# Klausur – Lineare Algebra

**Bearbeitungszeit:** 120 Minuten **Maximalpunktzahl:** 100

*Rechnen Sie sauber und nachvollziehbar. Kurze Begründungen genügen, ausführliche Beweise sind nicht verlangt.*

## Aufgabe 1 – Gruppen, Mengen, Abbildungen (8 Punkte)

1. Nennen Sie die vier Gruppenaxiome für eine Verknüpfung auf einer Menge. (2P)
2. Geben Sie alle Gruppenhomomorphismen $\varphi : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$ an. (3P)
3. Seien $f : A \to B$, $g : B \to C$ Abbildungen.
   Kreuzen Sie an und begründen Sie kurz: (3P)
   a) Sind $f, g$ injektiv, ist $g \circ f$ injektiv?
   b) Sind $f, g$ surjektiv, ist $g \circ f$ surjektiv?
   c) Welche Eigenschaft muss $f$ haben, damit $f^{-1}$ existiert?

## Aufgabe 2 – Matrizen, Vektoren, Vektorräume (8 Punkte)

1. Für $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$: Geben Sie eine Basis und die Dimension von $V$ an. (4P)
2. Gegeben $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $A^2$ und $A^T$. (2P)
3. Geben Sie zwei Matrizen $B, C \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ an mit $BC \neq CB$. (2P)

## Aufgabe 3 – Lineare Gleichungssysteme, Rang, Basis (8 Punkte)

Gegeben:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 4y + 2z = 2 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

1. Führen Sie den Gauß-Algorithmus durch und geben Sie die Zeilenstufenform an. (3P)
2. Bestimmen Sie alle Lösungen $(x, y, z)$. (3P)
3. Geben Sie den Rang der Koeffizientenmatrix und eine Basis des Spaltenraums an. (2P)

## Aufgabe 4 – Lineare Abbildungen und Gruppenaspekt (8 Punkte)

1. Nennen Sie die Bedingungen, die eine invertierbare Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ erfüllen muss, damit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. (3P)
2. Es sei $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + y, x - y)$. (5P)
   a) Bestimmen Sie die darstellende Matrix von $T$.

   b) Berechnen Sie $\det(T)$.

   c) Entscheiden Sie, ob $T$ invertierbar ist.

## Aufgabe 5 – Inversion, Kern und Bild (8 Punkte)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Berechnen Sie $A^{-1}$. (4P)
2. Bestimmen Sie Kern und Bild der Abbildung $T_A(x) = Ax$. (4P)

## Aufgabe 6 – Determinanten und Permutationen (10 Punkte)

1. Schreiben Sie die allgemeine Formel
$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)}.$$
   Erklären Sie kurz die Bedeutung von $\operatorname{sgn}(\sigma)$. (3P)
2. Berechnen Sie
$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (3P)
3. Entscheiden Sie, ob eine Matrix mit zwei gleichen Zeilen eine von Null verschiedene Determinante haben kann. (2P)
4. Nennen Sie zwei Rechenregeln für Determinanten. (2P)

## Aufgabe 7 – Eigenwerte und Eigenvektoren (10 Punkte)

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte. (3P)
2. Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert eine Basis des Eigenraums. (4P)
3. Entscheiden Sie, ob $C$ diagonalisierbar ist. (3P)

## Aufgabe 8 – Euklidisch/unitär, Gram-Schmidt, Hilbertraum (10 Punkte)

1. Wenden Sie das Gram-Schmidt-Verfahren im $\mathbb{R}^3$ auf

   $$v_1 = (1,1,0), \quad v_2 = (1,0,1), \quad v_3 = (0,1,1)$$

   an und geben Sie eine Orthonormalbasis an. (6P)
2. Nennen Sie die drei grundlegenden Eigenschaften eines Skalarprodukts. (2P)
3. Geben Sie ein Beispiel eines unendlichdimensionalen Hilbertraums und das Skalarprodukt an. (2P)

## Aufgabe 9 – Orthogonale Abbildungen und Endomorphismen (8 Punkte)

1. Formulieren Sie das Kriterium für eine orthogonale Matrix $A$. (3P)
2. Geben Sie eine orthogonale $2 \times 2$-Matrix für eine Drehung und den Winkel an. (3P)
3. Ist jede orthogonale Abbildung ein Endomorphismus? (2P)

## Aufgabe 10 – Jordan-Normalform (10 Punkte)

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom. (2P)
2. Bestimmen Sie den Eigenraum zu $\lambda = 3$. (4P)
3. Geben Sie die Jordan-Normalform an. (2P)
4. Nennen Sie den Unterschied zwischen algebraischer und geometrischer Vielfachheit. (2P)

## Aufgabe 11 – Dualräume (6 Punkte)

1. Definieren Sie den Dualraum $V^*$ eines endlichdimensionalen Vektorraums $V$. (2P)
2. Für $V = \mathbb{R}^2$, $f_1(x, y) = x$, $f_2(x, y) = x + y$: Prüfen Sie, ob $\{f_1, f_2\}$ eine Basis von $V^*$ ist. (4P)

## Aufgabe 12 – Tensorprodukte (8 Punkte)

1. Formulieren Sie die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts $V \otimes W$. (3P)
2. Für $V = W = \mathbb{R}^2$ mit Basis $e_1, e_2$: Geben Sie eine Basis von $V \otimes W$ an. (2P)
3. Überprüfen Sie die Linearität im ersten Argument:

   $$(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w.$$

   (3P)