Metody optymalizacji L1

Gabriel Budziński
254609

April 2, 2023

1 Zadanie 1

1.1 Opis Modelu

1.1.1 Zmienne decyzyjne

Zmienne decyzyjne mają postać wektora $\boldsymbol{x}$ spełniającego nierówność $\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$.

1.1.2 Ograniczenia

Zadany jest zestaw równań liniowych postaci

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

gdzie

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, i, j \in [n]$$

$$c_i = b_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{i+j-1}, i \in [n]$$

1.1.3 Funkcja celu

Funkcja celu ma postać min $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$, gdzie $\boldsymbol{c}$ to wektor współczynników kosztu.

1.2 Wyniki i interpretacja

Prawidłowym rozwiązaniem zadania jest $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{1}$, ale przez macierz A zadanie jest źle uwarunkowane. Rozwiązano model dla wartości n ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 10\}$:

n	$\lvert\lvert x - \tilde{x}\rvert\rvert_2/\lvert\lvert x\rvert\rvert_2$
2	$1.10933564796705 \cdot 10^{-30}$
3	$1.34804824480736 \cdot 10^{-29}$
4	$1.06939716107966 \cdot 10^{-25}$
5	$1.12318763722721 \cdot 10^{-23}$
6	$4.66947802820021 \cdot 10^{-21}$
7	$2.81798474577652 \cdot 10^{-16}$
8	0.26425662687595
9	0.466367895688764
10	0.980867548324338

Jak widzimy, błąd względny jest niewielki dla $x = 2$, ale rośnie coraz szybciej i dla $x = 10$ jest już prawie 100%. Z dokładnością do co najmniej dwóch cyfr można obliczyć dla $n \leqslant 7$.

2 Zadanie 2

2.1 Opis Modelu

2.1.1 Zmienne decyzyjne

W modelu mamy trójwymiarową macierz zmiennych decyzyjnych $x \in \mathbb{R}^{n \times n \times 2}$, gdzie x_{ijk} oznacza liczbę dźwigów typu k przetransportowanych z miasta i do miasta j.

2.1.2 Ograniczenia

Zgodnie z treścią zadania zaprogramowano trzy ograniczenia:

- Z miasta nie może wyjechać więcej dźwigów typu k niż jest ich w nadmiarze (dwuwymiarowa macierz $s \in \mathbb{N}^{n \times 2}$, zatem

$$(\forall i \in \{1, \ldots, n\}, k \in \{I, II\}) \left(\sum_{j=1}^{n-1} x_{ijk} \leqslant s_{ik} \right)$$

- Każde miasto powinno dostać co najmniej tyle dźwigów typu II ile jest deficytu (dwuwymiarowa macierz $d \in \mathbb{N}^{n \times 2}$)

$$(\forall i \in \{1, \ldots, n\}) \left(\sum_{j=1}^{n} x_{jiII} \geqslant d_{iII} \right)$$

- Suma wszystkich dźwigów przetransportowanych do miasta powinna być równa co najmniej sumie deficytów wszystkich typów

$$(\forall i \in \{1, \ldots, n\}) \left(\sum_{j=1,k=I}^{n,II} x_{jik} \geqslant \sum_{k=I}^{II} d_{ik} \right)$$

2.1.3 Funkcja celu

Funkcją celu jest koszt transportu dźwigów pomiędzy miastami, który należy zminimalizować.

$$\sum_{i,j \in \{1,\ldots,n\}, k \in \{I,II\}} x_{ijk} \cdot l_{ij} \cdot m_k$$

gdzie l to macierz odległości miast, a m to wektor współczynników kosztów transportu. Do rozwiązania modelu wprowadzono odległości między podanymi miastami pobrane z Google Maps.

2.2 Wyniki i interpretacja

W poniższych tabelach przedstawiono obliczone wartości zmiennych decyzyjnych. W kolumnach wypisano miasta do których transportowane były dźwigi, a w wierszach te, z których te dźwigi pochodziły.

	Opole	Brzeg	Nysa	Prudnik	Strzelce	Koźle	Racibórz
Opole	-	4	-	-	-	3	-
Brzeg	-	-	-	-	-	-	-
Nysa	-	5	-	1	-	-	-
Prudnik	-	-	-	-	-	-	-
Strzelce	-	-	-	-	-	5	-
Koźle	-	-	-	-	-	-	-
Racibórz	-	-	-	-	-	-	-

Table 1: Dźwigi typu I

	Opole	Brzeg	Nysa	Prudnik	Strzelce	Koźle	Racibórz
Opole	-	-	-	-	-	-	-
Brzeg	-	1	-	-	-	-	-
Nysa	2	-	-	-	-	-	-
Prudnik	-	-	-	3	4	2	1
Strzelce	-	-	-	-	-	-	-
Koźle	-	-	-	-	-	-	-
Racibórz	-	-	-	-	-	-	-

Table 2: Dźwigi typu II

Optymalny koszt transportu wyniósł $1413.76 \cdot s$, gdzie s to cena za transport dźwigu typu I o jeden kilometr. Ograniczenie całkowitoliczbowości nie jest konieczne, ponieważ model zwraca to samo rozwiązanie z nim oraz bez niego.

3 Zadanie 3

3.1 Opis Modelu

3.1.1 Zmienne decyzyjne

W modelu wykorzystano zmienne odpowiadające grotom każdej ze strzałek na rysunku z polecenia.

- B_1, B_2 - ilość zakupionej ropy każdego z rodzajów w t,
- $D_{1p}, D_{1o}, D_{1d}, D_{1l}, D_{2p}, D_{2o}, D_{2d}, D_{2l}, K_p, K_o, K_l$ - ilość produktów destylacji dla każdej z jednostek w t,
- $D_{1ohome}, D_{1oheavy}, D_{1dK}, D_{1dout}, D_{2ohome}, D_{2oheavy}, D_{2dK}, D_{2dout}$ - ilość produktów po rozdzieleniu w węzłach podana w t,

3.1.2 Ograniczenia

Zgodnie z treścią zadania zaprogramowano ograniczenia:

- Ograniczenia związane z wydajnością procesów (gdzie e to macierz wydajności):
  - $D_{1p} = B_1 \cdot e[d1, p]$
  - $D_{1o} = B_1 \cdot e[d1, o]$
  - $D_{1d} = B_1 \cdot e[d1, d]$
  - $D_{1l} = B_1 \cdot e[d1, l]$
  - $D_{2p} = B_1 \cdot e[d2, p]$
  - $D_{2o} = B_1 \cdot e[d2, o]$
  - $D_{2d} = B_1 \cdot e[d2, d]$
  - $D_{2l} = B_1 \cdot e[d2, l]$
  - $K_p = B_1 \cdot e[k, p]$
  - $K_o = B_1 \cdot e[k, o]$
  - $K_l = B_1 \cdot e[k, l]$
- Ograniczenia związane z zachowaniem ilości produktu w węzłach (I prawo Kirchhoffa):
  - $D_{1o} = D_{1ohome} + D_{1oheavy}$
  - $D_{1d} = D_{1dK} + D_{1dout}$
  - $D_{2o} = D_{2ohome} + D_{2oheavy}$
  - $D_{2d} = D_{2dK} + D_{2dout}$

- Ograniczenia związane z popytem na produkty destylacji (gdzie d to wektor popytu):
  - $D_{1p} + D_{2p} + K_p \geqslant d[p]$
  - $D_{1ohome} + D_{2ohome} + K_o \geqslant d[p]$
  - $D_{1oheavy} + D_{1dout} + D_{1l} + D_{2oheavy} + D_{2dout} + D_{2l} + K_l \geqslant d[p]$
- Ograniczenia związane z poziomem siarki (gdzie s to wektor poziomu siarki:
  - $D_{1ohome} \cdot s[b1] + D_{2ohome} \cdot s[b2] + K_o \cdot s[k] \leqslant (D_{1ohome} + D_{2ohome} + K_o) \cdot s[o_{home}]$

3.1.3 Funkcja celu

Zgodnie z treścią zadania funkcja celu przedstawiająca całkowite koszty produkcji, które minimalizujemy ma postać

$$B_1 \cdot (p[b1] + c[b1]) + B_2 \cdot (p[b2] + c[b2]) + (D_{1dK} + D_{2dK}) * c[k]$$

gdzie p to wektor cen ropy, a c to wektor kosztów destylacji.

3.2 Wyniki i interpretacja

W poniższej tabeli przedstawiono wartości kilku kluczowych zmiennych oraz funkcji celu

Zakup B1	1026030.369 t
Zakup B2	0.000 t
Destylat do krakowania	92190.889 t
Koszt	1345943600.87 $

Jak widzimy, w rozwiązaniu optymalnym kupujemy jedynie ropę typu B1.

4 Zadanie 4

4.1 Opis Modelu

4.1.1 Zmienne decyzyjne

W modelu wykorzystano następujące zmienne decyzyjne:

- macierz $r \in \{0,1\}^{|G|\times|S|}$, gdzie G, S to odpowiednio zbiór grup i zbiór przedmiotów, $r_{gs} = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy student jest zapisany na ćwiczenia (g, s),
- macierz $h \in \{0,1\}^{|T|\times|D|}$, gdzie T, D to odpowiednio zbiór półgodzinnych slotów (począwszy od 8:00 do 20:00, numerowane od 16 do 39) oraz zbiór dni, $h_{td} = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy student jest zapisany na ćwiczenia odbywające się w tym slocie,
- t_1, t_2, t_3 - zmienne binarne odpowiadające obecności zajęć w czasie podanych godzin treningów sportowych.

4.1.2 Ograniczenia

Zgodnie z treścią zadania oprogramowano ograniczenia:

- Brak kolizji między zajęciami:
  $\big(\forall g_1, g_2 \in G, s_1, s_2 \in S\big)$
  $\Big[\big(day_{g_1 s_1} = day_{g_2 s_2} \wedge (s_1 \neq s_2 \vee g_1 \neq g_2) \wedge (start_{g_1 s_1} \leqslant end_{g_2 s_2} \wedge start_{g_2 s_2} \leqslant end_{g_1 s_1})\big) \implies r_{g_1 s_1} + r_{g_2 s_2} \leqslant 1\Big]$

- Maksimum 4 godziny ćwiczeń dziennie:

$$(\forall d \in D)\left(\sum_{t \in T} h_{td} \leqslant 4 \cdot 2\right)$$

- Wolna godzina między 12 a 14 każdego dnia:

$$(\forall d \in D)\left(\sum_{t \in \{24,25,26,27\}} h_{td} \leqslant 1 \cdot 2\right)$$

- Należy zapisać się na jedną z grup z każdego przedmiotu:

$$(\forall s \in S)\left(\sum_{g \in G} r_{gs} = 1\right)$$

- Sloty, w których trwają zajęcia muszą być oznaczone jako zajęte:

$$(\forall g \in G, s \in S, t \in T)\big(t \geqslant start_{gs} \wedge t < end_{gs} \implies h_{gs} \geqslant r_{gs}\big)$$

- Ograniczenia związane z treningami:
  - Ustaw t_i na 1 jeśli jakiś slot w czasie i-tego terminu treningu jest zajęty:

$$h_{26,1} + h_{27,1} + h_{28,1} + h_{29,1} \geqslant t_1$$

$$h_{22,3} + h_{23,3} + h_{24,3} + h_{25,3} \geqslant t_2$$

$$h_{26,3} + h_{27,3} + h_{28,3} + h_{29,3} \geqslant t_3$$

  - Co najmniej jeden ze slotów jest wolny, czyli $t_1 \wedge t_2 \wedge t_3 = 0$:

$$\sum_{i=1}^{3} t_i \leqslant 2$$

- Ograniczenia dodatkowe:
  - Zapisywanie się na zajęcia jedynie w poniedziałek, wtorek i czwartek:

$$(\forall g \in G, s \in S)(day_{gs} = 3 \vee day_{gs} = 5 \implies r_{gs} = 0)$$

  - Zapisywanie się jedynie na grupy ze wskaźnikiem preferencji co najmniej 5:

$$(\forall g \in G, s \in S)(p_{gs} \leqslant 4 \implies r_{gs} = 0)$$

4.1.3 Funkcja celu

Zgodnie z treścią zadania maksymalizowana funkcja celu wyraża sumę wartości preferencji przedmiotów, na które zapisał się student.

$$\sum_{g \in G, s \in S} r_{gs} \cdot p_{gs}$$

gdzie p to macierz preferencji.

4.2 Wyniki i interpretacja

Bez stosowania ograniczeń dodatkowych osiągnięto plan, którego suma wskaźników preferencji wynosi 37:

	Algebra	Analiza	Fizyka	Chemia min.	Chemia org.
I					
II		×		×	×
III	×				
VI			×		

Który na planie godzinowym wygląda następująco:

	Pn.	Wt.	Śr.	Cz.	Pt.
8:00					
8:30					
9:00					
9:30					
10:00					
10:30					
11:00					
11:30					
12:00					
12:30					
13:00					
13:30					
14:00					
14:30					
15:00					
15:30					
16:00					
16:30					
17:00					
17:30					
18:00					
18:30					
19:00					
19:30					

Natomiast stosując dodatkowe ograniczenia osiągnięto wynik 28:

	Algebra	Analiza	Fizyka	Chemia min.	Chemia org.
I	×				
II			×		×
III				×	
VI		×			

	Pn.	Wt.	Śr.	Cz.	Pt.
8:00					
8:30					
9:00					
9:30					
10:00					
10:30					
11:00					
11:30					
12:00					
12:30					
13:00					
13:30					
14:00					
14:30					
15:00					
15:30					
16:00					
16:30					
17:00					
17:30					
18:00					
18:30					
19:00					
19:30					

Jak widać, oba rozwiązania spełniają założenia o przerwie obiadowej oraz dostępności terminów treningu.