

# Studio dei fenomeni di sincronizzazione per sciami di lucciole

Matteo Falcioni, Daniele Pucci

March 2022

## Contents

<b>1</b>	<b>Abstract</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Introduzione alla sincronizzazione</b>	<b>2</b>
2.1	La sincronizzazione in natura . . . . .	2
2.2	Breve descrizione dei fenomeni di sincronizzazione . . . . .	2
2.3	Basi matematiche . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Modellizzazione del comportamento di sincronizzazione</b>	<b>4</b>
3.1	Oscillatori di Fase ed Oscillatori di Rilassamento . . . . .	4
3.2	Oscillatori di Fase: il Modello di Kuramoto . . . . .	4
3.3	Ricerca del valore di Accoppiamento Critico . . . . .	6
3.3.1	Parametri di Campo Medio . . . . .	6
3.3.2	Soluzioni stazionarie . . . . .	7
3.3.3	Risoluzione per il parametro d'ordine e $K_c$ . . . . .	8
3.3.4	La crescita del parametro d'ordine . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Simulazione numerica</b>	<b>11</b>
4.1	Obiettivi della simulazione . . . . .	11
4.1.1	Grafico $r(t)$ e $r(K)$ . . . . .	11
4.1.2	Oscillatori come fasori nel piano complesso . . . . .	11
4.1.3	Oscillatori come lucciole nel piano . . . . .	11
4.2	Discretizzazione dello spazio e del tempo . . . . .	13
4.3	Risultati . . . . .	13
4.4	Potenzialità . . . . .	14

## 1 Abstract

La sincronizzazione dei flash delle lucciole è forse il primo fenomeno naturale che sia stato osservato riguardante la sincronizzazione di un vasto insieme di agenti e rappresenta un comportamento collettivo che ad oggi costituisce un esempio

paradigmatico di sincronizzazione.

In questo articolo, è stato studiato il noto Modello di Kuramoto e successivamente implementata una simulazione numerica in modo da confrontare il comportamento effettivo degli oscillatori del modello con quello di un reale sciame di lucciole.

Dallo studio di questo fenomeno derivano varie applicazioni e valide prospettive applicabili a campi differenti, inclusa la robotica.

## 2 Introduzione alla sincronizzazione

### 2.1 La sincronizzazione in natura

I fenomeni di sincronizzazione si osservano frequentemente in natura; un meraviglioso esempio è fornito, per l'appunto, da alcune specie di lucciole che hanno catturato nel corso dei secoli l'attenzione dei viaggiatori occidentali nell'Asia sud-orientale. Questi tornavano dai loro viaggi raccontando storie di enormi sciame di lucciole che emettevano flash luminosi all'unisono, causando lunghi lampi di luce nell'oscurità.

Un'analisi dettagliata del comportamento particolare di questi insetti è dovuta a J.B. Buck che nel 1935 stabilì dopo numerose osservazioni che i flash sincroni delle lucciole erano finalizzati all'accoppiamento, e continuavano per ogni lucciola finché questo non avveniva, oppure finché non vi erano più femmine non fecondate che potevano rispondere ai maschi sincronizzati.

Non fu fino alla fine degli anni '60 del 1900 che si cominciò a capire che il ritmo degli sciame non era deciso da una singola lucciola "conduttrice" ma piuttosto emergesse dalle interazioni tra tutte loro. In qualche modo, l'oscillatore in ogni lucciola (presumibilmente una determinata area neuronale del loro cervello adibita all'emissione dei flash) si corregge in modo da emettere luce all'unisono con gli altri.

Il tipo di sincronizzazione mutuale esemplificato dagli sciame di lucciole è in realtà molto diffuso in natura. Esempi simili molto studiati possono essere la sincronizzazione degli applausi in vaste audience, quella dei cicli mestruali femminili, o ancora quella dei battiti cardiaci, e molti altri.

### 2.2 Breve descrizione dei fenomeni di sincronizzazione

Prima di iniziare a studiare a fondo la sincronizzazione, può risultare utile definire con precisione cosa si intende con tale termine. In letteratura, si definisce frequentemente come "adattamento dei ritmi di oggetti oscillanti dovuto alle loro deboli interazioni". Possiamo inoltre descrivere "oggetti oscillanti" come sistemi che sono portati all'oscillazione da una fonte energetica, e sono stabili nelle loro oscillazioni rispetto a piccole perturbazioni.

Di solito, quando studiamo la sincronizzazione, stiamo generalmente ponendo la nostra attenzione su oggetti che oscillerebbero singolarmente, anche senza alcuna influenza esterna: i cosiddetti oscillatori "autosufficienti".

Quando un sistema è composto da più di uno di questi oggetti oscillanti, possiamo avere interazioni tra di essi. Queste interazioni sono denominate accoppiamenti, e l'intensità di accoppiamento descrive quanto sono intense le interazioni. Anche con deboli accoppiamenti, oscillatori non identici possono interagire in modo da sincronizzarsi l'uno con l'altro. Generalmente, un gruppo di oscillatori si dice sincronizzato quando la frequenza di ogni oscillatore è fissata allo stesso valore degli altri.

Vi sono due valori principali che determinano quanto facilmente un gruppo di oscillatori si può sincronizzare: l'intensità di accoppiamento, descritta precedentemente, e la desintonizzazione di frequenza, un valore che descrive quanto differiscono tra loro le frequenze naturali degli oscillatori in assenza degli effetti delle interazioni. Un insieme con alta frequenza di desintonizzazione è più difficile da sincronizzare, visto che gli oscillatori tendono ad oscillare a frequenze molto differenti. Tutti gli oscillatori interagenti hanno un range di valori per la desintonizzazione per i quali riescono a sincronizzarsi; all'interno di questo range, l'accoppiamento determina una frequenza identica per l'intero insieme di oggetti. Tale range si espande tipicamente con l'aumento dell'intensità di accoppiamento.

## 2.3 Basi matematiche

Per lo studio della sincronizzazione degli sciami di lucciole sarà necessario servirsi del concetto di Spazio delle Fasi degli oscillatori; come è noto, esso è lo spazio costituito dalle variabili che descrivono lo stato del sistema. Ad esempio, lo stato di un pendolo semplice potrebbe essere descritto dalla sua posizione, specificata da un angolo, e la sua velocità, risultando in uno spazio delle fasi bidimensionale: ciò significa che lo stato del sistema in un determinato istante è visualizzabile come un punto nello spazio delle fasi. Durante l'evoluzione del sistema, tale punto si muove lungo una certa traiettoria nello spazio, determinata dalle equazioni canoniche di Hamilton.

Gli oscillatori autosufficienti, ossia sistemi che generano segnali periodici senza lo stimolo di una forzante esterna periodica, seguono delle traiettorie particolari nello spazio delle fasi: quando non vengono perturbati, rivisitano gli stessi punti in maniera ciclica. Dunque, lo stato stazionario di un oscillatore autosufficiente corrisponde ad una curva chiusa nello spazio delle fasi, detta *ciclo-limite*. Tali oscillatori hanno cicli limite stabili, ossia tutte le traiettorie vicine al ciclo limite si avvicineranno ad esso. Ciò equivale a dire che l'oscillatore è stabile rispetto alle piccole perturbazioni: dopo averlo spostato leggermente dal suo ciclo limite, vi ritornerà eventualmente.

Per determinare la relazione tra le fasi dei vari oscillatori, è necessario definire la fase del sistema. Per oscillatori autosufficienti la fase  $\phi$  è definita in modo che aumenti uniformemente nel tempo e guadagni  $2\pi$  radianti per ogni giro compiuto attorno al ciclo limite. Dunque, ogni punto del ciclo corrisponde ad un particolare valore della fase.

Possiamo associare ad ogni oscillatore anche una propria frequenza angolare naturale, comunemente chiamata  $\Omega$ . Questa quantità descrive quanto velocemente

l'oscillatore viaggia attorno al suo ciclo limite in assenza di stimoli esterni. In altre parole,  $\Omega$  è il tasso di variazione della fase dell'oscillatore quando si trova da solo; matematicamente,  $\dot{\phi} = \Omega$ .

### 3 Modellizzazione del comportamento di sincronizzazione

#### 3.1 Oscillatori di Fase ed Oscillatori di Rilassamento

Per studiare la sincronizzazione degli sciami di lucciole, ed in generale di una moltitudine di sistemi fisici, due tipi di modelli sono particolarmente interessanti ed efficaci: il modello ad Oscillatori di Fase e quello ad Oscillatori di Rilassamento.

Entrambi sono difatti modelli oscillatori, che si differenziano però rispetto ad alcune caratteristiche peculiari.

In particolare, i segnali generati dagli oscillatori di fase hanno forma sinusoidale, mentre quelli generati da oscillatori di rilassamento hanno forma molto diversa; rassomigliano una serie di pulsazioni, o "spikes".

Nel corso di questa relazione ci focalizzeremo sullo studio degli oscillatori di fase, e ci limiteremo nella trattazione ad oscillatori autosufficienti.

#### 3.2 Oscillatori di Fase: il Modello di Kuramoto

Il modello di Kuramoto descrive il comportamento di sincronizzazione di un sistema generalizzato di oscillatori di fase interagenti.

Per un alto numero di oscillatori con frequenze naturali differenti esso predice che, se questi hanno la possibilità di interagire abbastanza intensamente, cominceranno ad oscillare alla stessa frequenza. Inoltre, fornisce una base matematica per lo studio delle condizioni secondo le quali può accadere la sincronizzazione; ad esempio, è possibile risolvere le equazioni del modello per ricavare il numero di accoppiamenti necessari tra gli oscillatori per ottenere il comportamento di sincronizzazione.

In particolare, tale modello si è sviluppato a seguito dei progressi di Arthur Winfree, che fu uno tra i primi a proporre un modello efficiente per la sincronizzazione collettiva di oscillatori. Egli si focalizzò sullo studio di un vasto insieme di oscillatori a ciclo limite interagenti, seguendo alcune assunzioni di base, ossia postulando che 1) gli oscillatori potessero essere considerate quasi identici, e 2) che l'accoppiamento tra gli oscillatori fosse debole.

Tali assunzioni semplificavano tremendamente la matematica del suo modello, permettendo la separazione in scale temporali lente e veloci. Nella scala temporale veloce, gli oscillatori si rilassano velocemente al loro ciclo limite, dato che le perturbazioni provenienti dagli altri oscillatori sono piccole; visto che ogni oscillatore non si allontana mai dal suo ciclo limite, i loro stati possono essere approssimati bene semplicemente dalle loro fasi. In una scala temporale più lenta, si può osservare invece come le fasi di ogni oscillatore cambino a causa

degli effetti degli altri. Ciò comportava appunto una diminuzione notevole del livello di difficoltà del modello, poiché l'unica variabile di cui fosse necessario tenere traccia diventava la fase, permettendo di trascurare tutte le altre variabili di stato degli oscillatori.

Winfrey propose dunque un modello in cui l'effetto sulla fase di ogni oscillatore era determinato dallo stato complessivo di tutti gli oscillatori, un'approssimazione nota come *approssimazione di campo medio*. Nel suo modello, la velocità di cambiamento della fase di un oscillatore è determinata da una combinazione della sua frequenza naturale  $\omega_i$  con lo stato collettivo di tutti gli oscillatori.

La sensitività di ogni oscillatore al ritmo complessivo è determinato da una funzione  $Z$ , e il suo contributo al ritmo collettivo è descritto da una funzione  $X$ . Pertanto, ogni oscillatore è caratterizzato da un'equazione che descrive come la sua fase cambia nel tempo:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \left( \sum_{j=1}^N X(\theta_j) \right) Z(\theta_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (1)$$

dove  $\theta_i$  è la fase dell'oscillatore  $i$ ,  $\dot{\theta}_i$  è il tasso di variazione della fase dell'oscillatore  $i$ ,  $\omega_i$  è la frequenza naturale dell'oscillatore  $i$ , ed  $N$  è il numero totale di oscillatori.

Studiando tale modello, Winfree scoprì che gli oscillatori potevano sincronizzarsi a patto che ci fosse un accoppiamento abbastanza vasto e una desintonizzazione sufficientemente piccola (ossia un range di frequenze naturali piccolo). Ancor più interessante è probabilmente il risultato che settando la desintonizzazione ad un valore elevato (in modo che gli oscillatori non riuscissero a sincronizzarsi) e successivamente diminuendola, l'incoerenza nelle fasi continuava fino ad una certa soglia, al di sotto della quale un gruppo di oscillatori si sincronizzava improvvisamente. Sembrava dunque che la popolazione sperimentasse una sorta di transizione di fase verso lo stato di sincronizzazione.

Yoshiki Kuramoto, poco tempo dopo, iniziò a lavorare ad un modello di sincronizzazione sulla scia di ciò che aveva fatto Winfree, in particolare usando le stesse assunzioni da egli proposte. A seguito di vari studi, riuscì a provare che la dinamica a lungo termine di un sistema di oscillatori a ciclo limite debolmente accoppiati può essere descritta dalla seguente espressione:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \sum_{j=1}^N \Gamma_{ij}(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (2)$$

dove la funzione di interazione  $\Gamma_{ij}$  determina la forma dell'accoppiamento tra l'oscillatore  $i$  e l'oscillatore  $j$ .

A questo punto, sempre sulla falsa riga del lavoro di Winfree, Kuramoto assunse che ogni oscillatore dovesse influenzarne ogni altro: questo tipo di interazione è detta *accoppiamento globale*. Assunse inoltre che ogni interazione avesse lo stesso peso, e dipendesse sinusoidalmente dalla differenza di fase. Sotto tali

ipotesi le funzioni di interazione assumono la forma semplificata:

$$\Gamma_{ij}(\theta_j - \theta_i) = \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (3)$$

generando le equazioni che governano quello che ad oggi è divenuto noto come il Modello di Kuramoto:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (4)$$

dove  $K$  è la costante di accoppiamento ed  $N$  il numero totale di oscillatori. Il modello è spesso utilizzato nel limite  $N \rightarrow \infty$ , per cui il fattore  $1/N$  è inserito per mantenere il modello stabile in tale limite.

Per semplificare i calcoli, le frequenze naturali  $\omega_i$  generalmente si considerano distribuite secondo una densità di probabilità  $g(\omega)$ , simmetrica rispetto ad una certa frequenza  $\Omega$ , in modo che  $g(\Omega + \omega) = g(\Omega - \omega)$ . Spesso ad esempio si utilizza una distribuzione gaussiana. Per semplificare ulteriormente, la frequenza media  $\Omega$  può essere spostata in 0 operando la traslazione  $\theta_i \rightarrow \theta_i + \Omega t$ . Ciò equivale a lavorare nel sistema di riferimento in rotazione con frequenza  $\Omega$ .

A seguito di tali procedimenti le equazioni rimangono le stesse, e vi è l'ulteriore semplificazione di avere  $g(\omega) = g(-\omega)$ . Si assume infine che  $g(\omega)$  decresca monotonamente su ogni lato dal picco in  $\omega = 0$ .

Quel che rende tale modello così interessante è che, con alcuni ulteriori passaggi matematici, Kuramoto non solo è stato capace di provare che debba avvenire una transizione di fase verso la sincronizzazione nel suo modello, ma anche di trovare un'equazione relativamente semplice che esprime l'intensità di accoppiamento critica  $K_c$  necessaria per la sincronizzazione.

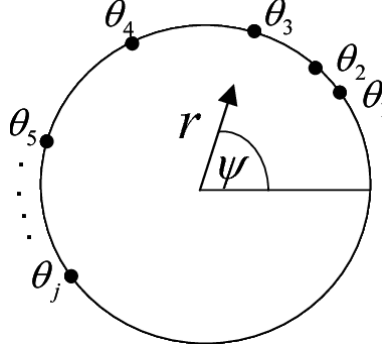
### 3.3 Ricerca del valore di Accoppiamento Critico

#### 3.3.1 Parametri di Campo Medio

Il primo step da intraprendere per ricavare la soluzione esatta per l'accoppiamento critico è quello di riscrivere le equazioni (4) in termini del seguente parametro d'ordine:

$$r e^{i\psi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j} \quad (5)$$

Il modulo del parametro d'ordine,  $r$ , è una misura del livello di sincronizzazione del sistema, e la fase  $\psi$  esprime la fase media di tutti gli oscillatori. Si può dire che il parametro d'ordine descrive il "campo medio" del sistema. Un modo pratico di visualizzare questa idea è quello di immaginare ogni oscillatore come un punto in movimento lungo la circonferenza unitaria; in tal caso il parametro d'ordine può essere interpretato come una freccia con coda coincidente con il centro della circonferenza, come mostrato in Fig.1



**Figure 1:** rappresentazione del parametro d'ordine

Per riscrivere le equazioni (4) in termini del parametro d'ordine, basta semplicemente moltiplicare entrambi i membri dell'equazione (5) per  $e^{-i\theta_k}$ , ottenendo

$$re^{i(\psi-\theta_k)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i(\theta_j-\theta_k)} \quad k = 1, \dots, N, \quad (6)$$

le cui parti immaginarie sono

$$r \sin(\psi - \theta_k) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_k) \quad k = 1, \dots, N. \quad (7)$$

Quest'ultima può essere sostituita nell'equazione (4) in modo da ottenere le equazioni che governano il sistema in funzione del parametro d'ordine:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + Kr \sin(\psi - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (8)$$

Si nota dunque che le interazioni tra gli oscillatori possono essere descritte semplicemente dalle variabili di campo medio  $r$  e  $\psi$ . Il termine di accoppiamento esprime il fatto che la fase di ogni oscillatore viene trascinata verso la fase media dell'insieme, con una forza proporzionale al valore del modulo del parametro d'ordine. Questo metodo di approccio riduce notevolmente il livello di difficoltà dello studio del fenomeno di sincronizzazione.

### 3.3.2 Soluzioni stazionarie

L'altra semplificazione che si può attuare è quella di considerare solo stati stazionari, dove  $r(t) = r$  è indipendente dal tempo e  $\psi(t)$  ruota uniformemente ad una frequenza angolare  $\Omega$ . Dunque, si sta ponendo l'attenzione su stati del sistema per i quali ogni comportamento transiente è scomparso e il parametro d'ordine ha una lunghezza costante e ruota ad una frequenza costante. Se poi ci

si sposta nel sistema di riferimento in rotazione con la stessa frequenza  $\Omega$ , allora  $r(t)$  sarà totalmente stazionario, e si può settare  $\psi(t)$  ad un certo valore fissato, che per comodità può essere scelto come  $\psi(t) = 0$ . Nella Fig. 1 ciò corrisponde ad un vettore che non ruota lungo la circonferenza di raggio  $r$ , né modifica la sua lunghezza.

Questo insieme di condizioni porta l'equazione (8) a prendere la forma

$$\dot{\theta}_i = \omega_i - Kr \sin(\theta_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (9)$$

Da tale equazione, poiché  $\sin(\theta_i) \leq 1$ , si nota che gli oscillatori con frequenze naturali  $|\omega_i| \leq Kr$  possono avere una soluzione stazionaria  $\dot{\theta}_i = 0$ , nel caso in cui

$$\omega_i = Kr \sin(\theta_i). \quad (10)$$

Gli oscillatori in questo stato hanno tutti frequenza fissata, poiché sono stazionari nel sistema di riferimento ruotante ( $\dot{\theta}_i = 0$ ). L'angolo  $\theta_i$  in cui si fissano può essere ricavato utilizzando l'eq. (10). Gli oscillatori con frequenze naturali  $|\omega_i| \geq Kr$  non riusciranno ad avere frequenza fissata ( $\dot{\theta}_i \neq 0$ ) perciò si muoveranno lungo la circonferenza unitaria in maniera non uniforme. In termini della Fig.1, vi saranno alcuni oscillatori con posizione fissata, mentre altri saranno desincronizzati e vagheranno lungo la circonferenza.

Nonostante la presenza di questi oscillatori "vaganti", si vuole comunque assumere che  $r$  e  $\psi$  siano costanti per riuscire a ricavare le soluzioni stazionarie. Per riuscirci, si forza la distribuzione degli oscillatori lungo la circonferenza,  $\rho(\theta, \omega)$ , ad essere indipendente dal tempo, anche se alcuni oscillatori si muovono individualmente; per fare ciò, imponiamo che  $\rho$  sia inversamente proporzionale alla velocità degli oscillatori  $\dot{\theta}$ . In pratica, ciò equivale ad affermare che in una zona della circonferenza in cui ci sono meno oscillatori questi devono muoversi più velocemente, per mantenere il numero di oscillatori costante in quell'area. Pertanto definiamo la densità degli oscillatori come segue:

$$\rho(\theta, \omega) = \frac{C}{|\dot{\theta}|} = \frac{C}{|\omega - Kr \sin(\theta)|}, \quad (11)$$

dove  $\rho(\theta, \omega)d\theta$  indica la frazione di oscillatori con frequenza angolare  $\omega$  che si trovano nell'intervallo  $[\theta, \theta + d\theta]$ .  $C$  è una costante che può essere fissata tramite la normalizzazione:

$$1 = \int_{-\pi}^{\pi} \rho(\theta, \omega) d\theta = C \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{|\omega - Kr \sin(\theta)|} \quad (12)$$

che risolvendo restituisce:

$$C = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\omega^2 - (Kr)^2}. \quad (13)$$

### 3.3.3 Risoluzione per il parametro d'ordine e $K_c$

Nel corso del paragrafo precedente, sono stati identificati due distinti gruppi di oscillatori: quelli a frequenza fissata ed altri con frequenza variabile; ciò



significa che possiamo risolvere l'eq. (5) per ricavare il parametro d'ordine, dividendo la sommatoria in due parti;  $r$  dovrà cioè essere uguale alla somma del parametro d'ordine medio degli oscillatori a frequenza fissata e del parametro d'ordine medio di quelli vaganti. Inoltre, visto che ci siamo posti nel sistema di riferimento ruotante,  $\psi = 0$  e dunque si avrà  $re^{i\psi} = re^0 = r$ . Otterremo quindi:

$$r = \langle e^{i\theta} \rangle_{lock} + \langle e^{i\theta} \rangle_{drift}, \quad (14)$$

dove i pedici *lock* e *drift* stanno rispettivamente ad indicare gli oscillatori "locked" (bloccati) e "drifting" (vaganti). È necessario ovviamente specificare la metodologia del processo di media che è stato espresso cui sopra; cominciando con il secondo termine, la media  $\langle e^{i\theta} \rangle_{drift}$  è espressa dall'integrale della distribuzione  $\rho(\theta, \omega)$  sull'intera circonferenza, per tutti gli oscillatori che non hanno frequenza fissata ( $|\omega| > Kr$ ), moltiplicata per il contributo  $e^{i\theta}$  al parametro d'ordine:

$$\langle e^{i\theta} \rangle_{drift} = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{|\omega| > Kr} e^{i\theta} \rho(\theta, \omega) g(\omega) d\omega d\theta \quad (15)$$

Notando che nell'equazione (11)  $\rho(\theta + \pi, -\omega) = \rho(\theta, \omega)$  e ricordando che  $g$  è definita in modo che  $g(-\omega) = g(\omega)$ , si evince che tali simmetrie portano i contributi positivi dell'integrale ad elidersi con quelli negativi in modo da ottenere

$$\langle e^{i\theta} \rangle_{drift} = 0. \quad (16)$$

Dunque sono solo gli oscillatori "bloccati" a contribuire al parametro d'ordine, un risultato plausibile poiché non vi è un valore di  $\theta$  più probabile per gli oscillatori "vaganti", né una direzione di rotazione preferenziale.

Ora ci rimane soltanto da esplicitare il contributo degli oscillatori con frequenza fissata; innanzitutto, sappiamo dall'equazione (10) che  $\sin(\theta_i) = \omega_i/Kr$ . Inoltre, visto che  $g(\omega)$  è centrata in 0 ed è pari, le fasi  $\theta_i$  degli oscillatori saranno altrettanto centrate simmetricamente in 0, per cui  $\langle \sin \theta \rangle_{lock} = 0$ . Pertanto rimane solo la parte cosinusoidale dell'esponenziale complesso, e si ha:

$$r = \langle e^{i\theta} \rangle_{lock} = \langle \cos \theta \rangle_{lock} = \int_{-Kr}^{Kr} \cos[\theta(\omega)] g(\omega) d\omega, \quad (17)$$

dove  $\theta(\omega)$  è definita dall'equazione (10). Quindi utilizziamo l'eq. (10) per cambiare variabile da  $\omega$  a  $\theta$ :

$$r = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta g(Kr \sin \theta) Kr \cos \theta d\theta = Kr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta g(Kr \sin \theta) d\theta \quad (18)$$

Questa equazione definisce soluzioni che soddisfano la nostra condizione iniziale di  $r$  costante.

In particolare,  $r = 0$  è sempre una soluzione. Questo è lo stato di completa incoerenza, in cui non vi è alcuna sincronizzazione. Risolvendo per la distribuzione utilizzando l'eq. (11) otteniamo  $\rho(\theta, \omega) = \frac{1}{2\pi}$ , una costante, che sta ad indicare che c'è la stessa probabilità di trovare un oscillatore in qualsiasi punto della circonferenza.

Le soluzioni corrispondenti a valori non nulli di  $r$  sono stati in cui vi è un insieme non nullo di oscillatori che hanno frequenza totalmente fissata, ma (per  $r < 1$ ) solo una parte di essi ha fase fissata. Dividendo l'eq. (18) per  $r$ , questi stati sono soluzione a:

$$1 = K \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta g(Kr \sin \theta) d\theta. \quad (19)$$

Se poniamo  $r \rightarrow 0^+$ , troviamo il punto critico  $K_c$  per cui il parametro d'ordine di sposta dallo zero. Facendo ciò, l'eq. (19) diventa:

$$1 = K_c \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta g(0) d\theta = K_c g(0) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta = K_c g(0) \frac{\pi}{2}. \quad (20)$$

Finalmente, risolvendo per  $K_c$  otteniamo

$$K_c = \frac{2}{\pi g(0)}. \quad (21)$$

Abbiamo ottenuto ciò che cercavamo:  $K_c$  è il valore di accoppiamento critico necessario a produrre una parziale sincronizzazione delle fasi del sistema.

### 3.3.4 La crescita del parametro d'ordine

Ora che sappiamo come  $r$  inizia a crescere dallo zero, ci si può interessare della crescita di  $r$  con l'aumento del valore dell'accoppiamento, ossia per  $K > K_c$ . Per farlo, si può espandere nell'eq.(19)  $g(Kr \sin \theta)$  in un intorno di  $r \sim 0$ , e poi risolvere per  $r$ . Tramite questo procedimento si può ottenere, con alcuni passaggi matematici,

$$r = \sqrt{\frac{-16}{\pi g''(0) K_c^4}} (K - K_c)^{\frac{1}{2}}. \quad (22)$$

Questo è quanto di più accurato si può ricavare a meno che non si conosca l'esatta forma di  $g(\omega)$ ; anche in tale situazione comunque, nella maggior parte dei casi, è impossibile risolvere esplicitamente per  $r(K)$ .

Kuramoto, comunque, riuscì a trovare un caso particolare per il quale una soluzione esplicita è possibile; infatti, sostituendo nell'eq. (19) una densità lorentziana definita da

$$g^*(\omega) = \frac{\gamma}{\pi(\gamma^2 + \omega^2)}, \quad (23)$$

dove  $\gamma$  è una costante che definisce l'ampiezza della distribuzione, si ottiene un integrale risolvibile analiticamente, ottenendo come risultato finale:

$$r = \sqrt{1 - \frac{K_c}{K}}. \quad (24)$$

[1] [2] [3] [4]

## 4 Simulazione numerica

Per simulare il comportamento di un sistema composto da un dato numero di oscillatori è stata creata una libreria in C++. In particolare questa consente di creare *sciame* ("Swarm") di un certo numero di oscillatori con frequenze naturali  $\Omega$ , generate secondo una certa distribuzione (tra cui lorentziana e gaussiana), calcolare  $K_c$  e salvare i dati con cui graficare  $r(t)$  (per  $K$  fissato) e  $r(K)$ . Inoltre, grazie alla libreria grafica SFML<sup>[5]</sup>, consente di visualizzare gli oscillatori sia come punti su un piano complesso, sia come lucciole che pulsano quando la fase  $\theta = 0$ .

L'intera libreria è pubblicata in GitHub al seguente url: <https://github.com/sistemicomplexi/Kuramoto>

### 4.1 Obiettivi della simulazione

#### 4.1.1 Grafico $r(t)$ e $r(K)$

L'obiettivo principale della simulazione è ricavare il valore di  $K_c$  e misurare il grado di corrispondenza della funzione  $r(K)$  con il modello teorico dell'eq. (24). Come valore di  $r$  si è considerata la media sugli ultimi 1000 step temporali su una simulazione di 5000 step.

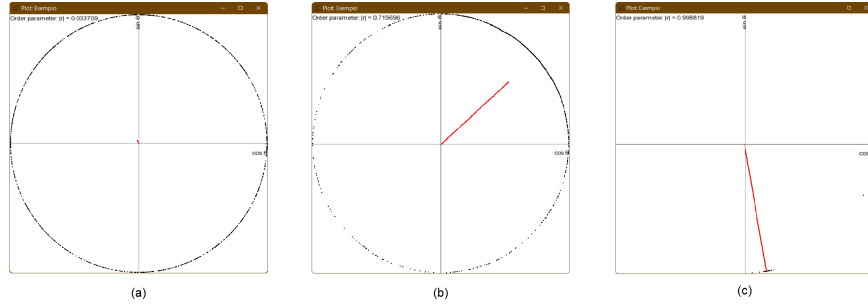
La simulazione permette inoltre di salvare la variazione di  $r$  nel tempo (per ogni  $K$  fissato), così da creare vari grafici di  $r_K(t)$ .

#### 4.1.2 Oscillatori come fasori nel piano complesso

Come citato nella sezione 3.3.1, un altro grafico che può risultare utile nella comprensione del fenomeno di sincronizzazione è quello in cui gli oscillatori sono rappresentati come fasori in rotazione sulla circonferenza unitaria e il parametro d'ordine come un vettore con coda sull'origine degli assi. Quando gli oscillatori sono desincronizzati (Figura 2a), appaiono sparsi lungo la circonferenza e il modulo del parametro d'ordine è circa nullo, mentre quando iniziano a sincronizzarsi tendono a raggrupparsi in cluster, (Figura 2b), fino al caso limite in cui sono totalmente sincronizzati e  $r \sim 1$  (Figura 2c).

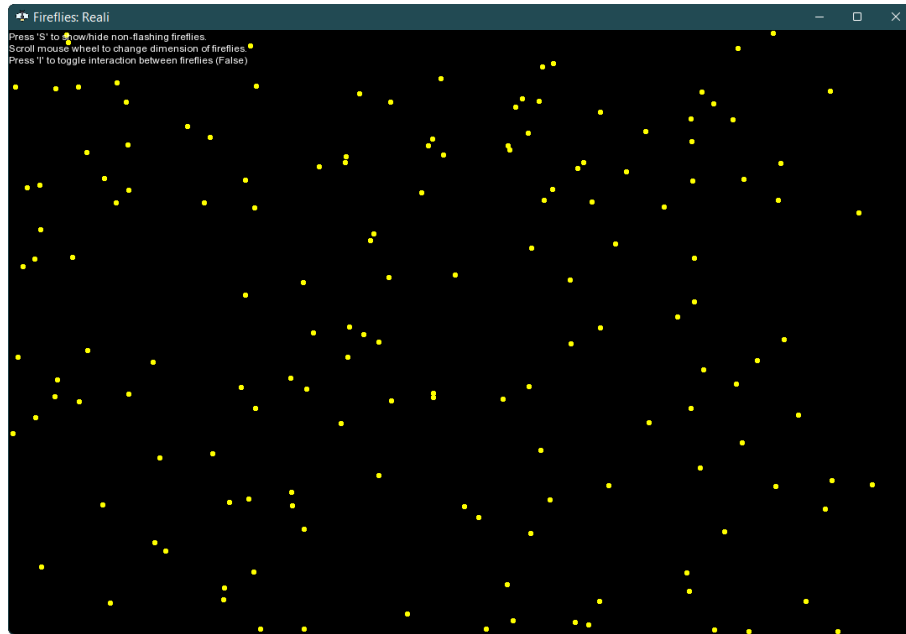
#### 4.1.3 Oscillatori come lucciole nel piano

Gli oscillatori possono essere rappresentati anche come lucciole che pulsano quando la fase  $\theta = 0$ . In questo modo si può capire intuitivamente come avviene



**Figure 2:** rappresentazione degli oscillatori distribuiti sulla circonferenza unitaria e del parametro d'ordine (linea rossa). Da sinistra a destra si possono vedere *sciame* sempre più sincronizzati.

la sincronizzazione tramite questo modello. Inoltre il comportamento delle lucciole simulate (Figura 3) è molto simile a quello di veri sciame, come quelli visibili in questo video <https://www.youtube.com/watch?v=ZGvtnE1Wy6U>[6].



**Figure 3:** Rappresentazione degli oscillatori come lucciole su un piano

## 4.2 Discretizzazione dello spazio e del tempo

Nelle simulazioni il tempo è discretizzato e le equazioni differenziali del modello per la dinamica dei singoli oscillatori ( $\dot{\theta} = \omega$ ) e per l'interazione tra di essi (4), diventano rispettivamente:

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega dt \quad d\theta_i = \left( \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i) \right) dt \quad (25)$$

che tradotte in C++ sono due funzioni membro della classe Oscillator (*update* e *interact*)

```
void update(double dt) {
    m_theta += m_omega*2*M_PI *dt;
}

void interact(Swarm& system, double dt) {
    double sum = 0;
    int n = system.size();
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        sum += std::sin(system[i].theta() - m_theta)
    }
    m_theta += (m_omega + K/n*sum) *dt;
}
```

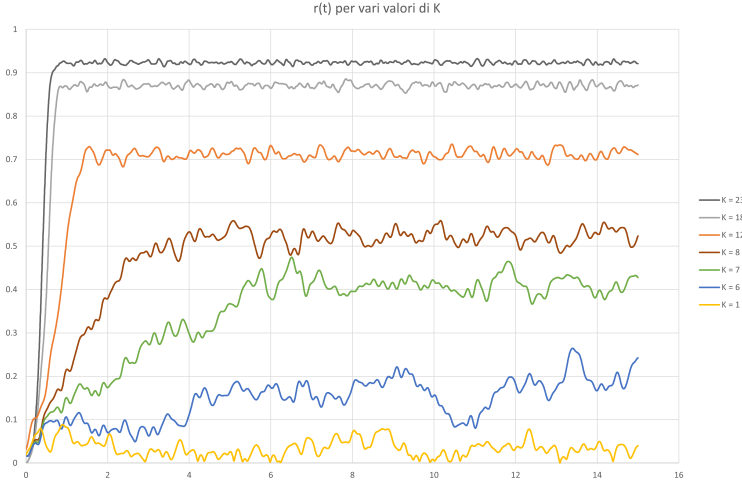
L'utente può decidere in che modo viene scelto il parametro  $dt$ :

- Di default il suo valore è pari al tempo trascorso dall'ultima iterazione, cioè il tempo impiegato dal processore per eseguire il calcolo delle due funzioni sopracitate. Ciò fa sì che la frequenza con cui si vede pulsare un oscillatore sia effettivamente la sua frequenza naturale, a scapito però di una discretizzazione del tempo non esattamente uniforme nel tempo e tra diversi processori.
- Alternativamente, quando una visualizzazione grafica fedele al vero non è importante,  $dt$  può assumere un valore fisso arbitrariamente piccolo, così da avere un buon accordo con le equazioni differenziali.

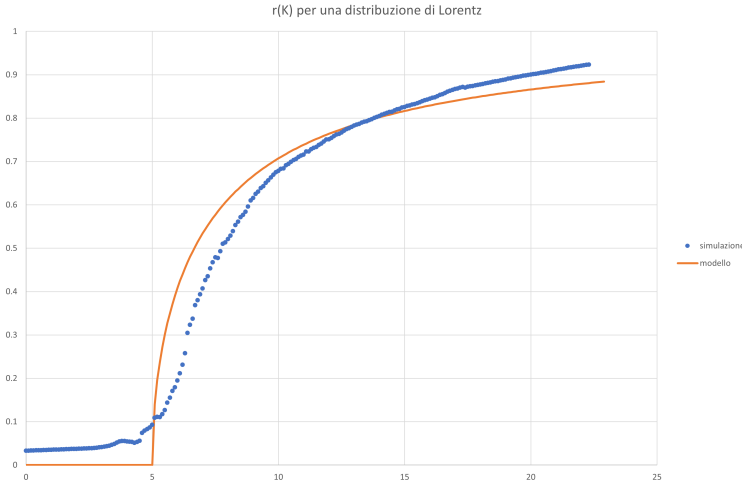
Per quanto riguarda lo spazio, la sua discretizzazione in pixel non influenza affatto il modello, che prevede un'interazione globale.

## 4.3 Risultati

E' stata svolta una simulazione con 1000 oscillatori con frequenza naturale distribuita secondo la lorentziana definita nell'eq. (23) con  $\gamma = 0.5$ , ottenendo vari grafici  $r_K(t)$  (Figura 4) e il grafico  $r(K)$ . In Figura 5 è possibile vedere anche la corrispondenza di quest'ultimo con quello ottenuto dall'eq (24).



**Figure 4:** Vari grafici di  $r(t)$  al variare di  $K$  in una simulazione di 1000 oscillatori con frequenza naturale distribuita secondo una distribuzione di Lorentz con  $\gamma = 0.5$

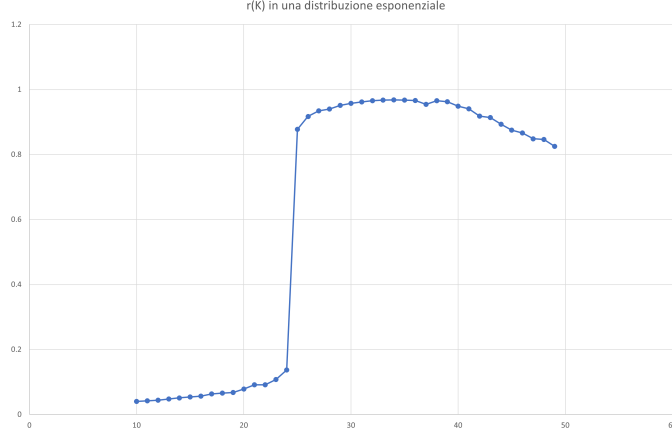


**Figure 5:** Grafico di  $r(K)$  per una distribuzione lorentziana delle frequenze naturali e  $K_C = 5$ . In arancione l'andamento teorico ricavato dalla eq. 24, in blu i dati della simulazione con 1000 oscillatori. Il valore di  $r$  per ogni  $K$  è stato stimato considerando la media sugli ultimi 1000 step temporali su una simulazione di 5000.

#### 4.4 Potenzialità

La libreria permette di osservare e commentare anche risultati per cui una precisa formulazione analitica non è possibile; si può ad esempio notare in Figura 6 come la scelta di distribuzioni asimmetriche per le frequenze naturali (come una

esponenziale della forma  $e^{-\omega/\Omega}$ , con  $\Omega$  frequenza media del sistema) comporti una discontinuità nel grafico  $r(K)$ , ovvero una netta divisione tra i valori di  $K$  con cui lo sciame si sincronizza e quelli per cui non ci riesce, in accordo con altre pubblicazioni in cui sono state studiate  $g(\omega)$  asimmetriche<sup>[7]</sup>.



**Figure 6:** Grafico di  $r(K)$  per una distribuzione di frequenze naturali asimmetrica ( $f(\omega) = e^{-\omega/\Omega}$ ). Si può notare come il grafico abbia una netta discontinuità.

## References

- [1] Steven H. Strogatz. From kuramoto to crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 143(1):1–20, 2000. ISSN 0167-2789. doi: [https://doi.org/10.1016/S0167-2789\(00\)00094-4](https://doi.org/10.1016/S0167-2789(00)00094-4). URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167278900000944>.
- [2] Lasko Basnarkov and Viktor Urumov. Kuramoto model with asymmetric distribution of natural frequencies. *Phys. Rev. E*, 78:011113, Jul 2008. doi: 10.1103/PhysRevE.78.011113. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.78.011113>.
- [3] Bryan C Daniels. Synchronization of globally coupled nonlinear oscillators: the rich behavior of the kuramoto model. *Ohio Wesleyan Physics Dept., Essay*, 7(2):20, 2005.
- [4] Gonzalo Marcelo Ramírez Ávila, J. Kurths, and J. L. Deneubourg. *Fireflies: A paradigm in synchronization*, pages 35–64. Number 9783319681085 in Understanding Complex Systems. Springer Verlag, Alemania, 9783319681085 edition, 2018. doi: \$10.1007/978-3-319-68109-2\_3\$. Publisher Copyright: © 2018, Springer International Publishing AG.

- [5] Sfml. simple and fast multimedia library. <https://www.sfml-dev.org/>. Version 2.5.1.
- [6] Synchronicity, synchronizing fireflies. <https://www.youtube.com/watch?v=ZGvtnE1Wy6U>. Experiment in the mangrove forests of Thailand. Thousands of live fireflies are made to synchronize their flashes with a few computer controlled LED's.
- [7] Yu Terada, Keigo Ito, Toshio Aoyagi, and Yoshiyuki Y Yamaguchi. Non-standard transitions in the kuramoto model: a role of asymmetry in natural frequency distributions. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2017(1):013403, jan 2017. doi: 10.1088/1742-5468/aa53f6. URL <https://doi.org/10.1088/1742-5468/aa53f6>.