

# Metody optymalizacji L1

Gabriel Budziński  
254609

April 2, 2023

## 1 Zadanie 1

### 1.1 Opis Modelu

#### 1.1.1 Zmienne decyzyjne

Zmienne decyzyjne mają postać wektora  $\mathbf{x}$  spełniającego nierówność  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ .

#### 1.1.2 Ograniczenia

Zadany jest zestaw równań liniowych postaci

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

gdzie

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, i, j \in [n]$$
$$c_i = b_i = \sum_{j=1}^n \frac{1}{i+j-1}, i \in [n]$$

#### 1.1.3 Funkcja celu

Funkcja celu ma postać  $\min \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ , gdzie  $\mathbf{c}$  to wektor współczynników kosztu.

## 1.2 Wyniki i interpretacja

Prawidłowym rozwiązaniem zadania jest  $\mathbf{x} = \mathbf{1}$ , ale przez macierz  $A$  zadanie jest źle uwarunkowane. Rozwiązano model dla wartości  $n$  ze zbioru  $\{1, 2, \dots, 10\}$ :

n	$\ x - \tilde{x}\ _2 / \ x\ _2$
1	0
2	$1.05325004057301 \cdot 10^{-15}$
3	$3.67157765110227 \cdot 10^{-15}$
4	$3.27016385075681 \cdot 10^{-13}$
5	$3.35139916635905 \cdot 10^{-12}$
6	$6.83335790676898 \cdot 10^{-11}$
7	$1.67868542192291 \cdot 10^{-08}$
8	0.514058972177268
9	0.682911338087722
10	0.990387574803086

Jak widzimy, błąd względny jest niewielki dla  $x = 2$ , ale rośnie coraz szybciej i dla  $x = 10$  jest już prawie 100%. Z dokładnością do co najmniej dwóch cyfr można obliczyć dla  $n \leq 7$ .

## 2 Zadanie 2

### 2.1 Opis Modelu

#### 2.1.1 Zmienne decyzyjne

W modelu mamy trójwymiarową macierz zmiennych decyzyjnych  $x \in \mathbb{R}^{n \times n \times 2}$ , gdzie  $x_{ijk}$  oznacza liczbę dźwigów typu  $k$  przetransportowanych z miasta  $i$  do miasta  $j$ .

#### 2.1.2 Ograniczenia

Zgodnie z treścią zadania zaprogramowano trzy ograniczenia:

- Z miasta nie może wyjechać więcej dźwigów typu  $k$  niż jest ich w nadmiarze (dwuwymiarowa macierz  $s \in \mathbb{N}^{n \times 2}$ , zatem

$$(\forall i \in \{1, \dots, n\}, k \in \{I, II\}) \left( \sum_{j=1}^{n-1} x_{ijk} \leq s_{ik} \right)$$

- Każde miasto powinno dostać co najmniej tyle dźwigów typu II ile jest deficytu (dwuwymiarowa macierz  $d \in \mathbb{N}^{n \times 2}$ )

$$(\forall i \in \{1, \dots, n\}) \left( \sum_{j=1}^n x_{jiII} \geq d_{iII} \right)$$

- Suma wszystkich dźwigów przetransportowanych do miasta powinna być równa co najmniej sumie deficytów wszystkich typów

$$(\forall i \in \{1, \dots, n\}) \left( \sum_{j=1, k=I}^{n, II} x_{jik} \geq \sum_{k=I}^{II} d_{ik} \right)$$

#### 2.1.3 Funkcja celu

Funkcją celu jest koszt transportu dźwigów pomiędzy miastami, który należy zminimalizować.

$$\sum_{i, j \in \{1, \dots, n\}, k \in \{I, II\}} x_{ijk} \cdot l_{ij} \cdot m_k$$

gdzie  $l$  to macierz odległości miast, a  $m$  to wektor współczynników kosztów transportu. Do rozwiązania modelu wprowadzono odległości między podanymi miastami pobrane z Google Maps.

## 2.2 Wyniki i interpretacja

W poniższych tabelach przedstawiono obliczone wartości zmiennych decyzyjnych. W kolumnach wypisano miasta do których transportowane były dźwigi, a w wierszach te, z których te dźwigi pochodziły.

	Opole	Brzeg	Nysa	Prudnik	Strzelce	Koźle	Racibórz
Opole	-	4	-	-	-	3	-
Brzeg	-	-	-	-	-	-	-
Nysa	-	5	-	1	-	-	-
Prudnik	-	-	-	-	-	-	-
Strzelce	-	-	-	-	-	5	-
Koźle	-	-	-	-	-	-	-
Racibórz	-	-	-	-	-	-	-

Table 1: Dźwigi typu I

	Opole	Brzeg	Nysa	Prudnik	Strzelce	Koźle	Racibórz
Opole	-	-	-	-	-	-	-
Brzeg	-	1	-	-	-	-	-
Nysa	2	-	-	-	-	-	-
Prudnik	-	-	-	3	4	2	1
Strzelce	-	-	-	-	-	-	-
Koźle	-	-	-	-	-	-	-
Racibórz	-	-	-	-	-	-	-

Table 2: Dźwigi typu II

Optymalny koszt transportu wyniósł  $1413.76 \cdot s$ , gdzie  $s$  to cena za transport dźwigu typu I o jeden kilometr. Ograniczenie całkowitościowości nie jest konieczne, ponieważ model zwraca to samo rozwiązanie z nim oraz bez niego.

### 3 Zadanie 3

#### 3.1 Opis Modelu

##### 3.1.1 Zmienne decyzyjne

W modelu wykorzystano zmienne odpowiadające grotom każdej ze strzałek na rysunku z polecenia.

- $B_1, B_2$  - ilość zakupionej ropy każdego z rodzajów w  $t$ ,
- $D_{1p}, D_{1o}, D_{1d}, D_{1l}, D_{2p}, D_{2o}, D_{2d}, D_{2l}, K_p, K_o, K_l$  - ilość produktów destylacji dla każdej z jednostek w  $t$ ,
- $D_{1ohome}, D_{1oheavy}, D_{1dK}, D_{1dout}, D_{2ohome}, D_{2oheavy}, D_{2dK}, D_{2dout}$  - ilość produktów po rozdzielaniu w węzłach podana w  $t$ ,

##### 3.1.2 Ograniczenia

Zgodnie z treścią zadania zaprogramowano ograniczenia:

- Ograniczenia związane z wydajnością procesów (gdzie  $e$  to macierz wydajności):
  - $D_{1p} = B_1 \cdot e[d1, p]$
  - $D_{1o} = B_1 \cdot e[d1, o]$
  - $D_{1d} = B_1 \cdot e[d1, d]$
  - $D_{1l} = B_1 \cdot e[d1, l]$
  - $D_{2p} = B_1 \cdot e[d2, p]$
  - $D_{2o} = B_1 \cdot e[d2, o]$
  - $D_{2d} = B_1 \cdot e[d2, d]$
  - $D_{2l} = B_1 \cdot e[d2, l]$
  - $K_p = B_1 \cdot e[k, p]$
  - $K_o = B_1 \cdot e[k, o]$
  - $K_l = B_1 \cdot e[k, l]$
- Ograniczenia związane z zachowaniem ilości produktu w węzłach (I prawo Kirchhoffa):
  - $D_{1o} = D_{1ohome} + D_{1oheavy}$
  - $D_{1d} = D_{1dK} + D_{1dout}$
  - $D_{2o} = D_{2ohome} + D_{2oheavy}$
  - $D_{2d} = D_{2dK} + D_{2dout}$

- Ograniczenia związane z popytem na produkty destylacji (gdzie  $d$  to wektor popytu):
  - $D_{1p} + D_{2p} + K_p \geq d[p]$
  - $D_{1ohome} + D_{2ohome} + K_o \geq d[p]$
  - $D_{1ohome} + D_{1dout} + D_{1l} + D_{2ohome} + D_{2dout} + D_{2l} + K_l \geq d[p]$
- Ograniczenia związane z poziomem siarki (gdzie  $s$  to wektor poziomu siarki):
  - $D_{1ohome} \cdot s[b1] + D_{2ohome} \cdot s[b2] + K_o \cdot s[k] \leq (D_{1ohome} + D_{2ohome} + K_o) \cdot s[ohome]$

### 3.1.3 Funkcja celu

Zgodnie z treścią zadania funkcja celu przedstawiająca całkowite koszty produkcji, które minimalizujemy ma postać

$$B_1 \cdot (p[b1] + c[b1]) + B_2 \cdot (p[b2] + c[b2]) + (D_{1dK} + D_{2dK}) * c[k]$$

gdzie  $p$  to wektor cen ropy, a  $c$  to wektor kosztów destylacji.

## 3.2 Wyniki i interpretacja

W poniższej tabeli przedstawiono wartości kilku kluczowych zmiennych oraz funkcji celu

Zakup B1	1026030.369 t
Zakup B2	0.000 t
Destylat do krakowania	92190.889 t
Koszt	1345943600.87 \$

Jak widzimy, w rozwiązaniu optymalnym kupujemy jedynie ropę typu B1.

## 4 Zadanie 4

### 4.1 Opis Modelu

#### 4.1.1 Zmienne decyzyjne

W modelu wykorzystano następujące zmienne decyzyjne:

- macierz  $r \in \{0, 1\}^{|G| \times |S|}$ , gdzie  $G, S$  to odpowiednio zbiór grup i zbiór przedmiotów,  $r_{gs} = 1$  wtedy i tylko wtedy, gdy student jest zapisany na ćwiczenia  $(g, s)$ ,
- macierz  $h \in \{0, 1\}^{|T| \times |D|}$ , gdzie  $T, D$  to odpowiednio zbiór półgodzinnych slotów (począwszy od 8:00 do 20:00, numerowane od 16 do 39) oraz zbiór dni,  $h_{td} = 1$  wtedy i tylko wtedy, gdy student jest zapisany na ćwiczenia odbywające się w tym slotcie,
- $t_1, t_2, t_3$  - zmienne binarne odpowiadające obecności zajęć w czasie podanych godzin treningów sportowych.

#### 4.1.2 Ograniczenia

Zgodnie z treścią zadania oprogramowano ograniczenia:

- Brak kolizji między zajęciami:
 
$$\left( \forall g_1, g_2 \in G, s_1, s_2 \in S \right) \left[ (day_{g_1 s_1} = day_{g_2 s_2} \wedge (s_1 \neq s_2 \vee g_1 \neq g_2) \wedge (start_{g_1 s_1} \leq end_{g_2 s_2} \wedge start_{g_2 s_2} \leq end_{g_1 s_1})) \implies r_{g_1 s_1} + r_{g_2 s_2} \leq 1 \right]$$

- Maksimum 4 godziny ćwiczeń dziennie:

$$(\forall d \in D) \left( \sum_{t \in T} h_{td} \leq 4 \cdot 2 \right)$$

- Wolna godzina między 12 a 14 każdego dnia:

$$(\forall d \in D) \left( \sum_{t \in \{24,25,26,27\}} h_{td} \leq 1 \cdot 2 \right)$$

- Należy zapisać się na jedną z grup z każdego przedmiotu:

$$(\forall s \in S) \left( \sum_{g \in G} r_{gs} = 1 \right)$$

- Sloty, w których trwają zajęcia muszą być oznaczone jako zajęte:

$$(\forall g \in G, s \in S, t \in T) (t \geq \text{start}_{gs} \wedge t < \text{end}_{gs} \implies h_{gs} \geq r_{gs})$$

- Ograniczenia związane z treningami:

- Ustaw  $t_i$  na 1 jeśli jakiś slot w czasie i-tego terminu treningu jest zajęty:

$$h_{26,1} + h_{27,1} + h_{28,1} + h_{29,1} \geq t_1$$

$$h_{22,3} + h_{23,3} + h_{24,3} + h_{25,3} \geq t_2$$

$$h_{26,3} + h_{27,3} + h_{28,3} + h_{29,3} \geq t_3$$

- Co najmniej jeden ze slotów jest wolny, czyli  $t_1 \wedge t_2 \wedge t_3 = 0$ :

$$\sum_{i=1}^3 t_i \leq 2$$

- Ograniczenia dodatkowe:

- Zapisywanie się na zajęcia jedynie w poniedziałek, wtorek i czwartek:

$$(\forall g \in G, s \in S) (\text{day}_{gs} = 3 \vee \text{day}_{gs} = 5 \implies r_{gs} = 0)$$

- Zapisywanie się jedynie na grupy ze wskaźnikiem preferencji co najmniej 5:

$$(\forall g \in G, s \in S) (p_{gs} \leq 4 \implies r_{gs} = 0)$$

#### 4.1.3 Funkcja celu

Zgodnie z treścią zadania maksymalizowana funkcja celu wyraża sumę wartości preferencji przedmiotów, na które zapisał się student.

$$\sum_{g \in G, s \in S} r_{gs} \cdot p_{gs}$$

gdzie  $p$  to macierz preferencji.

## 4.2 Wyniki i interpretacja

Bez stosowania ograniczeń dodatkowych osiągnięto plan, którego suma wskaźników preferencji wynosi 37:

	Algebra	Analiza	Fizyka	Chemia min.	Chemia org.
I					
II		×		×	×
III	×				
VI			×		

Który na planie godzinowym wygląda następująco:

	Pn.	Wt.	Śr.	Cz.	Pt.
8:00					
8:30					
9:00					
9:30					
10:00					
10:30					
11:00					
11:30					
12:00					
12:30					
13:00					
13:30					
14:00					
14:30					
15:00					
15:30					
16:00					
16:30					
17:00					
17:30					
18:00					
18:30					
19:00					
19:30					

Natomiast stosując dodatkowe ograniczenia osiągnięto wynik 28:

	Algebra	Analiza	Fizyka	Chemia min.	Chemia org.
I	×				
II			×		×
III				×	
VI		×			

	Pn.	Wt.	Śr.	Cz.	Pt.
8:00					
8:30					
9:00					
9:30					
10:00					
10:30					
11:00					
11:30					
12:00					
12:30					
13:00					
13:30					
14:00					
14:30					
15:00					
15:30					
16:00					
16:30					
17:00					
17:30					
18:00					
18:30					
19:00					
19:30					

Jak widać oba rozwiązania spełniają założenia o przerwie obiadowej oraz dostępności terminów treningu.