Indeks Chromatyczny (kolorowanie krawędzi)

Gabriel Budziński
254609

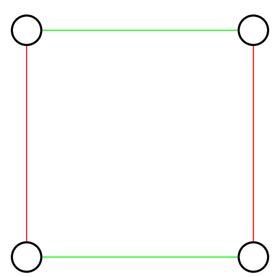
20 grudnia 2023

1 Opis problemu

Jeśli G jest grafem, to *indeks chromatyczny* $\chi'(G)$ jest najmniejszą liczbą kolorów potrzebnych do pokolorowania jego krawędzi w taki sposób, aby sąwiadujące krawędzie (mające wspólny wierzchołek) były różnych kolorów. Od razu można zauważyć, że jeśli maksymalny stopień wierzchołka w G to Δ, to $\chi'(G) \geqslant \Delta$.

1.1 Pozytywny przykład problemu

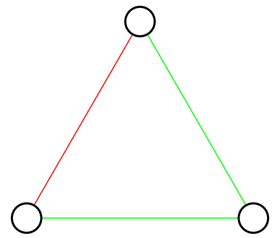
Czy graf C_4 jest 2-kolorowalny krawędziowo?



Graf C_4 jest w oczywisty sposób 2-kolorowalny krawędziowo.

1.2 Negatywny przykład problemu

Czy graf C_3 jest 2-kolorowalny krawędziowo?



Graf C_4 nie jest 2-kolorowalny krawędziowo.

2 Historia

Jak wiele problemów pokrewnych, kolorowanie krawędzi wywodzi się z problemu kolorowania map, przedstawionego przez Francisa Gutherie'a w 1852. Nawiązując do tego Peter Guthrie Tait pokazał jak 4-kolorowanie mapy daje 3-kolorowanie krawędzi (*Tait coloring*) [1]. Ponadto, proces jest odwracalny: 3-kolorowanie krawędzi daje 4-kolorowanie mapy. W 1916 roku Dénes König pokazał, że każdy graf dwudzielny o maksymalnym stopniu wierzchołka Δ może być pokolorowany za pomocą Δ kolorów [2]. Kolejną pracą w której ukazało się kolorowanie krawędzi napisał Claude Shannon, opisując problem oznaczania kolorami kabli przychodzących do danego punktu w sieci elektrycznej. Dowiódł on, że przewody każdej z sieci mogą być pokolorowane przy użyciu $\lfloor 3m/2 \rfloor$ kolorów, gdzie m to największa liczba przewodów w jednym punkcie [3]. Znacznego zaostrzenia tego ograniczania dokonał Vadim Vizing, który w 1964 roku pokazał, że jeśli największa liczba równoległych krawędzi w multigrafie G o maksymalnym stopniu Δ to μ, to $\chi'(G) \leqslant \Delta + \mu$, co dla grafów prostych (z $\mu = 1$) oznacza, że $\chi'(G) = \Delta \vee \chi'(G) = \Delta + 1$ [4].

3 NP-zupełność

Bazując na tych odkryciach, do obliczenie $\chi(G)$ grafu prostego G wytarczy 'tylko' rożróżnić, czy graf jest klasy 1 ($\chi(G) = \Delta$) czy klasy 2 ($\chi(G) = \Delta + 1$). NP-zupełność tego problemu pokazał Ian Holyer [5] w 1981 roku.

3.1 Szkic dowodu

Aby dowieźć NP-zupełności problemu indeksu chromatycznego, pokażemy mocniejszy wynik - problem stwierdzania, czy graf kubiczny (wszystkie wierzchołki o stopniu 3) ma indeks chromatyczny 3 lub 4 poprzez redukcję z 3SAT.

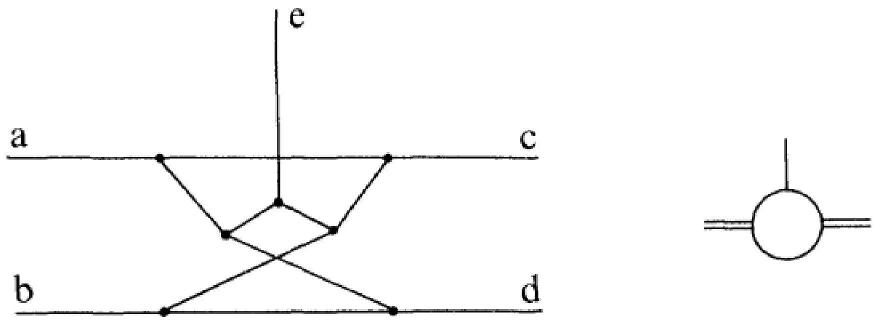
Weźmy zbiór klauzul $C = \{C_1, C_2, \ldots, C_r\}$, zmienne $x_1, x_2, \ldots, x_s$, każda z klauzul C_i składa się z trzech literałów $l_{i,1}, l_{i,2}, l_{i,3}$, gdzie $l_{i,j}$ jest zmienną x_k lub jej negacją $\bar{x_k}$.

Lemat 1 *Weźmy G - graf kubiczny 3-kolorowalny, $V' \subseteq V(G)$ podzbiór wierzchołków G, $E' \subseteq E(G)$ zbiór krawędzi łączących V' z resztą grafu. Wtedy jeśli liczba krawędzi w o kolorze i w E' równa się k_i $(i = 1, 2, 3)$, to*

$$k_1 \equiv k_2 \equiv k_3 (\mod 2)$$

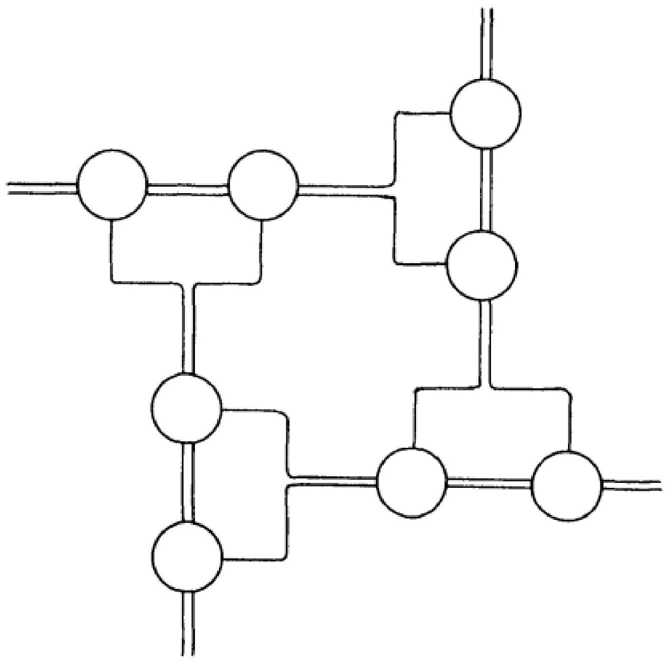
Mając instnację C problemu 3SAT pokażemy jak skonstruować graf kubiczny G, który jest 3-kolorowalny wtedy i tylko wtedy, gdy C jest spełnialne. Zmienne będą postaci par krawędzi: para o tym samym kolorze to T, a o różnym F.

Wprowadzimy teraz komponentę inwertującą (Rys. 1). Z lematu 1. możemy zobaczyć, że jeśli ta komponenta jest 3-kolorowalna, to jedna z par krawędzi a, b lub c, d musi mieć równe kolory, a pozostałe 3 krawędzie różne. Traktując pary a, b jako wejście i c, d jako wyjście, komponenta potrafi zmieniać reprezentację T na F i vice versa.



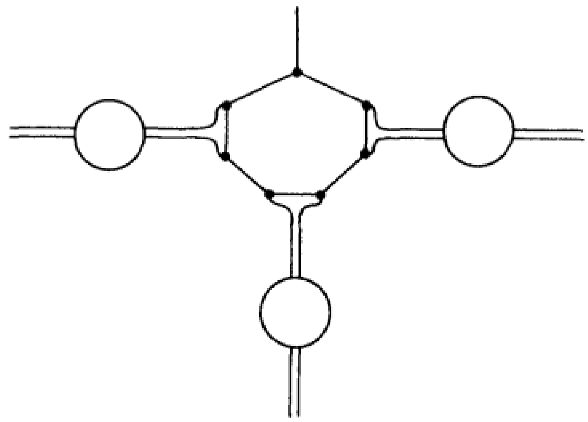
Rysunek 1: Komponenta inwertująca

Prawdziwość każdej ze zmiennych x_i będzie reprezentowana przez komponentę wartościującą (Rys. 2). Ta komponenta ma 4 pary krawędzi wyjściowych, choć w ogólności komponenta reprezentująca x_i powinna mieć tyle par wyjściowych ile jest wystąpień x_i i $\bar{x}_i$ w klauzulach C. Można pokazać, że w każdym 3-kolorowaniu komponent wartościujących wszystkie pary wyjściowe muszą przyjmować tę samą wartość.



Rysunek 2: Komponenta wartościująca zbudowana z 8 komponent inwertujących mająca 4 wyjścia par krawędzi. W ogólności zbudowana jest z 2n komponent inwertujących oraz ma n par wyjść

Prawdziwość każdej z klauzul c_j będzie sprawdzana przez komponętę testującą (Rys. 3). Ta komponenta ma 3-kolorowanie wtedy i tylko wtedy gdy nie wszystkie z par wejściowych reprezentują F. Pozostałe krawędzie będą omówione później.



Rysunek 3: Komponenta testująca

Mamy teraz narzędzia do dowodzenia następującego tweirdzenia.

Twierdzenie 1 *Wyznaczenie czy indeks chromatyczny grafu kubicznego to 3 lub 4 jest problemem NP-zupełnym.*

Pokażmy wielomianową redukcję z problemu 3SAT. Weźmy instancję 3SAT C i skonstruujmy z niej graf G w następujący sposób.

Dla każdej zmiennej x_i zbudujmy komponentę wartościującą X_i z jedną parą krawędzi wyjściowych dla każdego wystąpienia x_i lub $\bar{x}_i$ w klauzulach C. Zbudujmy także komponętę testującą C_j dla każdej z klauzul c_j. Załóżmy, że literał $l_{j,k}$ z klauzuli c_j to zmienna x_i. W takim wypadku połączmy k-tą parę wejściową C_j z odpowiednim wyjściem X_i. W przypadku kiedy $l_{j,k}$ to $\bar{x}_i$ wstawmy komponentę inwertującą pomiędzy k-tą parą wejściową C_j a odpowiednią parą w X_i. Graf wynikowy H ma pewne niepołączone krawędzie. Graf kubiczny G jest zbudowany z dwóch kopii H łącząc pozostałe krawędzie w pary.

Graf G ma 3-kolorowanie krawędziowe wtedy i tylko wtedy, gdy C jest spełnialne. Ponadto, graf G jest konstruowany z C w czasie wielomianowym, co dowodzi tezie.

4 Warianty problemu

4.1 Grafy planarne

Dla grafów planarnych o $\Delta(G) \geqslant 8$ Vizinig [4] pokazał

$$\chi'(G) = \Delta(G)$$

Później [6] pokazano wynik silniejszy: Dla grafów planarnych o $\Delta(G) \geqslant 7$

$$\chi'(G) = \Delta(G)$$

4.2 Grafy dwudzielne

Dla grafów dwudzielnych pokazano [2]

$$\chi'(G) = \Delta(G)$$

4.3 Kolorowanie acykliczne

Acyklicznie k-kolorowanie krawędziowe grafu G to takie k-kolorwanie krawędziowe, w którym krawędzie każdego z cykli mają conajmniej 3 kolory (nie ma cyckli bichromatycznych). Najmniejsze takie kolorowanie grafu G oznaczamy $\chi'_a(G)$.

4.4 Kolorowanie gwiazdowe

- Niedozwolone są cykle bichromatyczne o długości 4
- Najmniejsze k, dla którego istnieje k-kolorowanie gwiazdowe grafu G oznaczamy $\chi'_{st}(G)$
- Nazwa pochodzi od wersji wierzchołkowej tego problemu.

5 Aproksymacje

Jako, że dla grafów prostych $\chi'(G) = \Delta(G) \vee \chi'(G) = \Delta(G) + 1$ ([4]) to w wielomianowym czasie możemy znaleźć $\Delta(G)$, a następnie zachowawczo odpowiedzieć $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$. Dla tego algorytmu A mamy $|c_A(x) - c_{OPT}(x)| \leqslant 1$, a w grafie G, gdzie $|E(G)| \geqslant 1$ (nie ma sensu rozważać kolorowania krawędziowego w grafie bez krawędzi) współczynnik aproksymacji tego algorytmu wynosi $\frac{1}{2}$.

Aproksymacje rozważa się dla multigrafów, w których jak wspomnieliśmy Shannon [3] oraz Vizing [4] pokazali odpowienio $\chi'(G) \leqslant \lfloor \frac{3}{2}\Delta(G) \rfloor$ oraz $\chi'(G) \leqslant \Delta(G) + \mu$, gdzie μ to największa liczba równoległych krawędzi w G. Z tego dostajemy górne ograniczenia na indeks chromatyczny. Ten problem rozpatrzony jest w tej [7] pracy.

Literatura

[1] Tait, “4. on the colouring of maps,” *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, vol. 10, p. 501–503, 1880.

[2] D. König, “Über graphen und ihre anwendung auf determinantentheorie und mengenlehre,” *Mathematische Annalen*, vol. 77, pp. 453–465, 1916.

[3] C. E. Shannon, “A theorem on coloring the lines of a network,” *Journal of Mathematics and Physics*, vol. 28, pp. 148–152, 1949.

[4] V. V. G., “On an estimate of the chromatic class of a p-graph,” *Discret Analiz*, vol. 3, pp. 25–30, 1964.

[5] I. Holyer, “The np-completeness of edge-coloring,” *SIAM J. Comput.*, vol. 10, pp. 718–720, 1981.

[6] D. P. Sanders and Y. Zhao, “Planar graphs of maximum degree seven are class i,” *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, vol. 83, no. 2, pp. 201–212, 2001.

[7] M. Kochol, N. Krivoňáková, and S. Smejová, “Approximation algorithm for chromatic index and edge-coloring of multigraphs,” in *Experimental and Efficient Algorithms* (S. E. Nikoletseas, ed.), (Berlin, Heidelberg), pp. 602–605, Springer Berlin Heidelberg, 2005.