

AA Laboratorium 7

Gabriel Budziński

June 2023

1 Zadanie 15

1.1 Analiza teoretyczna

Dla argumentu n linia 6 wywoła się n razy w pierwszym wywołaniu, a oprócz tego w wywołaniach rekurencyjnych, przez co dostajemy:

$$\begin{cases} f_0 = 0 \\ f_n = n + \sum_{i=0}^{n-1} f_i \end{cases} \quad (1)$$

Każdy składnik dolnego równania wymnażamy przez z^n i nakładamy sumę:

$$\sum_{n \geq 0} f_n z^n = \sum_{n \geq 0} n z^n + \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{i=0}^{n-1} f_i \right) z^n$$

Teraz wyliczamy każdy ze składników:

$$\sum_{n \geq 0} f_n z^n = F(z)$$

Dla drugiego korzystamy z **Right Shift** oraz **Index Multiply**:

$$\sum_{n \geq 0} n z^n \stackrel{RS}{=} z \sum_{n \geq 0} n z^{n-1} \stackrel{IM}{=} z \frac{d}{dz} \left(\sum_{n \geq 0} z^n \right) = z \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1-z} \right) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

Dla trzeciego korzystamy z **Right Shift** oraz **Partial Sum**:

$$\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{i=0}^{n-1} f_i \right) z^n = 0 + \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} f_i \right) z^n \stackrel{RS}{=} z \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} f_i \right) z^{n-1} = z \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{i=0}^n f_i \right) z^n \stackrel{PS}{=} z \frac{1}{1-z} F(z)$$

Z tego otrzymujemy

$$F(z) = \frac{z}{(1-z)^2} + \frac{z}{1-z} F(z)$$

Czyli

$$F(z) = \frac{z}{(1-z)^2} \cdot \frac{1-z}{1-2z} = \frac{z}{(1-2z)(1-z)}$$

Teraz korzystając z **Convolution** oraz **Right Shift**

$$F(z) = z \sum_{n \geq 0} z^n \cdot \sum_{n \geq 0} (2z)^n \stackrel{C}{=} z \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n 2^k 1_{n-k} \right) z^n = z \sum_{n \geq 0} \frac{1-2^{n+1}}{1-2} z^n = \sum_{n \geq 0} (2^{n+1} - 1) z^{n+1} = f_0 z^0 + \sum_{n \geq 1} (2^n - 1) z^n$$

Otrzymujemy $f_n = 2^n - 1$.

1.2 Wyniki eksperymentalne

Wyniki sprawdzono dla $n \in \{0, \dots, 32\}$ i były jednakowe z teoretycznymi.

2 Zadanie 16

2.1 Analiza teoretyczna

2.2 Wyniki eksperymentalne