

Indeks Chromatyczny (kolorowanie krawędzi)

Gabriel Budziński

254609

18 grudnia 2023

1 Opis problemu

Jeśli G jest grafem, to *indeks chromatyczny* $\chi'(G)$ jest najmniejszą liczbą kolorów potrzebnych do pokolorowania jego krawędzi w taki sposób, aby sąsiadujące krawędzie (mające wspólny wierzchołek) były różnych kolorów. Od razu można zauważyć, że jeśli maksymalny stopień wierzchołka w G to Δ , to $\chi'(G) \geq \Delta$.

2 Historia

Jak wiele problemów pokrewnych, kolorowanie krawędzi wywodzi się z problemu kolorowania map, przedstawionego przez Francisa Guthrie’a w 1852. Nawiązując do tego Peter Guthrie Tait pokazał jak 4-kolorowanie mapy daje 3-kolorowanie krawędzi (*Tait coloring*) [1]. Ponadto, proces jest odwracalny: 3-kolorowanie krawędzi daje 4-kolorowanie mapy. W 1916 roku Dénes König pokazał, że każdy graf dwudzielny o maksymalnym stopniu wierzchołka Δ może być pokolorowany za pomocą Δ kolorów [2]. Kolejną pracą w której ukazało się kolorowanie krawędzi napisał Claude Shannon, opisując problem oznaczania kolorami kabli przychodzących do danego punktu w sieci elektrycznej. Dowiódł on, że przewody każdej z sieci mogą być pokolorowane przy użyciu $\lceil 3m/2 \rceil$ kolorów, gdzie m to największa liczba przewodów w jednym punkcie [3]. Znacznego zaostżenia tego ograniczania dokonał Vadim Vizing, który w 1964 roku pokazał, że jeśli największa liczba równoległych krawędzi w multigrafie G o maksymalnym stopniu Δ to μ , to $\chi'(G) \leq \Delta + \mu$, co dla grafów prostych (z $\mu = 1$) oznacza, że $\chi'(G) = \Delta \vee \chi'(G) = \Delta + 1$ [4].

3 NP-zupełność

Bazując na tych oddryciach, do obliczenia $\chi(G)$ grafu prostego G wystarczy ‘tylko’ rozróżnić, czy graf jest klasy 1 ($\chi(G) = \Delta$) czy klasy 2 ($\chi(G) = \Delta + 1$). NP-zupełność tego problemu pokazał Ian Holyer [5] w 1981 roku.

3.1 Szkic dowodu

Aby dowieść NP-zupełności problemu indeksu chromatycznego, pokażemy mocniejszy wynik - problem stwierdzania, czy graf kubiczny (wszystkie wierzchołki o stopniu 3) ma indeks chromatyczny 3 lub 4 poprzez redukcję z 3SAT.

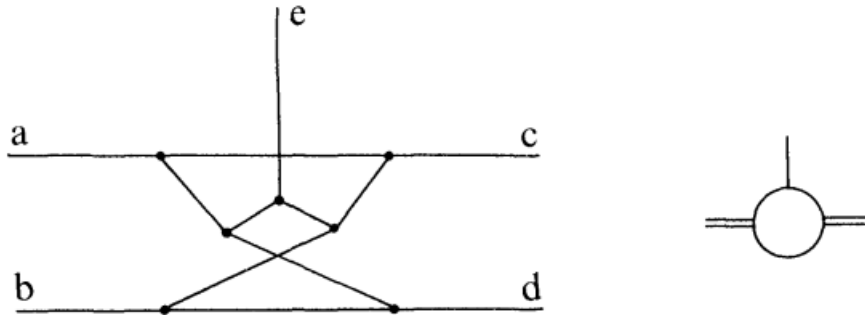
Weźmy zbiór klauzul $C = \{C_1, C_2, \dots, C_r\}$, zmienne x_1, x_2, \dots, x_s , każda z klauzul C_i składa się z trzech literałów $l_{i,1}, l_{i,2}, l_{i,3}$, gdzie $l_{i,j}$ jest zmienną x_k lub jej negacją \bar{x}_k .

Lemat 1 *Weźmy G - graf kubiczny 3-kolorowalny, $V' \subseteq V(G)$ podzbiór wierzchołków G , $E' \subseteq E(G)$ zbiór krawędzi łączących V' z resztą grafu. Wtedy jeśli liczba krawędzi w o kolorze i w E' równa się k_i ($i = 1, 2, 3$), to*

$$k_1 \equiv k_2 \equiv k_3 \pmod{2}$$

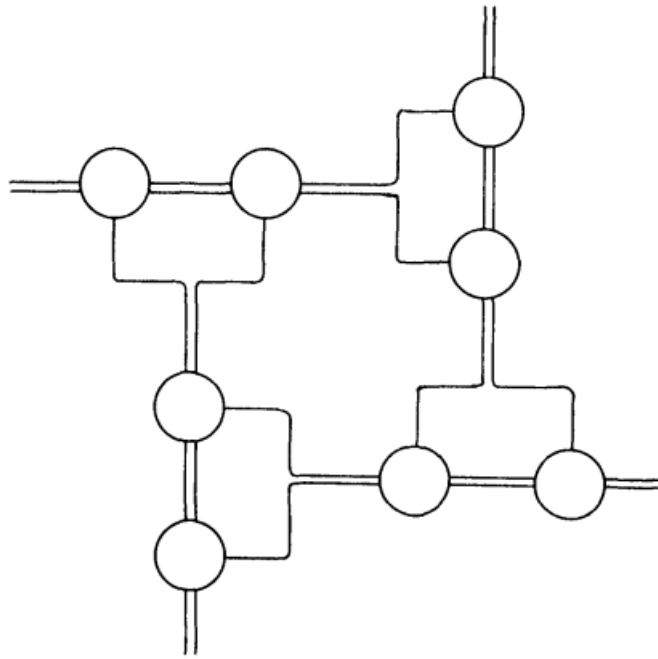
Mając instancję C problemu 3SAT pokażemy jak skonstruować graf kubiczny G , który jest 3-kolorowalny wtedy i tylko wtedy, gdy C jest spełnialne. Zmienne będą postaci par krawędzi: para o tym samym kolorze to T , a o różnym F .

Wprowadzimy teraz komponentę inwertującą (Rys. 1). Z lematu 1. możemy zobaczyć, że jeśli ta komponenta jest 3-kolorowalna, to jedna z par krawędzi a, b lub c, d musi mieć równe kolory, a pozostałe 3 krawędzie różne. Traktując pary a, b jako wejście i c, d jako wyjście, komponenta potrafi zmieniać reprezentację T na F i vice versa.



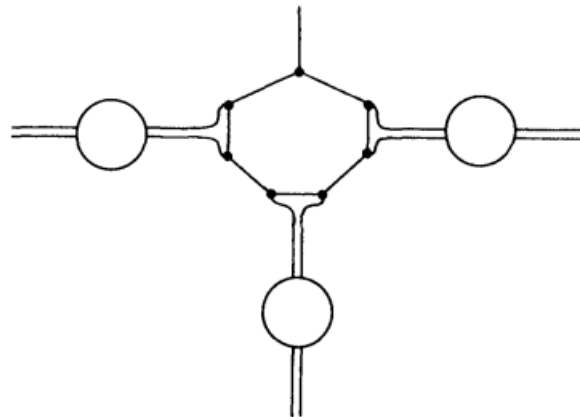
Rysunek 1: Komponenta inwertująca

Prawdziwość każdej ze zmiennych u_i będzie reprezentowana przez komponentę wartościującą (Rys. 2). Ta komponenta ma 4 pary krawędzi wyjściowych, choć w ogólności komponenta reprezentująca u_i powinna mieć tyle par wyjściowych ile jest wystąpień u_i i \bar{u}_i w klauzulach C . Można pokazać, że w każdym 3-kolorowaniu komponent wartościujących wszystkie pary wyjściowe muszą przyjmować tę samą wartość.



Rysunek 2: Komponenta wartościująca zbudowana z 8 komponent inwertujących mająca 4 wyjścia par krawędzi. W ogólności zbudowana jest z $2n$ komponent inwertujących oraz ma n par wyjść

Prawdziwość każdej z klauzul c_j będzie sprawdzana przez komponentę testującą (Rys. 3). Ta komponenta ma 3-kolorowanie wtedy i tylko wtedy gdy nie wszystkie z par wejściowych reprezentują F . Pozostałe krawędzie będą omówione później.



Rysunek 3: Komponenta testująca

Mamy teraz narzędzia do dowodzenia następującego twierdzenia.

Twierdzenie 1 *Wyznaczenie czy indeks chromatyczny grafu kubicznego to 3 lub 4 jest problemem NP-zupełnym.*

4 Warianty problemu

5 Aproksymacje

Fajna praca [6]

Literatura

- [1] Tait, “4. on the colouring of maps,” *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, vol. 10, p. 501–503, 1880.
- [2] D. König, “Über graphen und ihre anwendung auf determinantentheorie und mengenlehre,” *Mathematische Annalen*, vol. 77, pp. 453–465, 1916.
- [3] C. E. Shannon, “A theorem on coloring the lines of a network,” *Journal of Mathematics and Physics*, vol. 28, pp. 148–152, 1949.
- [4] V. V. G., “On an estimate of the chromatic class of a p-graph,” *Discret Analiz*, vol. 3, pp. 25–30, 1964.
- [5] I. Holyer, “The np-completeness of edge-coloring,” *SIAM J. Comput.*, vol. 10, pp. 718–720, 1981.
- [6] S.-i. Nakano, X. Zhou, and T. Nishizeki, *Edge-coloring algorithms*, pp. 172–183. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1995.