

# Problem $k$ -minimalnego drzewa rozpinającego

Gabriel Budziński

254609

May 24, 2023

## 1 Wprowadzenie

Weźmy graf nieskierowany  $G = (V, E)$  o  $n$  wierzchołkach  $w \in V$ , nieujemnych kosztach  $c_e$  krawędzi  $e \in E$  oraz liczbę  $k \in \mathbb{N}$ . Problem  $k$ -minimalnego drzewa rozpinającego (*ang.* kMST -  $k$ -minimal spanning tree, MSkT - minimal spanning  $k$ -tree) polega na poszukiwaniu drzewa w  $G$  o minimalnym koszcie, w które wchodzi co najmniej  $k$  wierzchołków  $G$ . Problem ten jest NP-trudny nawet dla  $V$  należących do płaszczyzny Euklideskiej. Problem ten jest silnie związany z innym, występującym we wcześniejszych latach w literaturze [1] - minimum weight  $k$ -cardinality tree, którego rozwiązaniem jest znalezienie w grafie  $G$  poddrzewa o  $k$  krawędziach.

## 2 $k$ -cardinality tree

### 2.1 Opis problemu

Weźmy graf  $G = (V, E)$  ze zbiorem wierzchołków  $V$  i krawędzi  $E$ . Moce zbiorów  $V$  i  $E$  to odpowiednio  $n = |V|$  oraz  $m = |E|$ . Dla każdej krawędzi  $e \in E$  dana jest waga  $w(e) \in \mathbb{R}$ , a waga zbioru  $E' \subseteq E$  jest definiowana jako  $\sum_{e \in E'} w(e)$ .

Drzewem w  $G$  jest podgraf  $T = (V(T), E(T))$  taki, że  $T$  nie zawiera cykli i jest spójny. Będziemy używać notacji  $w(T)$  opisując  $w(E(T))$ . Moc  $|T|$  zbioru  $T$  jest mocą  $E(T)$ . Dla zadanego  $k$ , gdzie  $1 \leq k \leq n - 1$   $k$ -cardinality tree jest drzewem  $T$  o mocy  $|T| = k$ . Jeśli  $k = n - 1$  to  $T$  jest drzewem rozpinającym  $G$ . Zadane jest znalezienie takiego  $T$ , że  $w(T) = \min_{T' \subseteq G} w(T')$ . Dla  $k = n - 1$  takim  $T$  jest minimalne drzewo rozpinające, które można znaleźć w czasie wielomianowym algorytmem zachłannym (Kruskal [2], Prim [3]). Dla ustalonego  $k$  problem jest również rozwiązywalny przez wyliczenie wszystkich możliwych drzew. Jeśli mamy wagi zadane są dla wierzchołków, to możemy rozpatrywać graf krawędziowy do zadanego grafu  $G$ .

## 2.2 Zastosowania w praktyce

Powyższy problem pojawia się w najmie pól naftowych [4]. Rząd ma następującą regułę ”50%” obejmującą morskie pola naftowe: jeśli firma najęła pole naftowe ma ona ustaloną liczbę lat, dajmy na to 5, aby eksploatować to pole. Po upływie tego czasu firma ma obowiązek zwrócić co najmniej 50% najętego pola. Ponadto, oddawana część pola musi być spójna. Oczywistym celem z punktu widzenia firmy jest zwrot części o najmniejszej wartości (i zachowanie części o wartości największej). W pracy [4] pola naftowe mają postać prostokąta podzielonego na mniejsze kwadraty. Firma, która najmuje pole ma 5 lat na zebranie informacji o wartości  $w_i$  każdego z podkwadratów. Część pola, którą firma odda odpowiada podzbiorowi co najmniej 50% podkwadratów, który jest spójny i ma najmniejszą całkowitą wartość wszystkich  $w_i$ . Aby zamodelować spójność weźmy graf liniowy do oczekiwanego, który jest grafem kratowym (patrz 1). Spójny podzbiór kwadratów w prostokącie odpowiada spójnemu podgrafowi  $G$ . Ponieważ wagi kwadratów odpowiadają wagom wierzchołków  $G$ , to rozwiązując problem  $k$ -CARD TREE w grafie wierzchołkowym do  $G$ , gdzie  $k \geq \frac{n}{2}$  mamy optymalną część pola do zwrotu.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15

Table 1: Pole naftowe

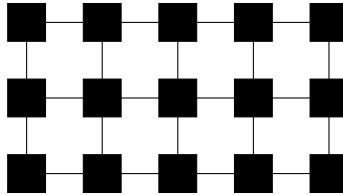


Figure 1: Graf  $G$

## 2.3 Złożoność problemu $k$ -CARD TREE

Pokażemy, że problem drzewa Steinera, który jest powszechnie znanym z bycia silnie NP-trudnym [5], może być zredukowany do  $k$ -CARD TREE. W uprzednim problemie zadany jest podzbiór  $S \subseteq V$  i próbujemy znaleźć drzewo Steinera o minimalnej wadze, czyli drzewo  $T$  w  $G$  takie, że  $S \subseteq V(T)$  oraz  $w(T)$  jest najmniejsza. Dowód redukcji znajduje się w pracy [1].

## 2.4 Postępy w znajdowaniu rozwiązań

### 2.4.1 Przeszukiwanie sąsiedztwa

W pracy [6] podano wariant metody *Variable neighbourhood search* (VNS [7]) przygotowany do problemu  $k$ -CARD TREE. Przestrzeń rozwiązań  $\mathcal{S}_k$ , będąca zbiorem wszystkich podrzew  $T$  grafu  $G$  o dokładnie  $k$  krawędziach. Moc tej przestrzeni to  $|\mathcal{S}_k| = \binom{n}{k+1} \cdot O(k^k)$ . Odległość między dwoma drzewami  $T_1$  oraz  $T_2$  zdefiniowano jako:

- $\rho(T_1, T_2) = |E_{T_1} \setminus E_{T_2}| = |E_{T_2} \setminus E_{T_1}|$
- $\eta(T_1, T_2) = |V_{T_1} \setminus V_{T_2}| = |V_{T_2} \setminus V_{T_1}|$

Wprowadzona przez Uroševića, Brimberga i Mladenovića metoda *Variable neighbourhood decomposition search* (VDNS [8]) rozszerza VNS na dwupoziomowy VNS po dekompozycji problemu.

Powyższa metoda porównana została ze standardowym VNS oraz dwoma implementacjami tabu search (TS-1 [9], TS-2 [10]). Testy przeprowadzone zostały dla  $n = |V|$  z przedziału [500, 5000]. Na podstawie eksperymentów wykazano lepsze od konkurencji wyniki algorytmu VNS, zarówno w postaci rozwiązań bliżej optimum, jak i krótszego czasu wykonania.

### 2.4.2 Branch-and-bound

W pracy [11] rozszerzającej podejścia *branch-and-bound* i *branch-and-cut* odpowiednio z prac [12] oraz [13] rozważany jest ukorzeniona wersja problemu  $k$ -CARD TREE, zwana dalej RKCTP, gdzie zadany jest wierzchołek  $r \in V$ , a rozwiązanie musi zawierać  $r$ .

Celem zaproponowanej w pracy metody jest rozwiązanie  $k$ -CARD TREE jako sekwencji  $n-k+1$  nierosnących podproblemów RKCTP. Metoda bazowana jest na następującym pomysśle: mając zadany wierzchołek  $v \in V$ , weźmy  $G' = G - v$ .  $k$ -CARD TREE w  $G$  (którego rozwiązanie przedstawimy jako  $k$ -CARD TREE( $G$ )) zawiera wierzchołek  $v$  lub nie. Jeśli  $k$ -CARD TREE( $G$ ) zawiera  $v$ , to problem zredukowany jest do RKCTP zakorzenionego w  $v$  (którego optymalne rozwiązanie przedstawimy jako RKCTP( $G, v$ )). W przeciwnym przypadku  $v$  nie należy do optymalnego rozwiązania  $k$ -CARD TREE w  $G$  i może być odrzucony. Ta obserwacja prowadzi do następujące

## 3 $k$ -spanning tree

### 3.1 Heurystyki

### 3.2 Algorytm hybrydowy: tabu search i kolonia mrówek

### 3.3 $k$ -spanning tree na okręgach

## References

- [1] M. Fischetti, H. W. Hamacher, K. Jornsten, and F. Maffioli, *Weighted k-cardinality trees: Complexity and polyhedral structure*. PhD thesis, Universität Kaiserslautern, 1992.
- [2] J. B. Kruskal, “On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem,” *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 7, 1956.
- [3] R. Prim, “Shortest connection networks and some generalizations,” *Bell System Technical Journal*, vol. 36, 1957.
- [4] H. W. Hamacher and K. Jörnsten, “Optimal relinquishment according to the norwegian petroleum law: A combinatorial optimization approach,” *Energy, Natural Resources and Environmental Economics*, 1993.
- [5] M. R. Garey and D. S. Johnson, *Computers and Intractability. A Guide to the Theory of NP-Completeness*. Freeman and Company, 1979.
- [6] D. Urošević, J. Brimberg, and N. Mladenović, “Variable neighborhood decomposition search for the edge weighted k-cardinality tree problem,” *Computers and operational research*, vol. 31, 2004.
- [7] N. Mladenović and P. Hansen, “Variable neighborhood search,” *Computers and operational research*, vol. 24, 1997.
- [8] P. Hansen, N. Mladenović, and D. Perez-Britos, “Variable neighborhood decomposition search,” *Journal of Heuristics*, 2001.
- [9] N. Mladenović and D. Urošević, “Variable neighborhood search for the k-cardinality tree,” *Metaheuristics: Computer Decision-Making*, 2001.
- [10] J. Kurt and L. Arne, “Tabu search for weighted k-cardinality trees,” *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, vol. 14, 1997.
- [11] L. Simonetti, F. Protti, Y. Frota, and C. de Souza, “New branch-and-bound algorithms for k-cardinality tree problems,” *Electronic notes in discrete mathematics*, vol. 37, 2011.
- [12] F. Quintao, A. Cunha, and G. Mateus, “Integer programming formulations for the k-cardinality tree problem,” *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, vol. 30, 2008.
- [13] M. Chimani, M. Kandyba, and I. L. nad P. Mutzel, “Obtaining optimal k-cardinality trees fast,” *ACM Journal of Experimental Algorithmics*, vol. 14, 2009.