Algorytmy Metaheurystyczne
Komiwojażer Heurystycznie

Gabriel Budziński(254609)
Francziszek Stepek (256310)

Przedmowa

Na samym początku omówimy po krótce użyte algorytmy, oraz zastanowimy się nad ich złożonością obliczeniową, natomiast dalej dopiero przejdziemy do opisu eksperymentów.

1 Podsumowanie złożoności obliczeniowych implementacji

1.1 K-Random

Algorytm polega na losowaniu kolejności odwiedzania wierzchołków. Każde z wylosowanych rozwiązań jest porównywane z poprzednim najlepszym. W naszej implementacji losowanie rozwiązania odbywało się w czasie liniowym. W takim samym czasie obliczana jest również funkcja celu. Dla k prób złożoność jest w takim razie rzędu $O(k \cdot n \cdot n) = O(k \cdot n^2)$.

1.2 Nearest Neighbor

Algorytm polega na zachłannym szukaniu ścieżki rozpoczynając od zadanego wierzchołka i przechodząc do najbliższego jeszcze nie odwiedzonego. Złożoność jest rzędu $O(n^2)$, ponieważ w każdym wierzchołku musimy przeszukać zbiór pozostałych, aby znaleźć najbliższy. Chcąc uzyskać lepsze wyniki, możemy zainicjować algorytm we wszystkich wierzchołkach i wybrać najlepszą trasę. Przy takiej modyfikacji złożoność zwiększa się do $O(n^2 \cdot n + n \cdot n) = O(n^3)$, ponieważ pierwotny algorytm wykonujemy n razy i n-krotnie musimy obliczyć wartość funkcji celu.

1.3 Nearest Branching Neighbor

Algorytm jest modyfikacją powyższego algorytmu, która rozstrzyga, który wierzchołek obrać jako następny w przypadku równej odległości do nich. Złożoność jest bardzo zależna od stryktury problemu i głębokości zagłębiania przeszukiwań. Zakładając, że problem ma strukturę drzewa, gdzie wierzchołek ma dwa równo odległe od siebie następniki, każdy poziom przeszukiwań ma wzrost wykładniczy.

1.4 2-Opt

Algorytm polega na wybieraniu kawałka istniejącej już trasy, a następnie wstawienie go z powrotem, ale w odwrotnej kolejności. Czynność tę powtarzamy, aż nie będziemy już uzyskiwać zysku długości trasy. Złożoność algorytmu można ulepszyć nie wyliczając za każdym odwróceniem funkcji celu, a jedynie odejmować i dodawać wartości dwóch usuniętych i dwóch dodanych krawędzi $O(4) \approx$ *negl.*. Złożoność obliczeniowa w naszej implementacji jest rzędu $O(n^2 \cdot n) = O(n^3)$, ponieważ operacja zmiany kolejności kawałka trasy jest $O(n)$.

1.5 3-Opt

Algorytm jest analogiczny do powyższego, z tą różnicą, że teraz dzielimy trasę na trzy, a nie na dwa kawałki. Co za tym idzie, to także zwiększa nam złożoność obliczeniową, ponieważ przecchodzimy przez wszystkie trójki krawędzi. Zatem mamy tutaj łącznie rząd $O(n^3 \cdot n) = O(n^4)$ (operacja sprawdzenia każdego przypadku jest co prawda większa, ale w dalszym ciągu $O(1)$, a zamiana kawałka trasy w tym samym czasie co powyżej).

2 Opis eksperymentów

2.1 Implementacja

Algorytmy implementujemy w języku `C/C++`, odległości między wierzchołkami są przechowywane jako pełne tablice dwuwymiarowe typu `int`, a trasy są w kontenerach `vector`, co ułatwia operacje odwracania i mieszania.
Korzystaliśmy z kompilatora g++ wraz z użyciem flag -lSDL2 (używanej przy wizualizacji, wraz z odpowiednim dla danego systemu operacyjnego podlinkowania do folderu zawierającego) oraz -lpthread (przy korzystaniu z wielowątkowości)

2.2 Sprzęt

Programy były testowane na dwóch maszynach, laptopie *Lenovo* i komputerze stacjonarnym. Obie jednostki są wyposażone w procesor architektury `x86` marki `intel` oraz 16GB pamięci RAM.

2.2.1 Pececik

Komputer stacjonarny posiada procesor sześciordzeniowy i5-10600K 4,1 GHz (o obniżonym napięciu operacyjnym).

2.2.2 Lapek

Laptop posiada procesor czterordzeniowy i7-6700HQ 2,6 GHz

2.3 Instancje

2.3.1 Przykłady TSPLIB

W części eksperymentów użyto instancji euklidejskiego problemu komiwojażera.

2.3.2 Instancje losowe

W celu zwiększenia liczności i dokładności testów spreparowano losowo generowane instancje eukidejskiego problemu komiwojażera.

2.4 Metodologia/cel

Testy przeprowadzono za pomocą zaimplementowanych w tym celu funkcji ku jak największej automatyzacji. Dane o przeprowadzonych testach zapisywano do plików tekstowych w formacie CSV, a następnie poddane analizie. Testowanie miało na celu wskazanie mocnych i słabych stron zaimplementowanych heurystyk, jak i ich porównanie.

2.5 Opis wyników

Testy Wilcoxona dla poszczególnych algorytmów:

- W pierwszej dużej tabeli będziemy mieli zestawienie 3 algorytmów
- W drugiej (Już nieco 'ciekawszej') Zobaczymy jak na rozwiązanie *2-Opt* wpływają warunki początkowe (zarówno czasowo, jak i w kontekście funkcji Celu)
- W trzeciej otrzymamy większe zestawienie różnych przypadków dla wariantów *Nearest Neighbor*
- W czwartej zobaczymy porownanie działania *2-Opta* z *3-Optem*, wraz z zestawieneim, ile procentowo polepszył się wynik, oraz z jakim nakładem kosztu to się stało.

2.5.1 Część I

Tabela numer 1:

Nr. Instancji	1	2	3	4	5	1-2	1-3	4-5
1	3157	32621	2846	2922	33913	-29464	311	-30991
2	8980	29990	8385	8746	25809	-21010	595	-17063
3	135737	610252	126892	128097	622778	-474515	8845	-494681
4	7579	47194	7098	6741	49975	-39615	481	-43234
5	8191	53545	7157	7372	54720	-45354	1034	-47348
6	803	3509	714	677	3560	-2706	89	-2883
7	511	1586	454	443	1750	-1075	57	-1307
8	642	2606	561	595	2645	-1964	81	-2050
9	27807	168501	23737	23006	172442	-140694	4070	-149436
10	33633	270344	28612	29756	242459	-236711	5021	-212703
11	35859	331888	31749	34109	345599	-296029	4110	-311490
12	29158	154024	25393	25014	174054	-124866	3765	-149040
13	34499	256477	28435	29312	253834	-221978	6064	-224522
14	36980	338421	33375	34698	339346	-301441	3605	-304648
15	26227	174278	23107	22850	178774	-148051	3120	-155924
16	26947	173366	24721	25011	174970	-146419	2226	-149959
17	27460	170965	24459	23810	154305	-143505	3001	-130495
18	20356	126612	18281	15972	121878	-106256	2075	-105906
19	54019	593697	49141	46246	606262	-539678	4878	-560016
20	54019	582949	49141	45758	575474	-528930	4878	-529716
21	68964	1405305	60930	62216	1415877	-1336341	8034	-1353661
22	331103	6434381	282758	279968	6392975	-6103278	48345	-6113007
23	46680	597495	45340	49462	572145	-550815	1340	-522683
24	69297	735352	61910	64640	677100	-666055	7387	-612460
25	120769	842650	110103	107601	882692	-721881	10666	-775091
26	61652	821860	61400	68116	823348	-760208	252	-755232
27	85699	988886	79996	81923	1028352	-903187	5703	-946429
28	94683	1638917	87542	88659	1635424	-1544234	7141	-1546765
29	58023	1137733	56765	55439	1183487	-1079710	1258	-1128048
30	59890	766136	52403	56468	791951	-706246	7487	-735483
31	131281	1940053	118468	119774	1962350	-1808772	12813	-1842576
32	153462	586378	121315	121297	568936	-432916	32147	-447639
33	2752	22583	2497	2684	22420	-19831	255	-19736
34	8605	110285	7566	7628	114431	-101680	1039	-106803
35	11054	183204	9415	9627	182635	-172150	1639	-173008
36	1554	8755	1418	1346	8903	-7201	136	-7557
37	830	3585	770	775	3466	-2755	60	-2691
38	152493	1629073	139697	140164	1576951	-1476580	12796	-1436787
39	5030	41053	4418	4294	42391	-36023	612	-38097

Przy czym kolejne kolumny 'numeryczne' oznaczają:

- 1 - Wartość funkcji Celu dla algorytmu *Nearest Neighbor* startującego z wybranego 'miasta'
- 2 - Wartość funkcji Celu dla algorytmu *K-Random* działającego tak długo, jak z kolumny 1
- 3 - Wartość funkcji Celu dla algorytmu *2-Opt* startującego z rozwiązania w punkcie 1
- 4 - Wartość funkcji Celu dla algorytmu *2-Opt* startującego z losowej instancji
- 5 - Wartość funkcji Celu dla algorytmu *K-Random* działającego tak długo, jak z kolumny 4

A teraz jak rozumieć kolejne kolumny 'różnicowe':

- 1-2 - Porównanie działania KR z NN dla tego samego budżetu obliczeniowego
- 1-3 - 'Dowód', że 2O rzeczywiście poprawia rozwiązanie startowe

- 4-5 - Porównanie działania KR z 2O dla tego samego budżetu obliczeniowego

Zauważmy, że we wszystkich tych kolumnach każda z wartości jest tego samego znaku, zatem bez dokładniejszej analizy można powiedzieć, że wartość statystyki testowej dla testu Wilcoxona będzie równa 0, zatem jednoznacznie powie nam, który z algorytmów zwraca zawsze lepsze rozwiązanie. Pojawia się nam zatem następująca zależność (gdzie znak '<' oznacza, że lewa wartość zwraca nam 'gorsze' rozwiązanie od prawego):

$$\textit{K-Random} < \textit{Nearest Neighbor} < \textit{2-Opt}$$

2.5.2 Część II

Tabela numer 2:

Nr. Instancji	NN	KR	NN-KR	|NN-KR|	Rangi	NN(T)	KR(T)
1	2846	2992	-146	146	11	0.115728	3.10199
2	8385	7967	418	418	16	0.00120772	0.00922684
3	126892	124006	2886	2886	29	0.0187193	0.145382
4	7098	6988	110	110	8	0.0138299	0.184798
5	7157	7080	77	77	6.5	0.0393003	0.338091
6	714	689	25	25	4	0.00987954	0.0552343
7	454	461	-7	7	2	0.00119699	0.0103625
8	561	567	-6	6	1	0.00364293	0.0333502
9	23737	24667	-930	930	19	0.0154935	0.137051
10	28612	29780	-1168	1168	21	0.053393	0.313875
11	31749	32634	-885	885	18	0.144667	0.836886
12	25393	24066	1327	1327	22	0.0138314	0.0914137
13	28435	29226	-791	791	17	0.037316	0.41158
14	33375	33294	81	81	7	0.109228	0.997454
15	23107	22870	237	237	13	0.0119046	0.102974
16	24721	23678	1043	1043	20	0.01084	0.0888192
17	24459	24275	184	184	12	0.0122842	0.114743
18	18281	15962	2319	2319	26	0.0165922	0.0705111
19	49141	46422	2719	2719	28	0.322236	4.21766
20	49141	45633	3508	3508	32	0.343797	2.56742
21	60930	61190	-260	260	14	27.5015	656.948
22	282758	287980	-5222	5222	34	11.1163	179.428
23	45340	52126	-6786	6786	38	0.0065809	0.110337
24	61910	67957	-6047	6047	36	0.0144687	0.196237
25	110103	103341	6762	6762	37	0.0155958	0.195165
26	61400	66836	-5436	5436	35	0.00640445	0.246059
27	79996	82941	-2945	2945	30	0.0186396	0.358017
28	87542	90788	-3246	3246	31	0.062336	0.966489
29	56765	58313	-1548	1548	24	0.0857857	2.09062
30	52403	56508	-4105	4105	33	0.221278	4.1955
31	118468	119808	-1340	1340	23	0.673865	13.1858
32	121315	118891	2424	2424	27	0.00617383	0.0256009
33	2497	2624	-127	127	10	0.046445	0.83168
34	7566	7643	-77	77	6.5	1.95213	32.5976
35	9415	9687	-272	272	15	4.56492	81.1747
36	1418	1399	19	19	3	0.0119262	0.103982
37	770	799	-29	29	5	0.00323845	0.0298058
38	139697	137507	2190	2190	25	0.0786318	0.723296
39	4418	4531	-113	113	9	0.0935837	1.57451

Przy czym kolejne kolumny oznaczają:

- NN - Wartość funkcji Celu dla algorytmu *2-Opt* startującego z rozwiązania znalezionego przez algorytm *Nearest Neighbor*
- KR - Wartość funkcji Celu dla algorytmu *2-Opt* startującego z rozwiązania znalezionego przez algorytm *K-Random* (Startowe rozwiązanie w tym samym czasie, co startowe dla NN)
- Kolejne 2 kolumny znaczą dokładnie to, co ich nazwa, natomist ostatnia wyznacza rangi dla testu Wilcoxona

A teraz policzmy jeszcze tylko 2 sumy dla Wilcoxona:

- $T_+ = 315.5$
- $T_- = 432.5$

Zatem nasza statystyka końcowa będzie wynosiła 315.5. No jest to dosyć dużo, a fakt, że wynosi ona około 1/2 sumy obu statystyk sugeruje, że w istocie obie metody działają 'bardzo podobnie'

Prawa strona tabeli jest analogiczna do lewej, ale tym razem zamiast wartości Celu mamy czas działania samej części *2-Opt*.
Jak widać, wszytskie różnice są ujemne, ale (w połączeniu z danymi otrzymanymi w tabeli 1) można powiedzieć, że łatwo uzależnić czas działania algorytmu 2-Opt od pierwotnego rozwiązania - jeżeli jest znacznie 'lepsze', to także widać, że różnice w czasie są znacznie wyższe.

2.5.3 Część III

Tabela numer 3:

Nr.In	1N	FN	1B	FB	1N(T)	FN(T)	1B(T)	FB(T)
1	3157	2975	3452	2998	0.000644468	0.0983119	0.0048885	1.01056
2	8980	8181	8980	8181	2.07E-05	0.00103294	3.76E-05	0.00205635
3	135737	133953	129421	128279	0.000146889	0.0121529	0.000282864	0.0361393
4	7579	7129	7198	6908	0.000104299	0.0139546	0.000241166	0.0310817
5	8191	7113	8191	7113	0.000134752	0.0224471	0.000239433	0.0382092
6	803	746	804	748	6.75E-05	0.00723383	0.000454636	0.0460773
7	511	482	545	499	2.06E-05	0.00110371	0.000153318	0.00747459
8	642	608	621	599	6.48E-05	0.0034514	0.000231878	0.0173178
9	27807	24698	26854	24815	6.99E-05	0.00736386	0.00012696	0.0131532
10	33633	31479	33612	31479	0.000222951	0.0240762	0.00021405	0.0365781
11	35859	34543	35794	34543	0.000252144	0.0555201	0.000354758	0.0790306
12	29158	25884	29158	25884	9.39E-05	0.00853953	0.000109656	0.0112842
13	34499	31611	32825	31611	0.000131333	0.0222619	0.000253897	0.0373115
14	36980	35389	36980	35389	0.000236748	0.0511064	0.000379147	0.0778277
15	26227	23660	26227	23564	6.77E-05	0.00713671	0.000131215	0.0138976
16	26947	24852	26947	24852	0.000125232	0.00788403	0.000222792	0.0115013
17	27460	24782	27460	24782	6.63E-05	0.00694331	0.000201731	0.0129614
18	20356	16935	20356	16935	5.77E-05	0.00701994	0.000113084	0.0166362
19	54019	49201	54019	49201	0.000421003	0.166132	0.000678634	0.260951
20	54019	49201	54019	49201	0.000420879	0.155087	0.000638746	0.240323
21	68964	68531	70315	67864	0.0102591	14.3142	0.0157081	24.5947
22	331103	313745	322807	310967	0.0042375	4.41593	0.0108562	11.6176
23	46680	46680	49166	47899	5.57E-05	0.00624229	0.000471479	0.0663509
24	69297	67055	71550	67323	8.92E-05	0.00915955	0.000177797	0.0226451
25	120769	114553	120769	114553	8.82E-05	0.012921	0.000207303	0.0303293
26	61652	60964	61652	60964	9.07E-05	0.0139036	0.000168004	0.0304266
27	85699	79564	85699	79564	0.000102496	0.0173458	0.000168221	0.0335902
28	94683	92552	94683	92903	0.000204923	0.0498144	0.00163079	0.352259
29	58023	54491	58635	54604	0.000284032	0.0803066	0.000632295	0.193229
30	59890	58279	58151	58151	0.000401408	0.125099	0.00113758	0.380743
31	131281	127230	131445	126062	0.000791101	0.383126	0.0016203	0.873932
32	153462	130921	153462	130921	3.31E-05	0.00248934	6.17E-05	0.00508362
33	2752	2612	2632	2606	0.000155953	0.0351781	0.000429553	0.113054
34	8605	7993	8700	7934	0.00137766	0.857353	0.0040416	2.48614
35	11054	10540	10763	10657	0.00274642	2.70393	0.00916338	7.70218
36	1554	1437	1544	1432	5.00E-05	0.00510014	0.000238881	0.022591
37	830	796	801	751	7.09E-05	0.00241989	0.000155393	0.0108239
38	152493	140486	152493	140486	0.000206588	0.049608	0.00139074	0.239691
39	5030	4578	4941	4691	0.000318213	0.0560495	0.000668361	0.163452

Przy czym kolejne kolumny oznaczają:

- 1N - Wartość funkcji Celu dla algorytmu *Nearest Neighbor* startującego z wybranego miasta
- FN - Wartość funkcji Celu dla algorytmu *Nearest Neighbor* startującego z każdego miasta, i wybierający najlepsze
- 1B - Wartość funkcji Celu dla algorytmu *Branching Nearest Neighbor* (z głębokością = 2) startującego z wybranego miasta
- FB - Wartość funkcji Celu dla algorytmu *Branching Nearest Neighbor* (z głębokością = 2) startującego z każdego miasta, i wybierający najlepsze

Zapisanie wszystkich obliczeń potrzebnych do wykkonania testu Wilcoxona zajęłoby mnóstwo miejsca, dlatego też pominiemy ich zapis, a jedynie podamy otrzymane wynika dla podanych porównań:

- 1N-FN - Jak można się było spodziewać (i co także widać w tabelce), przy wykonywaniu algorytmu *Nearest Neighbor* z każdego 'miasta' 'jakość' rozwiązania poprawiła się (albo najgorzej - nie zmieniła się) w każdym przypadku, dlatego wartość statystyki wynosi 0.

- 1B-FB - Mamy tutaj sytuację analogiczną do powyższej.
- 1N-FB - Tak samo jak w poprzednich widać tutaj znaczną przewagę startowania z każdego 'miasta', pomimo różnych metod.
- 1N-1B - Tutaj już można zaobserwować pewne różnice, pomimo tego, że w wielu przypadkach mamy takie same wartośći rozwiązania. Nasze statystyki wynoszą tutaj:
  - $T_+ = 163$
  - $T_- = 113$

  Zatem można powiedzieć, że są na tyle bliskie siebe, by stwierdzić, że podane algorytmy względnie podobne, chociaż widać przewagę opcji *Branching*.
- FN-FB - Analogicznie do powyższego:
  - $T_+ = 142$
  - $T_- = 111$

  Wnioski identyczne jak powyżej.
- 1B-FN - Przypadek dosyć ciekawy, ponieważ dla jednej instancji (numer 30) algorytm *Branching* z jednego miasta zachował się lepiej, niż algorytm standardowy startujący z każdego 'miasta'. (Jeżeli liczyć statystyki 'porządnie', to otrzymamy 8, co można potraktować jako 'wyjątek potwierdzający regułę'.

Jeżeli chodzi zaś o czas działania, to z części z czasem ('XY(T)') widać, że pojawia się nam dosyć jednoznaczne porównanie co do prędkości (choć tu także się pojawiło 1 odstępstwo, dla instancji nr 10 *Branching* okazał się szybszy od zwykłego algorytmu, choć przy tak małej różnicy w czasie, możne to 'zaniedbać'):

$$1N > 1B > FN > FB$$

Gdzie mamy od lewej do prawej jako od najszybciej działającego, do najdłuższego. Takich wyników można się było zresztą spodziewać, ponieważ wynikają one z samych konstrukcji i złożoności poszczególnych algorytmów.

2.5.4 Część IV

Tabela numer 4:

Nr.Inst	Start	2-O R	2-O T	3-O R	3-O T	3O R Adv.	3O T C
1	2975	2741	0.124986	2622	47.7313	0.04	381.893172035268
2	8181	8181	0.000171163	7542	0.0598344	0.078107810781078	349.575550790767
3	133953	128126	0.0182142	121549	2.83359	0.049099310952349	155.570379154725
4	7129	6678	0.0146034	6203	1.42473	0.066629260765886	97.561526767739
5	7113	6815	0.0184333	6559	5.19192	0.035990440039365	281.65982216966
6	746	675	0.00796331	635	1.12242	0.053619302949062	140.94892701653
7	482	473	0.000239988	427	0.0454607	0.095435684647303	189.429054786073
8	608	566	0.00213278	552	0.190506	0.023026315789474	89.3228556156753
9	24698	21807	0.00884338	21389	0.600951	0.01692444732367	67.9548995972128
10	31479	29147	0.0397161	27315	6.31122	0.058197528511071	158.908352028522
11	34543	30682	0.0889522	29600	13.598	0.031323278232927	152.868619325885
12	25884	23375	0.00855502	22826	0.58029	0.021210013908206	67.8303498998249
13	31611	28079	0.0442487	26916	4.42155	0.036790990477998	99.924969547128
14	35389	31820	0.0968744	29868	8.89944	0.05515838254825	91.8657560717795
15	23660	21622	0.0130221	21341	0.745022	0.011876584953508	57.2121240045768
16	24852	23538	0.00716928	21404	1.19654	0.085868340576211	166.898210141046
17	24782	23137	0.0109679	22350	0.606017	0.031756920345412	55.253694873221
18	16935	15237	0.0113048	14484	0.67488	0.044464127546501	59.6985351355177
19	49201	44826	0.287924	43209	90.8267	0.032865185666958	315.45373084564
20	49201	44826	0.286022	43209	93.6429	0.032865185666958	327.397542846354
21	46680	45340	0.00654229	44577	0.305209	0.016345329905741	46.6517075825132
22	67055	60663	0.0138139	59246	1.33616	0.0211319066438	96.7257617327475
23	114553	105440	0.020296	103080	3.94201	0.020601817499324	194.22595585337
24	60964	60754	0.00672133	58763	1.8088	0.032658618200906	269.113404638665
25	79564	76104	0.0316716	74149	2.07173	0.024571414207431	65.4128619962364
26	92552	83137	0.111207	80877	17.5516	0.024418705160342	157.828194268346
27	54491	53507	0.0650241	50150	39.9601	0.06160650382632	614.542915626668
28	58279	51241	0.376743	49151	66.0215	0.035861974296059	175.242804776731
29	127230	115013	0.747886	111189	304.462	0.030055804448636	407.096803523532
30	130921	117709	0.0036771	109055	0.535062	0.066100931095852	145.511952353757
31	2612	2479	0.0253908	2372	12.0045	0.040964777947933	472.789356774895
32	1437	1269	0.00769565	1261	0.743045	0.005567153792624	96.5538973316094
33	796	734	0.00401357	694	0.22891	0.050251256281407	57.0340121139036
34	140486	130301	0.0438273	127763	14.3303	0.018065857096081	326.972001469404
35	4578	4182	0.0961123	3990	33.3919	0.041939711664482	347.425875772404

Przy czym kolejne kolumny oznaczają:

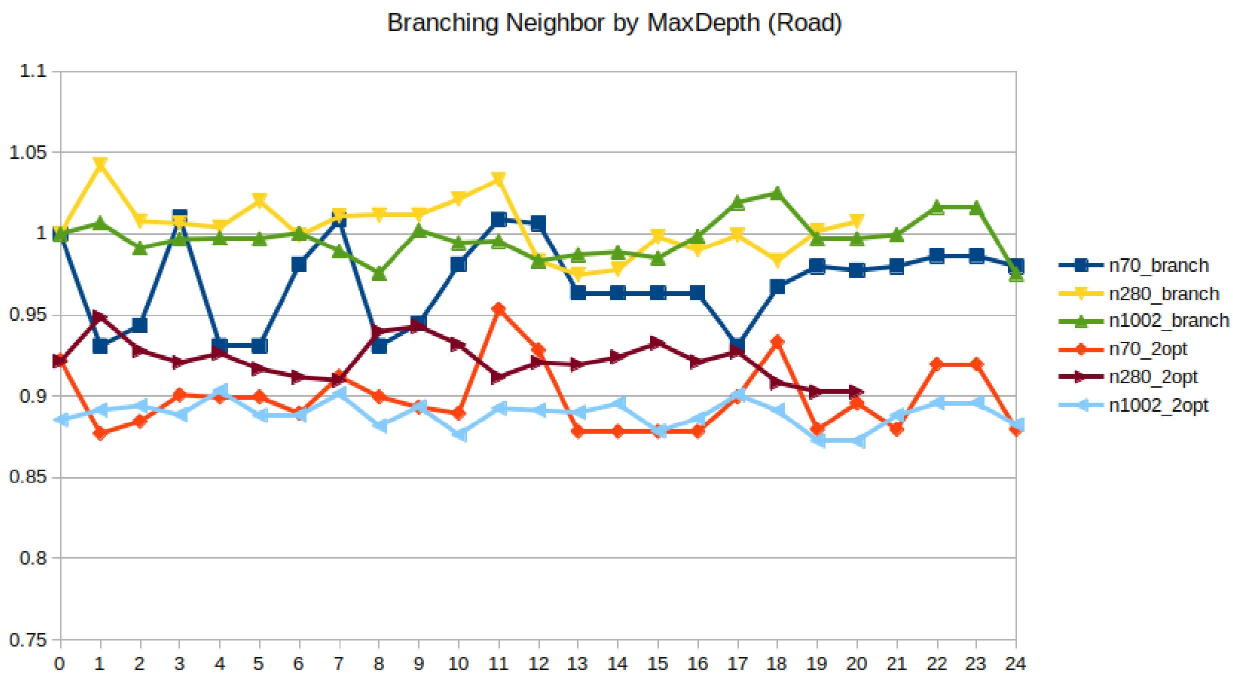
- Start - Wartość funkcji Celu dla rozwiązania startowego dla obu algorytmów
- 2-O R - Wartość funkcji Celu dla algorytmu *2-Opt* o wykonaniu algorytmu
- 2-O T - Czas działania dla algorytmu *2-Opt* o wykonaniu algorytmu
- 3-O R - Wartość funkcji Celu dla algorytmu *3-Opt* o wykonaniu algorytmu
- 3-O T - Czas działania dla algorytmu *3-Opt* o wykonaniu algorytmu
- 3-O R Adv. - Procentowa 'poprawa jakości' przy użyciu *3-Opta*, wyliczana jako $(2OR/Start) - (3OR/Start)$
- 3-O T C - Inforacja o dodatkowym nakładzie czasu potrzebnym dla algorytmu *3-Opt* liczona jako wielokrotność względem *2-Opta* $(3OT/2Ot)$

Zapiszmy jeszcze jedną mini-tabelę uwzględniającą kilka przydatnych tutaj statystyk:
Ogólnie mówiąc, można (mniej więcej) stwierdzić, że przy użyciu algorytmu *3-Opt* znajdziemy średnio rozwiązanie lepsze o około 4% niż w przypadku *3-Opta*, jednak będzie się to wiązało z około 200 razy dłuższym czasem działania.

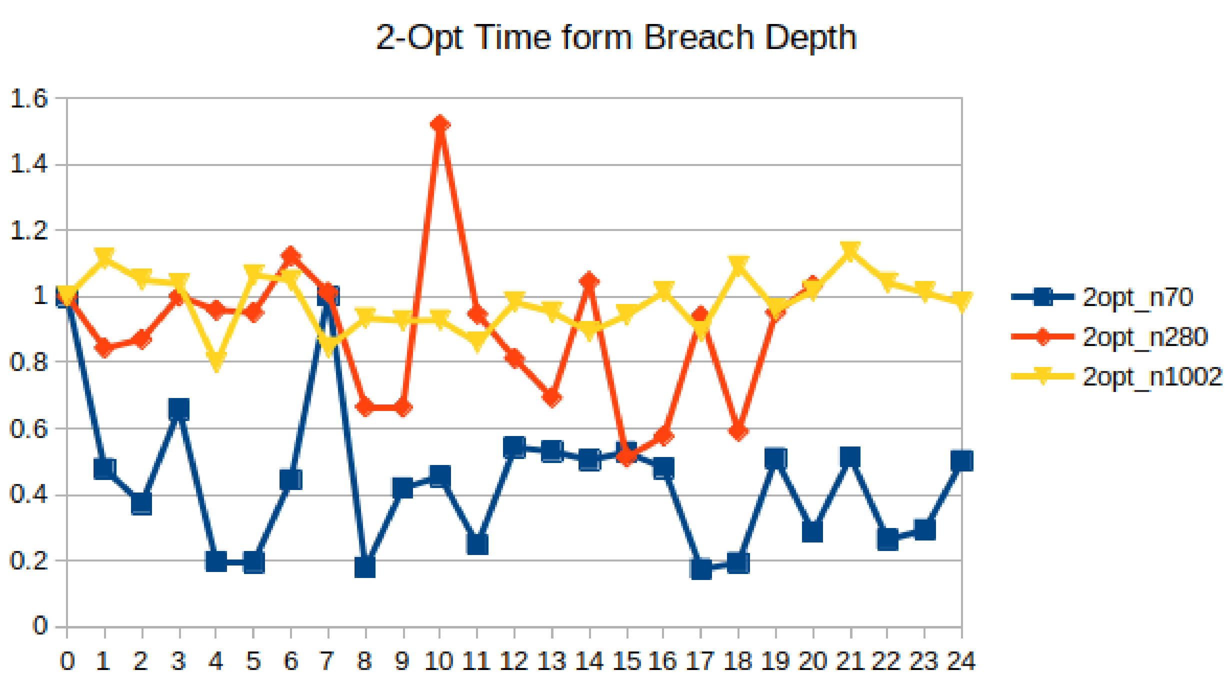
Statystyka	Przewaga *3-O*	Nakład czasowy
Min	0.005567153792624	46.6517075825132
Avg	0.039752882107118	193.724445099084
Max	0.095435684647303	614.542915626668
Std.Dev	0.021205236789745	139.524093828591

2.5.5 Bliższe przypatrzenie się *Branching Neighbor*, oraz *2-Opt*

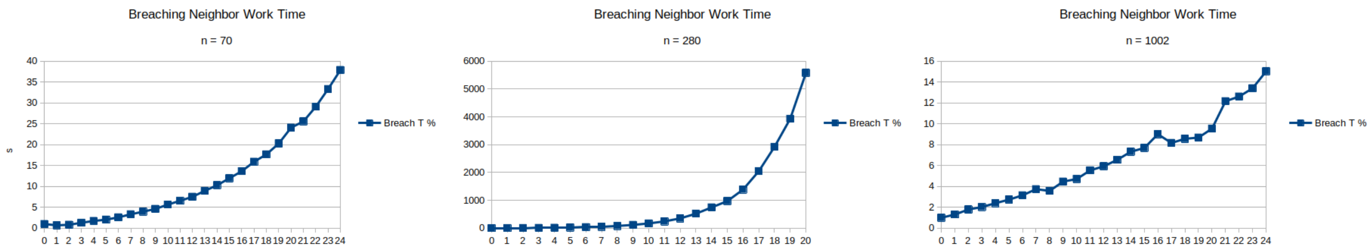
Dodatkowo przypatrzy się jeszcze (na wykresach) co się dzieje z rozwiązaniem, kiedy podczas działania *Branching* będziemy modyfikować maksymalny stopień zagłębienia (*maxDepth*):



(a) Porównanie procentowe względem rozwiązania bez branchingu (depth = 0)



(b) czas działania dla 2-Opt'a względem rozwiązania z różną głębokością



(a) Instatncja dla n = 70 (b) Instatncja dla n = 280 (c) Instatncja dla n = 1002

Rysunek 2: Wielokrotność działania dla poszczególnych iteracji względem rozwiązania bez *branchingu*

Teraz przejdźmy do analizy:

- Jak widać z rysunku 3, czas działania może się drastycznie różnić w zależności od zadanego przypadku:
  - a) Czas rośnie około kwadratowo
  - b) Czas rośnie około wykładniczo
  - c) Czas rośnie około liniowo

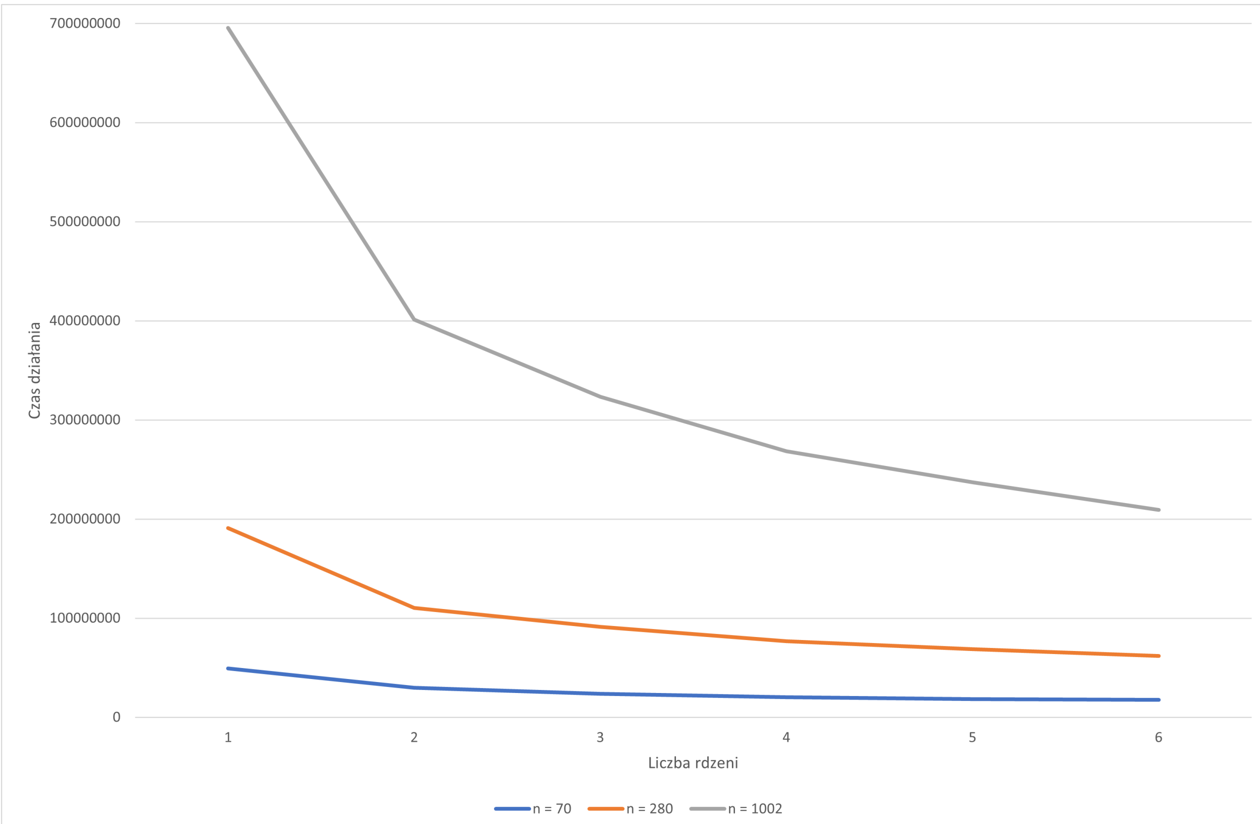
  Doskonale pokazuje to, jak bardzo algorytm jest uzależniony od konkretnej instanji, jako że najbardziej 'kosztowna' operacja to właśnie 'branchowanie' w przypadku równoodległych sąsiadów, zatem jeżeli jest dużo takich przypadków (jak dla n = 280), to także czas znacznie przyśpiesza, a kiedy jest ich bardzo mało (jak dla n = 1002) to wzrost czasu jest 'względnie' niewielki

- Dalej w kontekście czas: Jak to widać dla wykresu czasu 2-Opta na Rysunku 1b), w zależności od przypadku jego czas działania może być dłuższy, lub krótszy, jednak cały czas będąc w przedziale $(0.2; 1.5)$ względem rozwiązania pierwotnego, zatem można zaryzykować stwierdzenie, że jego czas działania jest mało od tego zależny.

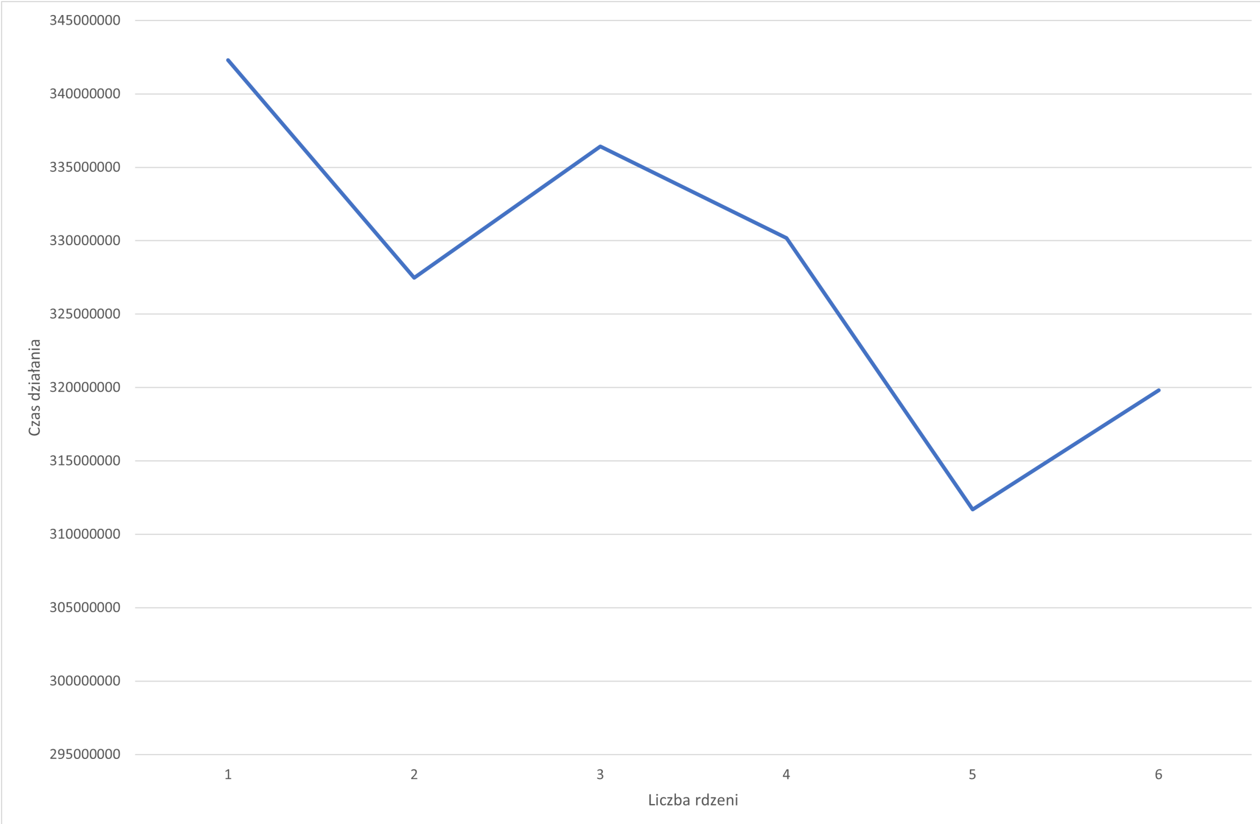
- Na koniec jeszcze przypatrzmy się, na wykres na rysunku 1a), gdzie widzimy porównanie funkcji celu względem rozwiązania startowego. Widzimy tutaj, że zarówno dla *Branching* jak i dla *2-Opt* wartości te raz skaczą 'do góry', a raz spadają 'w dół', cały czas wachając się w okolicach rzędu co najwyżej 5%. Jakaś poprawa to jest, jednakże w połączeniu z zestawieniami czasu, widać, że jest to mimo wszystko dosyć 'kosztowny' zysk.

2.5.6 Algorytmy uwspółbieżnione

Przeprowadzono testy w celu sprawdzenia wpływu ilości rdzeni dostępnych przez algorytm k-random na czas działania algorytmu. Wartości funkcji celu dla algortymu wielowątkowego pozostały praktycznie nie zmienione (zmiany rzędu < 1%).
Uwspółbieżniony algorytm najbliższego sąsiada nie dał tak dobrych wyników prawdopodobnie ze względu na wadliwą implementację. Ze względów czasowych przeprowadzono testy tylko na małym przykładzie ze 100 poziomami przeszukiwań. Płytkie zagłębienie powodowało jeszcze mniejsze zyski związane z uwspółbieżnieniem.



Rysunek 3: k-random



Rysunek 4: Braching nearest neighbor

2.6 Wnioski

W większości zawarte były podczas opisu wyników, oraz przewijały się gdzieniegdzie wcześniej, jednak jednoznacznie można powiedzieć, że w znacznej większości algorytm *2-Opt* okazał się zwracać najlepsze rozwiązanie w powiedzmy 'jeszcze przystępnym czasie'.

Drobna uwaga

Powyżej ujęte zostały 'ciekawsze' przypadki, oraz oczywiście nie opisaliśmy tutaj eksperymentów przeprowadzonch na każdej możliwej instancji z TSPLIB, ponieważ objętościowo znacznie powiększyłoby to (i tak już dosyć obszerne) sprawozdanie.