теореме 4 функция $\psi_\alpha(u)$ будет выпуклой. Это означает, что утверждения теорем 8 и 9 остаются справедливыми для функции интегральной квантили без предположения о регулярности ядра, достаточно лишь предположения, что $\mathbf{M}[\Phi(u, X)] < \infty$ для всех $u \in U$.

6. Биквадратичная функция потерь при сферически симметричной плотности

Пусть функция потерь имеет вид

$$\Phi(u, X) = r(u^{\mathrm{T}} A X_1 X_2^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}} u), \tag{6.1}$$

где A и B – $(m \times n)$-матрицы, c – фиксированный вектор размерности m, $r(t) : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^+$ – строго возрастающая, неотрицательная и непрерывная слева функция.

Лемма 14 [10]. *Пусть функция потерь имеет вид* (6.1), *где* $||A^{\mathrm{T}}u||||B^{\mathrm{T}}u|| > 0$, *а случайные векторы* X_1 *и* X_2 *независимы и их распределения сферически симметричны. Тогда для всех* $\alpha \in (0,1)$ *задача*

$$U^* = \operatorname{Arg} \min_{u \in U} \left(||A^{\mathrm{T}}u||||B^{\mathrm{T}}u||\right) \tag{6.2}$$

частично эквивалентна задаче (2.16) *с функцией* (6.1).

Из леммы 14 непосредственно следует утверждение леммы 15.

Лемма 15. *Пусть функция потерь имеет вид* (6.1), *где* $||A^{\mathrm{T}}u||||B^{\mathrm{T}}u|| > > 0$, *а случайные векторы* X_1 *и* X_2 *независимы и их распределения сферически симметричны,* $\mathrm{M}[\Phi(u, X)] < \infty$. *Тогда для всех* $\alpha \in (0,1)$ *задача* (6.2) *частично эквивалентна задаче* (2.17) *с функцией* (6.1).

Доказательства лемм 1, 2, 3, 4, 7, 10–13 и 15, следствия 1 и теорем 6, 8 и 9 приведены в Приложении.

7. Заключение

В статье детально изучена связь между решениями задач по минимизации функций квантили и интегральной квантили. Получены условия, при которых эти решения совпадают для различных классов функций потерь. В частности, рассмотрены случаи, когда функция потерь является возрастающей относительно стратегии и когда эта функция возрастает относительно случайной величины. Рассмотрены также случаи билинейной и биквадратичной структуры функции потерь.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Покажем, что из того, что $X > 0$, почти наверное следует, что $[X]_\alpha > 0$ для любого $\alpha \in (0,1)$. Действительно, так как $\mathcal{P}\{X > 0\} = 1$, то $\mathcal{P}\{X \leqslant 0\} = 0$. Следовательно, $\mathcal{P}\{X \leqslant \varphi\} \geqslant \alpha$ только при $\varphi > 0$. Поскольку в определении квантили (2.2) минимум по φ достигается, получаем $[X]_\alpha > 0$.

Покажем, что если $[X]_\alpha > 0$ для любого $\alpha \in (0,1)$, то $X > 0$ почти наверное. Действительно, предположим противное. Пусть $\mathcal{P}\{X \leqslant 0\} = \gamma > 0$. Тогда по определению квантили $[X]_\gamma \leqslant 0$. Возникает противоречие. Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. В [5] показано, что если $\mathbf{M}[X] < \infty$, то

$$\mathbf{M}[X] = \lim_{\alpha \to 0} \{X\}_\alpha \triangleq \int_0^1 [X]_\beta d\beta.$$

Следовательно, пользуясь тем, что функция интегральной квантили является неубывающей по параметру α, получаем утверждение леммы 2.

Доказательство леммы 4. Пусть $\alpha \in (0,1)$. Из определения (2.3) вытекает, что

$$\inf_{u \in U} \psi_\alpha(u) \geqslant \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 \inf_{u \in U} \varphi_\beta(u) d\beta. \tag{П.1}$$

По предположению о частичной эквивалентности задачи (2.19) задаче (2.16) имеем $U^* \neq \varnothing$. Пусть $u^* \in U^*$. Тогда

$$\min_{u \in U} \varphi_\beta(u) = \varphi_\beta(u^*) \quad \forall \beta \in (0,1).$$

Поэтому

$$\psi_\alpha(u^*) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 \varphi_\beta(u^*) d\beta = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 \min_{u \in U} \varphi_\beta(u) d\beta.$$

Таким образом, с учетом (П.1) получаем

$$\psi_\alpha(u^*) = \inf_{u \in U} \psi_\alpha(u).$$

Но так как u^* – произвольный элемент множества U^*, то $U^* \subset U_\alpha^\psi$, т.е. задача (2.19) частично эквивалентна задаче (2.17) для всех $\alpha \in (0,1)$. Лемма 4 доказана.

Доказательство леммы 7. Запишем в явном виде функции квантили, интегральной квантили и математического ожидания, пользуясь свойствами квантили и интегральной квантили и тем, что $s_2(u)$ неотрицательна:

$$\varphi_\alpha(u) = s_1(u) + s_2(u)[f_1(X)]_\alpha,$$
$$\psi_\alpha(u) = s_1(u) + s_2(u)\{f_1(X)\}_\alpha,$$
$$\mathbf{M}[\Phi(u, f_1(X))] = s_1(u) + s_2(u)\mathbf{M}[f_1(X)].$$

Покажем, что из условия $\mathbf{M}[f_1(X)] > 0$ следует $U_\alpha^\psi = U^{\mathbf{M}} = U_*$.

Согласно (2.8) для всех $\alpha \in (0,1)$ верно $\{f_1(X)\}_\alpha \geqslant \mathbf{M}[f_1(X)] > 0$. Следовательно, согласно (2.15) для всех $\alpha \in (0,1)$ верно:

$$\operatorname{Arg}\min_{u\in U}(\mathbf{M}[f_1(X)]s_2(u)) = \operatorname{Arg}\min_{u\in U}(\{f_1(X)\}_\alpha s_2(u)) = \operatorname{Arg}\min_{u\in U} s_2(u).$$

Поэтому из того, что $U_* \neq \varnothing$, следует $U_\alpha^\psi = U^{\mathbf{M}} = U_*$.

Покажем, что из условия $[f_1(X)]_\beta > 0$ следует $U_\alpha^\varphi = U_\alpha^\psi$ для всех $\alpha \in [\beta, 1)$. Из условия $[f_1(X)]_\beta > 0$ вытекает, что $\{f_1(X)\}_\alpha > 0$ для всех $\alpha \in [\beta,1)$, так как согласно (2.11) выполняется неравенство $\{f_1(X)\}_\alpha \geqslant [f_1(X)]_\alpha$. Следовательно, для всех $\alpha \in [\beta,1)$ согласно (2.15):

$$\operatorname{Arg}\min_{u\in U}([f_1(X)]_\alpha s_2(u)) = \operatorname{Arg}\min_{u\in U}(\{f_1(X)\}_\alpha s_2(u)) = \operatorname{Arg}\min_{u\in U} s_2(u).$$

Поэтому из того, что $U_* \neq \varnothing$, следует $U_\alpha^\psi = U_\alpha^\varphi = U_*$.

Лемма 7 доказана.

Доказательство следствия 1. Существование функции интегральной квантили следует из теоремы 3. В данном случае функция $r(sf_1(x) + f_2(x))$ является строго возрастающей по $s \in \mathbb{R}^1$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, поэтому из лемм 5 и 6 получаем утверждение следствия.

Доказательство теоремы 6. Из лемм 9 и 3 следует, что

$$U_\alpha^\varphi = \operatorname{Arg}\min_{u\in U} r(||A^{\mathrm{T}}u||[X_1]_\alpha) = \operatorname{Arg}\min_{u\in U}||A^{\mathrm{T}}u|| \triangleq U_*,$$

поскольку $[X_1]_\alpha > 0$ для всех $\alpha \in [\beta,1)$ и $r(t)$ – строго возрастающая функция. Следовательно, утверждение теоремы 6 следует из леммы 4.

Доказательство леммы 10. Предположим противное: пусть минимум $\varphi_\alpha(u)$ достигается во внутренней точке $u^* = (u_1^*, \ldots, u_m^*)^{\mathrm{T}}$ множества U, т.е. $\sum_{i=1}^m u_i^* < 1$. При этом предположим, что $\varphi_\alpha(u^*) = \varphi_\alpha^* > -\infty$. Пусть для $i = m$ выполнено $[-X_m]_\alpha < 0$. Рассмотрим

$$\begin{aligned}\frac{1}{u_m}\varphi_\alpha(u_1^*, \ldots, u_{m-1}^*, u_m) &= \frac{1}{u_m}\left[-\sum_{i=1}^{m-1} u_i^* X_i - u_m X_m\right]_\alpha = \\ &= \left[-\sum_{i=1}^{m}\frac{u_i^* X_i}{u_m} - X_m\right]_\alpha \leqslant [-X_m]_\alpha + \left[-\sum_{i=1}^{m}\frac{u_i^* X_i}{u_m}\right]_\alpha = \\ &= [-X_m]_\alpha + \frac{1}{u_m}\left[-\sum_{i=1}^{m} u_i^* X_i\right]_\alpha = [-X_m]_\alpha + O\left(\frac{1}{u_m}\right),\end{aligned}$$

так как по предположению α-ядро регулярно, а значит можно воспользоваться неравенством (5.7). Поэтому

$$\lim_{u_m\to\infty}\frac{1}{u_m}\varphi_\alpha(u_1^*, \ldots, u_{m-1}^*, u_m) = [-X_m]_\alpha < 0. \tag{П.2}$$

Поскольку α-ядро регулярно, то по замечанию 14 функция $\varphi_\alpha(u)$ выпукла на $\mathbb{R}^n$. Следовательно, сечение $\varphi_\alpha(u_1^*, \dots, u_{m-1}^*, u_m)$ этой функции будет также выпуклой функцией по $u_m \in \mathbb{R}^1$. Но выпуклая функция, обладающая указанным выше свойством (П.2), может быть только монотонно убывающей. Поэтому ее минимум достигается на границе выпуклого множества U, т.е. при $\sum_{i=1}^m u_i^* = 1$, а не в точке $u^* = (u_1^*, \dots, u_m^*)$, для которой $\sum_{i=1}^m u_i^* < 1$. Пришли к противоречию. Лемма 10 доказана.

Доказательство леммы 11. Из условия $\mathbf{M}[\sum_{i=1}^m X_i] < \infty$ и теоремы 3 следует существование функции интегральной квантили. Выпуклость функции интегральной квантили следует из теоремы 4. Неравенство (5.8) выполняется без каких-либо предположений о виде α-ядра меры. Далее доказательство аналогично доказательству леммы 10 с заменой оператора квантили на оператор интегральной квантили.

Доказательство леммы 12. Покажем, что функция $\bar{\varphi}_\alpha(\bar{u})$ – симметрична в $(m-1)$-мерном пространстве относительно точки $\bar{u}^* = (\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m})^{\mathrm{T}}$, т.е. она удовлетворяет системе из $m-1$ соотношений

$$\begin{cases} \bar{\varphi}_\alpha\left(\dfrac{1}{m} - \Delta, \dots, \dfrac{1}{m}, \dfrac{1}{m}\right) = \bar{\varphi}_\alpha\left(\dfrac{1}{m} + \Delta, \dfrac{1}{m}, \dots, \dfrac{1}{m}\right), \\ \dots \\ \bar{\varphi}_\alpha\left(\dfrac{1}{m}, \dfrac{1}{m}, \dots, \dfrac{1}{m} - \Delta\right) = \bar{\varphi}_\alpha\left(\dfrac{1}{m}, \dfrac{1}{m}, \dots, \dfrac{1}{m} + \Delta\right). \end{cases}$$

Проверим выполнение первого соотношения из системы:

$$\text{(П.3)} \qquad \bar{\varphi}_\alpha\left(\frac{1}{m} - \Delta, \dots, \frac{1}{m}, \frac{1}{m}\right) =$$

$$= \left[-\left(\left(\frac{1}{m} - \Delta\right) X_1 + \sum_{i=2}^{m-1} u_i X_i + \left(1 - \left(\frac{1}{m} - \Delta\right) - \sum_{i=2}^{m-1} u_i\right) X_m\right)\right]_\alpha =$$

$$= \left[-\left(\left(\frac{1}{m} - \Delta\right) X_1 + \frac{1}{m}\sum_{i=2}^{m-1} X_i + \left(\frac{1}{m} + \Delta\right) X_m\right)\right]_\alpha,$$

$$\text{(П.4)} \qquad \bar{\varphi}_\alpha\left(\frac{1}{m} + \Delta, \frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m}\right) =$$

$$= \left[-\left(\left(\frac{1}{m} + \Delta\right) X_1 + \sum_{i=2}^{m-1} u_i X_i + \left(1 - \left(\frac{1}{m} + \Delta\right) - \sum_{i=2}^{m-1} u_i\right) X_m\right)\right]_\alpha =$$

$$= \left[-\left(\left(\frac{1}{m} + \Delta\right) X_1 + \frac{1}{m}\sum_{i=2}^{m-1} X_i + \left(\frac{1}{m} - \Delta\right) X_m\right)\right]_\alpha.$$

Таким образом, справедливость $\bar{\varphi}_\alpha(\frac{1}{m} - \Delta, \dots, \frac{1}{m}, \frac{1}{m}) = \bar{\varphi}_\alpha(\frac{1}{m} + \Delta, \frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m})$ для любого Δ следует непосредственно из того, что $[Y+Z]_\alpha = [Z+Y]_\alpha$ верно для любых Y, Z, α. Справедливость всех остальных соотношений доказывается аналогично. Следовательно, $\bar{\varphi}_\alpha(u)$ симметрична относительно точки $\bar{u}^* = (\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m})^{\mathrm{T}}$. Лемма 12 доказана.

Доказательство леммы 13. Существование функции интегральной квантили следует из условия $\mathbf{M}[X_i] < \infty$, $i = \overline{1,m}$, и теоремы 3. Далее доказательство аналогично доказательству леммы 12.

Доказательство теоремы 8. Рассмотрим вначале функцию квантили. Выразим $u_m = 1 - \sum_{i=1}^{m-1} u_i$, подставим в $\Phi(u, X)$ и получим

$$\bar{\Phi}(\bar{u}, X) = -\sum_{i=1}^{m-1} u_i X_i - \left(1 - \sum_{i=1}^{m-1} u_i\right) X_m,$$

где $\bar{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_{m-1})^{\mathrm{T}}$. Таким образом, по лемме 12 $\bar{\varphi}_\alpha(\bar{u})$ – симметричная функция. Поскольку ядро меры регулярно, то по замечанию к теореме 7 функция квантили $\varphi_\alpha(u)$ является выпуклой на $\mathbb{R}^m$. Поэтому функция $\bar{\varphi}_\alpha(\bar{u})$ – выпуклая по $\bar{u}$, так как сечение выпуклой функции также выпукло. Следовательно, ее минимум может находиться только в точке симметрии $\bar{u}^* = (\frac{1}{m}, \ldots, \frac{1}{m})^{\mathrm{T}}$. Это значит, что $\bar{u}_\alpha^\varphi = \bar{u}^*$ в $(m-1)$-мерном пространстве. Расширив вектор $\bar{u}$ до m-мерного путем подстановки $u_m^* = 1 - \sum_{i=1}^{m-1} u_i^* = \frac{1}{m}$, получим окончательно $u_\alpha^\varphi = u^* = (\frac{1}{m}, \ldots, \frac{1}{m})^{\mathrm{T}}$. Так как $\frac{1}{m} > 0$, то ограничения $u_i \geqslant 0$, $i = \overline{1,m}$, выполнены, следовательно $u_\alpha^\varphi \in U$. При этом значение критерия равно $\varphi_\alpha(u_\alpha^\varphi) = \frac{1}{m}\left[-\sum_{i=1}^{m} X_i\right]_\alpha$.

Рассмотрим функцию интегральной квантили $\psi_\alpha(u)$, которая, согласно определению (2.3), является выпуклой, так как $\varphi_\alpha(u)$ – выпуклая по доказанному выше. Кроме того, она симметрична согласно лемме 13. Поэтому ее минимум достигается в точке $u_\alpha^\psi = u^*$. При этом $\psi_\alpha(u_\alpha^\psi) = \frac{1}{m}\left\{-\sum_{i=1}^{m} X_i\right\}_\alpha$.

Теперь покажем, что задачи (2.16), (2.17) частично эквивалентны задаче (2.18). Для этого рассмотрим задачу с критерием в форме математического ожидания. Из того, что $\mathbf{M}[\Phi(u, X)] = -\sum_{i=1}^{m} u_i \mu = -\mu \sum_{i=1}^{m} u_i$ и $\sum_{i=1}^{m} u_i = 1$, следует, что

$$\mathbf{M}[\Phi(u, X)] = -\mu$$

для любого $u \in U$. Таким образом,

$$U^M \triangleq \operatorname{Arg}\min_{u \in U} \mathbf{M}[\Phi(u, X)] = U.$$

А так как $u^* = (1/m, \ldots, 1/m)^{\mathrm{T}} \in U$, то задачи (2.16), (2.17) частично эквивалентны задаче (2.18). Теорема 8 доказана.

Доказательство теоремы 9. Введем замену переменных $y_i \triangleq f(u_i)$, $z_i \triangleq y_i/C$. Таким образом, вектор $z \in U$, где U задано условием (5.5). Кроме того, функция $\Phi(z, X)$ удовлетворяет условиям теоремы 8. Поэтому решением задач (2.16), (2.17) с функцией $\Phi(z, X)$ будет точка $z_\alpha^\varphi = z_\alpha^\psi = (1/m, \ldots, 1/m)^{\mathrm{T}}$. Делая обратную замену переменных, получим $u_\alpha^\psi = u_\alpha^\varphi = (f_1^{-1}(\frac{C}{m}), \ldots, f_m^{-1}(\frac{C}{m}))^{\mathrm{T}}$. Теорема 8 доказана.

Доказательство леммы 15. Поскольку согласно лемме 14 задача (6.2) частично эквивалентна для всех $\alpha \in (0,1)$ задаче (2.16) с функцией (6.1), то по лемме 4 задача (6.2) также частично эквивалентна задаче (2.17).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кибзун А.И., Кан Ю.С.* Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. М.: Физматлит, 2009.
2. *Малышев В.В., Кибзун А.И.* Анализ и синтез высокоточного управления летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1987.
3. *Rockafellar R.T., Uryasev S.* Optimization of Conditional Value-at-risk // J. Risk. 2000. V. 2. No. 3. P. 21–51.
4. *Rockafellar R.T., Uryasev S.* Conditional Value-at-risk for General Loss Distribution // J. Banking & Finance. 2002. No. 26. P. 1443–1471.
5. *Кибзун А.И., Кузнецов Е.А.* Сравнение критериев VaR и CVaR // АиТ. 2003. № 7. С. 153–165.

   Kibzun A.I., Kuznetsov E.A. Comparison of VaR and CVaR Criteria //Autom. Remote Control. 2003. V. 64. No. 7. P. 1154–1164.
6. *Dentcheva D., Ruszczynski A.* Portfolio optimization with stochastic dominance constraints // J. Banking & Finance. 2006. V. 30. No. 2. P. 433–451.
7. *Кибзун А.И., Чернобровов А.И.* Алгоритм решения обобщенной задачи Марковица // АиТ. 2011. № 2. С. 77–92.

   Kibzun A.I., Chernobrovov A.I. Algorithm to Solve the Generalized Markowitz Problem //Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 2. P. 289–304.
8. *Пантелеев А.В., Летова Т.А.* Методы оптимизации в примерах и задачах. М.: Высш. шк., 2008.
9. *Бауэрс Н., Гербер Х., Джонс Н., Несбит С. и др.* Актуарная математика / Пер. с англ. под ред. В.К. Малиновского. М.: Янус-К, 2001.
10. *Вишняков Б.В., Кибзун А.И.* Детерминированные эквиваленты для задач стохастического программирования с вероятностными критериями // АиТ. 2006. № 6. С. 126–143.

    Vishnaykov B.V., Kibzun A.I. Deterministic Equivalents for the Problems of Stochastic Programming with Probabilistic Criteria // 2006. V. 67. No. 6. P. 945–961.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.В. Назиным.

Поступила в редакцию 02.05.2012