

# Algorytmy Metaheurystyczne

## Komiwojażer Heurystycznie

Gabriel Budziński(254609)  
Franciszek Stepek (256310)

### Przedmowa

Sprawko na metaheurystykę

## 1 Podsumowanie złożoności obliczeniowych implementacji

### 1.1 K-Random

Algorytm polega na losowaniu kolejności odwiedzania wierzchołków. Każde z wylosowanych rozwiązań jest porównywane z poprzednim najlepszym. W naszej implementacji losowanie rozwiązania odbywało się w czasie liniowym. W takim samym czasie obliczana jest również funkcja celu. Dla  $k$  prób złożoność jest w takim razie rzędu  $O(k \cdot n \cdot n) = O(k \cdot n^2)$ .

### 1.2 Nearest Neighbor

Algorytm polega na zachłannym szukaniu ścieżki rozpoczynając od zadanego wierzchołka i przechodząc do najbliższego jeszcze nie odwiedzonego. Złożoność jest rzędu  $O(n^2)$ , ponieważ w każdym wierzchołku musimy przeszukać zbiór pozostałych, aby znaleźć najbliższy. Chcąc uzyskać lepsze wyniki, możemy zainicjować algorytm we wszystkich wierzchołkach i wybrać najlepszą trasę. Przy takiej modyfikacji złożoność zwiększa się do  $O(n^2 \cdot n + n \cdot n) = O(n^3)$ , ponieważ pierwotny algorytm wykonujemy  $n$  razy i  $n$ -krotnie musimy obliczyć wartość funkcji celu.

### 1.3 Nearest Branching Neighbor

Algorytm jest modyfikacją powyższego algorytmu, która rozstrzyga, który wierzchołek obrać jako następny w przypadku równej odległości do nich. Złożoność jest bardzo zależna od struktury problemu i głębokości zagłębiania przeszukiwań. Zakładając, że problem ma strukturę drzewa, gdzie wierzchołek ma dwa równo odległe od siebie następniki, każdy poziom przeszukiwań ma wzrost wykładniczy.

### 1.4 2-Opt

Algorytm polega na wybieraniu kawałka istniejącej już trasy, a następnie wstawienie go z powrotem, ale w odwrotnej kolejności. Czynność tę powtarzamy, aż nie będziemy już uzyskiwać zysku długości trasy. Złożoność algorytmu można ulepszyć nie wyliczając za każdym odwróceniem funkcji celu, a jedynie odejmować i dodawać wartości dwóch usuniętych i dwóch dodanych krawędzi  $O(4) \approx \text{negl.}$ . Złożoność obliczeniowa w naszej implementacji jest rzędu  $O(n^2 \cdot n) = O(n^3)$ , ponieważ operacja zmiany kolejności kawałka trasy jest  $O(n)$ .

### 1.5 3-Opt

Algorytm jest analogiczny do powyższego, z tą różnicą, że teraz dzielimy trasę na trzy, a nie na dwa kawałki. Co za tym idzie, to także zwiększa nam złożoność obliczeniową, ponieważ przechozimy przez wszystkie trójki krawędzi. Zatem mamy tutaj łącznie rząd  $O(n^3 \cdot n) = O(n^4)$  (operacja sprawdzenia każdego przypadku jest co prawda większa, ale w dalszym ciągu  $O(1)$ , a zamiana kawałka trasy w tym samym czasie co powyżej).

## 2 Opis eksperymentów

### 2.1 Implementacja

Algorytmy implementujemy w języku C/C++, odległości między wierzchołkami są przechowywane jako pełne tablice dwuwymiarowe typu `int`, a trasy są w kontenerach `vector`, co ułatwia operacje odwracania i mieszania.

## 2.2 Sprzęt

Programy były testowane na dwóch maszynach, laptopie *Lenovo* i komputerze stacjonarnym. Obie jednostki są wyposażone w procesor architektury x86 marki intel oraz 16GB pamięci RAM.

### 2.2.1 Pececik

Komputer stacjonarny posiada procesor sześciordzeniowy i5-10600K (o obniżonym napięciu operacyjnym).

### 2.2.2 Lapek

Laptop posiada procesor czterordzeniowy i7-6700HQ

## 2.3 Instancje

### 2.3.1 Przykłady TSPLIB

W części eksperymentów użyto instancji euklideskiego problemu komiwojażera.

### 2.3.2 Instancje losowe

W celu zwiększenia liczności i dokładności testów spreparowano losowo generowane instancje euklideskiego problemu komiwojażera.

## 2.4 Metodologia/cel

## 2.5 Opis wyników

Testy Wilcoxona dla poszczególnych algorytmów:

- W pierwszej dużej tabeli będziemy mieli zestawienie 3 algorytmów
- W drugiej (Już nieco 'ciekawszej') Zobaczymy jak na rozwiązanie *2-Opt* wpływają warunki początkowe (zarówno czasowo, jak i w kontekście funkcji Celu)
- W trzeciej otrzymamy większe zestawienie różnych przypadków dla wariantów *Nearest Neighbor*

### 2.5.1 Część I

Tabela numer 1:

Nr. Instancji	1	2	3	4	5	1-2	1-3	4-5
1	3157	32621	2846	2922	33913	-29464	311	-30991
2	8980	29990	8385	8746	25809	-21010	595	-17063
3	135737	610252	126892	128097	622778	-474515	8845	-494681
4	7579	47194	7098	6741	49975	-39615	481	-43234
5	8191	53545	7157	7372	54720	-45354	1034	-47348
6	803	3509	714	677	3560	-2706	89	-2883
7	511	1586	454	443	1750	-1075	57	-1307
8	642	2606	561	595	2645	-1964	81	-2050
9	27807	168501	23737	23006	172442	-140694	4070	-149436
10	33633	270344	28612	29756	242459	-236711	5021	-212703
11	35859	331888	31749	34109	345599	-296029	4110	-311490
12	29158	154024	25393	25014	174054	-124866	3765	-149040
13	34499	256477	28435	29312	253834	-221978	6064	-224522
14	36980	338421	33375	34698	339346	-301441	3605	-304648
15	26227	174278	23107	22850	178774	-148051	3120	-155924
16	26947	173366	24721	25011	174970	-146419	2226	-149959
17	27460	170965	24459	23810	154305	-143505	3001	-130495
18	20356	126612	18281	15972	121878	-106256	2075	-105906
19	54019	593697	49141	46246	606262	-539678	4878	-560016
20	54019	582949	49141	45758	575474	-528930	4878	-529716
21	68964	1405305	60930	62216	1415877	-1336341	8034	-1353661
22	331103	6434381	282758	279968	6392975	-6103278	48345	-6113007
23	46680	597495	45340	49462	572145	-550815	1340	-522683
24	69297	735352	61910	64640	677100	-666055	7387	-612460
25	120769	842650	110103	107601	882692	-721881	10666	-775091
26	61652	821860	61400	68116	823348	-760208	252	-755232
27	85699	988886	79996	81923	1028352	-903187	5703	-946429
28	94683	1638917	87542	88659	1635424	-1544234	7141	-1546765
29	58023	1137733	56765	55439	1183487	-1079710	1258	-1128048
30	59890	766136	52403	56468	791951	-706246	7487	-735483
31	131281	1940053	118468	119774	1962350	-1808772	12813	-1842576
32	153462	586378	121315	121297	568936	-432916	32147	-447639
33	2752	22583	2497	2684	22420	-19831	255	-19736
34	8605	110285	7566	7628	114431	-101680	1039	-106803
35	11054	183204	9415	9627	182635	-172150	1639	-173008
36	1554	8755	1418	1346	8903	-7201	136	-7557
37	830	3585	770	775	3466	-2755	60	-2691
38	152493	1629073	139697	140164	1576951	-1476580	12796	-1436787
39	5030	41053	4418	4294	42391	-36023	612	-38097

Przy czym kolejne kolumny 'numeryczne' oznaczają:

- 1 - Wartość funkcji Celu dla algorytmu *Nearest Neighbor* startującego z wybranego 'miasta'
- 2 - Wartość funkcji Celu dla algorytmu *K-Random* działającego tak długo, jak z kolumny 1
- 3 - Wartość funkcji Celu dla algorytmu *2-Opt* startującego z rozwiązania w punkcie 1
- 4 - Wartość funkcji Celu dla algorytmu *2-Opt* startującego z losowej instancji
- 5 - Wartość funkcji Celu dla algorytmu *K-Random* działającego tak długo, jak z kolumny 4

A teraz jak rozumieć kolejne kolumny 'różnicowe':

- 1-2 - Porównanie działania KR z NN dla tego samego budżetu obliczeniowego
- 1-3 - 'Dowód', że 2O rzeczywiście poprawia rozwiązanie startowe

- 4-5 - Porównanie działania KR z 2O dla tego samego budżetu obliczeniowego

Zauważmy, że we wszystkich tych kolumnach każda z wartości jest tego samego znaku, zatem bez dokładniejszej analizy można powiedzieć, że wartość statystyki testowej dla testu Wilcozona będzie równa 0, zatem jednoznacznie powie nam, który z algorytmów zwraca zawsze lepsze rozwiązanie. Pojawia się nam zatem następująca zależność (gdzie znak ' $<$ ' oznacza, że lewa wartość zwraca nam 'gorsze' rozwiązanie od prawego):

$$K\text{-Random} < \text{Nearest Neighbor} < 2\text{-Opt}$$

## 2.5.2 Część II

Tabela numer 2:

Nr. Instancji	NN	KR	NN-KR	NN-KR	Rangi	NN(T)	KR(T)
1	2846	2992	-146	146	11	0.115728	3.10199
2	8385	7967	418	418	16	0.00120772	0.00922684
3	126892	124006	2886	2886	29	0.0187193	0.145382
4	7098	6988	110	110	8	0.0138299	0.184798
5	7157	7080	77	77	6.5	0.0393003	0.338091
6	714	689	25	25	4	0.00987954	0.0552343
7	454	461	-7	7	2	0.00119699	0.0103625
8	561	567	-6	6	1	0.00364293	0.0333502
9	23737	24667	-930	930	19	0.0154935	0.137051
10	28612	29780	-1168	1168	21	0.053393	0.313875
11	31749	32634	-885	885	18	0.144667	0.836886
12	25393	24066	1327	1327	22	0.0138314	0.0914137
13	28435	29226	-791	791	17	0.037316	0.41158
14	33375	33294	81	81	7	0.109228	0.997454
15	23107	22870	237	237	13	0.0119046	0.102974
16	24721	23678	1043	1043	20	0.01084	0.0888192
17	24459	24275	184	184	12	0.0122842	0.114743
18	18281	15962	2319	2319	26	0.0165922	0.0705111
19	49141	46422	2719	2719	28	0.322236	4.21766
20	49141	45633	3508	3508	32	0.343797	2.56742
21	60930	61190	-260	260	14	27.5015	656.948
22	282758	287980	-5222	5222	34	11.1163	179.428
23	45340	52126	-6786	6786	38	0.0065809	0.110337
24	61910	67957	-6047	6047	36	0.0144687	0.196237
25	110103	103341	6762	6762	37	0.0155958	0.195165
26	61400	66836	-5436	5436	35	0.00640445	0.246059
27	79996	82941	-2945	2945	30	0.0186396	0.358017
28	87542	90788	-3246	3246	31	0.062336	0.966489
29	56765	58313	-1548	1548	24	0.0857857	2.09062
30	52403	56508	-4105	4105	33	0.221278	4.1955
31	118468	119808	-1340	1340	23	0.673865	13.1858
32	121315	118891	2424	2424	27	0.00617383	0.0256009
33	2497	2624	-127	127	10	0.046445	0.83168
34	7566	7643	-77	77	6.5	1.95213	32.5976
35	9415	9687	-272	272	15	4.56492	81.1747
36	1418	1399	19	19	3	0.0119262	0.103982
37	770	799	-29	29	5	0.00323845	0.0298058
38	139697	137507	2190	2190	25	0.0786318	0.723296
39	4418	4531	-113	113	9	0.0935837	1.57451

Przy czym kolejne kolumny oznaczają:

- NN - Wartość funkcji Celu dla algorytmu *2-Opt* startującego z rozwiązania znalezione przez algorytm *Nearest Neighbor*
- KR - Wartość funkcji Celu dla algorytmu *2-Opt* startującego z rozwiązania znalezione przez algorytm *K-Random* (Startowe rozwiązanie w tym samym czasie, co startowe dla NN)
- Kolejne 2 kolumny znaczą dokładnie to, co ich nazwa, natomiast ostatnia wyznacza rangi dla testu Wilcoxona

A teraz policzmy jeszcze tylko 2 sumy dla Wilcoxona:

- $T_+ = 315.5$
- $T_- = 432.5$

Zatem nasza statystyka końcowa będzie wynosiła 315.5. No jest to dosyć dużo, a fakt, że wynosi ona około  $1/2$  sumy obu statystyk sugeruje, że w istocie obie metody działają 'bardzo podobnie'

Prawa strona tabeli jest analogiczna do lewej, ale tym razem zamiast wartości Celu mamy czas działania samej części *2-Opt*.

Jak widać, wszystkie różnice są ujemne, ale (w połączeniu z danymi otrzymanymi w tabeli 1) można powiedzieć, że łatwo uzależnić czas działania algorytmu 2-Opt od pierwotnego rozwiązania - jeżeli jest znacznie 'lepsze', to także widać, że różnice w czasie są znacznie wyższe.

### 2.5.3 Część III

Tabela numer 3:

Nr.In	1N	FN	1B	FB	1N(T)	FN(T)	1B(T)	FB(T)
1	3157	2975	3452	2998	0.000644468	0.0983119	0.0048885	1.01056
2	8980	8181	8980	8181	2.07E-05	0.00103294	3.76E-05	0.00205635
3	135737	133953	129421	128279	0.000146889	0.0121529	0.000282864	0.0361393
4	7579	7129	7198	6908	0.000104299	0.0139546	0.000241166	0.0310817
5	8191	7113	8191	7113	0.000134752	0.0224471	0.000239433	0.0382092
6	803	746	804	748	6.75E-05	0.00723383	0.000454636	0.0460773
7	511	482	545	499	2.06E-05	0.00110371	0.000153318	0.00747459
8	642	608	621	599	6.48E-05	0.0034514	0.000231878	0.0173178
9	27807	24698	26854	24815	6.99E-05	0.00736386	0.00012696	0.0131532
10	33633	31479	33612	31479	0.000222951	0.0240762	0.00021405	0.0365781
11	35859	34543	35794	34543	0.000252144	0.0555201	0.000354758	0.0790306
12	29158	25884	29158	25884	9.39E-05	0.00853953	0.000109656	0.0112842
13	34499	31611	32825	31611	0.000131333	0.0222619	0.000253897	0.0373115
14	36980	35389	36980	35389	0.000236748	0.0511064	0.000379147	0.0778277
15	26227	23660	26227	23564	6.77E-05	0.00713671	0.000131215	0.0138976
16	26947	24852	26947	24852	0.000125232	0.00788403	0.000222792	0.0115013
17	27460	24782	27460	24782	6.63E-05	0.00694331	0.000201731	0.0129614
18	20356	16935	20356	16935	5.77E-05	0.00701994	0.000113084	0.0166362
19	54019	49201	54019	49201	0.000421003	0.166132	0.000678634	0.260951
20	54019	49201	54019	49201	0.000420879	0.155087	0.000638746	0.240323
21	68964	68531	70315	67864	0.0102591	14.3142	0.0157081	24.5947
22	331103	313745	322807	310967	0.0042375	4.41593	0.0108562	11.6176
23	46680	46680	49166	47899	5.57E-05	0.00624229	0.000471479	0.0663509
24	69297	67055	71550	67323	8.92E-05	0.00915955	0.000177797	0.0226451
25	120769	114553	120769	114553	8.82E-05	0.012921	0.000207303	0.0303293
26	61652	60964	61652	60964	9.07E-05	0.0139036	0.000168004	0.0304266
27	85699	79564	85699	79564	0.000102496	0.0173458	0.000168221	0.0335902
28	94683	92552	94683	92903	0.000204923	0.0498144	0.00163079	0.352259
29	58023	54491	58635	54604	0.000284032	0.0803066	0.000632295	0.193229
30	59890	58279	58151	58151	0.000401408	0.125099	0.00113758	0.380743
31	131281	127230	131445	126062	0.000791101	0.383126	0.0016203	0.873932
32	153462	130921	153462	130921	3.31E-05	0.00248934	6.17E-05	0.00508362
33	2752	2612	2632	2606	0.000155953	0.0351781	0.000429553	0.113054
34	8605	7993	8700	7934	0.00137766	0.857353	0.0040416	2.48614
35	11054	10540	10763	10657	0.00274642	2.70393	0.00916338	7.70218
36	1554	1437	1544	1432	5.00E-05	0.00510014	0.000238881	0.022591
37	830	796	801	751	7.09E-05	0.00241989	0.000155393	0.0108239
38	152493	140486	152493	140486	0.000206588	0.049608	0.00139074	0.239691
39	5030	4578	4941	4691	0.000318213	0.0560495	0.000668361	0.163452

Przy czym kolejne kolumny oznaczają:

- 1N - Wartość funkcji Celu dla algorytmu *Nearest Neighbor* startującego z wybranego miasta
- FN - Wartość funkcji Celu dla algorytmu *Nearest Neighbor* startującego z każdego miasta, i wybierający najlepsze
- 1B - Wartość funkcji Celu dla algorytmu *Branching Nearest Neighbor* (z głębokością = 2) startującego z wybranego miasta
- FB - Wartość funkcji Celu dla algorytmu *Branching Nearest Neighbor* (z głębokością = 2) startującego z każdego miasta, i wybierający najlepsze

Zapisanie wszystkich obliczeń potrzebnych do wykonania testu Wilcozona zajęłoby mnóstwo miejsca, dlatego też pominiemy ich zapis, a jedynie podamy otrzymane wyniki dla podanych porównań:

- 1N-FN - Jak można się było spodziewać (i co także widać w tabelce), przy wykonywaniu algorytmu *Nearest Neighbor* z każdego 'miasta' 'jakość' rozwiązania poprawiała się (albo najgorzej - nie zmieniała się) w każdym przypadku, dlatego wartość statystyki wynosi 0.

- 1B-FB - Mamy tutaj sytuację analogiczną do powyższej.
- 1N-FB - Tak samo jak w poprzednich widać tutaj znaczną przewagę startowania z każdego 'miasta', pomimo różnych metod.
- 1N-1B - Tutaj już można zaobserwować pewne różnice, pomimo tego, że w wielu przypadkach mamy takie same wartości rozwiązania. Nasze statystyki wynoszą tutaj:

$$- T_+ = 163$$

$$- T_- = 113$$

Zatem można powiedzieć, że są na tyle bliskie sobie, by stwierdzić, że podane algorytmy względnie podobne, chociaż widać przewagę opcji *Branching*.

- FN-FB - Analogicznie do powyższego:

$$- T_+ = 142$$

$$- T_- = 111$$

Wnioski identyczne jak powyżej.

- 1B-FN - Przypadek dosyć ciekawy, ponieważ dla jednej instancji (numer 30) algorytm *Branching* z jednego miasta zachował się lepiej, niż algorytm standardowy startujący z każdego 'miasta'. (Jeżeli liczyć statystyki 'porządnie', to otrzymamy 8, co można potraktować jako 'wyjątek potwierdzający regułę'.

Jeżeli chodzi zaś o czas działania, to z części z czasem ('XY(T)') widać, że pojawia się nam dosyć jednoznaczne porównanie co do prędkości (choć tu także się pojawiło 1 odstępstwo, dla instancji nr 10 *Branching* okazał się szybszy od zwykłego algorytmu, choć przy tak małej różnicy w czasie, można to 'zaniedbać'):

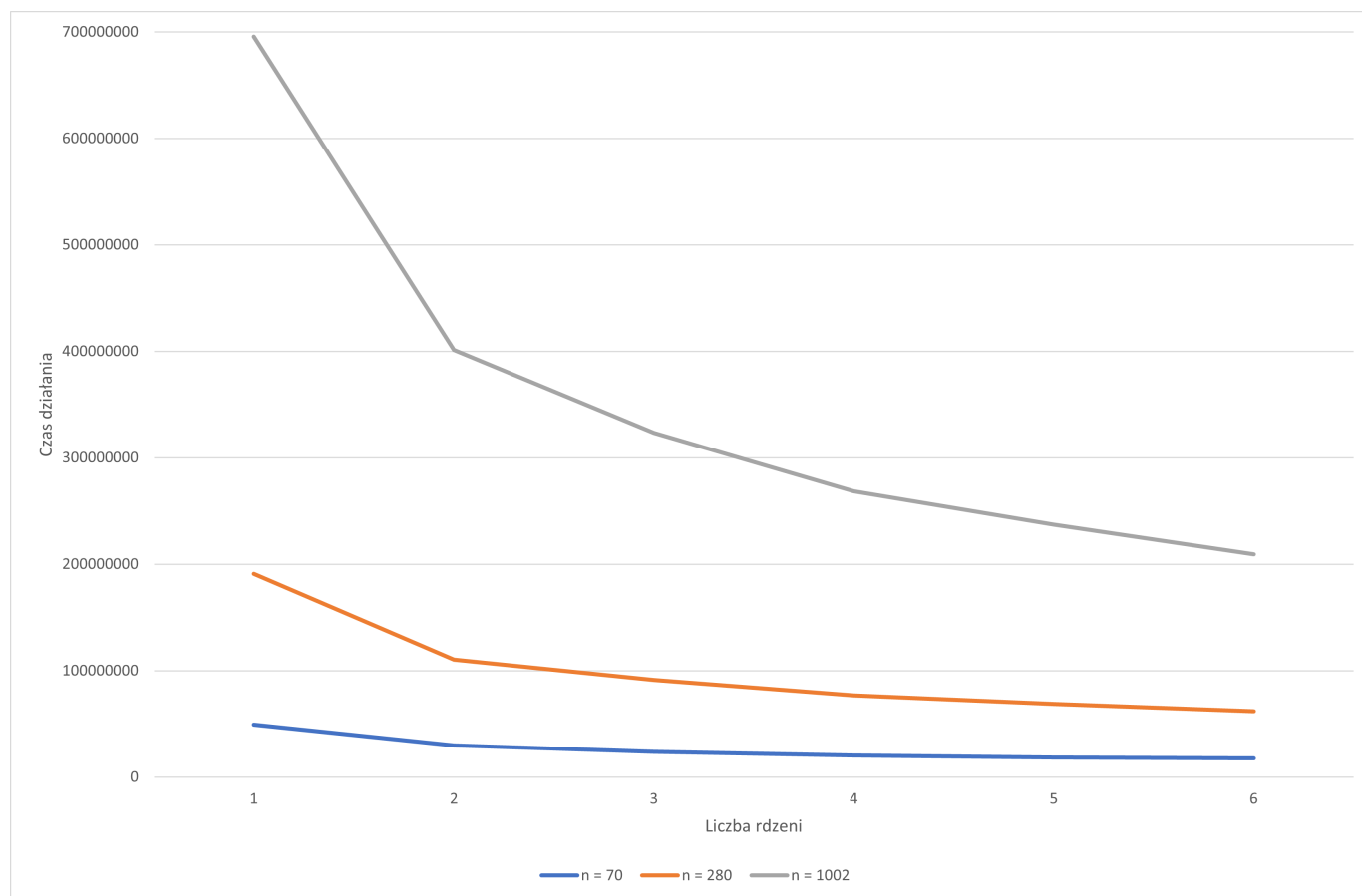
$$1N > 1B > FN > FB$$

Gdzie mamy od lewej do prawej jako od najszybciej działającego, do najdłuższego. Takich wyników można się było zresztą spodziewać, ponieważ wynikają one z samych konstrukcji i złożoności poszczególnych algorytmów.

#### 2.5.4 Algorytmy uwspółbieżnione

Przeprowadzono testy w celu sprawdzenia wpływu ilości rdzeni dostępnych przez algorytm k-random na czas działania algorytmu. Wartości funkcji celu dla algorytmu wielowątkowego pozostały praktycznie nie zmienione (zmiany rzędu < 1%).





## 2.6 Wnioski

### Drobne uwagi