

1 符号

- 补集: A'
- P_n^r : ${}_nP_r$
- σ^2 : $\text{Var}(X)$

2 数数

2.1 常见公式

2.1.1 组合数

换系数:

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

组合数乘积:

$$\binom{n}{r} \binom{r}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{r-k}$$

$$\sum_{i=0}^m \binom{n}{i} \binom{m}{m-i} = \binom{m+n}{m} \quad (n \geq m)$$

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$$

组合数的带权和:

$$\sum_{i=0}^n i \binom{n}{i} = n2^{n-1}$$

$$\sum_{i=0}^n i^2 \binom{n}{i} = n(n+1)2^{n-2}$$

杨辉三角列和:

$$\sum_{l=0}^n \binom{l}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

组合数与斐波那契 (Fibonacci):

$$\sum_{i=0}^n \binom{n-i}{i} = F_{n+1}$$

卡特兰数 (Catalan Numbers):

$$H_n = \sum_{i=1}^n H_{i-1} H_{n-i} = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$$

2.1.2 常见求和公式

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4} n^2(n+1)^2$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} r^k = \frac{1-r^n}{1-r}, r \neq 1$$

$$\sum_{k=1}^n k r^k = r \frac{1 - (n+1)r^n + nr^{n+1}}{(1-r)^2}, r \neq 1$$

2.1.3 Maclaurin Series

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$\ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \dots$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

2.2 常见题

隔板法: $\sum_{i=1}^k x_i = n$

- $x_i > 0$: $\binom{n-1}{k-1}$
- $x_i \geq 0$: $\binom{n+k-1}{k-1}$

错位排列: $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$

3 Basic Probability

3.1 Bayes' Rule

$$\mathbb{P}\text{r}(B | A) \cdot \mathbb{P}\text{r}(A) = \mathbb{P}\text{r}(A | B) \cdot \mathbb{P}\text{r}(B)$$

$$\mathbb{P}\text{r}(B_i | A) = \frac{\mathbb{P}\text{r}(A | B_i) \cdot \mathbb{P}\text{r}(B_i)}{\sum_j \mathbb{P}\text{r}(A | B_j) \cdot \mathbb{P}\text{r}(B_j)}$$

3.2 PMF

Probability Mass Function, 又名 Frequency Function:

$$p(x_i) = \mathbb{P}\text{r}\{X = x_i\}$$

3.3 CDF

Cumulative Distribution Function

$$F(x) = \mathbb{P}\text{r}\{X \leq x\}$$

3.4 Expectation

存在条件 (联想到绝对收敛):

$$\sum_i |x_i| p(x_i) < \infty$$

4 Distribution

4.1 Bernoulli Random Variable

- 概率: $p(1) = p, p(0) = 1 - p$
- 性质: $\mathbb{E}(X) = p, \text{Var}(X) = p(1 - p)$

4.2 Binomial Distribution

- 记号: $X \sim \text{Bin}(n, p)$
- 概率: $p(i) = \binom{n}{i} p^i (1 - p)^{n-i}$
- 性质: $\mathbb{E}(X) = np, \text{Var}(X) = np(1 - p)$

4.3 Poisson Distribution

记号: $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$

$$p(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

本质上是一个 $n \rightarrow \infty$ 的二项分布, $\lambda = np$ 。

$$\mathbb{E}(X) = \lambda, \text{Var}(X) = \lambda$$

所以 λ 也就是无数次独立实验的期望。一般是先知道期望, 又由于有无数次独立实验, 然后求 p 。

5 单词表

5.1 纸牌

5.1.1 花色

- Suit - 花色
- Hearts - 红桃
- Diamonds - 方块
- Clubs - 梅花
- Spades - 黑桃

5.1.2 特殊牌型

- Ace - A 牌
- King - K 牌
- Queen - Q 牌
- Jack - J 牌
- Joker - 王牌
- Pip - 小牌 (指 2 到 10 的牌)
- Face card - K、Q、J

5.1.3 组合牌

- Flush - 同花 (五张同一花色的牌)
- Straight - 顺子 (五张连续大小的牌)
- Full house - 葫芦 (三张一样和两张一样的牌)
- Pair - 对子

5.1.4 其他

- Deck of cards - 一副纸牌
- Rank - 牌面大小
- Deal - 发牌
- Hand - 手牌
- Draw - 抽牌
- Discard - 弃牌
- Flip - 翻牌
- Cut the deck - 切牌
- Odds - 赔率

5.2 赌博

- Bet - 赌注
- Casino - 赌场
- Slot machine - 老虎机

- Roulette - 轮盘赌
- Blackjack - 二十一点
- Craps - 赌场骰子游戏

5.3 保险

- Premium - 保险费
- Policyholder - 保单持有人
- Coverage - 保险覆盖范围
- Deductible - 免赔额
- Claim - 理赔

5.4 股票

- Stock - 股票
- Share - 股份
- Dividend - 股息
- Stock price - 股价
- Stock exchange - 股票交易所

5.5 国际象棋

- Pawn - 兵
- Rook - 车
- Knight - 马
- Bishop - 象
- Queen - 后
- King - 王
- Check - 将军
- Checkmate - 将死
- Castling - 王车易位
- En passant - 吃过路兵
- Stalemate - 和棋