Comp Math 2

puchkovki

27 апреля 2020 г.

Погрешности

Оценим теоретическое влияние погрешности коэффициентов матрицы 2x2 на детерминант матрицы. Пусть a, b, c, d - коэффициенты данной матрицы, а γ — их погрешность. Тогда:

$$\begin{vmatrix} a+\gamma & b+\gamma \\ c+\gamma & d+\gamma \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad + (a+d)\gamma + \gamma^2 - cb - (b+c)\gamma - \gamma^2 - ad + cb = (a+d-c-b)\gamma$$

Оценка погрешности при переходе между сетками с шагами $2 \cdot 10^{-4}$ и $2 \cdot 10^{-5}$ соответственно в точке $(-0.5, -0.5)$

Для оценки ошибки на нескольких сетках использовать экстраполяцию Ричардсона. Основная идея: если производная $f'_h(x)$ вычисляется по формуле с порядком аппроксимации p, то справедлива формула:

$$f'_h(x) = f'(x) + C_1 \cdot h^p$$

с некоторой величиной C_1. При вычисленни производной с шагом $\frac{h}{10}$ можно записать аналогичное соотношение

$$f'_{\frac{h}{10}}(x) = f'(x) + C_2 \cdot \left(\frac{h}{10}\right)^p$$

с некоторой величиной C_2. Пологая $C_1 = C_2 = C$ и решая систему, получаем:

$$C \cdot h^p = \frac{f'_h(x) - f'_{\frac{h}{10}}(x)}{1 - 10^{-p}},$$

откуда получаем абсолютную погрешность.

$$f''_{xx_h} = \frac{f(x+h,y) + f(x-h,y) - 2 \cdot f(x,y)}{4 \cdot h^2} =$$

$$\frac{f(x,y) + h \cdot f'_x + \frac{h^2}{2} \cdot f''_{xx} + C_1 \cdot h^3 + f(x,y) - h \cdot f'_x + \frac{h^2}{2} \cdot f''_{xx} + C_2 \cdot h^3 - 2 \cdot f(x,y)}{4 \cdot h^2} =$$

$$f''_{xx} + C \cdot h$$

Следовательно, порядок аппроксимации p равен 1. Аналогично для f''_{yy}.

$$f''_{xy_h} = \frac{f(x+h,y+h) - f(x+h,y-h) + f(x-h,y-h) - f(x-h,y+h)}{4 \cdot h^2} =$$

$$\frac{f(x,y) + h \cdot f'_x + h \cdot f'_y + \frac{h^2}{2} \cdot f''_{xx} + \frac{h^2}{2} \cdot f''_{yy} + h^2 \cdot f''_{xy} + C_1 \cdot h^3}{4 \cdot h^2} -$$

$$-\frac{(f(x,y) + h \cdot f'_x - h \cdot f'_y + \frac{h^2}{2} \cdot f''_{xx} + \frac{h^2}{2} \cdot f''_{yy} - h^2 \cdot f''_{xy} + C_2 \cdot h^3)}{4 \cdot h^2} +$$

$$+\frac{f(x,y) - h \cdot f'_x - h \cdot f'_y + \frac{h^2}{2} \cdot f''_{xx} + \frac{h^2}{2} \cdot f''_{yy} + h^2 \cdot f''_{xy} + C_3 \cdot h^3)}{4 \cdot h^2} -$$

$$-\frac{(f(x,y) - h \cdot f'_x + h \cdot f'_y + \frac{h^2}{2} \cdot f''_{xx} + \frac{h^2}{2} \cdot f''_{yy} - h^2 \cdot f''_{xy} + C_4 \cdot h^3)}{4 \cdot h^2} = f''_{xy} + C \cdot h$$

- $xx : C \cdot h = \frac{10}{9} \cdot (0.2203932716 - 0.2203932696) = \frac{10}{9} \cdot 2 \cdot 10^{-9} = \frac{20}{9} \cdot 10^{-9} = \gamma$
- $yy : C \cdot h = \frac{10}{9} \cdot (0.2203932716 - 0.2203932696) = \frac{10}{9} \cdot 2 \cdot 10^{-9} = \frac{20}{9} \cdot 10^{-9} = \gamma$
- $xy : C \cdot h = \frac{10}{9} \cdot (1.537096842 - 1.53709686) = \frac{10}{9} \cdot -18 \cdot 10^{-9} = -2 \cdot 10^{-8} = \alpha$

$\begin{vmatrix} a+\gamma & c+\alpha \\ c+\alpha & b+\gamma \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & c \\ c & d \end{vmatrix} = (a+b) \cdot \gamma - 2 \cdot \alpha \cdot c + \gamma^2 - \alpha^2 = (0.2203932696 + 0.2203932696) \cdot \frac{20}{9} \cdot 10^{-9} - 2 \cdot 1,53709686 \cdot (-2) \cdot 10^{-8} + (\frac{20}{9} \cdot 10^{-9})^2 - ((-2) \cdot 10^{-8})^2 = 0.98 \cdot 10^{-9} + 61.48 \cdot 10^{-9} = 62,5 \cdot 10^{-9}$