

# Algorytmiczna teoria gier - zadanie 26

Gabriel Budziński

November 15, 2023

## 1 Treść

Trzy małe świnki mieszkają w trzech własnoręcznie wybudowanych budynkach. Każde dwie mieszkały w odległości  $\sqrt{3}$  km od siebie. Chciały zamontować alarm przeciw-wilkowy. Mają jedną czujkę, która ma zasięg wykrywania wilków do 2 km. Każda świnka musi kupić kabel (niezależnie od siebie), który połączy jej domek z czujką. Kilometr kabla kosztuje 1. Jeśli wszystkie świnki kupią co najmniej 1 km kabla, to umieszczają czujkę idealnie pośrodku trójkąta utworzonego przez domy świń. Jeśli która świnka kupi mniejszą długość kabla, to czujkę stawiamy możliwie jak najbliżej centrum trójkąta. Jeśli kabli nie wystarczy, aby połączyć wszystkie 3 świnki z alarmem, to korzystają dwie świnki, które kupiły najdłuższe kable (wszelkie remisy rozstrzygane są w kolejności jako ści domków, tj. wygrywa słomiany, potem drewniany i na końcu murowany). W przypadku, gdy można połączyć tylko dwie świnki z czujką, czujka jest stawiana możliwie najbliżej środka odcinka łączącego domy tych dwóch świń. Jeśli dwie świnki nie mają w sumie kabli o łącznej długości 3 km, to świnka, która kupiła najdłuższy kabel, stawia czujkę bezpośrednio przy swoim domu (remisy rozstrzygamy jak wcześniej). Niechroniona (niepodłączona do czujki) świnka musi zapłacić 10 za usługi firmy ochroniarskiej. Każda podłączona do czujki świnka zyskuje trzykrotność minimalnej odległości między jej domem a brzegiem obszaru chronionego przez czujkę.

- a) Dlaczego można uznać, że gra ma ograniczone wypłaty?
- b) Opisz jakie strategie czyste świń są zdominowane.
- c) Znajdź optima Pareta oraz czyste równowagi Nasha.
- d) Czy istnieje rozwiązanie dominujące dla tej gry?
- e) Jak należałoby zmienić warunki gry, aby móc uznać tę grę za dyskooperatywną?

## 2 Rozwiązanie

a)

Wypłaty są w oczywisty sposób ograniczone z góry przez 6, ponieważ maksymalna odległość od krawędzi koła o promieniu 2 km znajdując się w nim to 2 km.

Z treści zadania wprost wynika, że nie opłaca się kupować kabla dłuższego niż 1 km, ponieważ niezależnie od wyborów pozostałych świń uzyska się dostęp do czujki, a kupując dłuższy kabel nie polepszy się swojej wypłaty (można tylko pogorszyć, bo większy koszt kabla i być może dalej od czujki). W takim razie możemy ostro ograniczyć wypłaty od dołu przez  $-10 - 1 = -11$ .

b)

Jak powiedzieliśmy, wszelkie strategie o długości kabla większej niż 1 są silnie zdominowane, ponieważ strategia 1 zawsze da lepszą wypłatę, niezależnie od strategii pozostałych świń. Pozostałe strategie są nieokreślone, ponieważ możemy dostać wyższą wypłatę niż ze strategią 1 (np. nasza to 0.5 a pozostałych 0), ale możemy też dostać niższą (np. my 0.5 a reszta 1).

c)

- Równowagi Nasha: Jedyną równowagą jest profil strategii  $(1, 1, 1)$ , ponieważ nie mając dostępu do czujki mamy maksymalnie wypłatę  $-10$ , a podłączając nawet na maksymalną odległość (czujka leży na przeciwnym boku) wypłata wynosi  $3 \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 0$  (oczywiście lepiej jest kupić krótszy kabel długości  $1$ , bo czujka będzie bliżej nas, wtedy najlepsza wypłata zakładając, że pozostałe świnki zawsze chcą dla nas jak najgorzej). Każde inne ustawienie niż  $(1, 1, 1)$  nie jest najlepszą odpowiedzią, bo pozwala nam poprawić którąś z wypłat zmieniając strategię, czyli nie są równowagami Nasha.
- Optima Pareto: Mamy nieskończoną liczbę optimów w sensie Pareto, ponieważ każdy profil strategii, który powoduje podłączenie wszystkich świnek do czujki oraz kable są optymalnej długości (kable akurat starczą do czujki). Jeśli chcielibyśmy sobie polepszyć wypłatę, to jedynie możemy to zrobić skracając kabel, co z poprzednich rozważań z pewnością odłączyłoby którąś ze świnek i zmniejszyło jej wypłatę. Podobnie w konfiguracjach, w których nie wszystkie świnki są podłączone można polepszyć wypłatę świnek bez dostępu do czujki nie zmniejszając wypłaty tych podłączonych (podobnie jak w równowagach Nasha). Jeśli jest mniej świnek podłączonych to zawsze możemy kupić sobie kabel długości naszej odległości od czujki i się podłączyć poprawiając sobie i nie pogarszając innym.

d)

Nie, ponieważ da się uzyskać większe wypłaty niż w profilu strategii  $(1, 1, 1)$  (np. równe  $6$  lub bliskie  $6$ , w zależności, która świnka), ale są wzajemnie wykluczające.

e)

Redukujemy do dwóch świnek, a następnie każemy świnkom wybrać wartość zmiennej boolowskiej, jeśli wskażą taką samą, to czujkę dostaje tylko świnka A, w p.p. tylko świnka B.

Chyba, że chodziło o antykooperacyjną, wtedy można by było np. zmniejszać zasięg czujki proporcjonalnie do liczby podłączonych świnek, wtedy wypłata spadałaby wraz z liczbą graczy obierających tę samą strategię.