

ACERCA DE HOFSTADTER BUTTERFLY

JOSEPT ESTEFAN BELTRAN CLAVIJO
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

La mariposa de Hofstadter, surge de la pregunta: ¿Que pasaría si pongo un cristal en un campo electromagnético?, el gráfico revela las energías de un sistema cuántico de electrones en un cristal *2 – dimensional*. Así, de la mariposa de Hofstadter surge el efecto cuántico de Hall.

La mariposa esta construida a partir de enteros, que son números cuánticos asociados a la cuantificación de la conductividad eléctrica, que es el mismo efecto de Hall(del cual solo se hará mención

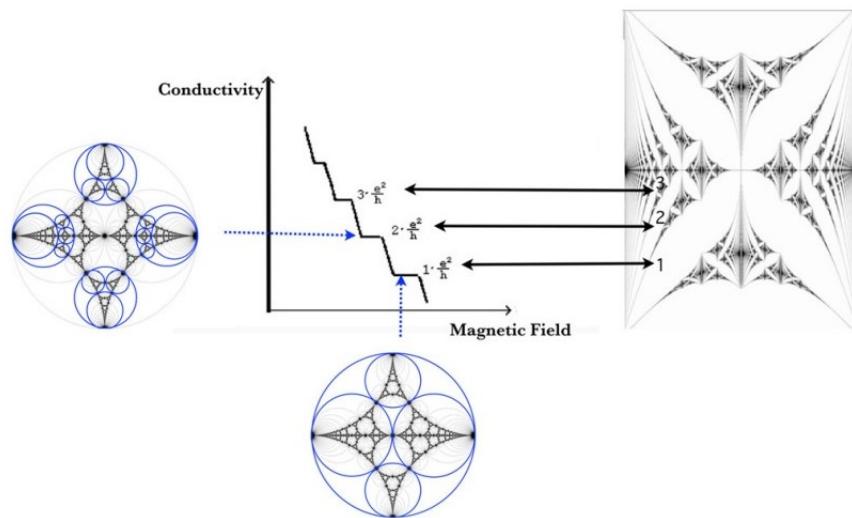


Figure 1

Se observa que la conductividad eléctrica esta cuantificada y se toman valores que son múltiplos de una constante $\frac{e^2}{h}$ donde e es la carga del electrón y h es la constante de Planck. Las zonas blancas en la mariposa expresan enteros que son números cuánticos de la conductividad de Hall.

Introducción al Conjunto de Hofstadter

Los fractales son objetos matemáticos abstractos creados para ilustrar la forma en que estructuras de gran complejidad surgen de ecuaciones no lineales o construcciones geométricas. Aun así, el conjunto de Hofstadter surge de la física, pero puede ser descrito matemáticamente sin hacer uso de conceptos físicos. La ecuación de Harper (la ecuación de mecánica cuántica que originó la mariposa y de la que se hablará más adelante) puede replantearse como dos ecuaciones con r y θ como variables reales que definen el mapa *2 – dimensional* de la siguiente forma

$$r_{n+1} = -\frac{1}{r_n + E + 2\cos(2\pi\theta_n)}$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \phi \pmod{1}$$

Donde E es el eje vertical de la mariposa y ϕ el eje horizontal. Luego la mariposa es el conjunto de pares (ϕ, E) que satisfacen

$$\gamma = -\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \log \left[\frac{r_1}{r_N} \right] = 0$$

Lo que significa que debe tener un exponente de Lyapunov igual a 0. Este exponente mide la divergencia exponencial de dos puntos cercanos a cierta distancia conforme se itera el mapa n veces. Por lo que el mapa $2 - \text{dimensional}$ no diverge.

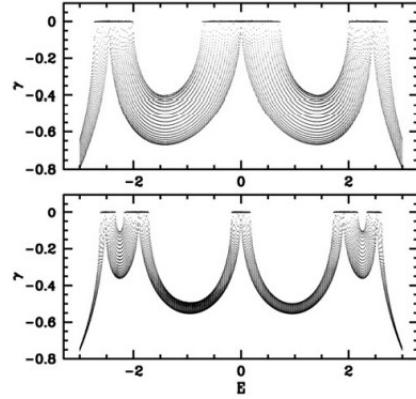


Figure 2: Muestra las bandas de energía para $\phi = \frac{1}{3}$ y $\frac{2}{5}$. Las bandas son valores de E donde $\gamma = 0$

Geometría y Teoría de Números en la Mariposa

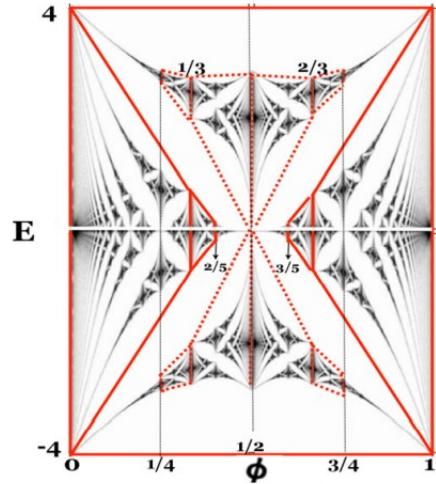


Figure 3

Si observamos la mariposa en la figura 3, las 4 alas tienen simetría cuádruple. Posee simetría a través de la reflexión horizontal en $E = 0$ y reflexión vertical a través de $\phi = 0$. La simetría cuádruple se pierde a hacer zoom

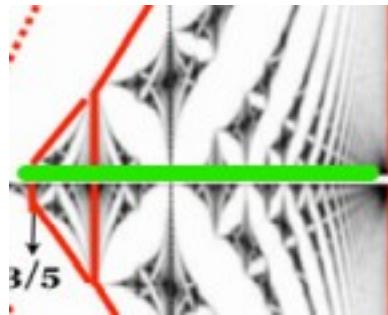


Figure 4

Si consideramos las mariposas pequeñas cuyo borde derecho coincide con el borde derecho de la mariposa completa, y el borde izquierdo es el centrado verticalmente en $\phi = \frac{2}{3}$. Sus 4 alas se encuentran en $E = 0$ para $\phi = \frac{3}{4}$. Es evidente que no hay simetría a través de $\phi = \frac{3}{4}$ pero conserva su simetría a través de $E = 0$. Por lo que podemos decir que su simetría respecto a $E = 0$ es invariant e y mas aun se puede generalizar esta conclusión geométrica para infinitas mariposas cuyos centros están sobre la recta horizontal $E = 0$.

Para dos fracciones $\frac{p}{q}$ y $\frac{P}{Q}$ asociadas a números reales en el eje x . En cada punto $\frac{p}{q}$ se dibuja un círculo de radio $\frac{1}{2q^2}$ y su centro es $(x, y) = (\frac{p}{q}, \frac{1}{2q^2})$. Este círculo es conocido como el círculo Ford, que es tangente al eje x en la mitad superior, y este círculo es una representación geométrica de la fracción $\frac{p}{q}$.

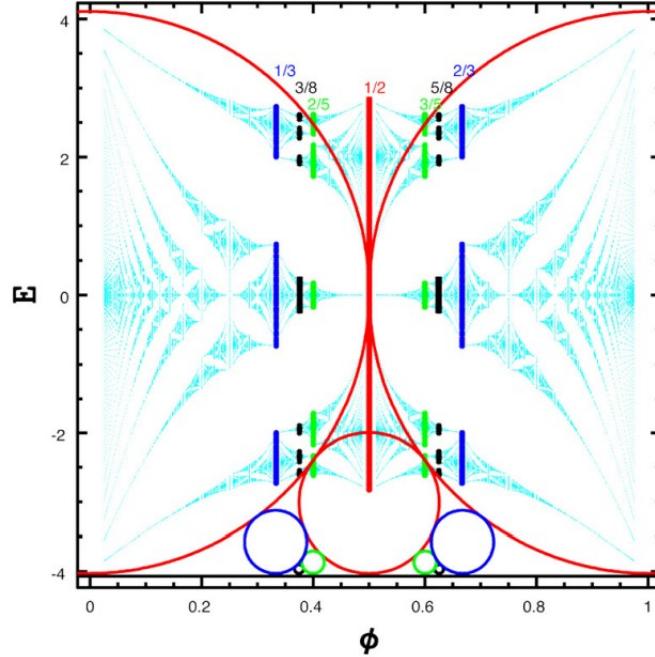


Figure 5

Todos los $\frac{p}{q}$ de ϕ , donde q es par, tiene dos bandas que se tocan en $E = 0$. Esos puntos donde se tocan son los centros de todas las mariposas centrales. Los bordes izquierdos y derechos están en $\frac{p}{q}$ de ϕ donde q es impar, y cumplen lo siguiente con el centro de la mariposa

$$|(p_1 q_2 - p_2 q_1)| = 1$$

Implica que dada la ubicación del centro de cualquier mariposa central, sus bordes están únicamente determinados. Supongamos que el centro esta en $\frac{p_c}{q_c}$, y los bordes izquierdo y derecho estan en $\frac{p_l}{q_l}$ y $\frac{p_r}{q_r}$ podemos construir las siguientes dos relaciones

$$|(p_c q_l - p_l q_c)| = 1$$

$$|(p_c q_r - p_r q_c)| = 1$$

Además si construimos un árbol fila por fila de la siguiente manera

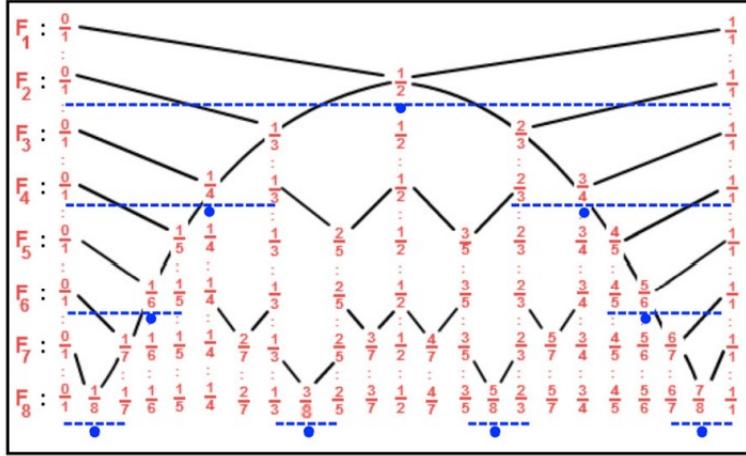


Figure 6

Podemos notar que cada fila sucesiva hereda todas las fracciones de la fila anterior y agrega nuevas fracciones con valores de $0 < \frac{p}{q} < 1$, y estos nuevos números están determinados mediante la suma de Farey

$$\frac{a}{c} \oplus \frac{b}{d} = \frac{a+b}{c+d}$$

Y ya quedan construidos los valores de los segmentos en la mariposa de acuerdo a la sucesión de Farey. Ahora mostraremos de que forma los círculos de Ford de la mariposa son tangentes entre si, si nos basamos en el teorema de Descartes

$$2(k_0^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) = (k_0 + k_1 + k_2 + k_3)^2$$

Donde k_i son las curvaturas de los cuatro círculos. Ahora, si expresamos la curvatura de uno de los círculos en términos de los tres restantes que son mutuamente tangentes de la siguiente forma

$$k_0(\pm) = k_1 + k_2 + k_3 \pm 2\sqrt{k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_3 k_1}$$

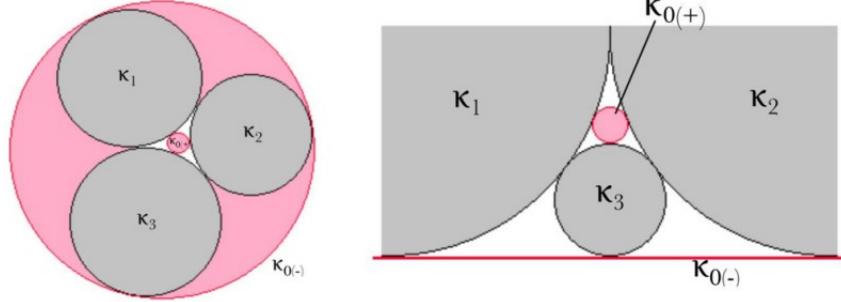


Figure 7

Para demostrar el teorema de Descartes tenemos en cuenta el siguiente planteamiento geométrico

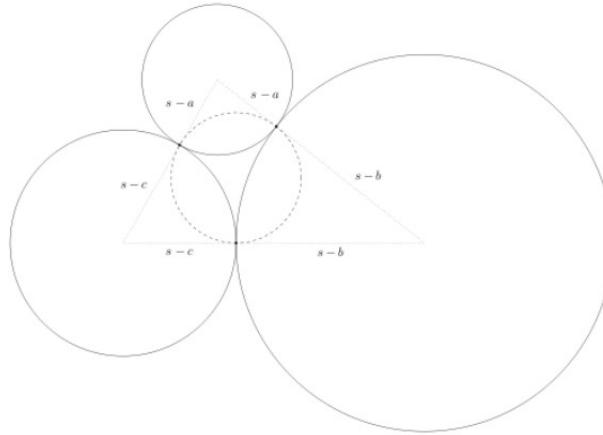


Figure 8

Así, para cualesquiera tres de los cuatro círculos, sean C_1, C_2, C_3 , definiremos un nuevo círculo que pasa por los tres puntos de contacto.

Si los círculos son tangentes externamente, el nuevo círculo es el inscrito en el triángulo definido por sus centros.

Sea $s - a = r_1, s - b = r_2, s - c = r_3$, y usando la formula del inradio, tenderíamos el valor de radio p_1 para el nuevo círculo que es

$$p_1 = \sqrt{\frac{r_1 r_2 r_3}{r_1 + r_2 + r_3}}$$

Si la curvatura es $K_4 = p_1^{-1}$, obtenemos lo siguiente

$$k_4 = \frac{1}{p_1} = \frac{1}{\sqrt{\frac{r_1 r_2 r_3}{r_1 + r_2 + r_3}}}$$

Y elevamos ambos lados al cuadrado

$$\begin{aligned} K_4^2 &= \left(\frac{1}{p_1}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{r_1 r_2 r_3}{r_1 + r_2 + r_3}}}\right)^2 \\ K_4^2 &= \frac{1}{p_1^2} = \frac{1}{\frac{r_1 r_2 r_3}{r_1 + r_2 + r_3}} \\ K_4^2 &= \frac{1}{p_1^2} = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{r_1 r_2 r_3} \\ K_4^2 &= \frac{1}{p_1^2} = \frac{r_1}{r_1 r_2 r_3} + \frac{r_2}{r_1 r_2 r_3} + \frac{r_3}{r_1 r_2 r_3} \\ K_4^2 &= \frac{1}{p_1^2} = \frac{1}{r_2 r_3} + \frac{1}{r_1 r_3} + \frac{1}{r_1 r_2} \\ K_4^2 &= \frac{1}{p_1^2} = \left(\frac{1}{r_2}\right)\left(\frac{1}{r_3}\right) + \left(\frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r_3}\right) + \left(\frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r_2}\right) \end{aligned}$$

Como $k_4 = p_1^{-1}$ podemos definir las curvaturas de los otros de forma homologa como $K_1 = r_1^{-1}$, $K_2 = r_2^{-1}$, $K_3 = r_3^{-1}$ y obtenemos la siguiente relación

$$k_4^2 = K_1 K_3 + K_1 K_2 + K_2 K_3$$

Ahora para el caso en que un circulo, por ejemplo C_2 , contenga los otros dos

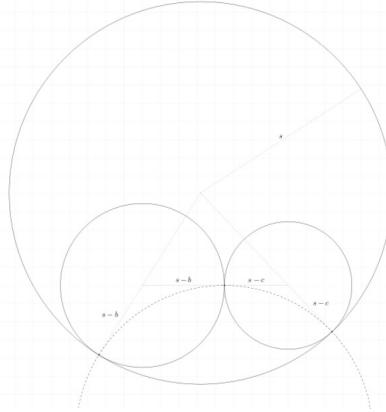


Figure 9

El nuevo circulo definido es exterior al triangulo definido por los 3 centros. Sea $s = r_1$, $s - c = r_2$, $s - b = r - 3$, y la formula para el exradio, obtenemos el radio del nuevo circulo, p_1 de la siguiente forma

$$p_1 = \sqrt{\frac{r_1 r_2 r_3}{r_1 - r_2 - r_3}}$$

De forma análoga para el caso anterior llegamos a la relación de

$$k_4^2 = K_2 K_3 - K_1 K_3 - K_1 K_2$$

Para mantener idénticas las dos relaciones obtenidas usamos $k_1 = -r_1^{-1}$

$$k_4^2 = K_1 K_3 + K_1 K_3 + K_1 K_2$$

Como la selección de C_1, C_2, C_3 es arbitraria, podemos obtener otras tres relaciones

$$k_1^2 = K_2 K_3 + K_2 K_4 + K_3 K_4$$

$$k_2^2 = K_1 K_3 + K_1 K_4 + K_3 K_4$$

$$k_3^2 = K_1 K_2 + K_1 K_4 + K_2 K_4$$

Los nuevos círculos son mutuamente tangentes lo que lleva a

$$K_1^2 = k_2 k_3 - k_2 k_4 - k_3 k_4$$

$$K_2^2 = k_1 k_3 - k_1 k_4 - k_3 k_4$$

$$K_3^2 = k_1 k_2 - k_1 k_4 - k_2 k_4$$

$$K_4^2 = k_2 k_3 - k_1 k_3 - k_1 k_2$$

Si observamos hay como máximo una curvatura negativa K_1 y k_i y sus círculos correspondientes deben tener el radio mas grande, entonces $\sum K_i, \sum k_i > 0$

$$(\sum K_i)^2 = \sum K_i^2 + \sum k_i^2 = (\sum k_i)^2$$

$$\sum K_i = \sum k_i$$

$$-K_1^2 + (K_2 + K_3 + K_4)^2 = -K_1^2 + K_2^2 + K_3^2 + K_4^2 + 2k_1^2$$

$$= 2k_1(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)$$

$$= 2k_1(K_1 + K_2 + K_3 + K_4)$$

$$-K_1 + K_2 + K_3 + K_4 = 2k_1$$

De forma homologa podemos obtener

$$K_1 - K_2 + K_3 + K_4 = 2k_2$$

$$K_1 + K_2 - K_3 + K_4 = 2k_3$$

$$K_1 + K_2 + K_3 - K_4 = 2k_4$$

Así si elevamos al cuadrado cada uno y las sumamos obtenemos

$$\sum K_i^2 = \sum k_i^2$$

Así concluimos que

$$2 \sum K_i^2 = (\sum k_i)^2$$

Y queda demostrado el teorema de Descartes, y demostramos la presencia del árbol de Farey y los círculos de Ford en la construcción de la mariposa de Hofstadter.

Los números del árbol de Farey son usados para medir el tamaño horizontal $\Delta\phi$ de las mariposas con centro $\frac{p_c}{q_c}$ y tomamos los valores de sus bordes como $\frac{p_L}{q_L}$ y $\frac{p_R}{q_R}$ de la siguiente manera

$$\Delta\phi = \left| \frac{p_R}{q_R} - \frac{p_L}{q_L} \right|$$

y tenemos en cuenta la propiedad mencionada anteriormente que determinaba la unicidad de sus bordes, y la planteamos como una relación entre los bordes y no con el centro

$$|(p_R q_L - p_L q_R)| = 1$$

Podemos transformar $\Delta\phi$ a una forma mas simple

$$\Delta\phi = \left| \frac{p_R}{q_R} - \frac{p_L}{q_L} \right| = \left| \frac{p_R q_L - p_L q_R}{q_R q_L} \right| = \frac{1}{q_R q_L}$$

Así, se mostró brevemente la construcción geométrica de la mariposa de Hofstadter, a partir del conjunto de Hofstadter y algunas propiedades numéricas y geométricas que se encuentran en el conjunto, mostrándolo como un objeto matemático y no un fenómeno físico para facilitar el estudio de sus propiedades numéricas y geométricas.