HÁLÓZATI RENDSZEREK ÉS SZOLGÁLTATÁSOK TANSZÉK

Tetszőleges kvantumbit előállítása alap kvantumkapuk segítségével. Szupersűrűségű tömörítés. Kvantumteleportáció.

2025. október 15.

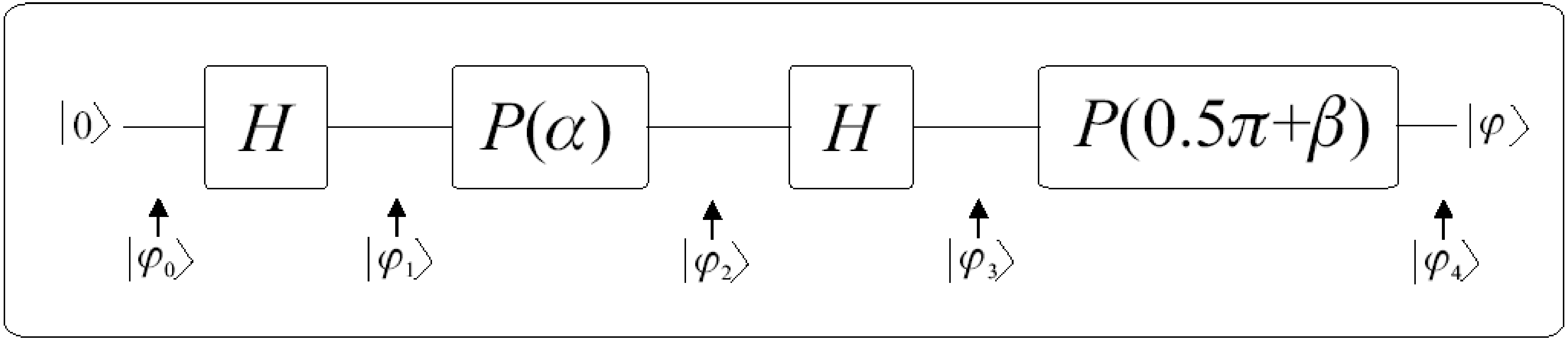
Kvantuminformatikai alkalmazások
(BMEVIHIAD00)
2025/26. őszi félév

Oláh Kitti

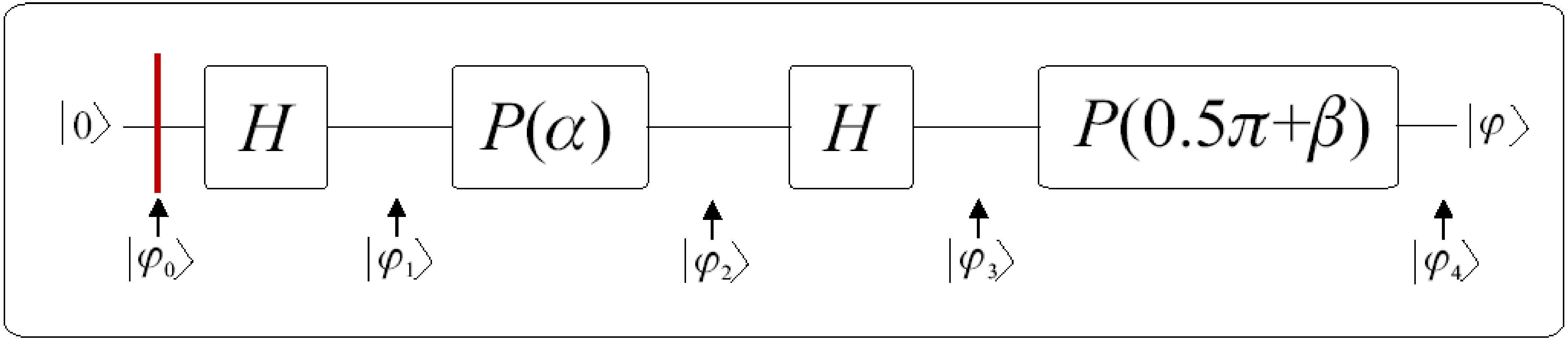
BME Hálózati Rendszerek és Szolgáltatások Tanszék
olah.kitti@edu.bme.hu

MŰEGYETEM 1782

TETSZŐLEGES KVANTUMÁRAMKÖR

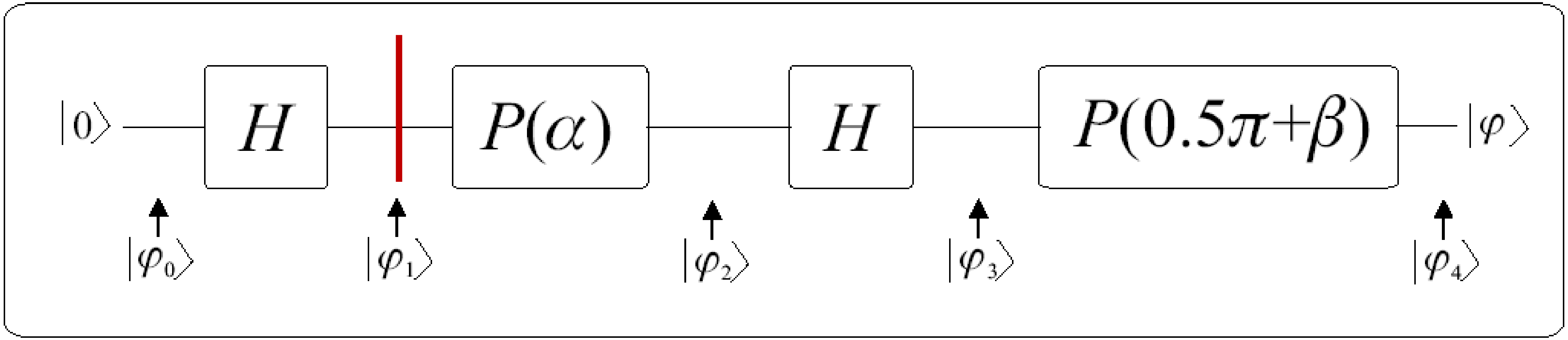


INICIALIZÁLÁS



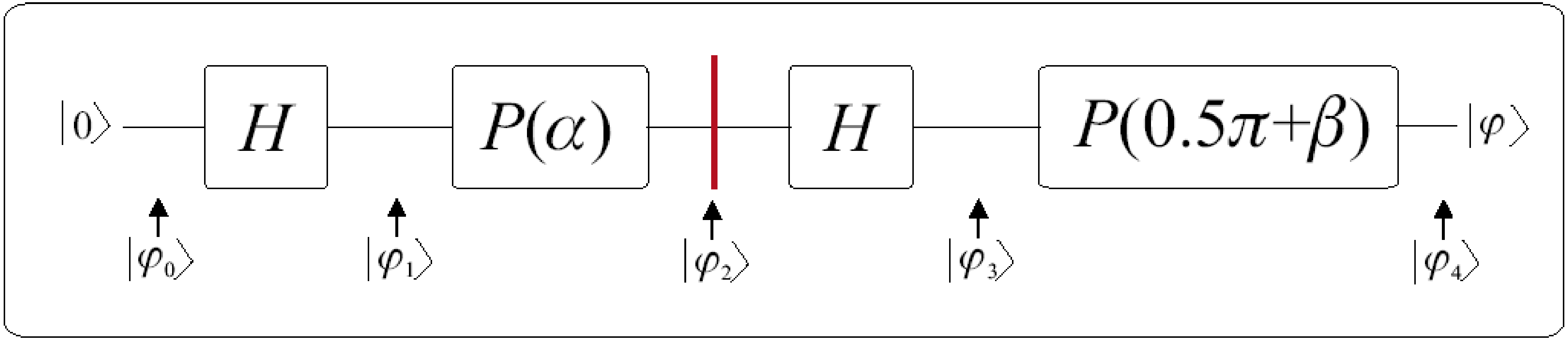
$$|\varphi_0\rangle = |0\rangle$$

SZUPERPOZÍCIÓ



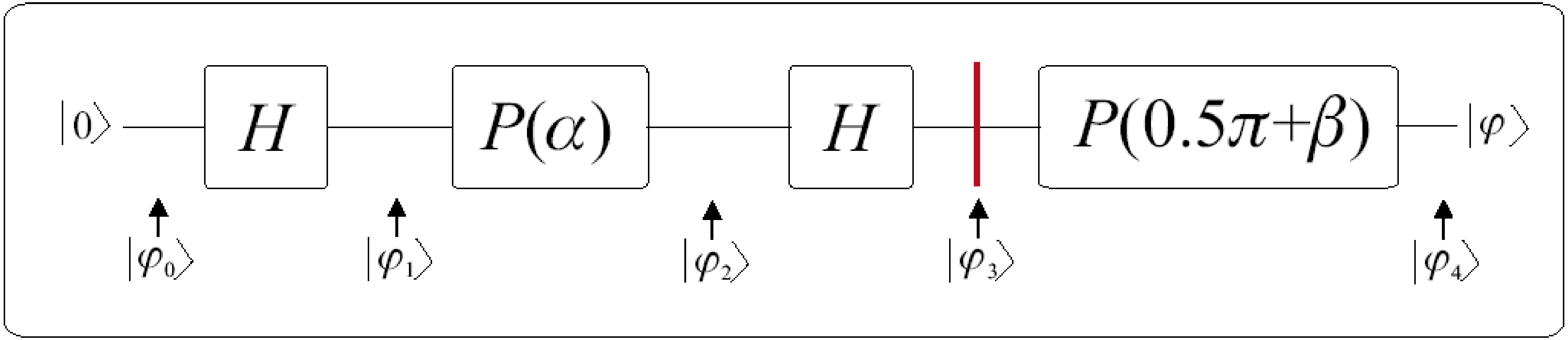
$$|\varphi_1\rangle = H|0\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

FÁZISFORGATÁS



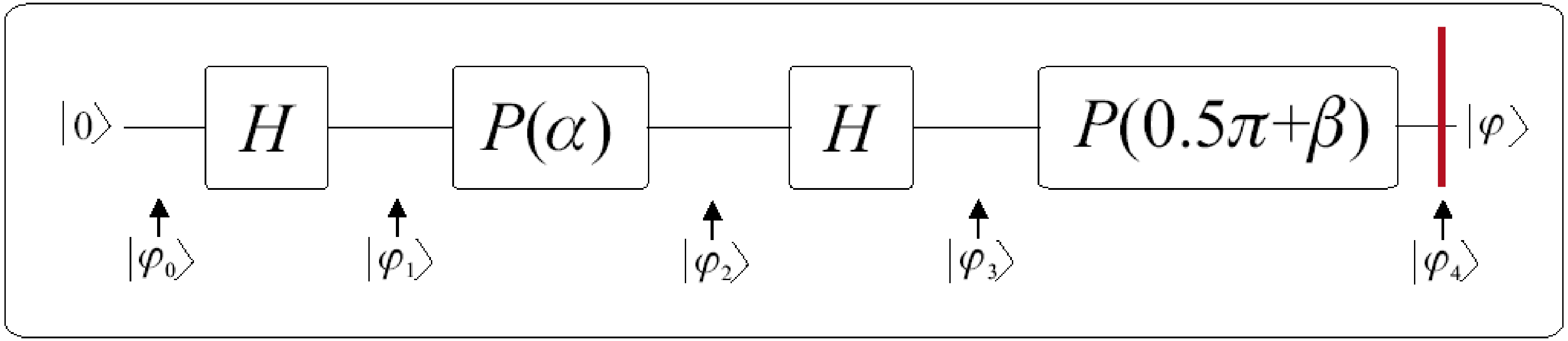
$$P(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{j\alpha} \end{bmatrix} \qquad |\varphi_2\rangle = P(\alpha)\,|\varphi_1\rangle = \frac{|0\rangle + e^{j\alpha}\,|1\rangle}{\sqrt{2}}$$

HADAMARD-KAPU



$$|\varphi_3\rangle = H\,|\varphi_2\rangle = \frac{\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} + e^{j\alpha}\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{1+e^{j\alpha}}{2}\,|0\rangle + \frac{1-e^{j\alpha}}{2}\,|1\rangle$$

TETSZŐLEGES SZÖGGEL VETT FÁZISFORGATÁS



$$\frac{1+e^{j\alpha}}{2} = e^{j0.5\alpha} cos(0.5\alpha)$$

$$e^{j0.5\pi}\frac{1-e^{j\alpha}}{2} = e^{j0.5\alpha} sin(0.5\alpha)$$

$$
\begin{aligned}
|\varphi_4\rangle &= P(0.5\pi+\beta)|\varphi_3\rangle \\
&= P(0.5\pi+\beta)\left[\frac{1+e^{j\alpha}}{2}|0\rangle + \frac{1-e^{j\alpha}}{2}|1\rangle\right] \\
&= \frac{1+e^{j\alpha}}{2}|0\rangle + e^{j(0.5\pi+\beta)}\left(\frac{1-e^{j\alpha}}{2}\right)|1\rangle \\
&= e^{j0.5\alpha}\left[cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)|0\rangle + e^{j\beta}e^{j0.5\alpha} sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)|1\rangle\right] \\
&\boxed{= e^{j0.5\alpha}\left[cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)|0\rangle + e^{j\beta} sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)|1\rangle\right]}
\end{aligned}
$$

Proof of equation 1:

$$e^{j0.5\alpha}\cos(0.5\alpha) = e^{j0.5\alpha}\left(\frac{e^{j0.5\alpha}+e^{-j0.5\alpha}}{2}\right) = \frac{e^{j\alpha}+e^{j0}}{2} = \frac{1+e^{j\alpha}}{2}$$

Proof of equation 2:

$$
\begin{aligned}
e^{j0.5\pi}\left(\frac{1-e^{j\alpha}}{2}\right) &= (\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2))\left(\frac{1-e^{j\alpha}}{2}\right) \\
&= i\left(\frac{1-e^{j\alpha}}{2}\right) = \frac{i}{i}\left[i\left(\frac{1-e^{j\alpha}}{2}\right)\right] \\
&= \boxed{\frac{e^{j\alpha}-1}{2i}}
\end{aligned}
$$

$$e^{j0.5\alpha}\sin(0.5\alpha) = e^{j0.5\alpha}\left(\frac{e^{j0.5\alpha}-e^{-j0.5\alpha}}{2i}\right) = \boxed{\frac{e^{j\alpha}-1}{2i}}$$

Bennett, C. H. & Wiesner, S. J.

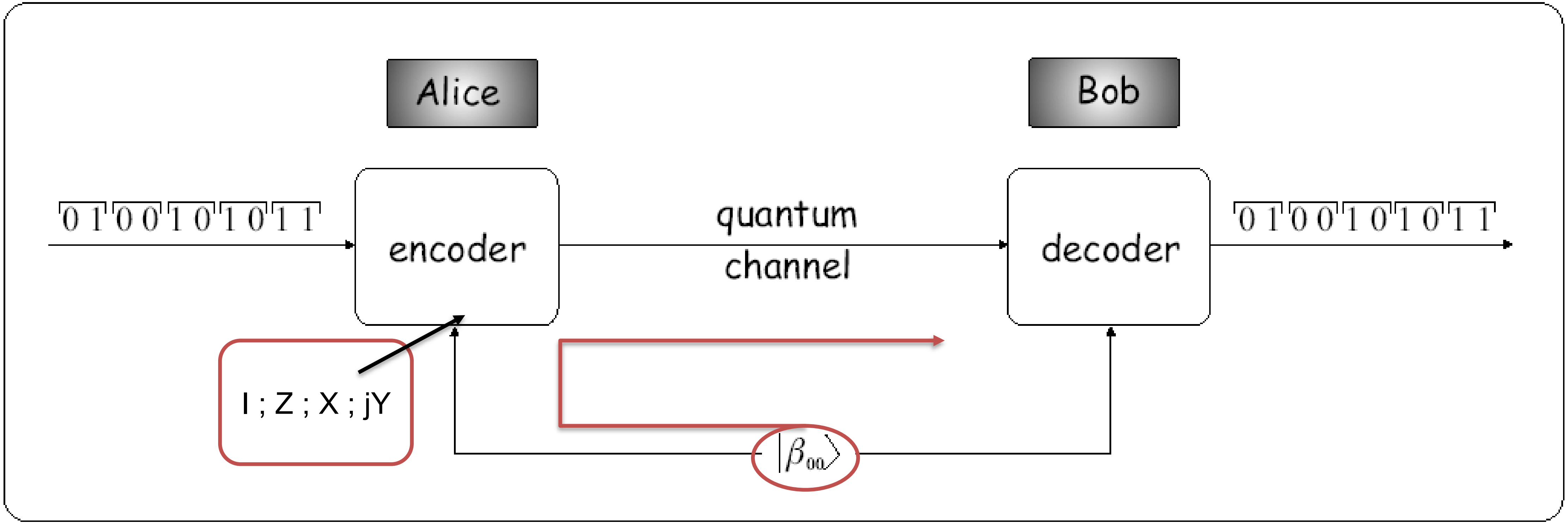
Communication via one- and two-particle operators on Einstein–Podolsky–Rosen states

Phys. Rev. Lett. 69, 2881–2884 (1992)

CÉLKITŰZÉS

- A klasszikus információelmélet szempontjából az információátviteli képesség korlátozott.
- Alice és Bob az információátvitel képességét kvantumkommunikációval szeretné növelni, kihasználva az olyan különleges tulajdonságokat, mint az összefonódás.

ARCHITEKTÚRÁJA



PROTOKOLL LÉPÉSEI (1)

- Inicializálásként osszunk meg egy összefonódott kvantumbit párt $|\beta_{00}\rangle$ a két kommunikáló fél között.
- Ezt követően Alice egy **speciális kódolást** alkalmaz a nála lévő pár tagjára, amit majd kvantumcsatornán továbbít Bob felé.

dibit	transform	joint state
00	I	$\frac{\|00\rangle+\|11\rangle}{\sqrt{2}}$
01	Z	$\frac{\|00\rangle-\|11\rangle}{\sqrt{2}}$
10	X	$\frac{\|10\rangle+\|01\rangle}{\sqrt{2}}$
11	jY	$\frac{\|01\rangle-\|10\rangle}{\sqrt{2}}$

$$|\beta_{00}\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}},$$

$$|\beta_{01}\rangle = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}},$$

$$|\beta_{10}\rangle = \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}},$$

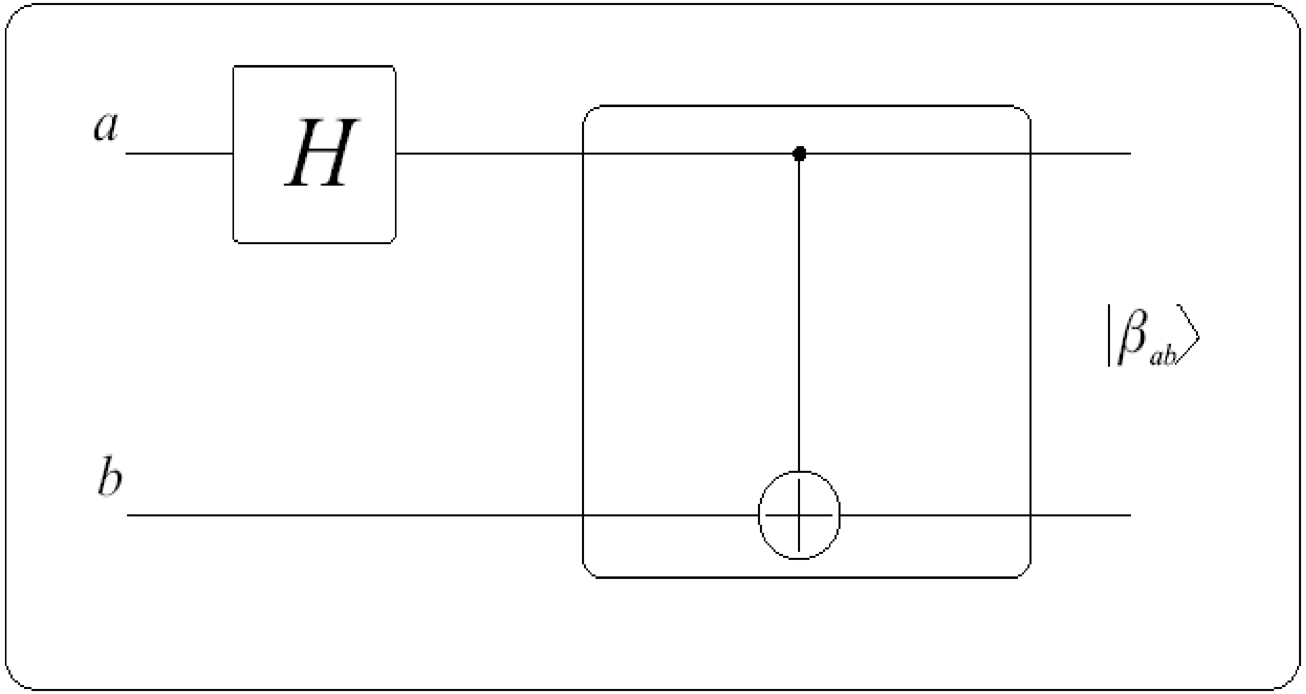
$$|\beta_{11}\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}.$$

PROTOKOLL LÉPÉSEI (2)

- Miután Bob megkapta Alice-től kvantumbitjét, elvégez rajta egy projektív mérést megkülönböztetve a 4 lehetséges Bell-állapot
- Van azonban egy másik módja is a felismerési probléma megoldásának, ha kihasználjuk a kvantumtranszformációk unitér tulajdonságát, azaz képesek vagyunk meghatározni az adott állapotot a transzformáció inverz folyamatából.

PROTOKOLL LÉPÉSEI (3)

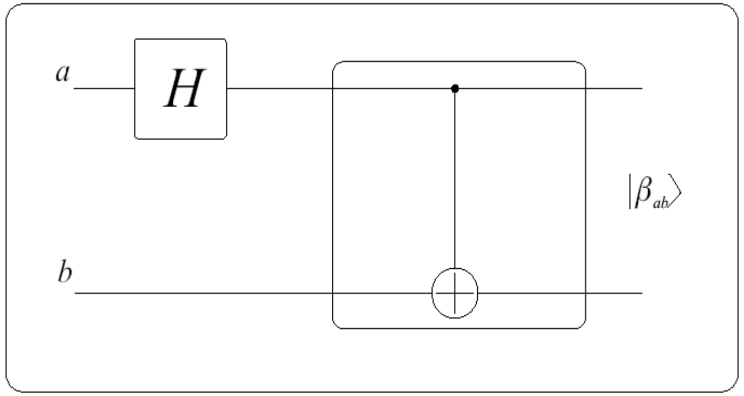
- Tudjuk, hogy a Bell-állapotok a következő áramkör segítségével állíthatók elő:

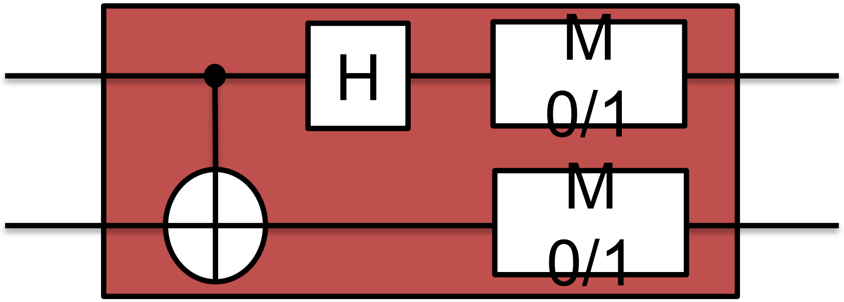


PROTOKOLL LÉPÉSEI (4)

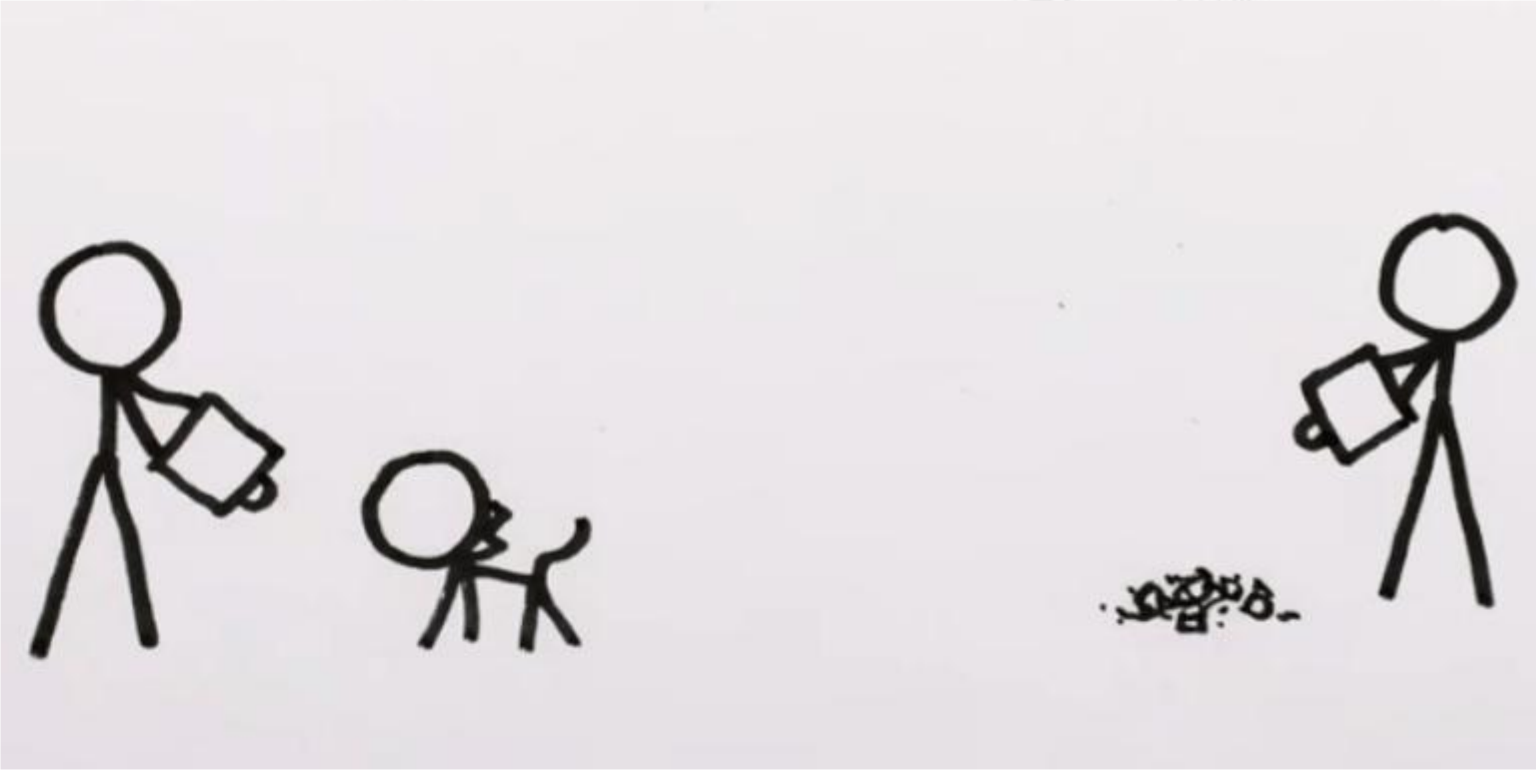
- Mivel mindkét $(H \otimes I)$ és $CNOT$ kapu hermitikus operátor, Bobnak ezeket a kapukat fordított sorrendben kell megvalósítania a dekóder felépítéséhez.

$$((H \otimes I)CNOT)^{-1} = ((H \otimes I)CNOT)^{\dagger} = CNOT^{\dagger}(H \otimes I)^{\dagger}$$





Kvantumteleportáció



C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, W. K. Wootters

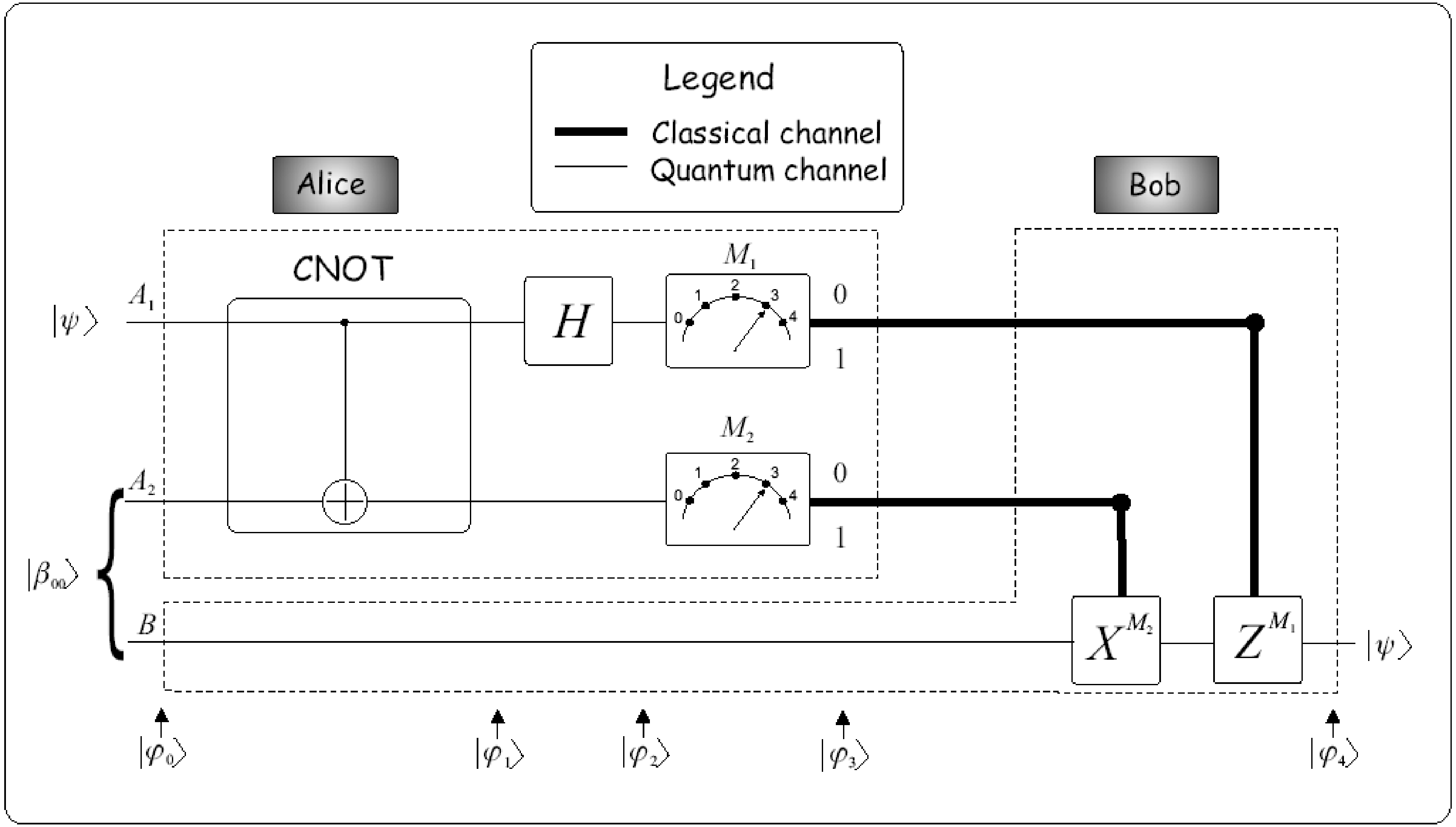
Teleporting an Unknown Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels,

Phys. Rev. Lett. 70, 1895-1899 (1993)

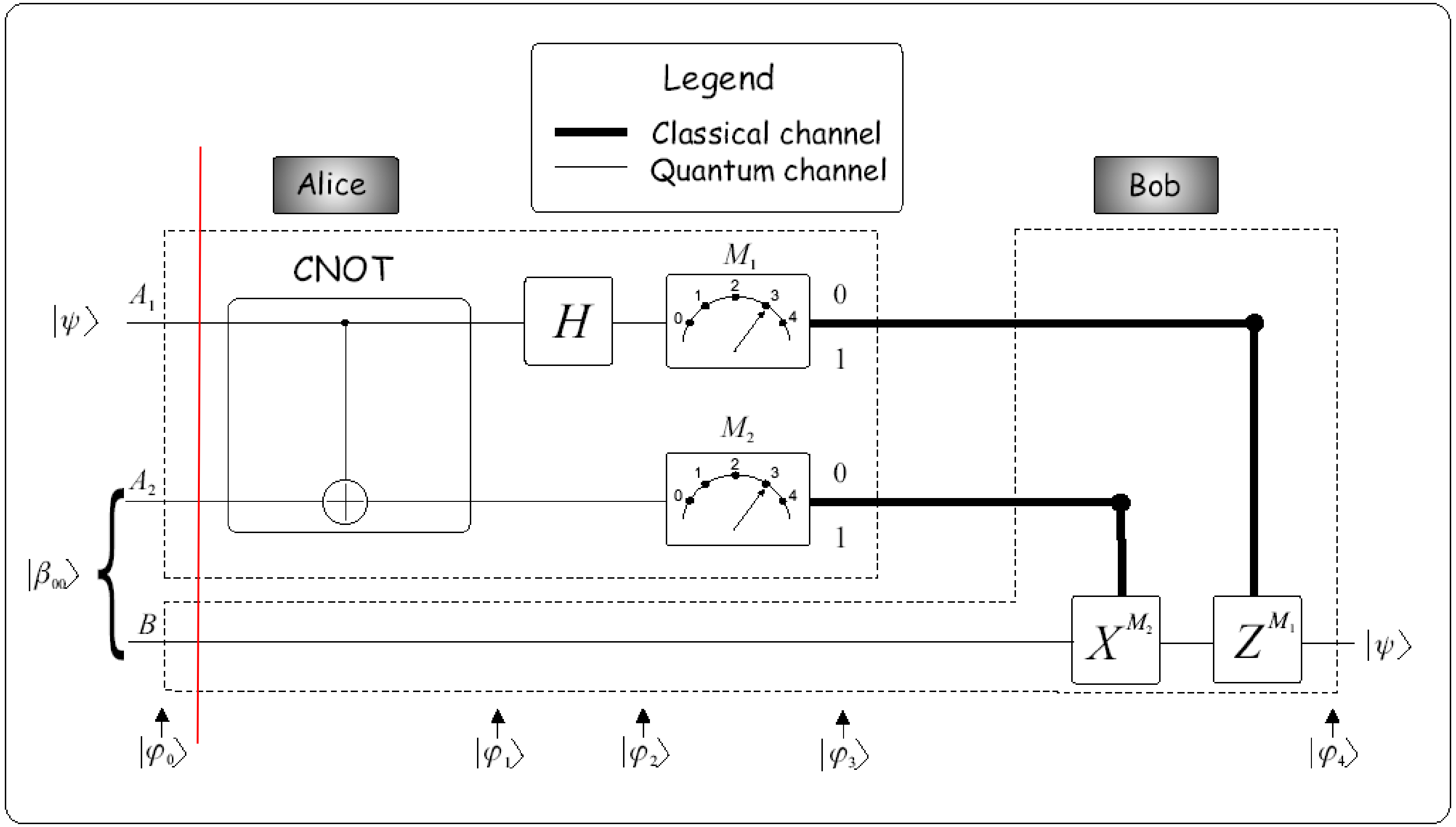
KVANTUMTELEPORTÁCIÓ ÁRAMKÖR

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$$

$$|\beta_{00}\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$$

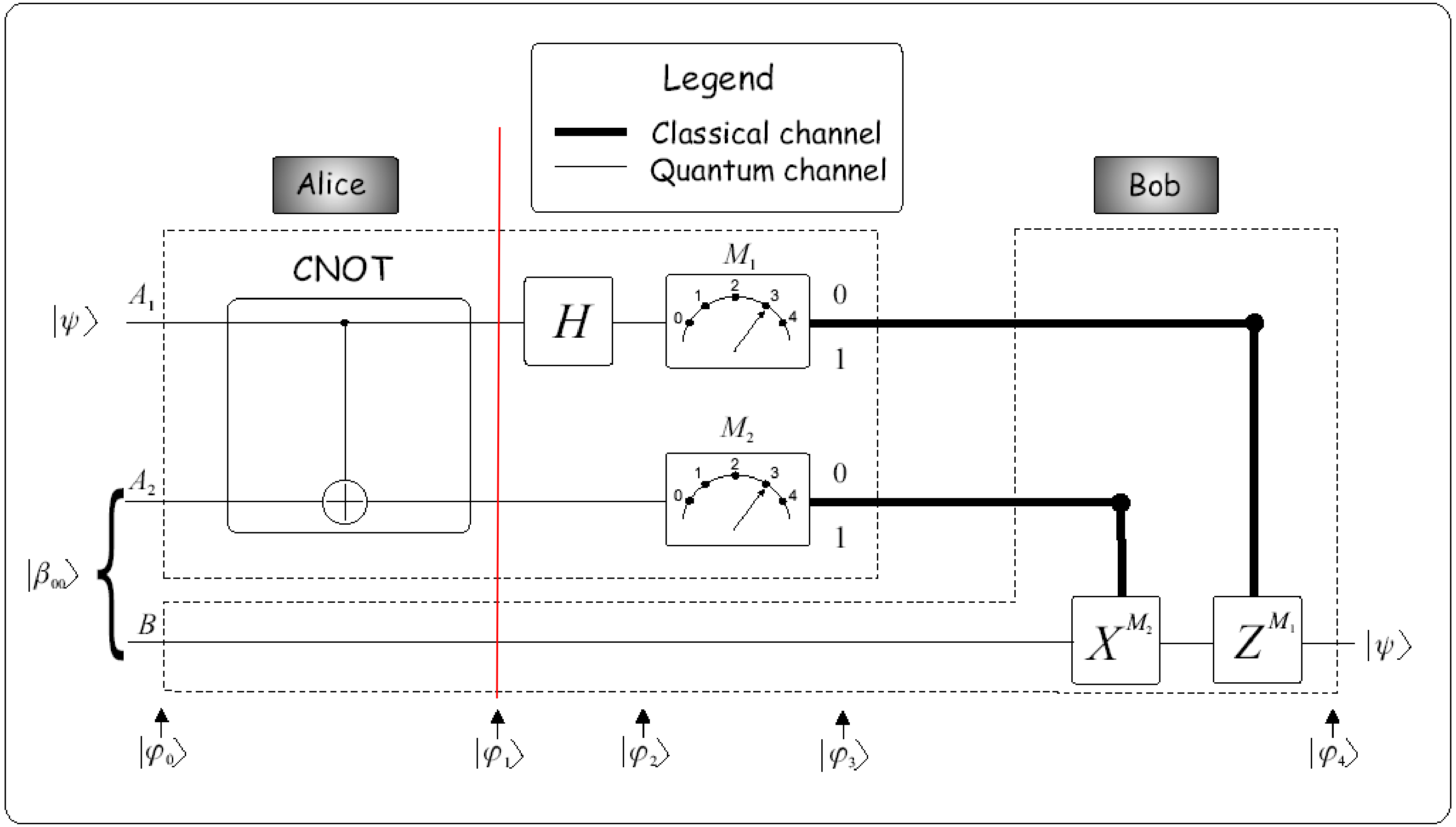


INICIALIZÁCIÓ



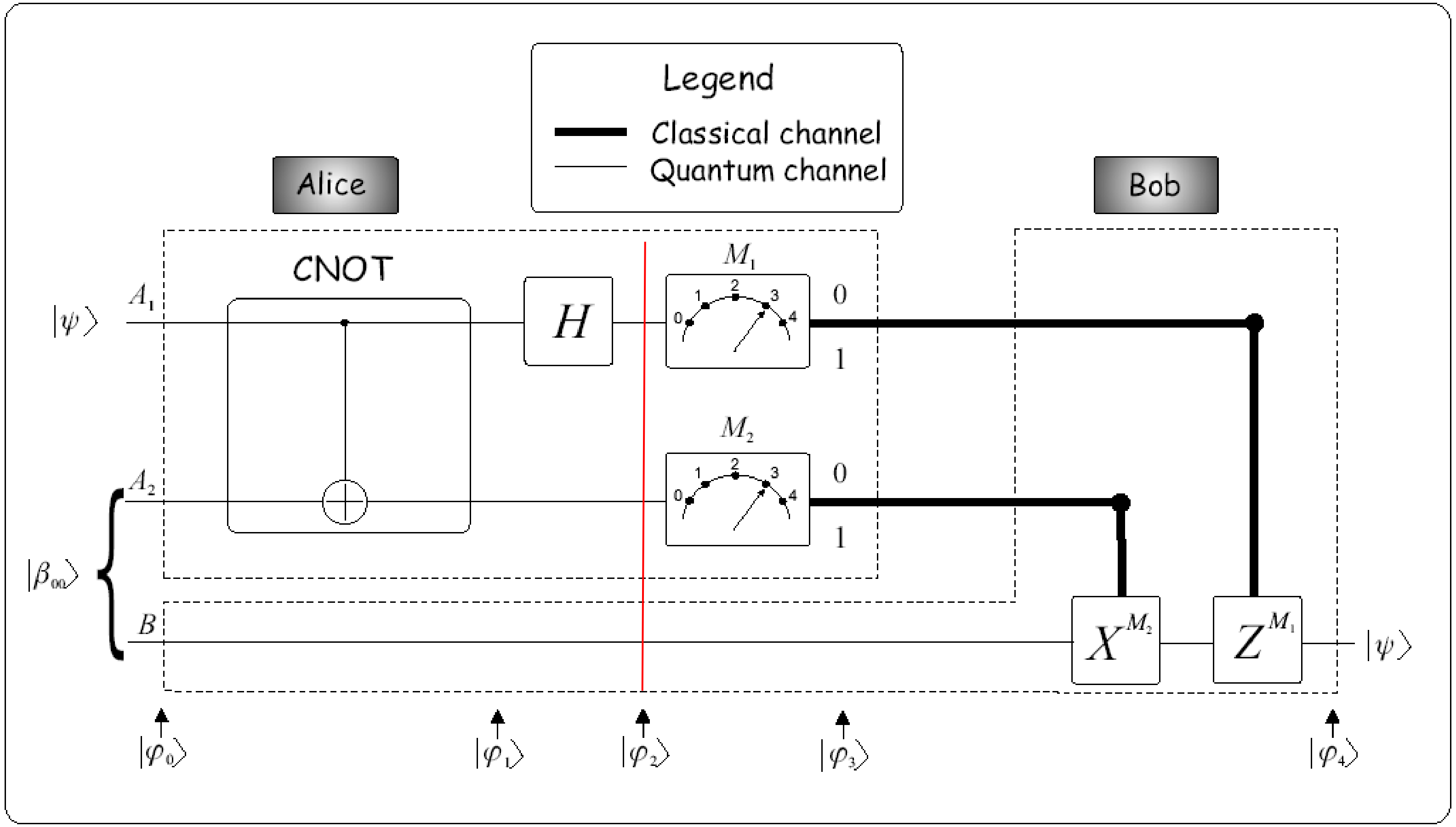
$$|\varphi_0\rangle = |\psi\rangle\,|\beta_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[a\,|0_{A_1}\rangle\left(|0_{A_2}0_B\rangle + |1_{A_2}1_B\rangle\right) + b\,|1_{A_1}\rangle\left(|0_{A_2}0_B\rangle + |1_{A_2}1_B\rangle\right)\right]$$

ÖSSZEFONÓDÁS



$$|\varphi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[a\,|0_{A_1}\rangle\left(|0_{A_2}0_B\rangle + |1_{A_2}1_B\rangle\right) + b\,|1_{A_1}\rangle\left(|1_{A_2}0_B\rangle + |0_{A_2}1_B\rangle\right)\right]$$

SZUPERPOZÍCIÓ



$$|\varphi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\left[a(|0_{A_1}\rangle + |1_{A_1}\rangle)(|0_{A_2}0_B\rangle + |1_{A_2}1_B\rangle) + b(|0_{A_1}\rangle - |1_{A_1}\rangle)(|1_{A_2}0_B\rangle + |0_{A_2}1_B\rangle)\right]$$

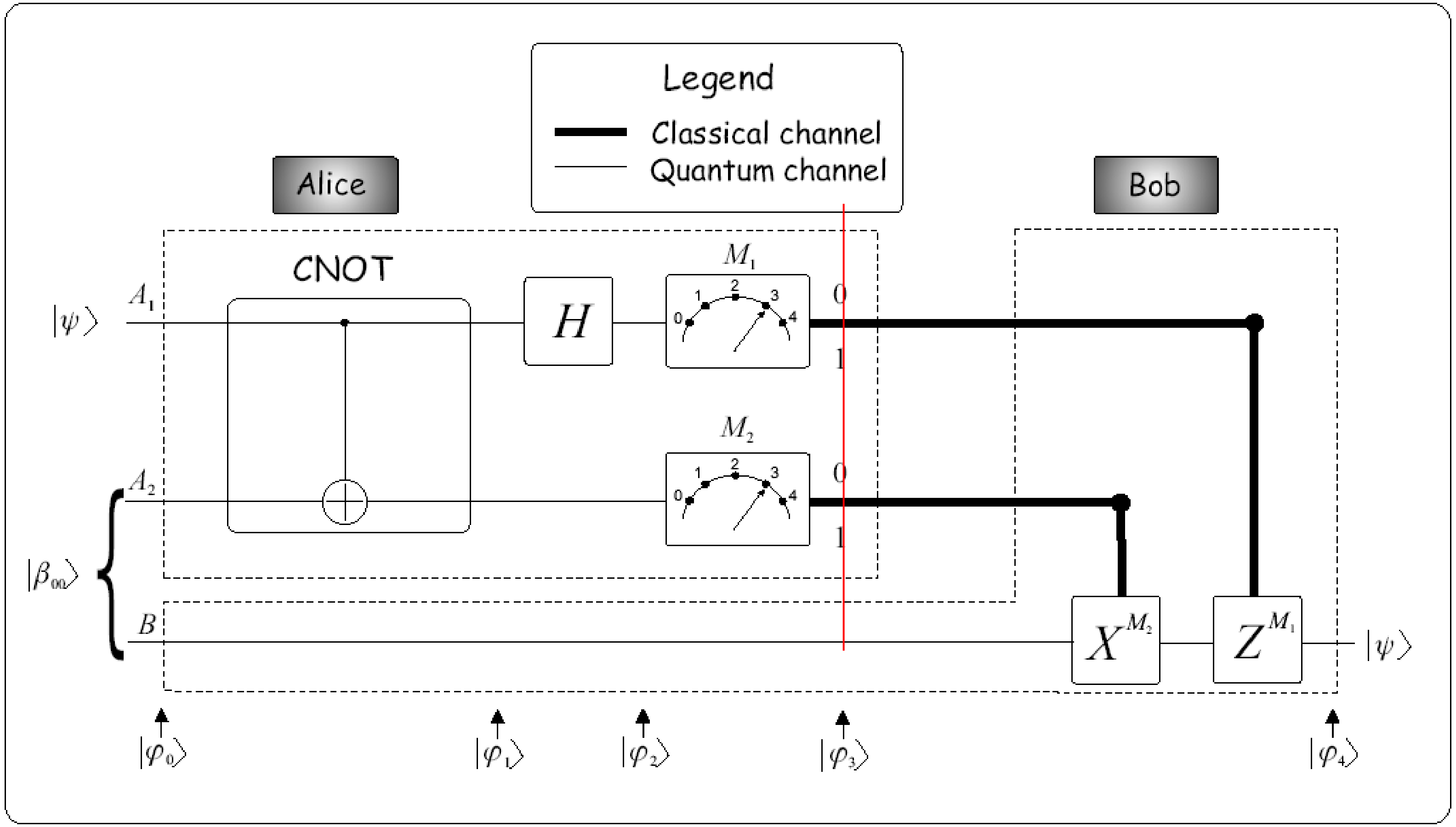
MÉRÉS ELŐTTI ÁLLAPOT EGYSZERŰSÍTÉSE

$$|\varphi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}[a(|0_{A_1}\rangle + |1_{A_1}\rangle)(|0_{A_2}0_B\rangle + |1_{A_2}1_B\rangle) + b(|0_{A_1}\rangle - |1_{A_1}\rangle)(|1_{A_2}0_B\rangle + |0_{A_2}1_B\rangle)]$$

$$\Downarrow$$

$$|\varphi_2\rangle = \frac{1}{2}[\,|0_{A_1}0_{A_2}\rangle\,(a\,|0_B\rangle + b\,|1_B\rangle) + |0_{A_1}1_{A_2}\rangle\,(a\,|1_B\rangle + b\,|0_B\rangle) +$$
$$|1_{A_1}0_{A_2}\rangle\,(a\,|0_B\rangle - b\,|1_B\rangle) + |1_{A_1}1_{A_2}\rangle\,(a\,|1_B\rangle) - b\,|0_B\rangle].$$

MÉRÉS


Legend
Classical channel
Quantum channel
Alice
Bob
CNOT
H
M_1
M_2
$|\psi\rangle$
A_1
A_2
B
$|\beta_{00}\rangle$
0
1
X^{M_2}
Z^{M_1}
$|\varphi_0\rangle$
$|\varphi_1\rangle$
$|\varphi_2\rangle$
$|\varphi_3\rangle$
$|\varphi_4\rangle$

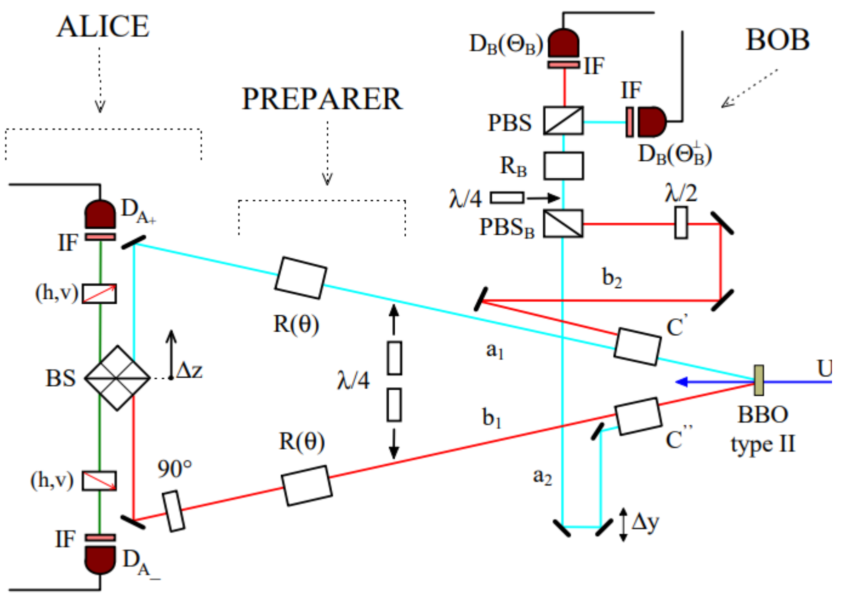
MIT CSINÁLJUNK BOB OLDALÁN?

$$
\begin{aligned}
|\varphi_2\rangle \quad = \quad & \frac{1}{2}\Big[|\overset{A_1 A_2}{0\ \ 0}\rangle\left(a|\overset{B}{0}\rangle + b|\overset{B}{1}\rangle\right) + |\overset{A_1 A_2}{0\ \ 1}\rangle\left(a|\overset{B}{1}\rangle + b|\overset{B}{0}\rangle\right) \\
+ \quad & |\overset{A_1 A_2}{1\ \ 0}\rangle\left(a|\overset{B}{0}\rangle - b|\overset{B}{1}\rangle\right) + |\overset{A_1 A_2}{1\ \ 1}\rangle\left(a|\overset{B}{1}\rangle - b|\overset{B}{0}\rangle\right)\Big].
\end{aligned}
$$

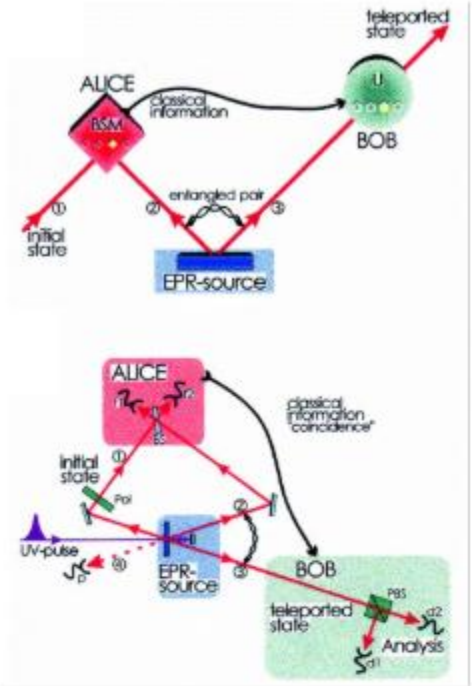
$$
\begin{array}{ccccc}
A_1 A_2 & \rightarrow & B & = & U|\psi\rangle \\
00 & \rightarrow & \frac{a|0\rangle + b|1\rangle}{2} & = & I|\psi\rangle \\
01 & \rightarrow & \frac{a|1\rangle + b|0\rangle}{2} & = & X|\psi\rangle \\
10 & \rightarrow & \frac{a|0\rangle - b|1\rangle}{2} & = & Z|\psi\rangle \\
11 & \rightarrow & \frac{a|1\rangle - b|0\rangle}{2} & = & ZX|\psi\rangle
\end{array}
$$

KÍSÉRLETI ELRENDEZÉSEK

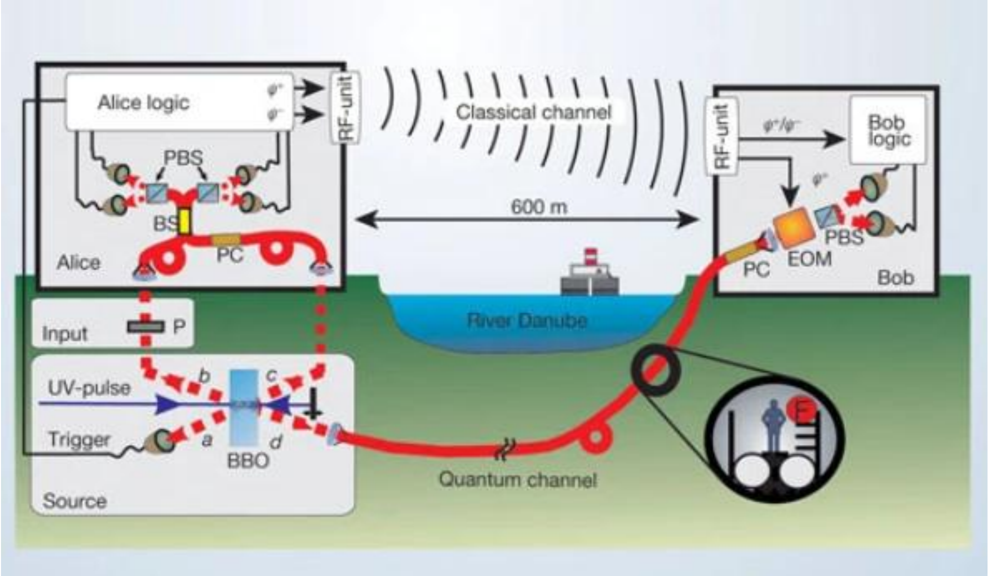
1998.Boschi et al.



1997. D. Bouwmeester et al.

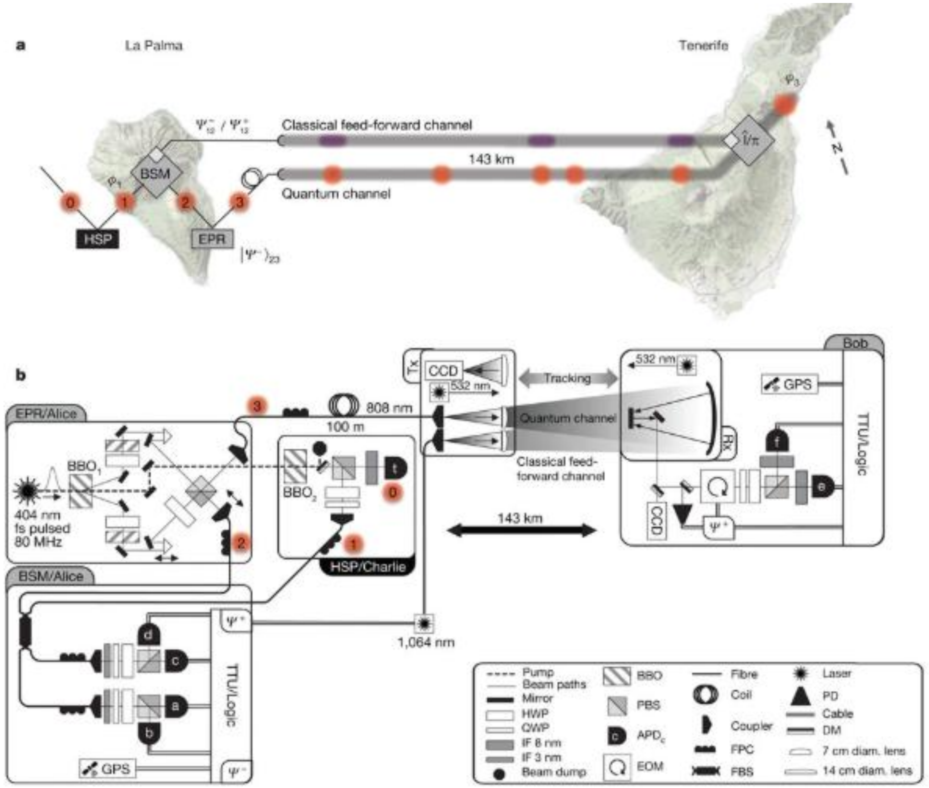


2004. Rupert Ursin et al.

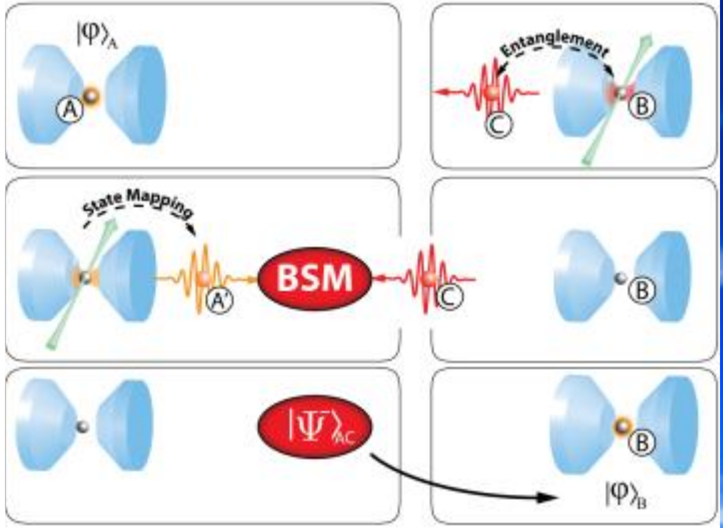


KÍSÉRLETI ELRENDEZÉSEK

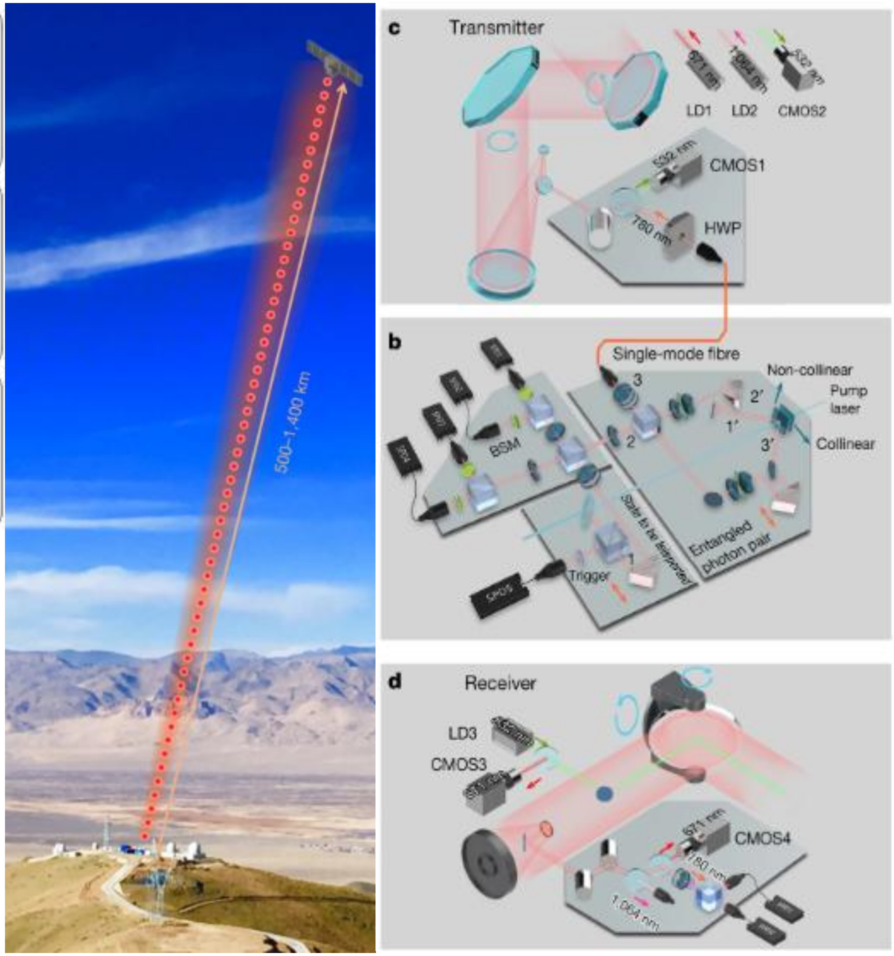
2012: Xiao-Song Ma and et al.



2013.Christian Nölleke and et al.



2017. Ji-Gang Ren and et al.



SIKERES KVANTUMTELEPORTÁCIÓ

1993: elmélet : C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, W. K. Wootters, Teleporting an Unknown Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels, Phys. Rev. Lett. 70, 1895-1899 (1993)

1997: sikeres teszt laboratóriumi körülmények között: Bouwmeester, D., Pan, JW., Mattle, K. et al. Experimental quantum teleportation. Nature 390, 575–579 (1997).

1998: sikeres kísérlet: D. Boschi, S. Branca, F. De Martini, L. Hardy and S. Popescu: Experimental Realization of Teleporting an Unknown Pure Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels, Phys. Rev. Lett. 80, 1121

1998: NMR-alapú teleportáció: M. A. Nielsen, E. Knill, R. Laflamme: Complete quantum teleportation using nuclear magnetic resonance, arXiv:quant-ph/9811020

2004: 600 méter – optikai szálon: Ursin, R., Jennewein, T., Aspelmeyer, M. et al. Quantum teleportation across the Danube. Nature 430, 849

2012: 97 km – szabadtéri csatornán keresztül: Juan Yin et. al, Quantum teleportation and entanglement distribution over 100-kilometre free-space channels, Nature 488 185-188 (2012)

2012: 143 km – szabadtéri csatornán keresztül (Kanári-szigetek): Ma, XS., Herbst, T., Scheidl, T. et al. Quantum teleportation over 143 kilometres using active feed-forward. Nature 489, 269–273 (2012).

2013: Két atom között sikeres kvantumteleportáció: C. Nölleke, A. Neuzner, A. Reiserer, C.Hahn, G. Rempe, and S. Ritter: Efficient Teleportation Between Remote Single-Atom Quantum Memories, Phys.Rev.Lett.110, 140403 (2013)

2017: 1400 km (kínai kvantumműhold): Ren, JG., Xu, P., Yong, HL. et al. Ground-to-satellite quantum teleportation. Nature 549, 70–73 (2017)

HÁLÓZATI RENDSZEREK
ÉS SZOLGÁLTATÁSOK
TANSZÉK

MŰEGYETEM 1782