AA Laboratorium 7

Gabriel Budziński

June 2023

1 Zadanie 15

1.1 Analiza teoretyczna

Dla argumentu n linia 6 wywoła się n razy w pierwszym wywołaniu, a oprócz tego w wywołaniach rekurencyjnych, przez co dostajemy:

$$\begin{cases} f_0 = 0 \\ f_n = n + \sum_{i=0}^{n-1} f_i \end{cases} \tag{1}$$

Każdy składnik dolnego równania wymnażamy przez z^n i nakładamy sumę:

$$\sum_{n\geqslant 0} f_n z^n = \sum_{n\geqslant 0} n z^n + \sum_{n\geqslant 0} \left(\sum_{i=0}^{n-1} f_i \right) z^n$$

Teraz wyliczamy każdy ze składników:

$$\sum_{n\geqslant 0} f_n z^n = F(z)$$

Dla drugiego korzystamy z **Right Shift** oraz **Index Multiply**:

$$\sum_{n\geqslant 0} n z^n \stackrel{RS}{=} z \sum_{n\geqslant 0} n z^{n-1} \stackrel{IM}{=} z \frac{d}{dz} \left(\sum_{n\geqslant 0} z^n \right) = z \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1-z} \right) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

Dla trzeciego korzystamy z **Right Shift** oraz **Partial Sum**:

$$\sum_{n\geqslant 0} \left(\sum_{i=0}^{n-1} f_i \right) z^n = 0 + \sum_{n\geqslant 1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} f_i \right) z^n \stackrel{RS}{=} z \sum_{n\geqslant 1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} f_i \right) z^{n-1} = z \sum_{n\geqslant 0} \left(\sum_{i=0}^{n} f_i \right) z^n \stackrel{PS}{=} z \frac{1}{1-z} F(z)$$

Z tego otrzymujemy

$$F(z) = \frac{z}{(1-z)^2} + \frac{z}{1-z} F(z)$$

Czyli

$$F(z) = \frac{z}{(1-z)^2} \cdot \frac{1-z}{1-2z} = \frac{z}{(1-2z)(1-z)}$$

Teraz korzystając z **Convolution** oraz **Right Shift**

$$F(z) = z \sum_{n\geqslant 0} z^n \cdot \sum_{n\geqslant 0} (2z)^n \stackrel{C}{=} z \sum_{n\geqslant 0} \left(\sum_{k=0}^{n} 2^k 1_{n-k} \right) z^n = z \sum_{n\geqslant 0} \frac{1-2^{n+1}}{1-2} z^n = \sum_{n\geqslant 0} \left(2^{n+1} - 1 \right) z^{n+1} = f_0 z^0 + \sum_{n\geqslant 1} (2^n - 1) z^n$$

Otrzymujemy $f_n = 2^n - 1$.

1.2 Wyniki eksperymentalne

Wyniki sprawdzono dla $n \in \{0, \ldots, 32\}$ i były jednakowe z teoretycznymi.

2 Zadanie 16

2.1 Analiza teoretyczna

Wywołujemy, a dla $i > 1$ wywołujemy z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} l_0 = 1 \\ l_1 = 1 \\ l_n = 1 + \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} l_i \end{cases} \tag{2}$$

Ostatnią równość możemy zapisać też jako

$$l_n = 2 + \sum_{i=1}^{n-1} l_i$$

Podobnie jak w poprzednim zadaniu otrzymujemy:

$$L(z) = 1 + z + \sum_{n\geqslant 2} 2z^n + \sum_{n\geqslant 2}\left(\sum_{i=1}^{n-1} l_i\right) z^n$$

Składnik $\sum\limits_{n\geqslant 2} 2z^n$ można rozdzielić na pół i dołożyć do drugiej sumy

$$L(z) = 1 + z + \sum_{n\geqslant 2} z^n + \sum_{n\geqslant 2}\left(\sum_{i=0}^{n-1} l_i\right) z^n =$$

$$= 1 + z + z^2\sum_{n\geqslant 0} z^n + \sum_{n\geqslant 2}\left(\sum_{i=0}^{n-1} l_i\right) z^n =$$

$$= 1 + z^2\sum_{n\geqslant 0} z^n + \sum_{n\geqslant 1}\left(\sum_{i=0}^{n-1} l_i\right) z^n =$$

$$= 1 + z^2\sum_{n\geqslant 0} z^n + z\sum_{n\geqslant 1}\left(\sum_{i=0}^{n-1} l_i\right) z^{n-1} =$$

$$= 1 + z^2\sum_{n\geqslant 0} z^n + z\sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{i=0}^{n} l_i\right) z^n$$

Następnie korzystając z **Partial Sum** mamy

$$L(z) = 1 + \frac{z^2}{1-z} + \frac{z}{1-z}L(z)$$

$$L(z) - zL(z) = 1 - z + z^2 + zL(z)$$

$$L(z) = \frac{1-z+z^2}{1-2z} = \frac{1}{1-2z} - \frac{z}{1-2z} + \frac{z^2}{1-2z}$$

Niech $A(z) = \frac{1}{1-2z}$, czyli $a_n = 2^n$, wtedy

$$L(z) = A(z) - zA(z) + z^2A(z)$$

Czyli dalej

$$l_n = a_n - a_{n-1} + a_{n-2} = 2^n - 2^{n-1} + 2^{n-2} = (4-2+1)\cdot 2^{n-2} = 3\cdot 2^{n-2}$$

2.2 Wyniki eksperymentalne

Wyniki sprawdzono dla $n \in \{0,\ldots,22\}$, wyniki z funkcji tworzącej pokrywały się z rzeczywistymi, a błąd zliczania losowego dla 1000 powtórzeń nie przekraczał 5%.