Metody optymalizacji L1

Gabriel Budziński
254609

March 28, 2023

1 Zadanie 1

1.1 Opis Modelu

1.1.1 Zmienne decyzyjne

Zmienne decyzyjne mają postać wektora $\boldsymbol{x}$ spełniającego nierówność $\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$.

1.1.2 Ograniczenia

Zadany jest zestaw równań liniowych postaci

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

gdzie

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, i, j \in [n]$$

$$c_i = b_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{i+j-1}, i \in [n]$$

1.1.3 Funkcja celu

Funkcja celu ma postać min $\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$, gdzie $\boldsymbol{c}$ to wektor współczynników kosztu.

1.2 Wyniki i interpretacja

Prawidłowym rozwiązaniem zadania jest $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{1}$, ale przez macierz A zadanie jest źle uwarunkowane. Rozwiązano model dla wartości n ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 10\}$:

n	$\|\|x - \tilde{x}\|\|_2 / \|\|x\|\|_2$
2	$1.10933564796705 \cdot 10^{-30}$
3	$1.34804824480736 \cdot 10^{-29}$
4	$1.06939716107966 \cdot 10^{-25}$
5	$1.12318763722721 \cdot 10^{-23}$
6	$4.66947802820021 \cdot 10^{-21}$
7	$2.81798474577652 \cdot 10^{-16}$
8	0.26425662687595
9	0.466367895688764
10	0.980867548324338

Jak widzimy, błąd względny jest niewielki dla $x = 2$, ale rośnie coraz szybciej i dla $x = 10$ jest już ponad 1%. Z dokładnością do co najmniej dwóch cyfr można obliczyć dla $n \leqslant 9$.

2 Zadanie 2

2.1 Opis Modelu

2.1.1 Zmienne decyzyjne

W modelu mamy trójwymiarową macierz zmiennych decyzyjnych $x \in \mathbb{R}^{n \times n \times 2}$, gdzie x_{ijk} oznacza liczbę dźwigów typu k przetransportowanych z miasta i do miasta j.

2.1.2 Ograniczenia

Zgodnie z treścią zadania zaprogramowano trzy ograniczenia:

- Z miasta nie może wyjechać więcej dźwigów typu k niż jest ich w nadmiarze (dwuwymiarowa macierz $s \in \mathbb{N}^{n \times 2}$, zatem

$$(\forall i \in 0, \ldots, n-1, k \in \{I, II\}) \left(\sum_{j=0}^{n-1} x_{ijk} \leqslant s_{ik} \right)$$

- Każde miasto powinno dostać co najmniej tyle dźwigów typu II ile jest deficytu (dwuwymiarowa macierz $d \in \mathbb{N}^{n \times 2}$)

$$(\forall i \in 0, \ldots, n-1) \left(\sum_{j=0}^{n-1} x_{jiII} \geqslant d_{iII} \right)$$

- Suma wszystkich dźwigów przetransportowanych do miasta powinna być równa co najmniej sumie deficytów wszystkich typów

$$(\forall i \in 0, \ldots, n-1) \left(\sum_{j=0, k=I}^{n-1, II} x_{jik} \geqslant \sum_{k=I}^{II} d_{ik} \right)$$

2.1.3 Funkcja celu

Funkcją celu jest koszt transportu dźwigów pomiędzy miastami, który należy zminimalizować. Do rozwiązania modelu wprowadzono odległości między podanymi miastami pobrane z Google Maps.

2.2 Wyniki i interpretacja

W poniższych tabelach przedstawiono obliczone wartości zmiennych decyzyjnych. W kolumnach wypisano miasta do których transportowane były dźwigi, a w wierszach te, z których te dźwigi pochodziły.

	Opole	Brzeg	Nysa	Prudnik	Strzelce	Koźle	Racibórz
Opole	-	4	-	-	-	3	-
Brzeg	-	-	-	-	-	-	-
Nysa	-	5	-	1	-	-	-
Prudnik	-	-	-	-	-	-	-
Strzelce	-	-	-	-	-	5	-
Koźle	-	-	-	-	-	-	-
Racibórz	-	-	-	-	-	-	-

Table 1: Dźwigi typu I

	Opole	Brzeg	Nysa	Prudnik	Strzelce	Koźle	Racibórz
Opole	-	-	-	-	-	-	-
Brzeg	-	1	-	-	-	-	-
Nysa	2	-	-	-	-	-	-
Prudnik	-	-	-	3	4	2	1
Strzelce	-	-	-	-	-	-	-
Koźle	-	-	-	-	-	-	-
Racibórz	-	-	-	-	-	-	-

Table 2: Dźwigi typu I

Ograniczenie całkowitoliczbowości nie jest konieczne, ponieważ model zwraca to samo rozwiązanie z nim oraz bez niego.

3 Zadanie 3

3.1 Opis Modelu

3.1.1 Zmienne decyzyjne

3.1.2 Ograniczenia

3.1.3 Funkcja celu

3.2 Wyniki i interpretacja

4 Zadanie 4

4.1 Opis Modelu

4.1.1 Zmienne decyzyjne

4.1.2 Ograniczenia

4.1.3 Funkcja celu

4.2 Wyniki i interpretacja