

Anna Chojnacka, 65514 (budowa modelu)  
Michał Puchalski, 67827 (analiza wrażliwości)  
Paweł Sadłowski, 68404 (edycja raportu)



**Szkoła Główna  
Handlowa  
w Warszawie**

## Zaawansowane Modelowanie Symulacyjne [234060-0723]

### PiTU S.A. Symulacja portfela ubezpieczeń komunikacyjnych

Warszawa, 1.04.2018

#### **Streszczenie**

Przedmiotem raportu jest ryzyko niewypłacalności związane z portfelem ubezpieczeń komunikacyjnych. Przy wyjściowym poziomie składki równym 500 PLN oszacowane prawdopodobieństwo bankructwa wynosi 0.627, zdecydowanie przekraczając akceptowalny poziom. Na podstawie wyników symulacji rekomendujemy ustalenie składki w wysokości 1500 PLN, która przy nadwyżce początkowej równej 10 000 PLN zapewnia prawdopodobieństwo niewypłacalności nieprzekraczające 1%. Wnioski pozostają w znacznej mierze niezmienione nawet w przypadku wahania przeciętnej liczby zgłaszanych szkód o  $\pm 5\%$ . Wyniki są również stabilne z uwagi na liczbę iteracji modelu.

#### **1. Opis organizacji**

PiTU S.A. to zakład ubezpieczeń specjalizujący się w ubezpieczeniach komunikacyjnych. Jego aktywność jest skoncentrowana w Bryczkolandii. Firma

Tabela 1. Rozkład szkód zgłaszanych przez Dżydżyków

Liczba szkód		Wysokość szkody	
0	3 437	100	0
1	522	200	2
2	40	500	27
3	2	1 000	52
4	0	2 000	115
5	0	5 000	203
		10 000	106
		20 000	42
		40 000	14
		50 000	0
		55 000	0
		60 000	1

należy do liderów silnie skoncentrowanego rynku, jej ubiegłoroczne przychody wyniosły niespełna 243 tys. PLN. Najsilniejszą presję konkurencyjną wywiera lokalny zakład ubezpieczeń z dużym udziałem własnościowym skarbu państwa oraz trzy mniejsze filie korporacji zagranicznych.

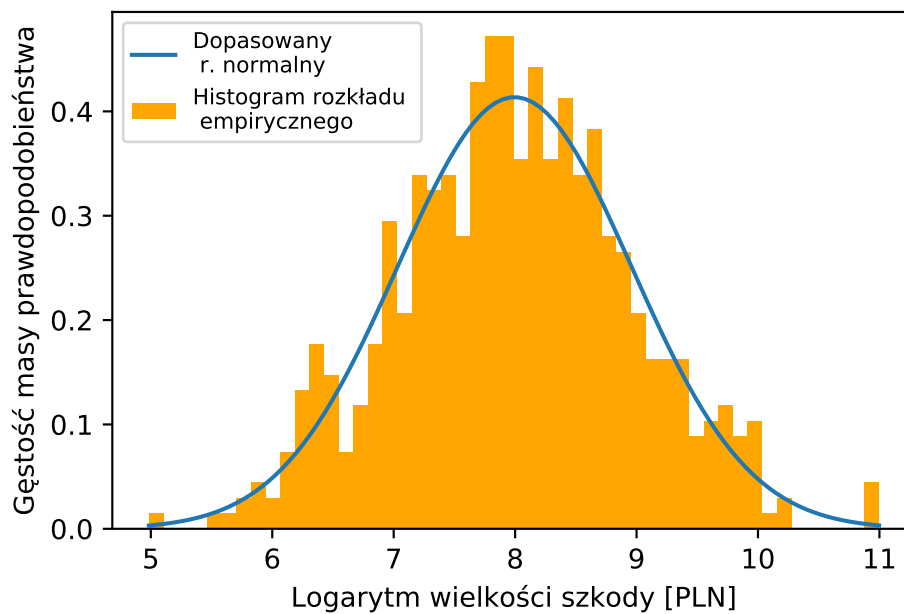
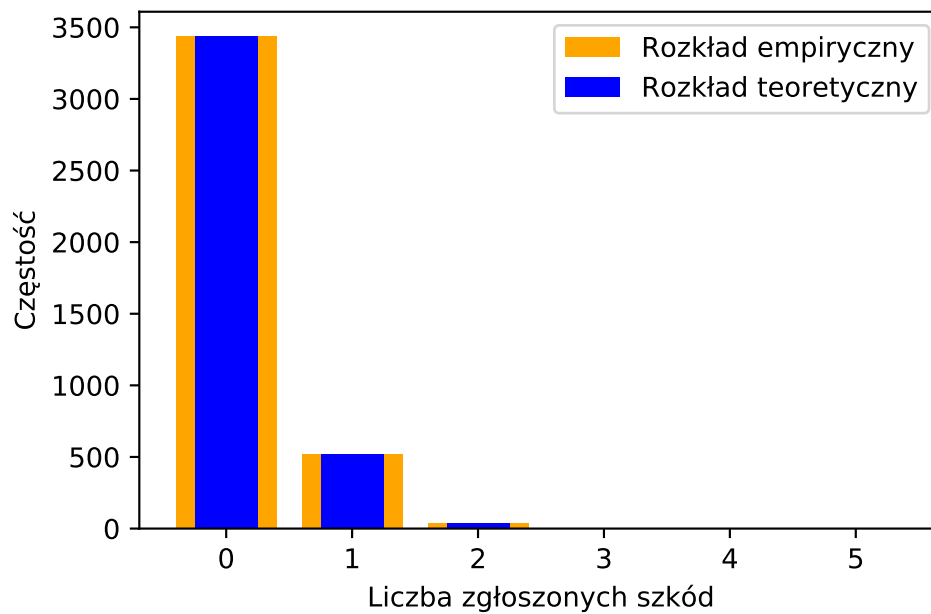
## 2. Opis problemu

Kraj, w którym PiTU S.A. prowadzi swoją działalność, notuje rosnącą imigrację z sąsiedniego Dżydżykistanu. Z uwagi na naturalnie wyższą skłonność do zachowań ryzykownych u przedstawicieli tej narodowości firma spodziewa się wzrostu szkodowości, w związku z czym przewiduje konieczność podniesienia składki. Celem przeprowadzonej symulacji jest wyznaczenie odpowiedniej wysokości składki zabezpieczającej towarzystwo ubezpieczeniowe przed niewypłacalnością. Zakres analizy obejmuje także ocenę wrażliwości nadwyżki końcowej oraz prawdopodobieństwa niewypłacalności na wysokość nadwyżki początkowej oraz pobieranej składki.

### 2.1. Szczegółowy scenariusz symulacji

Firma PiTU S.A. dysponuje historycznymi danymi dotyczącymi liczby oraz wielkości szkód zgłaszanych przez klientów dżydżyckiej narodowości ([2]). Przekazane informacje zostały ujęte w tabeli 1. Prezes zarządu spodziewa się portfela liczącego ok. 100 polis, a bieżąca nadwyżka wynosi 10 000 PLN. Dział Aktuarialny PiTU S.A. rekomenduje przybliżanie liczby szkód przez rozkład Poissona, a ich wysokości przez rozkład log-normalny. Przedstawione dane nie dają podstaw do odrzucenia tych założeń — do ich weryfikacji zastosowano odpowiednio: test  $\chi^2$  oraz test Kołmogorowa-Smirnowa. W obu przypadkach p-value znacznie przekraczało 0.9, więc zgodnie z literaturą przedmiotu ([3]) wykorzystanie w procesie modelowania wymienionych rozkładów można uznać za uzasadnione. Horyzont czasowy analizy został ustalony na dwa lata.

Rysunek 1. Rozkład liczby szkód oraz wysokości szkody



## 2.2. Struktura modelu

Zgodnie z terminologią zastosowaną przez Averilla Lawa ([1]) zastosowany model jest przykładem symulacji zdarzeń dyskretnych (discrete-event simulation). Modelowanym zjawiskiem jest wielkość nadwyżki w dyspozycji zakładu ubezpieczeniowego w poszczególnych dniach. W każdej iteracji symulacji ustalona liczba klientów (100) wykupuje polisę ubezpieczeniową w trakcie pierwszego roku. Dla każdego z klientów data zawarcia umowy jest losowana z rozkładu jednostajnego (dyskretnego). Następnie dla każdego klienta losowane są: liczba szkód (z rozkładu Poissona), a także data wystąpienia (ponownie z dyskretnego rozkładu jednostajnego) oraz wysokość każdej z nich (rozkład log-normalny) — o ile wystąpią. Wszystkie wymienione zmienne losowane są niezależnie od pozostałych. Ostatecznie stan nadwyżki jest obliczany na każdy kolejny dzień w horyzoncie czasowym symulacji, z uwzględnieniem wpływów ze składek oraz wydatków na pokrycie szkód. W przypadku gdy dowolnego dnia suma szkód przekracza wartość dostępnej nadwyżki, dochodzi do niewypłacalności. W przeciwnym razie model zwraca stan nadwyżki na koniec okresu symulacji.

## 3. Wyniki analizy

Przedstawione w dalszej części wyniki oraz wnioski są oparte na rezultatach symulacji, w której każdy zestaw parametrów był podstawą 1000 iteracji modelu. W następnym kroku rezultaty zostały zagregowane dla poszczególnych wartości parametrów.

### 3.1. Wysokość składki a prawdopodobieństwo bankructwa

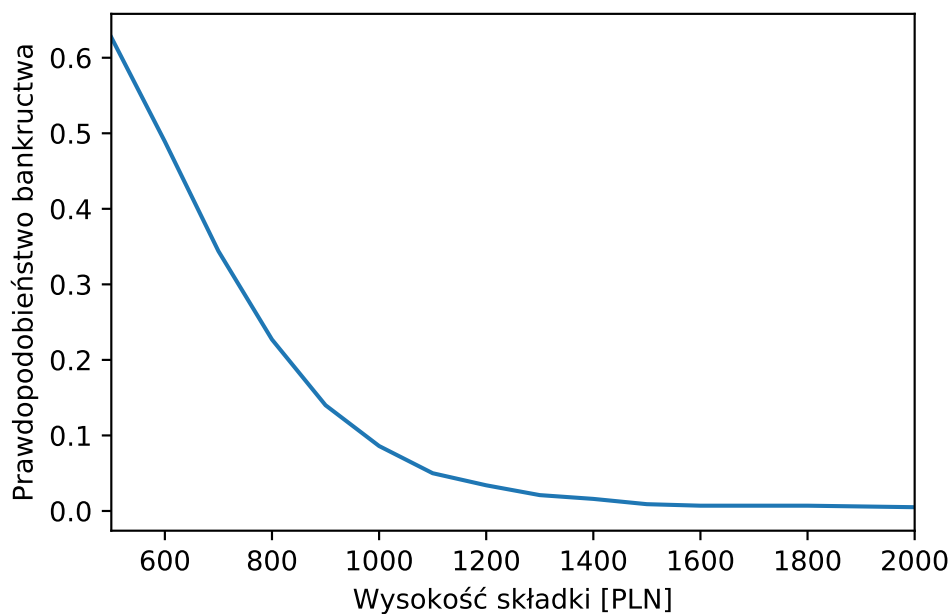
Wyniki analizy jednoznacznie wskazują, że składka w wysokości 500 PLN nie pokrywa ryzyka wystąpienia szkód w wystarczającym stopniu — prawdopodobieństwo niewypłacalności wyniosło 0.627.

Wykres 2 ilustruje zależność pomiędzy wysokością składki a prawdopodobieństwem bankructwa. Krzywa ma kształt hiperboliczny, co oznacza, że podnoszenie składki poprawia perspektywy zakładu ubezpieczeniowego w coraz mniejszym stopniu. Wybór optymalnej wysokości składki powinien zatem równoważyć niskie prawdopodobieństwo bankructwa oraz niski poziom składki, tak aby zniechęceni klienci nie zdecydowali się na konkurencyjną ofertę. Punkt załamania krzywej znajduje się w okolicach składki wynoszącej 1000 PLN. Prawdopodobieństwo niewypłacalności wynosi wówczas niespełna 10%, a co za tym idzie — wciąż jest duże. Najmniejszą wysokością składki, dla której nie przekracza ono poziomu 1% jest 1500 PLN. Wysokość składki, dla której prawdopodobieństwo bankructwa nie przekracza 1%, w zależności od nadwyżki początkowej można prześledzić na wykresie 3.

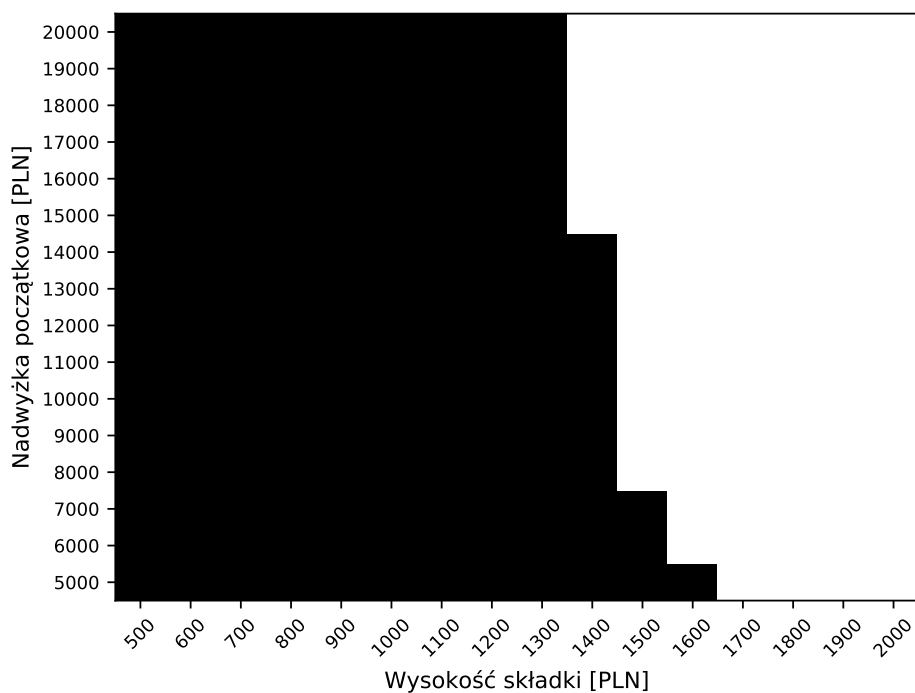
### 3.2. Wpływ nadwyżki początkowej na prawdopodobieństwo bankructwa

Drugim parametrem, który wpływa na szanse utrzymania się przez przedsiębiorstwo na rynku jest wysokość nadwyżki początkowej. Ze swojej natury

Rysunek 2. Prawdopodobieństwo bankructwa dla poszczególnych wysokości składki

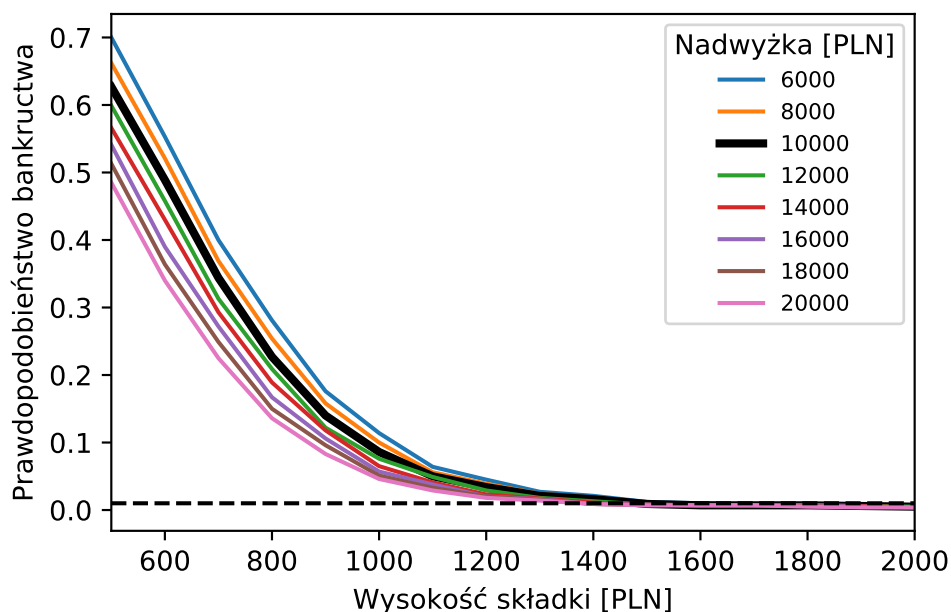


Rysunek 3. Prawdopodobieństwo bankructwa nieprzekraczające 1%



Białymi polami oznaczono kombinacje parametrów, dla których prawdopodobieństwo niewypłacalności nie przekroczyło 0.01.

Rysunek 4. Porównanie prawdopodobieństw bankructwa dla różnych poziomów nadwyżki początkowej



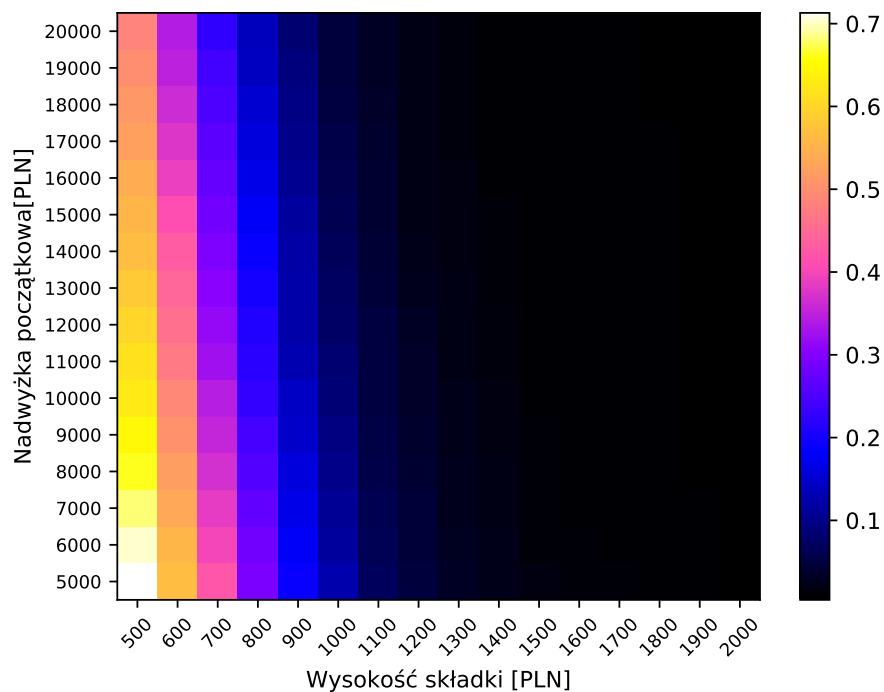
jest to wielkość, którą znacznie trudniej kontrolować (jej podniesienie wymagałoby najprawdopodobniej pozyskania przez PiTU S.A. dodatkowego finansowania), a przy tym uzyskane efekty będą miały charakter tymczasowy — będą w stanie uchronić firmę przed upadłością, ale nie przyczynią się do trwałego wzrostu rentowności portfela.

Wykres 4 obrazuje tę tendencję — wpływ nadwyżki znacząco maleje wraz ze wzrostem rentowności portfela. Analogiczne wnioski płyną z analizy mapy cieplnej (rysunek 5), na której zilustrowano prawdopodobieństwo bankructwa w zależności od nadwyżki początkowej oraz składki — wyraźnie widać, że znacznie szybciej maleje ono wraz ze wzrostem drugiej z tych wielkości. Z tego powodu priorytetem powinno pozostać ustalenie składki na poziomie gwarantującym długoterminową rentowność portfela polis ubezpieczeniowych.

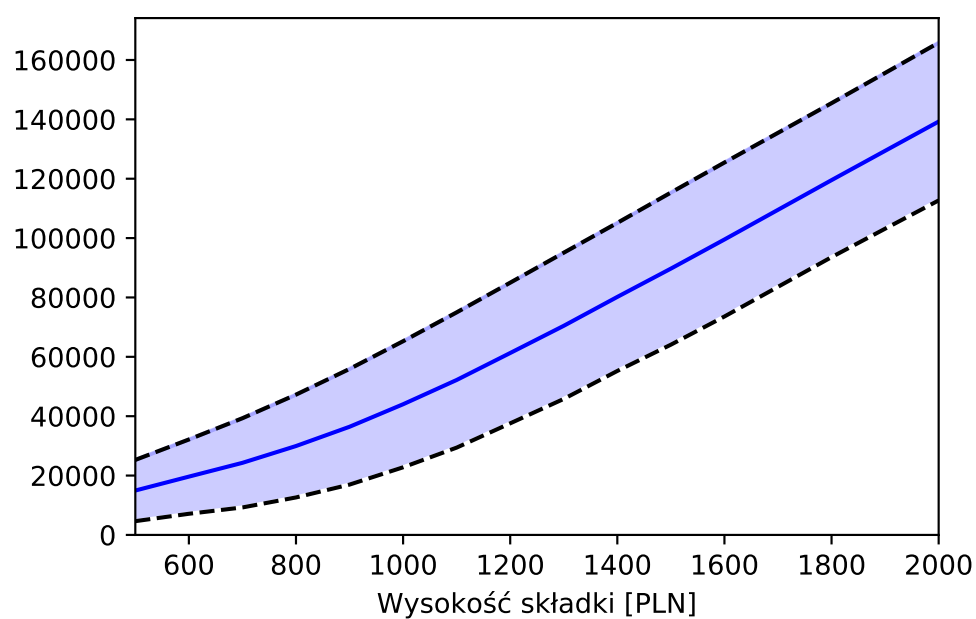
### 3.3. Wysokość nadwyżki końcowej

Warto zaznaczyć, że w pozytywnych scenariuszach (tj. gdy firma unika niewypłacalności) nadwyżka końcowa w większości przypadków przekracza nadwyżkę początkową. Jak widać na wykresie 6 nawet dla składki wynoszącej 500 PLN PiTU S.A. mogłoby oczekiwać zysku na przeciętnym poziomie 4955 PLN, pod warunkiem że firmie udało się uniknąć niewypłacalności. Różnica pomiędzy średnią nadwyżką końcową a nadwyżką początkową przekracza 1 odchylenie standardowe pierwszej wielkości począwszy od składki równej 800 PLN, zaś próg dwóch odchyłeń standardowych jest osiągany dla składki równej 1200 PLN. Przy składce ustalonej na rekomendowanym poziomie 1500 PLN spodziewana nadwyżka końcowa wynosi 89711.37 PLN, a jej odchylenie standardowe — 25617.60 PLN.

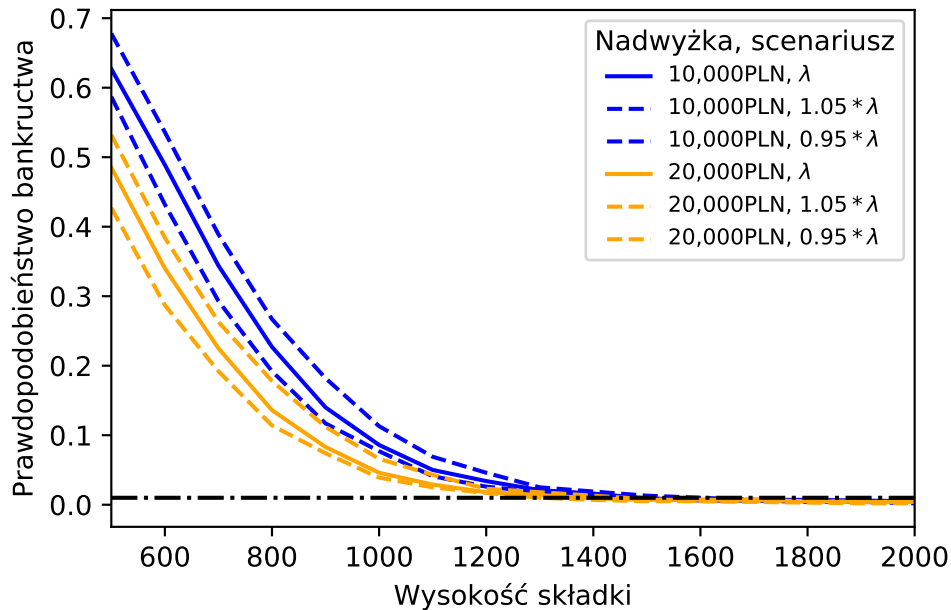
Rysunek 5. Prawdopodobieństwo bankructwa w zależności od nadwyżki początkowej i składki



Rysunek 6. Przeciętna nadwyżka końcowa w scenariuszach pozytywnych dla różnych poziomów składki



Rysunek 7. Wrażliwość prawdopodobieństwa bankructwa dla różnych wysokości składki na zmianę średniej liczby szkód



## 4. Analiza wrażliwości

Wyniki symulacji zostały przeanalizowane pod kątem wrażliwości na dwa parametry: oczekiwaną liczbę szkód zgłaszanych przez pojedynczego klienta oraz liczbę iteracji modelu, na podstawie której opracowane zostały wyniki.

### 4.1. Błąd oszacowania szkodowości

Naturalizacja dużej grupy obywateli Dżydżykistanu może spowodować zmianę charakterystyk populacji — nowi klienci mogą okazać się grupą bardziej lub mniej ryzykowną od dotychczasowych, przez co oszacowanie parametru  $\lambda$  w rozkładzie Poissona nie będzie w adekwatny sposób odzwierciedlało ryzyka wystąpienia szkody. Należy podejrzewać, że efekt ten będzie dotyczył raczej liczby zgłaszanych szkód niż ich wysokości. Z tego powodu przedmiotem analizy wrażliwości uczyniliśmy oszacowanie parametru  $\lambda$ , rozważając jego niedoszacowanie oraz przeszacowanie o 5%.

Wahania parametru  $\lambda$  wokół wartości oszacowanej na podstawie dostępnych danych nie prowadzą do znaczących zmian rozwiązania optymalnego. W przypadku mniejszej skłonności nowo naturalizowanych obywateli do zachowań ryzykownych ( $\lambda$  mniejsza od pierwotnie szacowanej) 1500 PLN pozostaje poziomem, dla którego prawdopodobieństwo bankructwa po raz pierwszy spada poniżej 1%. Scenariusz przeciwny powoduje, że do utrzymania ryzyka niewypłacalności na poziomie nieprzekraczającym 1% konieczne będzie ustalenie składki w wysokości 1700 PLN. Jednocześnie jednak przy wzroście nadwyżki początkowej o 8000 PLN kwota 1500 PLN okaże się w zupełności wystarczająca. Szczegółową zależność pomiędzy składką a prawdopo-



bieństwem niewypłacalności w rozważanych scenariuszach można prześledzić na wykresie 7.

#### 4.2. Liczba iteracji

Jak wspomniano wcześniej, powyższe wyniki i rekomendacje zostały przedstawione w oparciu o 1000 iteracji modelu dla każdego z rozważanych zestawów parametrów. W ramach analizy wrażliwości przeprowadziliśmy analogiczne procedury stosując 500 iteracji za pierwszym razem oraz 1500 iteracji w drugim przypadku. Wnioski pozostają w przeważającej mierze niezmiennione — w szczególności składka w wysokości 1500 PLN przy nadwyżce początkowej wynoszącej 10 000 PLN daje prawdopodobieństwo bankructwa nieprzekraczające 1%. Z uwagi na wysoką zbieżność wyników wykresy porównawcze zostały pominięte.

### 5. Wnioski i zalecenia

Na podstawie zamieszczonych powyżej analiz rekomendujemy ustalenie składki dla nowych klientów z Dżydżykistanu na poziomie 1500 PLN. W scenariuszu bazowym zapewnia ona pokrycie potencjalnych szkód z wysokim prawdopodobieństwem (niewypłacalność nastąpiła tylko w 0.9% przypadków). Zgodnie z naszymi ustaleniami to właśnie wysokość składki stanowi kluczową zmienną decyzyjną, ze względu na trudności w manipulacji oraz ograniczony wpływ nadwyżki początkowej. Wyznaczone przez nas rozwiązanie w znacznej mierze pozostaje optymalne nawet w przypadku zmiany charakterystyk populacji. Oferta PiTU S.A. jest nadal konkurencyjna w przypadku spadku szkodowości, a jej potencjalny wzrost skutkuje prawdopodobieństwem bankructwa wyższym jedynie o 0.4 p. proc. Dodatkowo warto zaznaczyć, że efekt ten może zostać zniwelowany poprzez zwiększenie składki o 200 PLN bądź pozyskanie dodatkowego finansowania (wzrost nadwyżki początkowej). Rentowność portfela polis jest wysoka — dla rekomendowanej wysokości składki nadwyżka końcowa (wyłączając przypadki bankructwa) wynosiła przeciętnie 89711.37 PLN i była o ponad 3 odchylenia standardowe większa od nadwyżki początkowej. Wnioski pozostają niezmiennione w przypadku ograniczenia liczby iteracji do 500 lub jej zwiększenia do 1500.

### Literatura

- [1] Averill M. Law, W. David Kelton, *Simulation Modeling & Analysis*, McGraw-Hill, wyd. drugie, 1991
- [2] P. Wojewnik, *Pitu case study*
- [3] Bożena Mielczarek, *Modelowanie symulacyjne w zarządzaniu. Symulacja dyskretna*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2009