Indeks Chromatyczny (kolorowanie krawędzi)

Gabriel Budziński
254609

15 grudnia 2023

1 Opis problemu

Jeśli G jest grafem, to *indeks chromatyczny* $\chi'(G)$ jest najmniejszą liczbą kolorów potrzebnych do pokolorowania jego krawędzi w taki sposób, aby sąwiadujące krawędzie (mające wspólny wierzchołek) były różnych kolorów. Od razu można zauważyć, że jeśli maksymalny stopień wierzchołka w G to Δ, to $\chi'(G) \geqslant \Delta$.

2 Historia

Jak wiele problemów pokrewnych, kolorowanie krawędzi wywodzi się z problemu kolorowania map, przedstawionego przez Francisa Gutherie'a w 1852. Nawiązując do tego Peter Guthrie Tait pokazał jak 4-kolorowanie mapy daje 3-kolorowanie krawędzi (*Tait coloring*) [1]. Ponadto, proces jest odwracalny: 3-kolorowanie krawędzi daje 4-kolorowanie mapy. W 1916 roku Dénes König pokazał, że każdy graf dwudzielny o maksymalnym stopniu wierzchołka Δ może być pokolorowany za pomocą Δ kolorów [2]. Kolejną pracą w której ukazało się kolorowanie krawędzi napisał Claude Shannon, opisując problem oznaczania kolorami kabli przychodzących do danego punktu w sieci elektrycznej. Dowiódł on, że przewody każdej z sieci mogą być pokolorowane przy użyciu $\lfloor 3m/2 \rfloor$ kolorów, gdzie m to największa liczba przewodów w jednym punkcie [3]. Znacznego zaostrzenia tego ograniczania dokonał Vadim Vizing, który w 1964 roku pokazał, że jeśli największa liczba równoległych krawędzi w multigrafie G o maksymalnym stopniu Δ to μ, to $\chi'(G) \leqslant \Delta + \mu$, co dla grafów prostych (z $\mu = 1$) oznacza, że $\chi'(G) = \Delta \vee \chi'(G) = \Delta + 1$ [4].

Bazując na tych oddryciach, do obliczenie $\chi(G)$ grafu prostego G wytarczy 'tylko' rożróżnić, czy graf jest klasy 1 ($\chi(G) = \Delta$) czy klasy 2 ($\chi(G) = \Delta + 1$). NP-kompletność tego problemu pokazał Ian Holyer [5] w 1981 roku.

3 Warianty problemu

4 Aproksymacje

Fajna praca [6]

Literatura

[1] Tait, “4. on the colouring of maps,” *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, vol. 10, p. 501–503, 1880.

[2] D. König, “Über graphen und ihre anwendung auf determinantentheorie und mengenlehre,” *Mathematische Annalen*, vol. 77, pp. 453–465, 1916.

[3] C. E. Shannon, “A theorem on coloring the lines of a network,” *Journal of Mathematics and Physics*, vol. 28, pp. 148–152, 1949.

[4] V. V. G., “On an estimate of the chromatic class of a p-graph,” *Discret Analiz*, vol. 3, pp. 25–30, 1964.

[5] I. Holyer, “The np-completeness of edge-coloring,” *SIAM J. Comput.*, vol. 10, pp. 718–720, 1981.

[6] S.-i. Nakano, X. Zhou, and T. Nishizeki, *Edge-coloring algorithms*, pp. 172–183. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1995.