

Analiza sygnałów

Raport 1 - projekt i symulacja filtrów na podstawie obwodu RLC

Nazwisko i imię prowadzącego kurs: Dr Marek Skarupski

Wykonawca:	
Imię i Nazwisko	Andrzej Puć
nr Indeksu, wydział	249748, Wydział matematyki
Termin zajęć: dzień tygodnia, godzina	Środa, 13:15-14:45
Numer grupy ćwiczeniowej	T00-68a
Data oddania sprawozdania	9 października 2020
Ocena końcowa	

Data i podpis prowadzącego zajęcia

Adnotacje dotyczące wymaganych poprawek oraz daty otrzymania poprawionego raportu

Spis treści

1	Cel raportu	3
2	Teoretyczne wyznaczanie zer, biegunów oraz transmitancji układu	3
2.1	Analiza układu szeregowego RLC [1]	3
2.2	Transmitancja	4
2.2.1	Dwa różne bieguny rzeczywiste	5
2.2.2	Dwa równe bieguny rzeczywiste	10
2.2.3	Dwa sprzężone bieguny zespolone	13
3	Symulacja obwodu w środowisku Xcos	18
3.1	Symulacja z użyciem bloków elektrycznych	18
3.2	Symulacja z użyciem bloków matematycznych	22
4	Podsumowanie części teoretycznej	25
4.1	Oscylacja obwodu RLC słabo tłumionego	25
5	Filtracja zadanego sygnału	26
5.1	Filtracja dla tłumienia silnego i krytycznego	27
5.2	Filtracja dla tłumienia słabego	30
6	Filtracja za pomocą bloków matematycznych i podsumowanie	31
6.1	Podsumowanie	33
7	Krótki indeks najważniejszych oznaczeń	34

1 Cel raportu

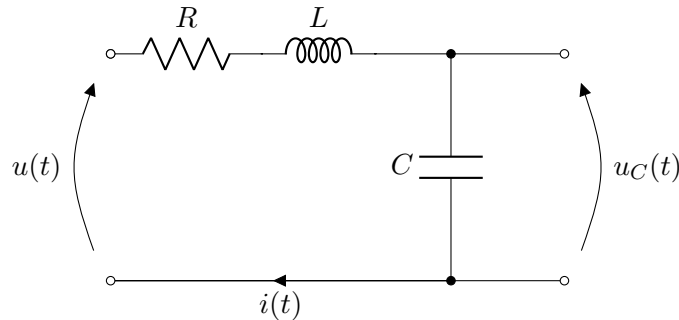
Celem raportu jest zaprojektowanie filtra dolnoprzepustowego na podstawie obwodu RLC oraz symulacja jego działania wykonana za pomocą edytora Xcos. Tak zbadany układ posłuży ostatecznie do filtracji zadanego sygnału postaci

$$x(t) = 1 \sin(2 \cdot 8 \cdot \pi t) + 6 \sin(2 \cdot 18 \cdot \pi t) + 0.5 \sin(2 \cdot 40 \cdot \pi t).$$

2 Teoretyczne wyznaczanie zer, biegunów oraz transmitancji układu

2.1 Analiza układu szeregowego RLC [1]

W celu wyznaczenia funkcji transmitancji przeanalizujemy schemat ideowy układu RLC.



Wejściem powyższego układu jest napięcie ze źródła $u(t)$. Zakładamy, że $u(t) = 0$ dla $t = 0$. Wyjściem natomiast jest napięcie $u_C(t)$ na kondensatorze. Skorzystamy teraz z prawa Kirchhoffa równości napięć w konturze zamkniętym.

Twierdzenie 1. *Pierwsze prawo Kirchhoffa: [2]*

W obwodzie zamkniętym suma spadków napięć na wszystkich odbiornikach prądu jest równa sumie napięć na źródłach napięcia, co w przypadku obwodu RLC zapiszemy jako

$$u = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t).$$

Mamy zatem, dla natężenia prądu $i(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt}$

$$u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt.$$

Korzystając z własności transformaty Laplace'a obliczymy ją dla powyższej funkcji. Oznaczmy transformatę napięcia wejściowego jako $U(s)$ oraz transformatę natężenia prądu jako $\hat{I}(s)$ i zapiszmy

$$U(s) = R\hat{I}(s) + sL\hat{I}(s) + \frac{1}{sC}\hat{I}(s),$$

$$U(s) = \left(R + sL + \frac{1}{sC} \right) \hat{I}(s).$$

2.2 Transmitancja

Pamiętając, że zaciski, na których mierzony jest prąd wyjściowy, podłączone są do kondensatora, otrzymujemy transmitancję

$$H(s) = \frac{U_C(s)}{U(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{RCs + LC(s)^2 + 1}.$$

Znajdźmy teraz pierwiastki p_1, p_2 mianownika funkcji H . Oznaczając $K = \frac{1}{LC}$ mamy

$$H(s) = K \frac{1}{(s - p_1)(s - p_2)},$$

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}. \quad (1)$$

Zauważmy, że pierwiastki w równaniu (1) mogą przybierać wartości zespolone. Aby przejść do analizy tego równania przekształcimy je i zapiszemy używając parametrów ω_n (drgania własne) oraz ξ (tłumienie).

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \left(-\sqrt{LC} \frac{R}{2L} \pm \sqrt{LC} \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \left(-\frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L} \sqrt{\frac{C}{L}}\right)^2 - 1} \right) \\ &= \omega_n \left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1} \right). \end{aligned}$$

Zakładając, że $\frac{1}{LC} > 0$ oraz $\frac{R}{L} \geq 0$ otrzymamy trzy możliwe rodzaje biegunów zapisane w tabeli poniżej. Zauważmy, że w analizowanym układzie nie występują zera transmitancji.[3]

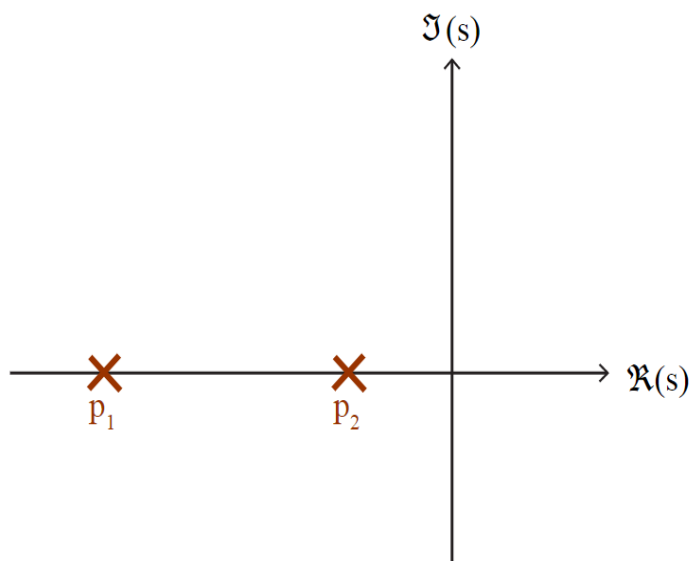
ξ	Położenie pierwiastków	Przypadek określony jako	
$\xi > 1$	Dwa różne na ujemnej części osi rzeczywistej	Silnie tłumiony	$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$
$\xi = 1$	Podwójny na ujemnej części osi rzeczywistej	Krytycznie tłumiony	$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$
$\xi < 1$	Dwa sprzężone w lewej części płaszczyzny zespolonej	Słabo tłumiony	$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

W celu wyznaczenia odpowiedzi impulsowej, skokowej i charakterystyki częstotliwościowej zbadamy każdy przypadek z osobna.

2.2.1 Dwa różne bieguny rzeczywiste

W pierwszym przypadku mamy doczynienia z układem silnie tłumionym, gdzie

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}, \quad R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$



Rysunek 1: Rysunek przedstawiający dwa pierwiastki rzeczywiste na płaszczyźnie zespolonej. [4]

- (I) Obliczmy najpierw odpowiedź impulsową $h(t)$. Przypomnijmy, że jest to odpowiedź układu na impuls Diraca $x(t) = \delta(t)$. Stąd otrzymujemy

$$Y(s) = H(s) \cdot X(s) = H(s) \cdot 1 = H(s),$$

gdzie Y to transformata Laplace'a sygnału wyjściowego a X to transformata sygnału $x(t)$. Rozbijając $Y(s)$ na ułamki proste mamy

$$Y(s) = H(s) = \frac{K}{(s - p_1)(s - p_2)} = \frac{a}{s - p_1} + \frac{b}{s - p_2},$$

gdzie $a = \frac{p_1 p_2}{p_1 - p_2}$, $b = \frac{p_1 p_2}{p_2 - p_1}$. Ostatecznie więc możemy zapisać

$$y(t) = h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{a}{s - p_1} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{b}{s - p_2} \right\} = ae^{p_1 t} + be^{p_2 t}, \quad t \geq 0.$$

- (II) Analogicznie można obliczyć odpowiedź skokową. Warto jednak skorzystać z własności transformaty Laplace'a dotyczącej transformat całki

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right)(z) = \frac{1}{z}\mathcal{L}(f(t))(z). \quad (2)$$

Przypomnijmy, że jest to odpowiedź układu na sygnał skoku jednostkowego. Oznaczmy funkcję skoku jako $\gamma(t)$. Wiemy, że transformata Laplace'a tej funkcji to $\Gamma(s) = \frac{1}{s}$. Możemy zatem zapisać

$$Y(s) = H(s) \cdot \Gamma(s) = \frac{H(s)}{s}.$$

Zauważmy, że prawa strona powyższego równania koresponduje z prawą stroną równania (2). Mamy zatem

$$u(t) = \int_0^t h(\tau)d\tau = \int_0^t \left[\frac{p_1 p_2}{p_1 - p_2} \exp(p_1 t) + \frac{p_1 p_2}{p_2 - p_1} \exp(p_2 t) \right] dt.$$

Obliczając powyższą całkę i sumując stałe $\frac{p_2}{p_2 - p_1}$ oraz $\frac{p_1}{p_1 - p_2}$ otrzymamy

$$u(t) = \left(1 + \frac{p_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} + \frac{p_1}{p_2 - p_1} e^{p_2 t} \right) \gamma(t).$$

- (III) Wyznamy teraz charakterystykę częstotliwościową układu. Przypomnijmy, że zadanie to sprowadza się do obliczenia wartości odpowiedzi częstotliwościowej, która jest liczbą zespoloną o module $M(\omega)$ i fazie $\Phi(\omega)$, gdzie

$$M(\omega) = |H(i\omega)|,$$

$$\Phi(\omega) = \arctan\left(\frac{\Im(H(i\omega))}{\Re(H(i\omega))}\right).$$

Zapisać więc $s = \mu + j\omega$. Wiemy, że dla $\mu = 0$ transformata Laplace'a odpowiada transformacie Fouriera. Korzystając z własności modułu mamy zatem

$$M(\omega) = |H(j\omega)| = K \frac{1}{|j\omega - p_1| |j\omega - p_2|} = K \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + p_1^2} \sqrt{\omega^2 + p_2^2}}. \quad (3)$$

Widzimy, że przy $\omega \rightarrow \infty$, $M(\omega)$ zbiega do zera. Jest to zatem filtr dolnoprzepustowy. W celu obliczenia charakterystyki fazowej zapiszmy najpierw ogólną postać transmitancji

$$H(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)},$$

gdzie z_i są zerami a p_i to jej bieguny. Zauważmy, że każdą z liczb zespolonych występujących w powyższych iloczynach można zapisać jako $r \cdot \exp(j\varphi)$. Wynikiem

mnożenia będzie wtedy funkcja eksponencjalna o wykładniku równym $j(\sum_{i=1}^m(s - z_i) - \sum_{i=1}^n(s - p_i))$. Stąd możemy już zapisać

$$\begin{aligned}\Phi(\omega) &= \angle H(j\omega) = -\angle(j\omega - p_1) - \angle(j\omega - p_2) \\ &= -\text{atan2}(\omega, -p_1) - \text{atan2}(\omega, -p_2) \\ &= -\arctan \frac{\omega}{-p_1} - \arctan \frac{\omega}{-p_2} \\ &= \arctan \frac{\omega}{p_1} + \arctan \frac{\omega}{p_2}, \quad p < 0 \wedge p \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

gdzie funkcja $\text{atan2}(x, y)$ jest zdefiniowana dla x i y rzeczywistych jako kąt między osią poziomą a odcinkiem łączącym punkt (x, y) ze środkiem układu współrzędnych. W kolejnych punktach opisu teoretycznego do obliczenia charakterystyk częstotliwościowych będziemy już konsekwentnie używać powyższej metody.

(IV) W celu wykonania wykresu Bodego, na podstawie powyższych rozważań, zapiszmy

$$|H_{dB}(\omega)| = 20 \log(K) - 20 \log \sqrt{\omega^2 + p_1^2} - 20 \log \sqrt{\omega^2 + p_2^2}.$$

Możemy teraz określić spadek charakterystyki amplitudowej o 3dB. Występuje on dla $M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ponieważ

$$20 \log_{10}(M(\omega)) = -10 \log_{10}(2) \approx -3.$$

Obliczamy zatem

$$\begin{aligned}\frac{p_1 p_2}{\sqrt{\omega^2 + p_1^2} \sqrt{\omega^2 + p_2^2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \sqrt{\omega^2 + p_1^2} \sqrt{\omega^2 + p_2^2} &= p_1 p_2 \sqrt{2}.\end{aligned}$$

Podnosząc powyższe równanie stronami do kwadratu i podstawiając parametr $t = \omega^2$, $t > 0$, otrzymamy wynik

$$t_{1,2} = \frac{-p_1^2 - p_2^2 \pm \sqrt{p_1^4 + 6p_1^2 p_2^2 + p_2^4}}{2}.$$

Wiemy, że wyrażenie w liczniku będzie większe od zera tylko dla

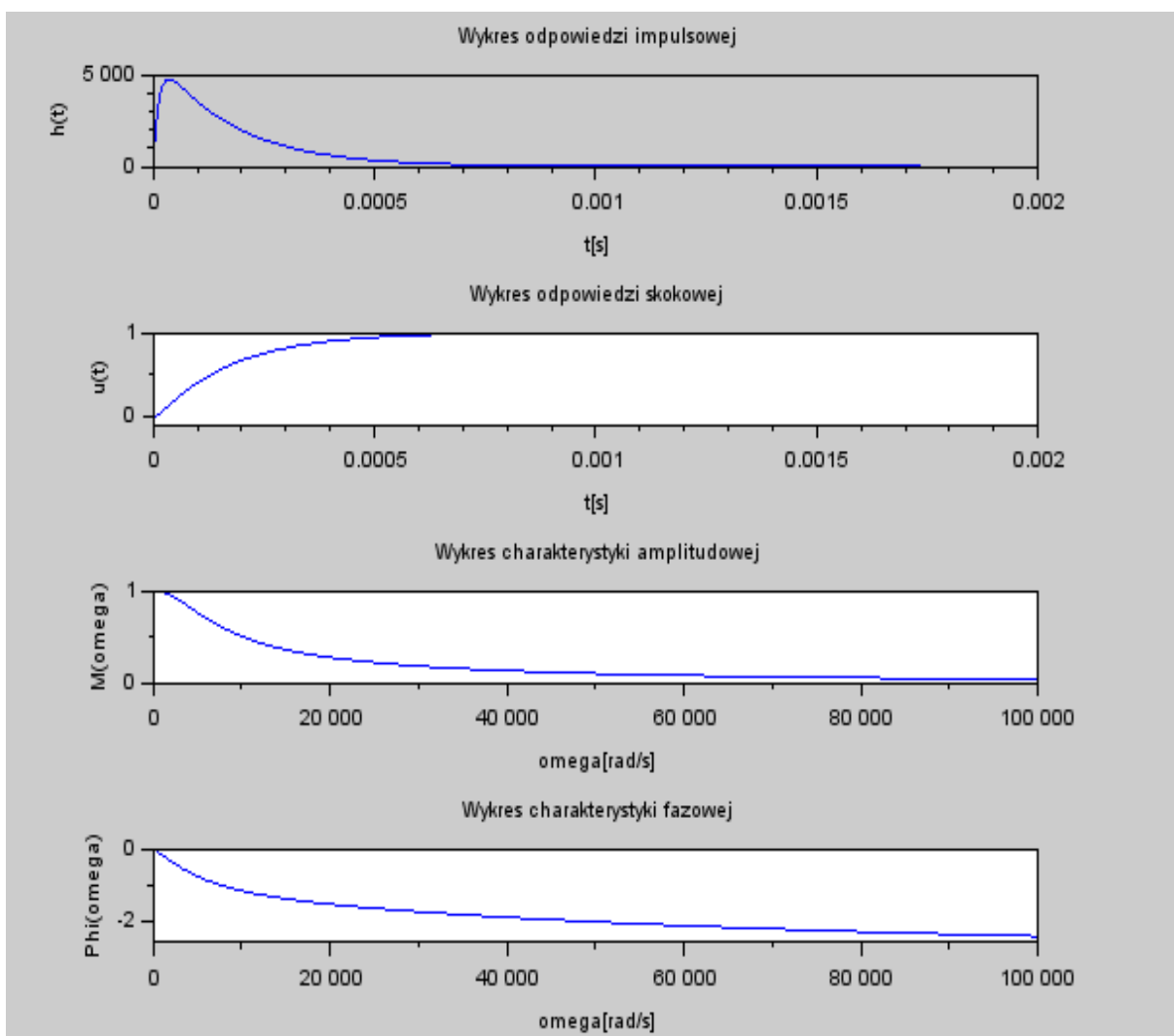
$$t_1 = \frac{-p_1^2 - p_2^2 + \sqrt{p_1^4 + 6p_1^2 p_2^2 + p_2^4}}{2}. \quad (4)$$

Stąd szukaną pulsacją będzie

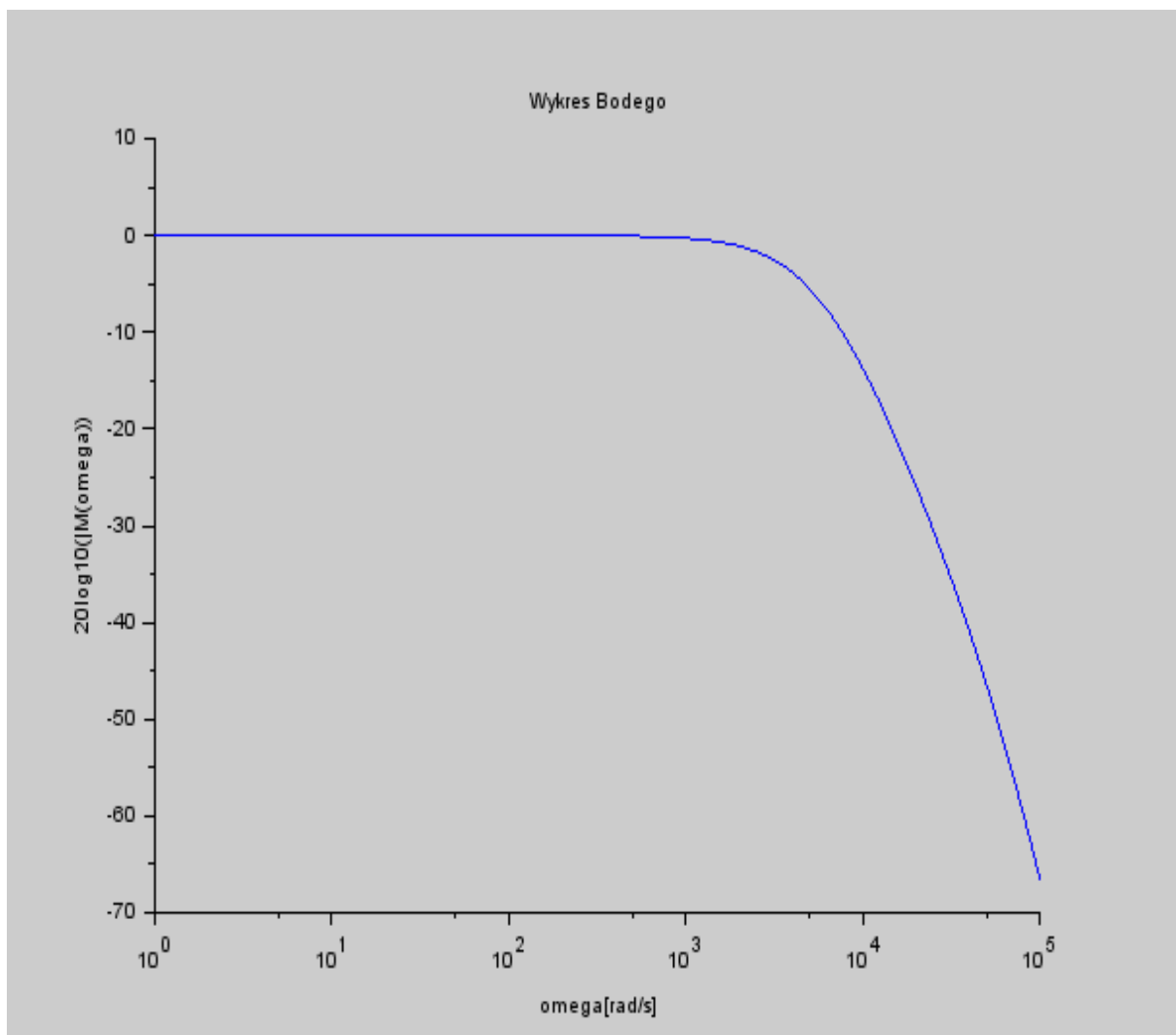
$$\omega_{dB} = \sqrt{t_1}.$$

Na tej podstawie możemy określić wartość częstotliwości granicznej, która w tym przypadku wyniesie $\omega_{dB}/2\pi$. Na podstawie analizy modułu (3) definiujemy pasmo zaporowe danego filtra jako zakres częstotliwości $f > f_g$.

(V) Po obliczeniu podstawowych charakterystyk możemy przedstawić ich wykresy teoretyczne.



Rysunek 2: Grupa wykresów przedstawiająca najważniejsze charakterystyki czasowe i amplitudowe badanego filtra dla przypadku tłumienia silnego. Zauważmy, że podczas działania stałego napięcia (w tym przypadku równego 1V) wartość napięcia na kondensatorze stale rośnie zbiegając asymptotycznie do wartości SEM.

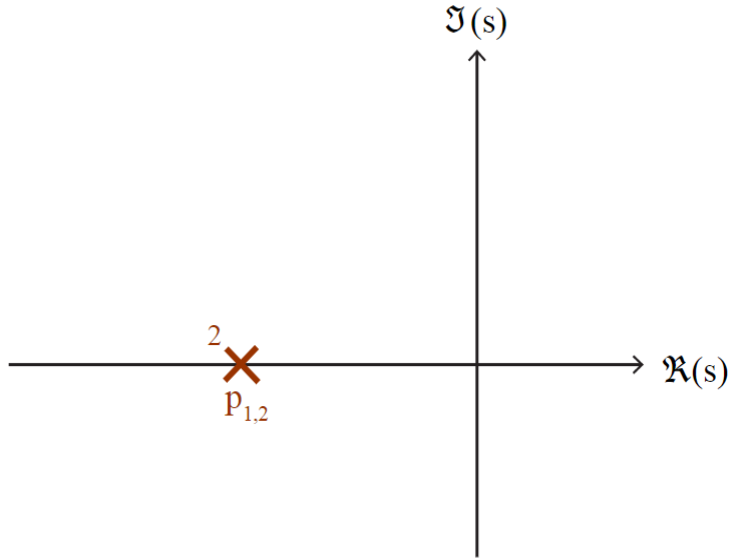


Rysunek 3: Wykres Bodego, wyrysowany dla osi x w skali logarytmicznej.

2.2.2 Dwa równe bieguny rzeczywiste

W przypadku tłumienia krytycznego mamy $p_1 = p_2 = p = -\frac{R}{2L}$. Stąd, że $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ możemy więc zapisać, że

$$p = \sqrt{\frac{1}{LC}}. \quad (5)$$



Rysunek 4: Rysunek przedstawiający podwójny pierwiastek rzeczywisty na płaszczyźnie zespolonej. [4]

(I) Ponownie obliczamy odpowiedź impulsową, tym razem dla transmitancji postaci

$$H(s) = \frac{p^2}{(s - p)^2}. \quad (6)$$

Powyższe wyrażenie jest już ułamkiem prostym pierwszego rodzaju pomnożonym przez stałą $K = p \cdot p$. Odpowiedź impulsowa to

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = p^2 t \exp(pt).$$

(II) Odpowiedź skokową obliczymy korzystając ponownie z tożsamości (2). Mamy zatem

$$u(t) = \int_0^t [p^2 \tau \exp(p\tau)] d\tau.$$

Całkując powyższe przez części otrzymamy

$$u(t) = (1 + (pt - 1) \exp(pt)) \gamma(t).$$

(III) W przypadku transmitancji (6) charakterystyka częstotliwościowa wyglądać będzie następująco

$$\begin{aligned}
 M(\omega) &= |H(j\omega)| = K \frac{1}{|j\omega - p| |j\omega - p|} = K \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + p^2} \sqrt{\omega^2 + p^2}} \\
 &= K \frac{1}{\omega^2 + p^2}, \\
 \Phi(\omega) &= \angle H(j\omega) = -\angle(j\omega - p) - \angle(j\omega - p) = -2\angle(j\omega - p) \\
 &= -2 \cdot \text{atan2}(\omega, -p) = -2 \cdot \arctan \frac{\omega}{-p} \\
 &= 2 \arctan \frac{\omega}{p}, \quad p < 0 \wedge p \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Zwróćmy uwagę, że jest to w dalszym ciągu filtr dolnoprzepustowy (tak jak w pierwszym przypadku).

(IV) Aby wykonać wykres Bodego zapiszemy

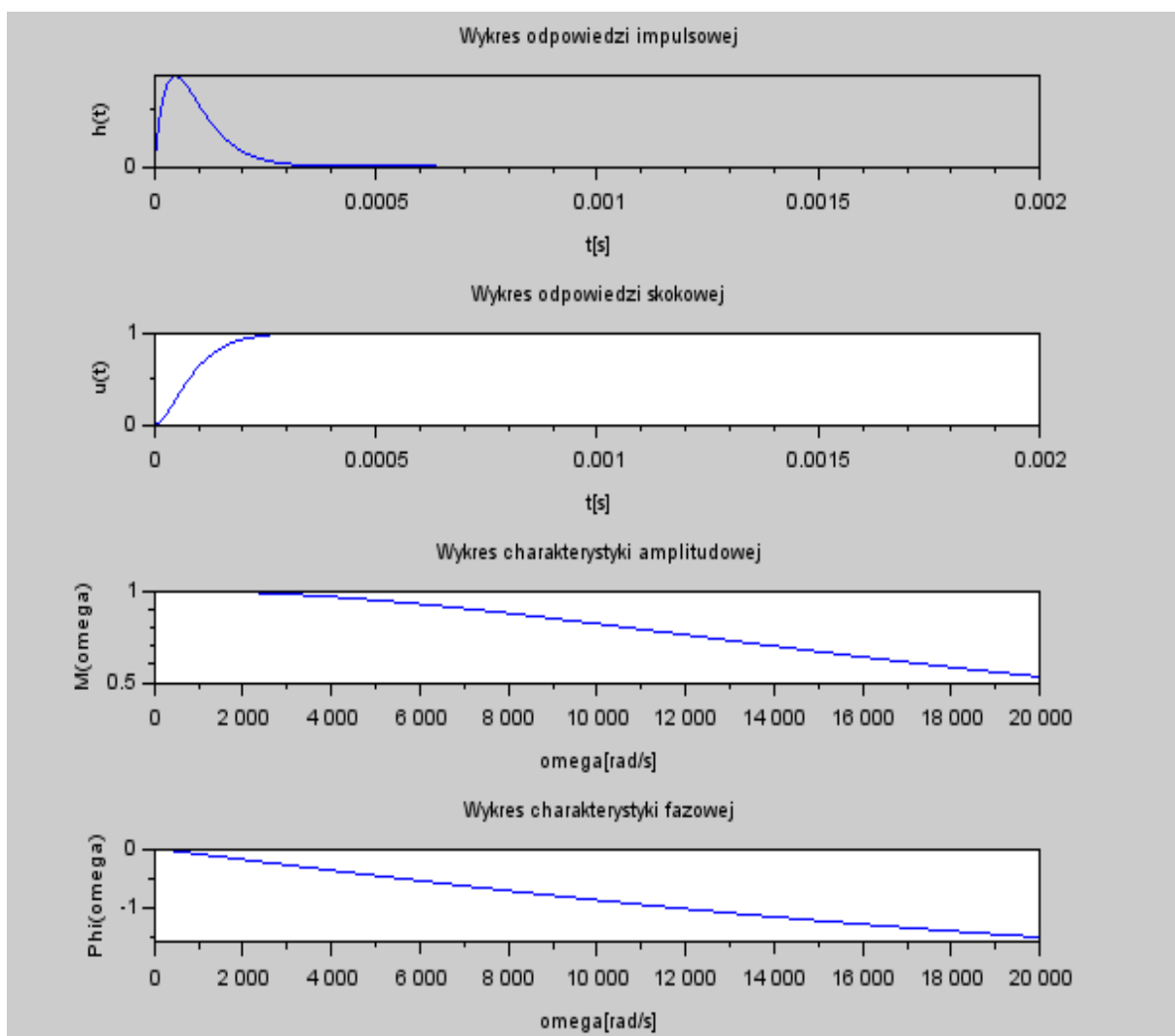
$$|H_{dB}(\omega)| = 20 \log(K) - 20 \log(\omega^2 + p^2).$$

Aby określić ω_{dB} postępujemy analogicznie jak w poprzednim przypadku. Tym razem łatwo jest zapisać

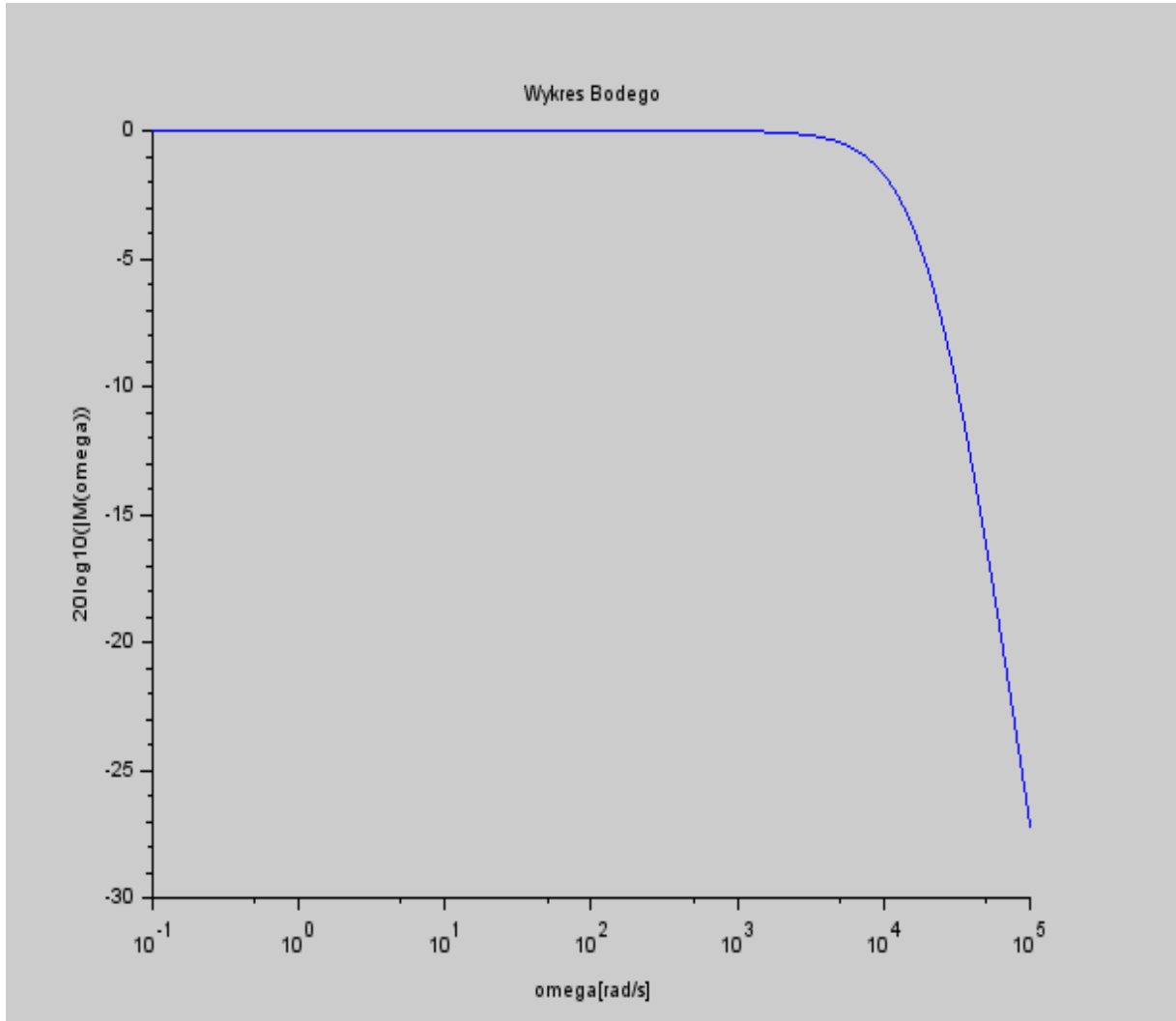
$$\begin{aligned}
 \frac{p^2}{\omega^2 + p^2} &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \\
 p^2 + \omega^2 &= p^2 \sqrt{2}.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Stąd $\omega_{dB} = |p| \sqrt{\sqrt{2} - 1}$. Naszym pasmem zaporowym będzie $f > f_g$, gdzie $f_g = \omega_{dB}/2\pi$.

(V) Zaprezentujemy teraz wykresy teoretyczne odpowiadające powyższym wyliczeniom.



Rysunek 5: Grupa wykresów przedstawiająca najważniejsze charakterystyki czasowe i amplitudowe badanego filtra dla przypadku tłumienia krytycznego.



Rysunek 6: Wykres Bodego, wyrysowany dla osi x w skali logarytmicznej.

2.2.3 Dwa sprzężone bieguny zespolone

Sprawdzimy teraz jak bieguny są w ostatnim przypadku położone na płaszczyźnie zespolonej. Przypomnijmy postać pierwiastków wielomianu z mianownika analizowanej transmitancji

$$p_{1,2} = \omega_n \left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1} \right),$$

gdzie $\omega_n = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ oraz $\xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$. Dla $\xi < 1$ wyrażenie pod pierwiastkiem kwadratowym będzie mniejsze od zera.

Spróbujmy zapisać pierwiastki jako sumę części rzeczywistej i urojonej. Mnożąc je przez $-j^2$ otrzymamy

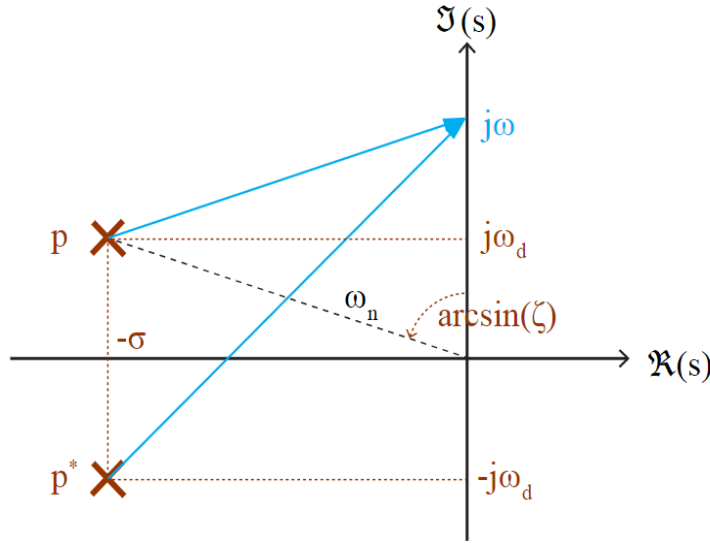
$$p_{1,2} = p, p^* = \omega_n \left(-\xi \pm \sqrt{-j^2 (\xi^2 - 1)} \right) = \omega_n \left(-\xi \pm j \sqrt{1 - \xi^2} \right).$$

Mamy zatem

$$\operatorname{Re}(p) = \operatorname{Re}(p^*) = \sigma = \omega_n \xi \quad (8)$$

oraz

$$\operatorname{Im}(p) = \operatorname{Im}(p^*) = \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}. \quad (9)$$



Rysunek 7: Rysunek przedstawiający sprzężone pierwiastki zespolone, gdzie $\sigma = \omega_n \xi = \omega_n \zeta$. Częstotliwość drgń własnych ω_n jest zaznaczona linią przerywaną. [4]

- (I) Obliczmy teraz odpowiedź impulsową. Wiemy, że $K = p \cdot p^*$. Korzystając z metody zatajania Heaviside'a możemy obliczyć zespolone stałe a i b w wyrażeniu

$$H(s) = \frac{pp^*}{(s-p)(s-p^*)} = \frac{a}{s-p} + \frac{b}{s-p^*}.$$

Są one równe odpowiednio $\frac{pp^*}{p-p^*}$ oraz $\frac{pp^*}{p^*-p}$. Mamy zatem

$$h(t) = a \exp(pt) + b \exp(p^*t).$$

- (II) Odpowiedź skokowa będzie w tym przypadku wynosić

$$u(t) = \int_0^t [a \exp(p\tau) + b \exp(p^*\tau)] d\tau.$$

Podobnie jak w pierwszym przypadku, po całkowaniu przez części, stałe $\frac{p^*}{p-p^*}$ oraz $\frac{p}{p^*-p}$, sumują się do jedności. Stąd ostatecznie

$$u(t) = \left(\frac{p^*}{p-p^*} \exp(pt) + \frac{p}{p^*-p} \exp(p^*t) + 1 \right) \gamma(t).$$

(III) Charakterystykę częstotliwościową w tym przypadku obliczymy zaczynając od zapisania transmitancji używając oznaczeń z (8) i (9)

$$\begin{aligned} H(s) &= K \frac{1}{(s-p)(s-p^*)} = K \frac{1}{s^2 - s(p+p^*) + pp^*} \\ &= K \frac{1}{s^2 - s(\omega_n(-\xi + j\sqrt{1-\xi^2}) + \omega_n(-\xi - j\sqrt{1-\xi^2})) + pp^*} \xrightarrow{pp^* = \omega_n^2} \\ &= K \frac{1}{s^2 - s\omega_n \left((-\xi + j\sqrt{1-\xi^2}) + (-\xi - j\sqrt{1-\xi^2}) \right) + \omega_n^2} \\ &= K \frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}. \end{aligned}$$

Podstawiając $s = j\omega$, gdzie transformata Laplace'a jest równoważna transformacie Fouriera, otrzymamy zatem

$$H(j\omega) = K \frac{1}{(j\omega)^2 + 2\xi\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} = K \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2 + j(2\xi\omega_n\omega)}$$

z czego możemy już zapisać

$$M(\omega) = |H(s)| = K \frac{1}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_n\omega)^2}}$$

oraz

$$\begin{aligned} \Phi(\omega) &= \angle H(s) = -\text{atan2} \left(2\xi\omega_n\omega\omega_n^2 - \omega^2 \right) \\ &= -\arctan \left(\frac{2\xi\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2} \right). \end{aligned}$$

Ponownie widzimy, że $M(\omega) \rightarrow 0$ dla $\omega \rightarrow \infty$. Jest to zatem filtr dolnoprzepustowy.

(IV) W ostatnim przypadku, aby wykonać wykres Bodego zapiszemy

$$|H_{dB}| = 20 \log(K) - 20 \log(\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_n\omega)^2}).$$

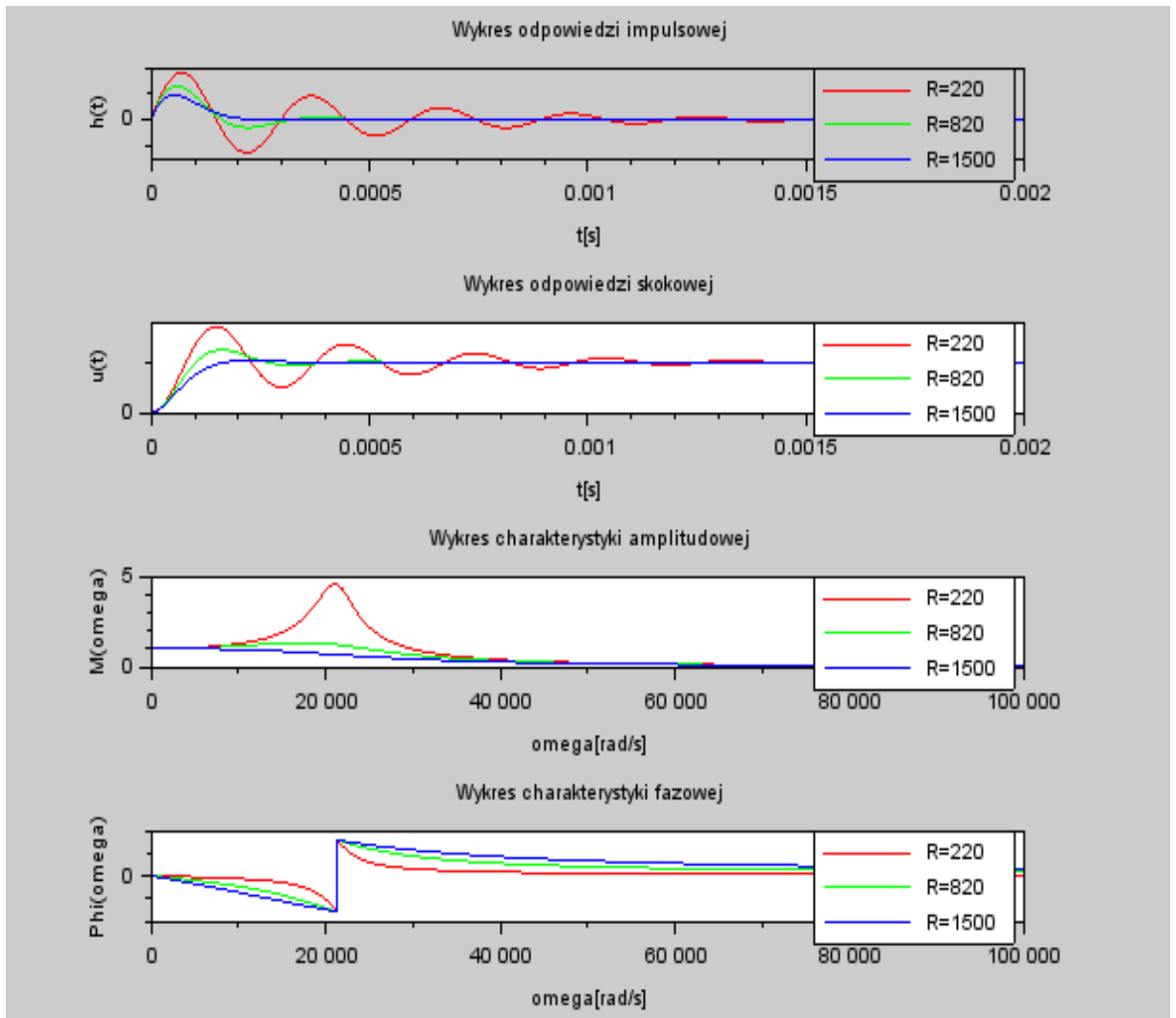
Możemy więc określić spadek charakterystyki amplitudowej o 3dB dla przypadku słabo tłumionego. Pamiętając, że $K = pp^* = |p|^2$, po przeniesieniu wyrażenia z ω na lewą stronę, mamy

$$(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_n\omega)^2 = 2|p|^4.$$

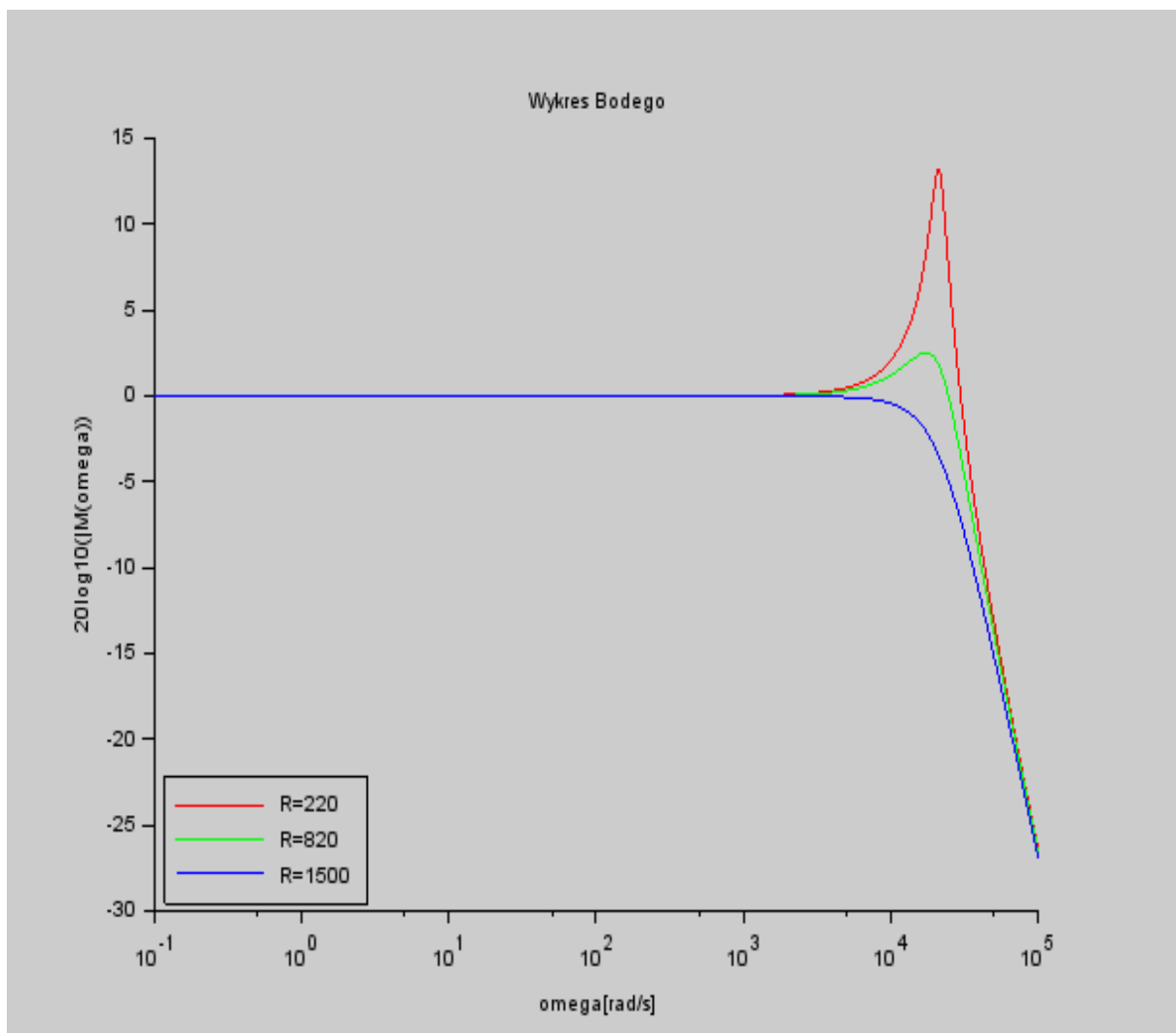
Wiemy, że $|p| = \omega_n^2 \xi^2 + \omega_n^2(1 - \xi^2)$. Podstawiając $t = \omega^2$, $t > 0$ i obliczając pierwiastek dodatni równania kwadratowego otrzymujemy ostatecznie

$$\omega_{dB} = \omega_n \sqrt{(1 - 2\xi^2) + \sqrt{2} \sqrt{(\omega_n^4 + 2\xi^2(\xi^2 - 1))}}.$$

- (V) Aby zaprezentować powyższy wynik wizualnie przedstawimy krzywe charakterystyk dla kilku różnych wartości oporu, $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$. Weźmy dla przykładu $R = 220, 820$ i 1500Ω .



Rysunek 8: Grupa wykresów przedstawiająca najważniejsze charakterystyki czasowe i amplitudowe badanego filtra dla przypadku słabo tłumionego. Skok na ostatnim wykresie wynika z użycia numerycznej funkcji arctan.



Rysunek 9: Wykres Bodego dla przypadku tłumienia słabego. Warto zwrócić uwagę na gwałtowny wzrost wartości podczas przekraczania częstości ω_d

3 Symulacja obwodu w środowisku Xcos

W celu odniesienia wyników teoretycznych do rzeczywistych układów przeprowadzona zostanie symulacja z użyciem edytora Xcos. Przedstawimy w nim odpowiedzi skokowe ($u(t)$) oraz odpowiedź na sygnał postaci $A \sin(\omega t)$, $t > 0$. Wiemy, że odpowiedź na ten ostatni powinna być równa

$$y(t) = |H(j\omega)| \sin(\omega t + \angle H(j\omega)) = M(\omega) \sin(\omega t + \Phi(\omega)). \quad (10)$$

3.1 Symulacja z użyciem bloków elektrycznych

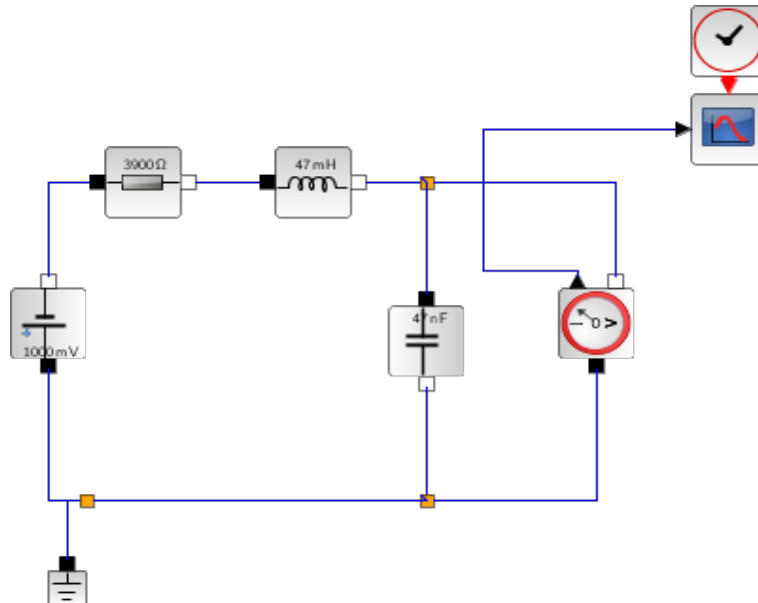
W celu sprawdzenia poprawności obliczeń dotyczących odpowiedzi skokowej oraz charakterystyki amplitudowej przedstawimy w pierwszej kolejności symulację opartą o bloki elektryczne.

Zachowując spójność z wykresami podanymi w części teoretycznej wykorzystamy następujące parametry obwodu

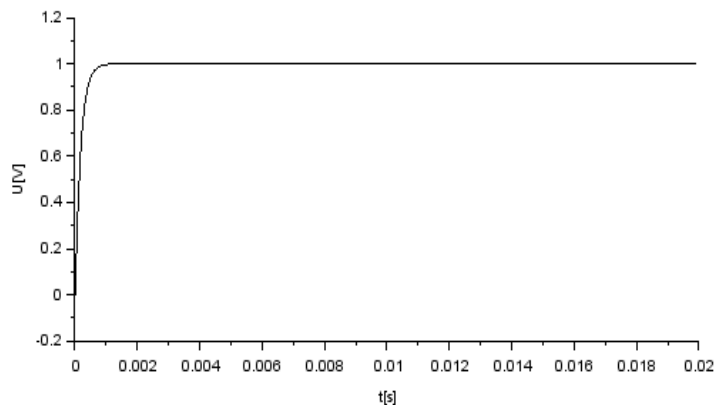
$$L = 47 \text{ mH}, \quad C = 47 \text{ nF}.$$

Wartości oporu będziemy zmieniać w zależności od analizowanego przypadku. Zapiszemy je w kolejności komplementarnej z układem opisu teoretycznego.

- (I) Dla $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ weźmy $R = 3900 \Omega$. Dokonamy porównania wizualnego wykresu odpowiedzi skokowej do wykresu z rysunku 2. Następnie sprawdzimy jak zachowuje się wykres sinusoidalny napięcia po przejściu przez tego typu filtr.



Rysunek 10: Obwód szeregowy RLC wraz z oscyloskopem służący do symulacji odpowiedzi skokowej.

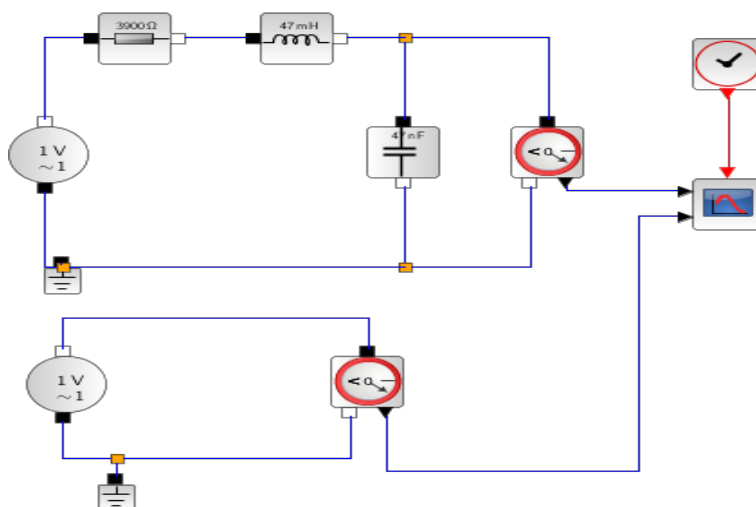


Rysunek 11: Wykres napięcia od czasu zwracany przez symulację odpowiedzi na impuls skokowy. Dostrzegamy silne podobieństwo do wykresu pierwszego z rysunku 2.

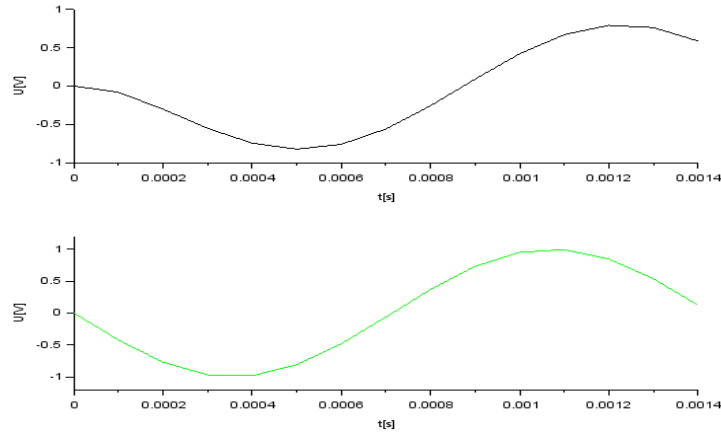
Aby przeanalizować zachowanie sygnału sinusoidalnego w takim obwodzie wykorzystamy wcześniej wyliczone parametry (równania (3) oraz (III)) oraz własność (10). Weźmy $x(t) = 1 \cdot \sin(2\pi 700 t)$ i zapiszmy od razu

$$y(t) = 0.7990255 \cdot \sin(2\pi 700 t - 0.6999387).$$

Spodziewamy się więc spadku amplitudy i widocznego przesunięcia fazowego.

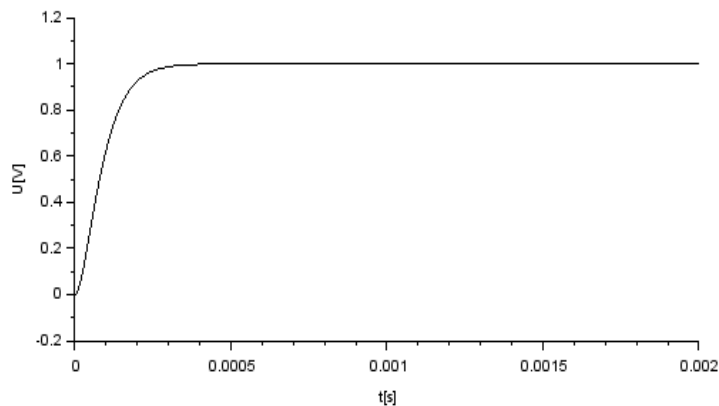


Rysunek 12: Schemat układu filtrującego oraz schemat mierzący napięcie wejściowe.



Rysunek 13: Wykres napięcia wyjściowego układu filtrującego (góra) i napięcia wejściowego (dół).

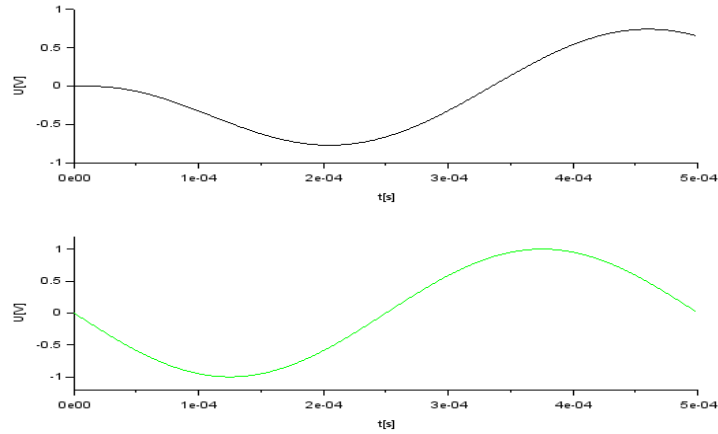
- (II) Analogicznie jak w punkcie pierwszym dobieramy opór i wyrysowujemy charakterystyki. Tym razem, dla kryterium $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ mamy $R = 2000 \Omega$. Ze względu na małe zmiany w obwodzie 10 (uległa im jedynie wartość oporu) nie zamieszczamy go tutaj i w kolejnym punkcie.



Rysunek 14: Wykres napięcia od czasu dla symulacji przypadku krytycznie tłumionego. Widzimy silne podobieństwo do wykresu pierwszego z rysunku 5.

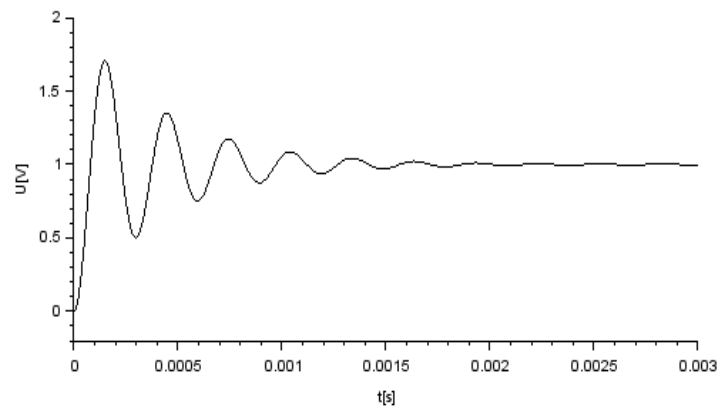
W celu wysymulowania sygnału wyjściowego w oparciu o sygnał sinusoidalny weźmy w tym przypadku $f = 2000 \text{ Hz}$. Fakt takiej zmiany wartości wynika z analizy wykresu trzeciego na rysunku 5 i chęci przedstawienia widocznych gołym okiem zmian. Mamy zatem

$$y(t) = 0.7413826 \cdot \sin(2\pi 2000 t - 1.0669869).$$



Rysunek 15: Wykres przedstawiający napięcie wejściowe (dół) oraz napięcie wyjściowe po przefiltrowaniu (góra). Warto zauważyć, że nie jesteśmy w stanie wizualnie rozróżnić przypadków I i II (wykresu powyższego od 13).

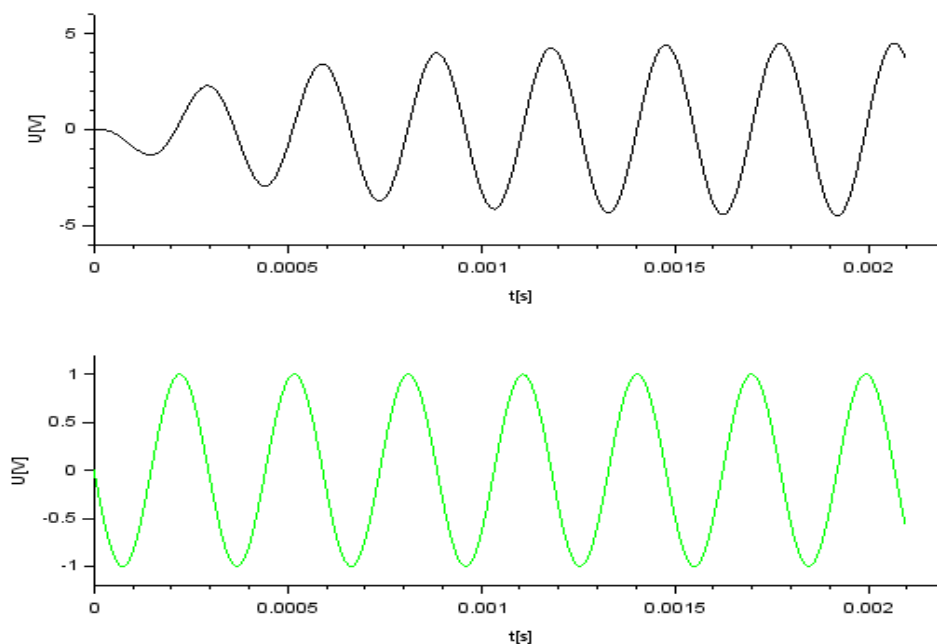
(III) Analizując ostatni przypadek, dla $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, ustalamy $R = 220 \Omega$ i postępujemy analogicznie do poprzednich podpunktów.



Rysunek 16: Wykres przedstawiający odpowiedź na sygnał skokowy dla przypadku słabo tłumionego. Widać wyraźne podobieństwo do wykresu odpowiedzi skokowej z 8. Warto zauważyć, że napięcie zmierzone na kondensatorze przekracza prawie dwukrotnie napięcie wejściowe.

Aby dobrze przedstawić różnicę między tym a innymi przypadkami weźmy wartość częstotliwości odpowiadającą częstotliwości własnej ω_n opisaną w 2.2.3. Mamy zatem $f = 3386.2754 \text{ Hz}$ oraz

$$y(t) = 4.5454545 \cdot \sin(2\pi ft + 3.1415927).$$

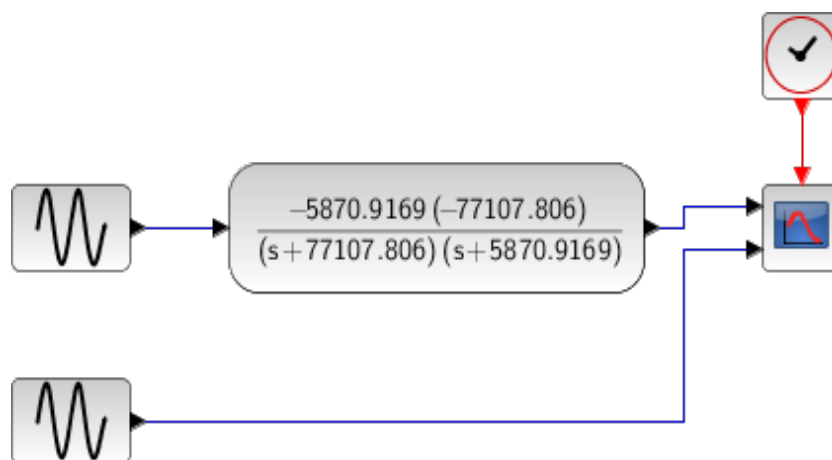


Rysunek 17: Wykres dla ostatniego przypadku przedstawia wyraźne oscylacje napięcia wyjściowego (góra). Poza oscylacjami wyraźne jest też przesunięcie fazowe.

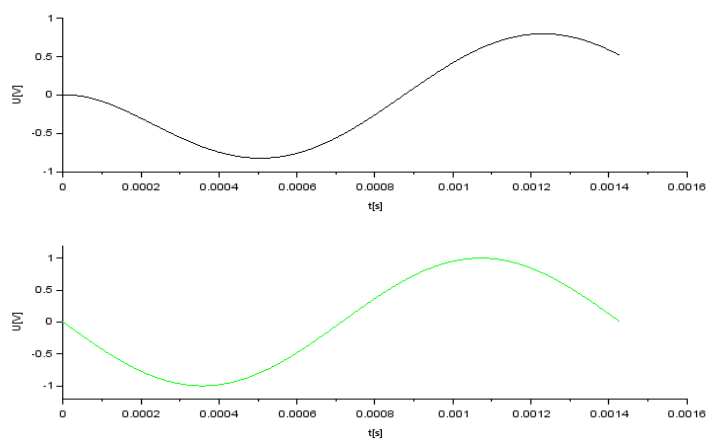
3.2 Symulacja z użyciem bloków matematycznych

Przedstawmy teraz wstępne obliczenia za pomocą schematów blokowych. Kolejność przedstawienia jest komplementarna do poprzedniej sekcji. Powtarzają się także dobrane parametry, stąd przedstawimy układy bez podwajania dokonanego wcześniej opisu.

(I) Dla przypadku tłumienia silnego

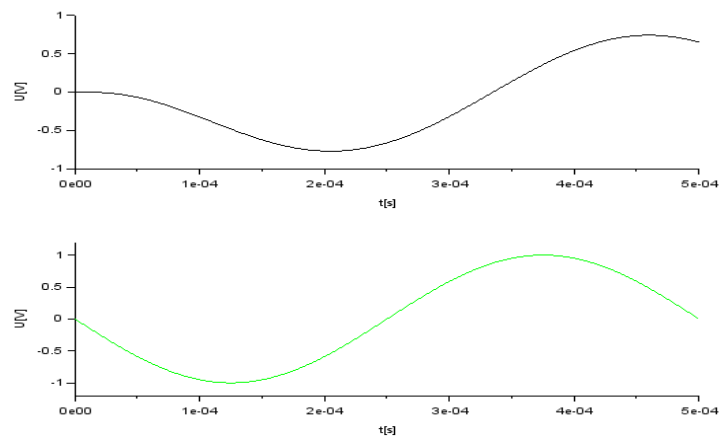


Rysunek 18: Obwód przygotowany za pomocą edytora Xcos. Wartość transmitancji używamy tu poprzez wykorzystanie danych z poprzedniego paragrafu.



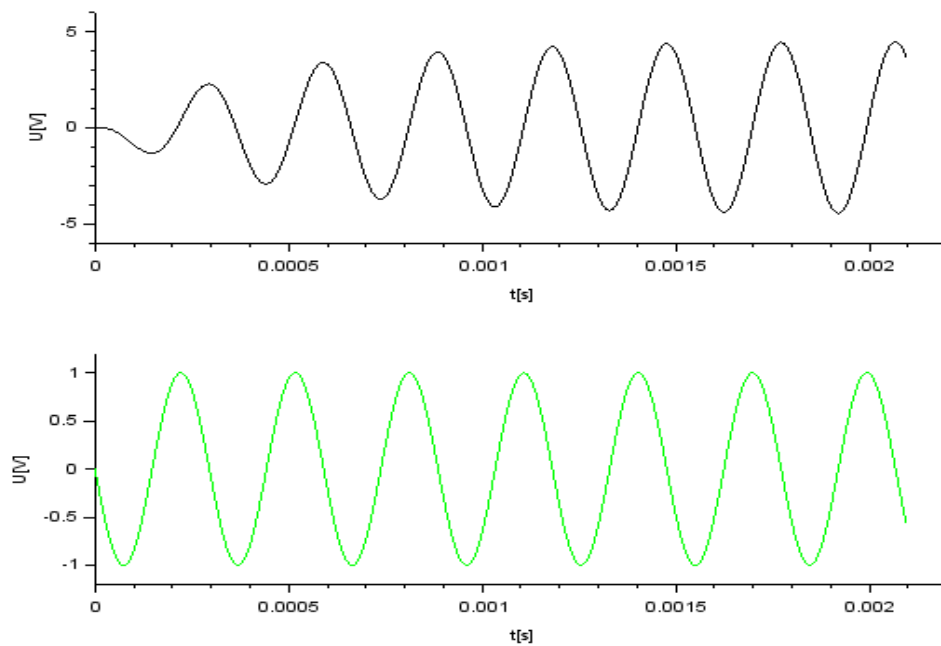
Rysunek 19: Wykres napięcia wyjściowego teoretycznego układu filtrującego (góra) i napięcia wejściowego (dół).

(II) Dla przypadku tłumienia krytycznego



Rysunek 20: Wykres napięcia wyjściowego układu filtrującego (góra) i napięcia wejściowego (dół).

(III) Dla przypadku tłumienia słabego



Rysunek 21: Wykres napięcia wyjściowego układu filtrującego (góra) oraz napięcia wejściowego (dół).

Zauważamy, że wszystkie powyższe wykresy dobrze korespondują z wykresami przedstawionymi w poprzednich sekcjach. Uznamy to za potwierdzenie poprawności rozumowania.

4 Podsumowanie części teoretycznej

Mając wyliczone oraz wysymulowane charakterystyki związane z układem RLC przeanalizujemy ostatecznie jego zachowanie.

Rozpatrzmy więc zjawiska fizyczne towarzyszące ładowaniu kondensatora przez opór i indukcyjność. Bezpośrednio po przyłożeniu napięcia wejściowego napięcie na kondensatorze będzie równe zero, co wynika z ciągłości napięcia na kondensatorze). Napięcie na oporze jest też także zerowe, natomiast na cewce będzie równe

$$u_L \Big|_{t=0} = L \frac{di}{dt} \Big|_{t=0}.$$

Spowoduje to szybkie narastanie prądu. Spowoduje on powstanie napięcia na kondensatorze oraz oporniku. Tym samym wartość u_L zmniejszy się. Zmniejszy się też prędkość narastania prądu. Możemy więc zaobserwować dwa przypadki.

- a) Jeśli opór będzie duży to prąd na indukcyjności będzie mniejszy. Narastanie prądu będzie miało mniejszą prędkość przez co napięcie na kondensatorze stopniowo wzrośnie, asymptotycznie osiągając wartość napięcia wejściowego. Opis ten odpowiada obserwacjom wykresów 2 oraz 5, szczególnie wykresowi odpowiedzi skokowej. Warto jednak zauważyć, że dla tłumienia krytycznego czas ładowania kondensatora jest szybszy niż w innych przypadkach [3].
- b) Jeśli opór będzie mały to napięcie na indukcyjności będzie większe. Spowoduje to szybkie narastanie prądu. Może nawet doprowadzić do przekroczenia przez napięcie na kondensatorze wartości napięcia wejściowego. Bardzo dobrze obrazuje to wykres odpowiedzi skokowej z rysunku 8. Widzimy na nim jak dla $R = 220 \Omega$ napięcie wyjściowe przekracza niemal dwukrotnie wartość napięcia wejściowego.

Na pytanie jakie powinny być dokładne stosunki parametrów elementów obwodu odpowiedzieliśmy już w sekcji 2.2. Dokładniejszego wyjaśnienia wymaga natomiast zjawisko oscylacji zaobserwowane na wykresach 21, 17 i 8.

4.1 Oscylacja obwodu RLC słabo tłumionego

Poświęcimy teraz więcej uwagi przypadkowi ostatniemu, dla którego obserwujemy gasnące oscylacje napięcia wyjściowego. Wiemy już, że dla małego oporu prędkość narastania prądu będzie duża oraz że może wtedy dojść do przekroczenia wartości napięcia wejściowego przez napięcie u_C . Załóżmy, że właśnie tak się stało.

Przypomnijmy treść II prawa Kirchhoffa, które mówi, że suma siły elektromotorycznej i spadków napięć w obwodzie zamkniętym jest równa 0 [2]. Zatem po przekroczeniu przez napięcie u_C wartości napięcia wejściowego u napięcie na indukcyjności musi zmienić swój

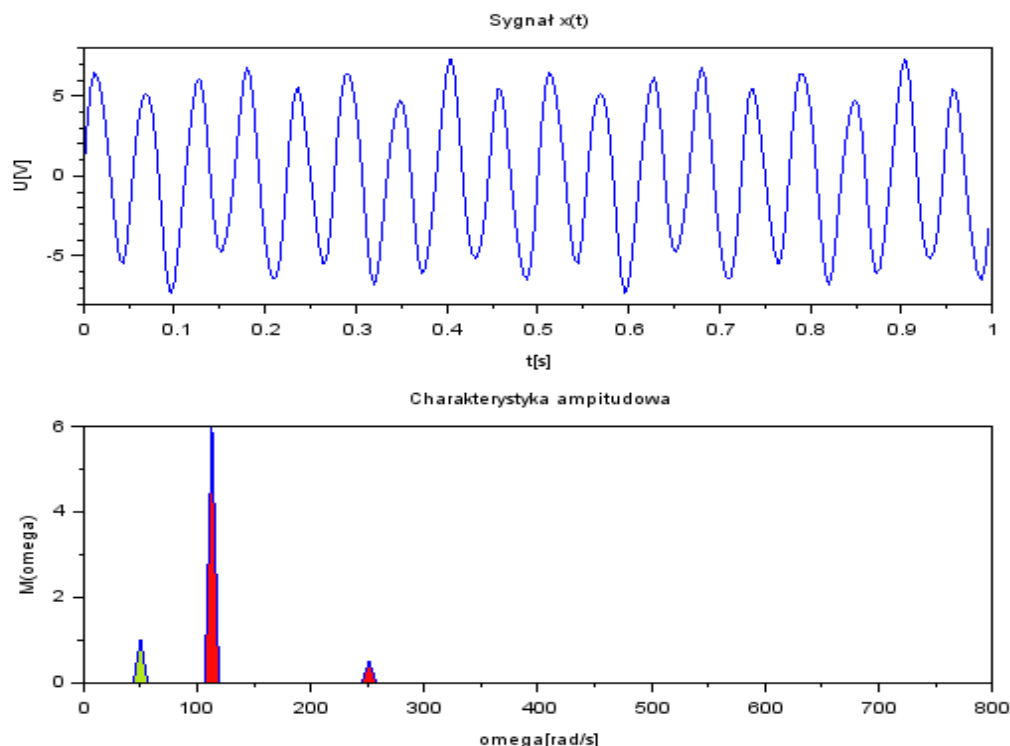
znak, tj. prąd zamiast narastać zacznie się zmniejszać. Dopiero wtedy, gdy prąd zmieni kierunek zaobserwujemy spadek napięcia na kondensatorze. Cykl ten powtarza się podczas pomiędzy zmianami znaku prądu aż do ustabilizowania napięcia u_C na poziomie SEM.

5 Filtracja zadanego sygnału

Wykorzystując obliczenia i symulacje przeprowadzimy teraz filtrację sygnału złożonego z trzech fal sinusoidalnych o różnych częstotliwościach

$$x(t) = 1 \sin(2 \cdot 8 \pi \cdot t) + 6 \sin(2 \cdot 18 \pi \cdot t) + 0.5 \sin(2 \cdot 40 \pi \cdot t). \quad (11)$$

Celem dobrania parametrów obwodu szeregowego RLC będzie odfiltrowanie częstotliwości 18 i 40 Hz.



Rysunek 22: Graficzne przedstawienie sygnału $x(t)$ w dziedzinie czasu (góra) oraz modułu jego transformaty $M(\omega)$ (dół). Kolorem czerwonym zaznaczone zostały amplitudy, które chcemy wyłumić.

Aby wykorzystać wszystkie możliwości wymienione w poprzednich sekcjach spróbujmy znaleźć odpowiednie wartości oporu, pojemności oraz indukcyjności dla przypadków wymienionych z prezentowanej na wstępie tabeli. Przytoczmy ją.

Mamy zatem, dla $\xi = -\frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$

ξ	Położenie pierwiastków	Przypadek określony jako	
$\xi > 1$	Dwa różne na ujemnej części osi rzeczywistej	Silnie tłumiony	$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$
$\xi = 1$	Podwójny na ujemnej części osi rzeczywistej	Krytycznie tłumiony	$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$
$\xi < 1$	Dwa sprzężone w lewej części płaszczyzny zespolonej	Słabo tłumiony	$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

5.1 Filtracja dla tłumienia silnego i krytycznego

W celu odfiltrowania nieporządkanych częstotliwości spróbujmy umieścić parametr ω_{dB} dokładnie w punkcie 16π , tj. częstości pierwszego sinusa. Dla przypadku tłumionego krytycznie mamy zatem (z równania (7))

$$16\pi = \omega_{dB} = |p|\sqrt{\sqrt{2}-1},$$

co daje nam, przy $p = -\frac{R}{2L}$ porządkany stosunek oporu do indukcyjności

$$\frac{R}{L} = \frac{32\pi}{\sqrt{\sqrt{2}-1}}. \quad (12)$$

Z warunków zapisanych w tabeli możemy też znaleźć pojemność C, która w tym przypadku wyniesie

$$C = \frac{4L}{R^2}. \quad (13)$$

Po zastosowaniu takich parametrów otrzymamy sygnał wyjściowy $y(t)$ przedstawiony na wykresie 23. Widzimy, że osiągnęliśmy założone na wstępie cele tylko częściowo. Nie udało się wytłumić ostatniej częstości całkowicie, a częstość środkowa nadal daje sporą amplitudę. Warto jednak zauważyć, że proporcje pomiędzy listkami zmieniły się znacząco.

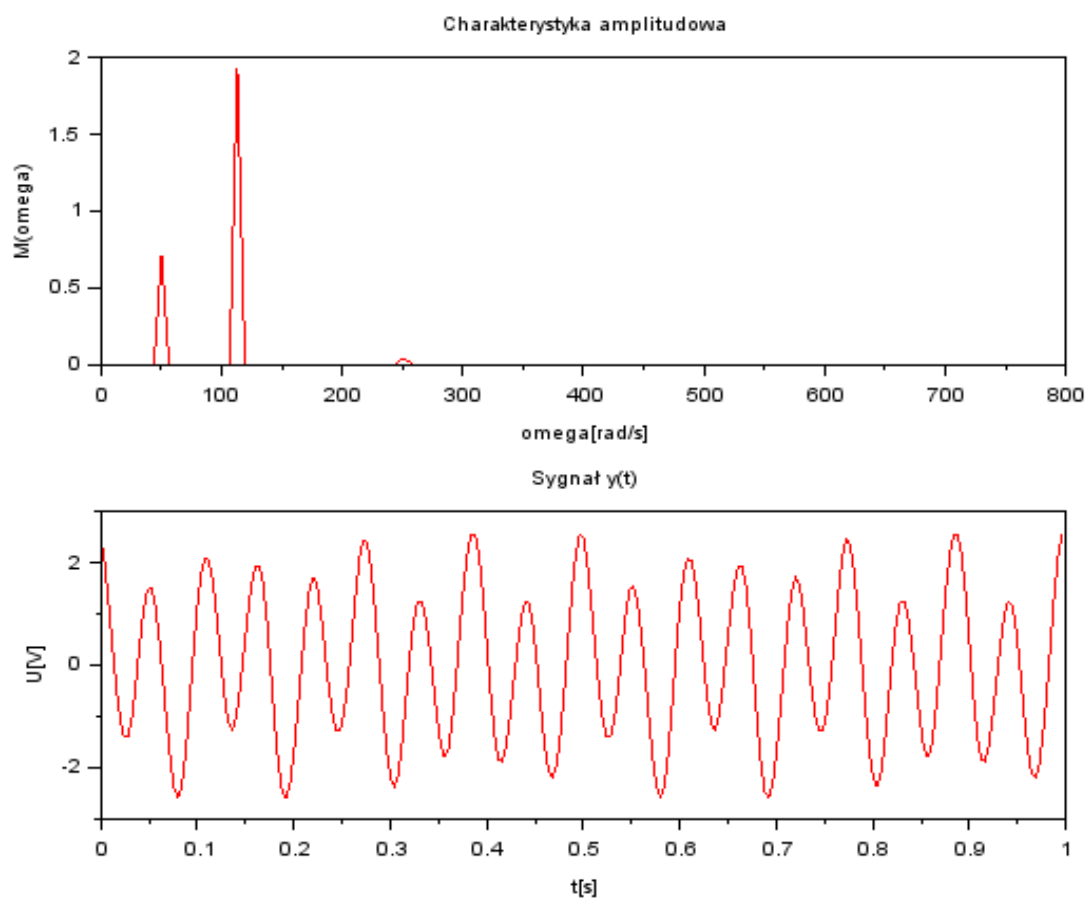
Wykonajmy teraz taką samą procedurę dla przypadku, gdzie opór będzie znacznie większy. Mamy zatem (z równania (4)) zapisanego przy pomocy wartości R, L i C)

$$\omega_{dB} = \sqrt{\frac{\sqrt{R^4 C^4 - 4C^3 R^2 L + 8L^2 C^2} - R^2 C^2 + 2LC}{2L^2 C^2}}.$$

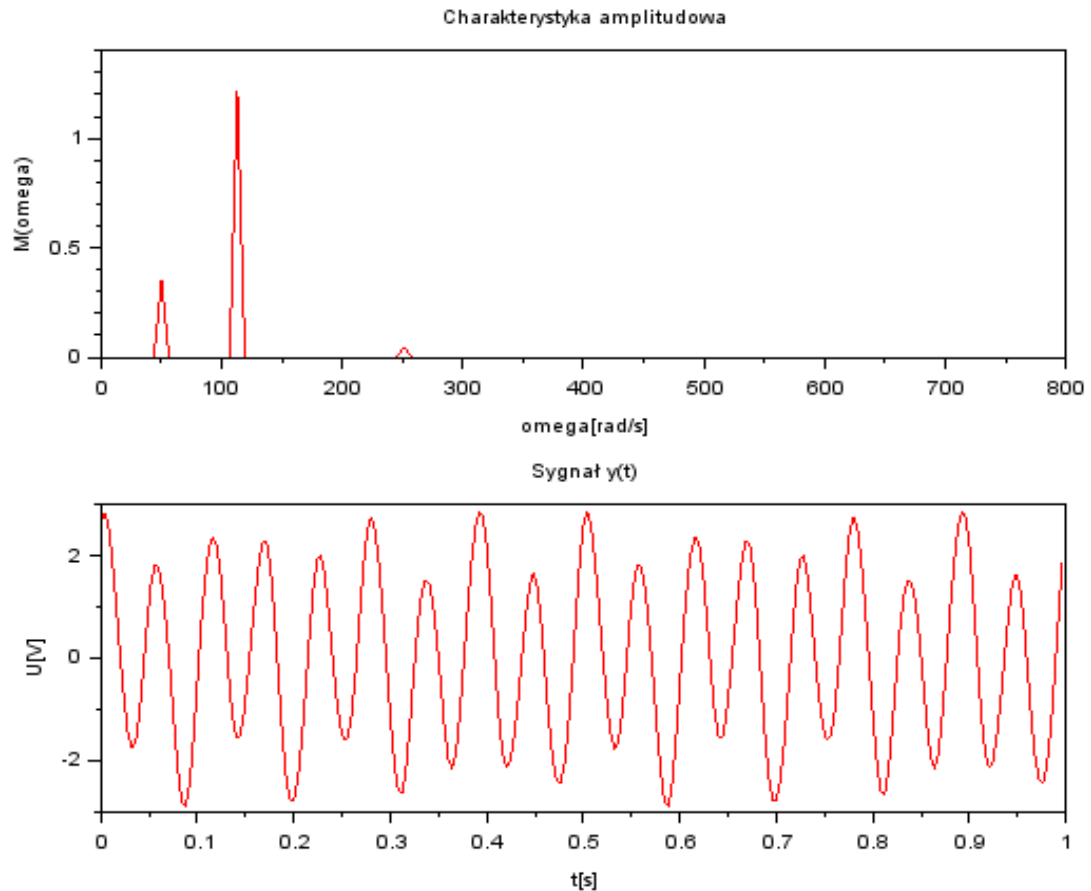
Ustalmy $R = 10\sqrt{\frac{L}{C}}$ oraz ω_{dB} takie jak poprzednio. Otrzymamy równania na C oraz R postaci

$$\begin{aligned} R &= 10\sqrt{\frac{512\pi^2 L^2}{\sqrt{9608}-98}}, \\ C &= \frac{\sqrt{9608}-98}{512\pi^2 L^2}, \quad L \in \mathbb{R}^+ \end{aligned} \quad (14)$$

dla których obserwujemy wykres 24.



Rysunek 23: Wykres przedstawiający charakterystykę amplitudową (góra) i przebieg czasowy (dół) sygnału po filtracji dla przypadku tłumionego krytycznie. Wynik nie spełnia postawionych na początku sekcji wymagań głównie ze względu na stosunkowo długie pasmo przejściowe. Jest to jednak najlepszy przypadek filtracji z wykorzystaniem biegunów rzeczywistych. Na podstawie wcześniejszej analizy oraz wykresu 6 widzimy, że dla tłumienia krytycznego uzyskujemy najkrótsze pasmo przepustowe (najszybsze ładowanie kondensatora).



Rysunek 24: Wykres przedstawiający charakterystykę amplitudową (góra) i przebieg czasowy (dół) sygnału po filtracji dla przypadku tłumionego silnie. Zgodnie z poprzednimi wnioskami ten przypadek jest już wizualnie gorszym wynikiem (stosunek wysokości pierwszych dwóch listków jest dla nas niekorzystny).

Łatwo zauważyć, że wyniki filtracji z wykorzystaniem obwodu RLC tłumionego krytycznie są optymalnym przypadkiem wykorzystania obwodów silnie tłumionych. Przez szerokie pasmo przejściowe, nie obserwujemy całkowitego wygaszenia nieporządkanych sygnałów. Jednak w przypadku tłumienia krytycznego stosunek listków zmienia się znacznie na korzyść listka pierwszego. Charakterystyka amplitudowa filtra tłumionego krytycznie wynosi dla niego około ~ 0.7 a dla pozostałych kolejno ~ 0.3 oraz ~ 0.09 . Dla analizowanego przypadku tłumienia silnego mamy natomiast odpowiednio ~ 0.7 , ~ 0.4 oraz ~ 0.19 . Warto zwrócić uwagę na fakt, że wartości modułu odpowiadające pierwszej częstotliwości są takie same (dokładniej wynoszą 0.7071068). Taki wynik uzasadnia także analiza wykresów 3 oraz 6, które pokazują, że główną różnicą pomiędzy charakterystykami amplitudowymi przypadków z pierwiastkami rzeczywistymi jest nachylenie linii po wstępnym spadku o 3dB.

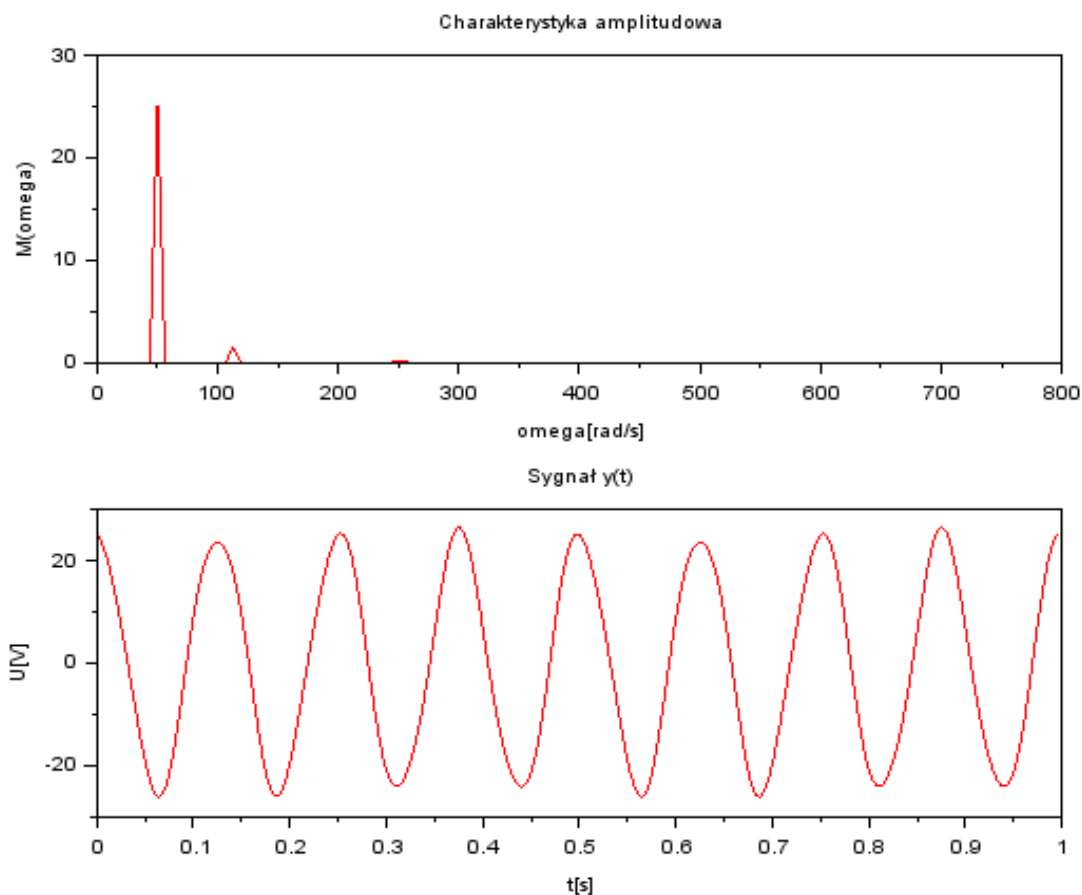
5.2 Filtracja dla tłumienia słabego

Przypadkowi tłumienia słabego poświęciliśmy zdecydowanie najwięcej uwagi. Jest on bezsprzecznie najciekawszym przykładem ze wszystkich analizowanych w raporcie. Można więc podejrzewać, że wyniki filtracji osiągnięte za jego pomocą będą podobnie satysfakcjonujące. Aby osiągnąć najlepsze efekty filtrowania umieścimy część urojoną biegunów w punkcie 16π . Zgodnie z wykresem 9 mamy wtedy maksymalne wzmocnienie pierwszego listka. Zatem, biorąc część rzeczywistą równą minus jeden

$$-\omega_n \cdot \xi = -1 \rightarrow R = 2 \cdot L,$$

$$16\pi = \sqrt{\frac{1}{LC}} \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{4 L}} \rightarrow C = \frac{1}{(256\pi^2 + 1) L}. \quad (15)$$

Wybierając dowolne $L \in \mathbb{R}^+$ otrzymujemy sygnał wyjściowy jak na wykresie 25



Rysunek 25: Wykres przedstawiający charakterystykę amplitudową (góra) i przebieg czasowy (dół) sygnału po filtracji dla przypadku słabo tłumionego.

Widzimy, że umiejscawiając częstotliwość własną w punkcie 16π korzystamy z własności rezonansowych tego typu filtra. Wzmocni to znacznie pierwszy sygnał sinusoidalny z sumy (11) jednocześnie tłumiąc pozostałe częstotliwości.

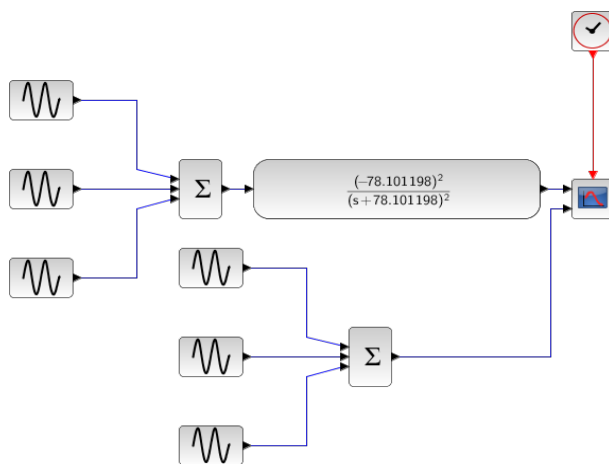
6 Filtracja za pomocą bloków matematycznych i podsumowanie

Ostatnim elementem analizy układu szeregowego RLC będzie sprawdzenie poprzednich wyników blokami teoretycznymi. Przypomnijmy, że bloki te wykonują następujący ciąg operacji

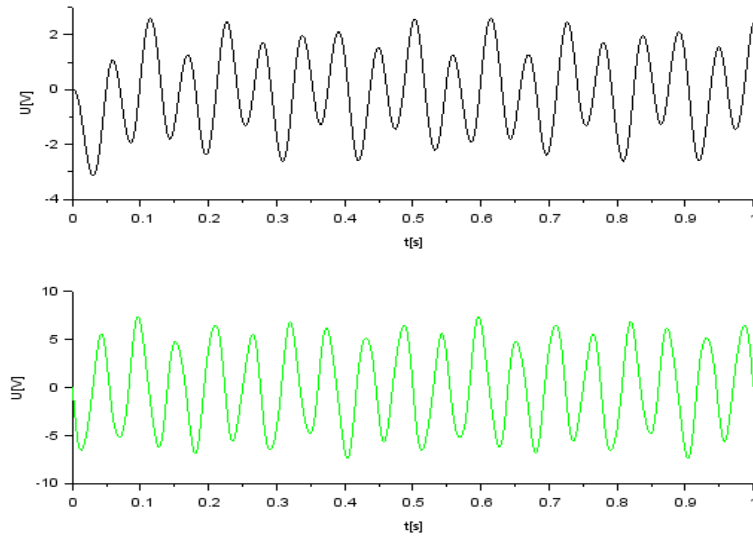
- (I) sumują podane na wejściu sygnały sinusoidalne (równanie (11)),
- (II) mnożą transformatę Fouriera sygnału podanego na wejściu przez zdefiniowaną wewnątrz bloku transmitancję,
- (III) obliczają transformatę odwrotną wyniku mnożenia oraz podają ją na wyjście (oscylloskop).

Przedstawimy je więc w kolejności takiej jak filtry w poprzednim rozdziale.

- (A) Przypadek pierwszy rozpatrujemy dla pierwiastków wyliczonych numerycznie za pomocą równań (12), (13) i (5)

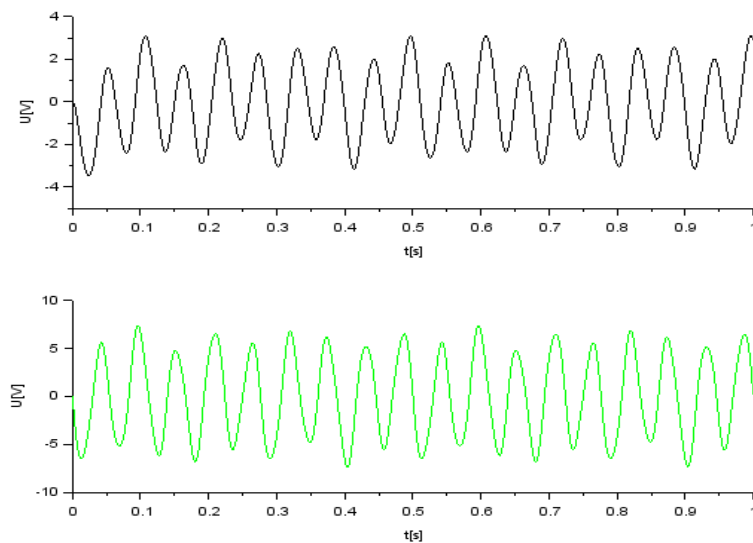


Rysunek 26: Schemat blokowy filtrowania układem krytycznie tłumionym. Kolejne schematy zostaną pominięte ze względu na podobieństwo (zmianie ulegnie jedynie blok transmitancji).



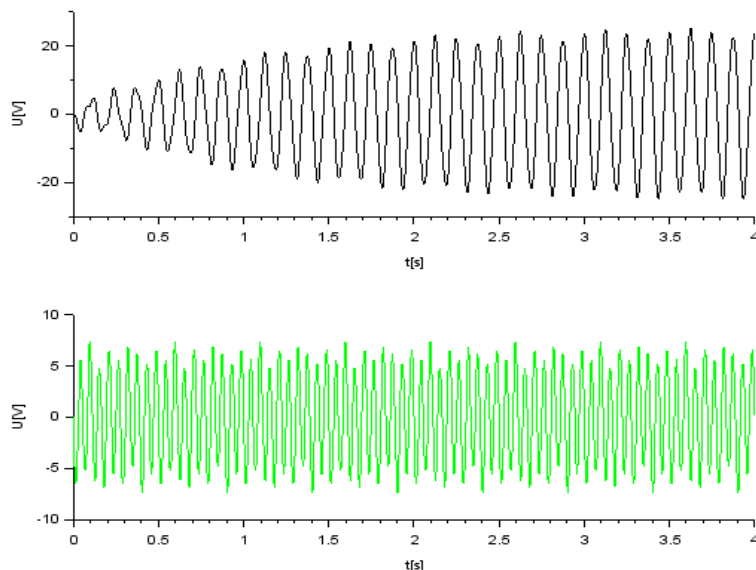
Rysunek 27: Wykres przedstawiający napięcie wyjściowe (góra) i wejściowe (dół) układu tłumionego krytycznie. Zgodnie z wcześniej obserwowanym wykresem 23 widzimy znaczne tłumienie części ze składowych sygnału.

(B) Podobnie jak w przypadku pierwszym obliczamy transmitancję (na podstawie równania (14)) i wstawiamy do schematu blokowego jak na schemacie 26.



Rysunek 28: Wykres dla przypadku tłumienia silnego (napięcie wejściowe - dół, wyjściowe - góra). Dostrzegamy wyraźnie gorsze wyniki tłumienia niż przy zastosowaniu przypadku krytycznego.

- (C) Ostatnim przypadkiem jest tłumienie słabe. Skorzystamy ze wzorów (15) aby wyznaczyć rządzaną transmitancję i podstawimy ją do schematu blokowego.



Rysunek 29: Wykres dla przypadku tłumienia słabego (napiecie wejściowe - dół, wyjściowe - góra). Po stabilizacji wykres górny wykazuje duże podobieństwo do wykresu 25.

6.1 Podsumowanie

Na podstawie powyższych wykresów stwierdzamy, że założony przez nas w 22 cel filtracji został osiągnięty. Szczególnie ostatni rysunek (29) przedstawia, po ustabilizowaniu, wykres niemal przybliżający pojedynczy sygnał sinusoidalny.

Zgadza się to z wynikiem teoretycznym

$$y(t) = M_1 \sin(16\pi t + \Phi_1) + M_2 \cdot 6 \sin(36\pi t + \Phi_2) + M_3 \cdot 0.5 \sin(80\pi t + \Phi_3),$$

gdzie, po podstawieniu wartości modułu oraz fazy obliczonych numerycznie według równania (10), mamy

$$y(t) \approx 25.142 \sin(16\pi t + 1.561) + 0.247 \cdot 6 \sin(36\pi t - 0.022) + 0.042 \cdot 0.5 \sin(80\pi t - 0.009).$$

Wykorzystując rezonans w układzie RLC wzmocniliśmy więc maksymalnie pierwszą składową zadanego sygnału tłumiąc przy tym pozostałe. Należy podkreślić, że uzyskany w ten sposób filtr nie jest filtrem doskonałym. Wynika to głównie ze stosunkowo długiego pasma przejściowego, które nie pozwala na skuteczne wytłumienie sygnałów znajdujących się nieco powyżej początku pasma zaporowego.

Literatura

- [1] T. P. Zieliński, *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów: od teorii do zastosowań*. Wydawnictwa Komunikacji Łączności, 2005.
- [2] I. Krakowiak, *Elektrotechnika i elektronika*. Politechnika Warszawska, 2012.
- [3] A. Macura, *Teoria obwodów. Obwody prądu zmiennego. Część I*. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, 1997.
- [4] “RLC low-pass Filter,” <https://coertvonk.com/hw/filters/two-pole-low-pass-rlc-filter-13594#mjax-eqn-eq%3Atransferpolynomial>, Dostęp: 2020-05-14.

7 Krótki indeks najważniejszych oznaczeń

1. ω_n - częstość drgań własnych, dla owodu szeregowego RLC równa $\frac{1}{\sqrt{LC}}$,
2. ξ - współczynnik tłumienia, dla obwodu RLC równy $-\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$,
3. $\gamma(t)$ - funkcja skoku jednostkowego,
4. $u(t)$ - odpowiedź skokowa,
5. $h(t)$ - odpowiedź impulsowa,
6. ω_{dB} - częstość dla której następuje spadek charakterystyki amplitudowej o 3dB.