

CFF 全国信息学奥林匹克联赛
(NPIO2018) 复赛

提高组 day1 题解

1. 小小迪的哈希树

(dishash.c/cpp/pas)

【题目大意】

询问用 n 个节点能构成多少棵不同的 m 叉树。

【算法一】

直接手模打表……

时间复杂度： $O(1)$ 。

期望得分：20。

【算法二】

爆搜……

时间复杂度：0（松）。

期望得分：40 ~ 100。

【算法三】

考察对卡特兰数的一些初步理解。我们强制根节点的左子树上放 i 个节点，那右子树就有 $n - i - 1$ 个节点，于是可得 $f(n) = \sum_{i=1}^{n-1} f(i)f(n-1-i)$ 。即卡特兰数。

时间复杂度：0（能过）。

期望得分：20。

【算法四】

令 $dp[i]$ 表示用 i 个不同的节点构成 m 叉树的数量。我们发现好像无法转移，于是考虑另设 $dpp[j][k]$ 表示根节点有 j 个儿子，子树大小为 k 的方案数。易得 $dpp[j][k] = \sum_{l=0}^{k-1} dp[l] \times dpp[j-1][k-l]$ ，也就是说在一棵树的根节点上接上一棵 m 叉树。最后我们有 $dp[i] = dpp[m][i]$ 。

时间复杂度： $O(n^4)$ 。

期望得分：80。

【算法五】

状态定义和算法四不多，只是 $dpp[i][j]$ 把根节点给去掉了，即定义了由 i 个 j 叉树构成的森林，然后直接同卡特兰数那样大力接上去就可以了： $dpp[i][j] += dp[k] * dpp[i-k][j-1]$ 。

当然最后是 $dp[i+1] = dp[m][i]$ 。

时间复杂度： $O(n^3)$ 。

期望得分：96。

【算法六】

首先，我们有一个猜想：

给定一个由自然数组成的长度为 n 的序列 $\{a\}$ ，若 $\sum a_i = n - 1$ ，则有且仅有一个 I 使得：可以产生一个由正整数(除最后一个数为0)构成的长度为 n 序列 $\{b\}$ ：

$$b_i = \sum_{j=1}^i a_{(j+I-2)\%n+1} - i + 1$$

比如说这样一个序列：

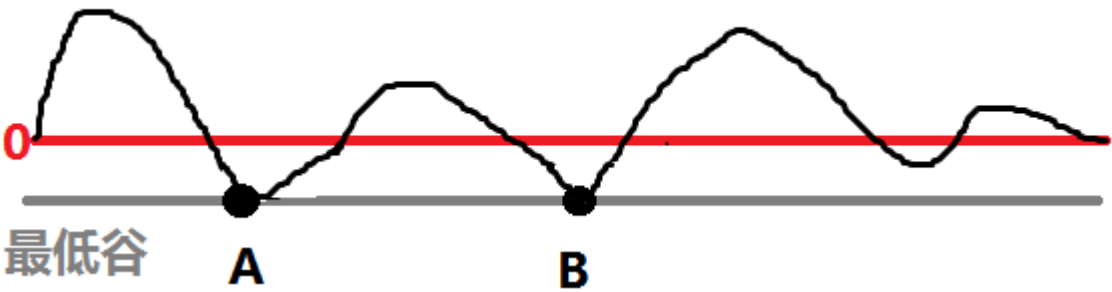
3 0 0 0 0 2

我们有且仅有一个 $I = 6$ 使得产生合法的 b 序列：

2 4 3 2 1 0

然后我们来证明它：

所有序列 $\{a\}$ ，当 $I = 1$ 时，所产生的 $\{b\}$ 序列都类似下面这样的图：



可以发现的是，当我们选 $I = x(x \neq 1)$ 时，0线会移到当前 b_x 所在位置，并且从 $x + 1 \sim n$ 和1的点会上升1。

因此，当且仅当选 I 为 最近的 处在最低谷的 点的位置 时，产生的 $\{b\}$ 合法。

然后我们发现和题目好像并没有什么关系 (hua ji. jpg)

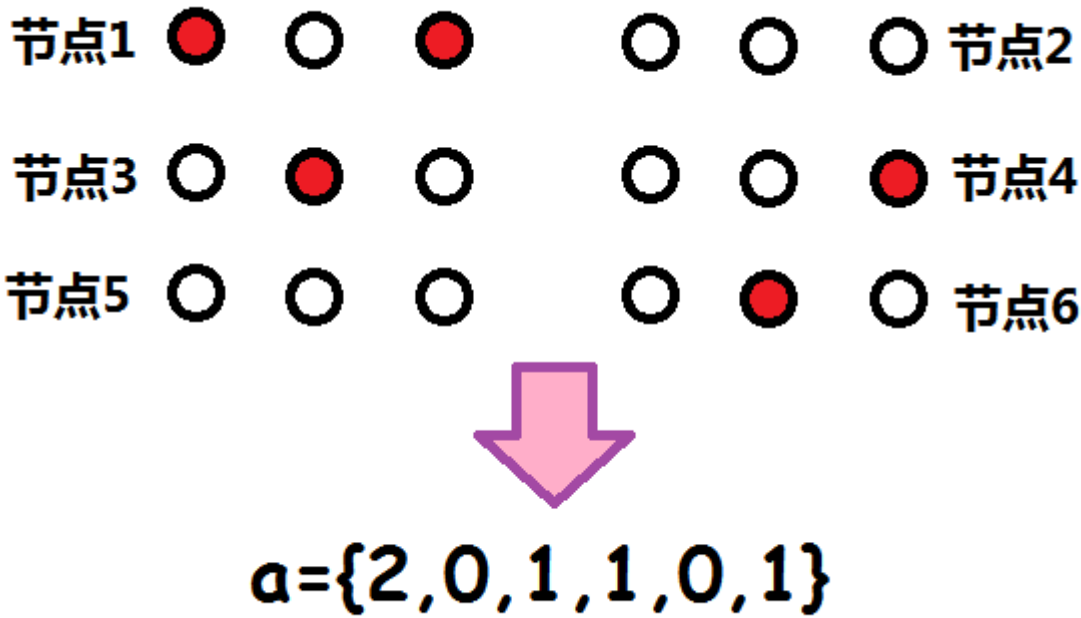
我们需要把这个结论和树联系起来。

我们给一棵树记录一次dfs，我们先把儿子节点入栈，遍历完后将其出栈，这样子，我们对于一个序列 $\{a\}$ ， a_i 表示的是 第 i 个节点 有几个儿子。

我们每次遍历到一个节点时先将它出栈（-1），再把它的儿子入栈（+ a_i ），当前栈里元素个数就是 b_i ，即能拓展点的个数。最终就得到了 $\{b\}$ 序列。如果中途中途出现小于等于0的数，那么下一个节点就不知道在哪了，不符合树的定义。

最后，重点来了，前面一大坨怎么用来解本题呢？

因为题中是 m 叉树，所以连接儿子的边的选择会影响 方案数，因此序列 $\{a\}$ 中每个数的大小不超过 m ，总共有 $n \times m$ 条边，从中选出 $n - 1$ 条，并用下图构成序列 $\{a\}$ 。



而构成的序列 $\{a\}$ 中，只有 $\frac{1}{n}$ 的方案是可行的，因此得出公式：

$$ans = \frac{C_{n \times m}^{m-1}}{n}$$

时间复杂度： $O(23333)$ 。

期望得分：100。

【其他神仙算法】

~~找规律||拉格朗日反演。~~

具体就去看[这儿吧](#)。

对了，最后别忘了+1。

2. 小小迪的伸展树

(display.c/cpp/pas)

【题目大意】

给定一个可重集合 $\{a_i\}$ ，要求支持插入、删除、修改、给出 k 查询 $\sum(k \bmod a_i)$ 。

【算法一】

开个map大力模拟不虚。

期望得分：20分。

【算法二】

对于询问较小的情况，开个数组处理出所有询问的答案即可。

期望得分：35分。

【算法三】

对于询问较少的情况，离线得到所有的询问，每次更新至处理这些询问的答案即可。

期望得分：50分。

【算法四】

发现 $L, lim \leq 10^5$ 并不是很大，于是考虑开桶来做。

人数在 \sqrt{lim} 内的师直接开桶暴力。

考虑人数大于 \sqrt{lim} 的师。现在我们只考虑人数大于 \sqrt{lim} 的师对于query x 的答案。我们设 cnt 表示人数大于 \sqrt{lim} 的师的个数，如果没有取模，答案显然是 $cnt \times x$ 。有取模的话对于某一个师，如果询问在 $0 \sim x - 1$ 之间，就对答案 -0 ；在 $x \sim 2x - 1$ 之间，就对答案 $-x$ ；在 $2x \sim 3x$ 之间，就对答案 $-2x$ ……以此类推。发现我们可以用树状数组维护。

期望得分：100分。

3. 小小迪的林克卡特树

(dislct.c/cpp/pas)

【题解】

首先根节点就是重心啦，既然是去边，那倒着不如加边啦。

x 没有1时应该都会吧，一开始重心求一下，以它为根，深度就是高度啦。

30% nm 每次减去就暴力算出重心，查询时暴力都搜一遍就行。

50% nm 暴力写好一点就有吧，我也没写过，滑稽。

100% 这是颗随机树当然要用它的 \log 了呀， $m \log n$???

重心的一条性质：把两个树通过一条边相连得到一个新的树，那么新的树的重心在连接原来两个树的重心的路径上。

然后乱搞就可过了，开始处理出最终森林各树的重心，子树大小的 \max ，根节点就是深度最浅的点，以及原树的lca，节点的深度，父亲；

加边就把要改的链都改一遍，求两重心的lca然后分别爬上去看是不是重心，

并查集维护一下所在树。

高度lca求一下，最后倒着输出。

（小小迪出品，必是暴力）