AA Z20

Gabriel Budziński
254609

March 25, 2023

1 Zadanie 20

1.1 Treść

Niech S_n będzie liczbą orłów w n rzutach symetryczną monetą. Pokaż, że

a) stosując nierówność Czebyszewa mamy

$$\mathbb{P}\left(\left|S_n - \frac{n}{2}\right| \geqslant \frac{n}{4}\right) \leqslant \frac{4}{n},$$

b) stosując nierówność Chernoffa z poprzedniego zadania mamy

$$\mathbb{P}\left(\left|S_n - \frac{n}{2}\right| \geqslant \frac{n}{4}\right) \leqslant 2e^{-n/24}.$$

1.2 Rozwiązanie

Dla rzutów symetryczną monetą mamy: $X = S_n$, $p = \frac{1}{2}$, $S_n \sim Bin(n,p)$, $E(X) = \frac{n}{2}$, $Var(X) = np(1-p) = \frac{n}{4}$

1.2.1 a)

Weźmy nierówność Czebyszewa dla $\delta > 0$ oraz skończonych $E(X)$, $Var(X)$

$$\mathbb{P}\left(|X - E(X)| < \delta\right) > 1 - \frac{Var(X)}{\delta^2}$$

z tego wynika, że

$$\mathbb{P}\left(|X - E(X)| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{Var(X)}{\delta^2}$$

podstawiając do wzoru własności rzutu oraz $\delta = \frac{n}{4}$ mamy

$$\mathbb{P}\left(\left|S_n - \frac{n}{2}\right| \geqslant \frac{n}{4}\right) \leqslant \frac{\frac{n}{4}}{(\frac{n}{4})^2} = \frac{\frac{n}{4}}{\frac{n^2}{16}} = \frac{4}{n}$$

1.2.2 b)

Biorąc nierówność z zadania 19 dla $0 < \delta < 1$.

$$\mathbb{P}\left(|X - \mu| \geqslant \delta\mu\right) \leqslant 2e^{-\mu\delta^2/3}$$

podstawiamy własności rzutu oraz $\mu = \frac{n}{2}$ i $\delta = \frac{1}{2}$ mamy

$$\mathbb{P}\left(\left|S_n - \frac{n}{2}\right| \geqslant \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) \leqslant 2e^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{2})^2/3}.$$

$$\mathbb{P}\left(\left|S_n - \frac{n}{2}\right| \geqslant \frac{n}{4}\right) \leqslant 2e^{-n/24}.$$