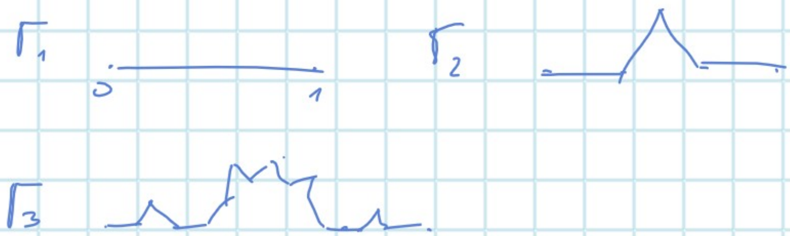
06.03.19

<u>Спрямляемая кривая</u> — кривая, у которой есть длина.

Пример неспрямляемых кривых

<u>Пример 1</u>: (Кривая Коха)



Γ_{n+1} получается из Γ_n заменой каждого звена

Кривая Коха — это $\Gamma = \lim\limits_{n\to\infty} \Gamma_n$

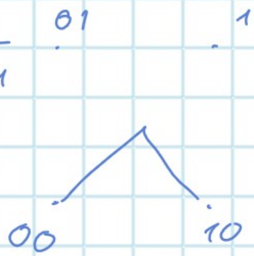
1) Γ непрерывна
2) Γ неспрямляемая

$l(\Gamma_{n+1}) = \frac{4}{3} l(\Gamma_n) \qquad l(\Gamma) = 1$

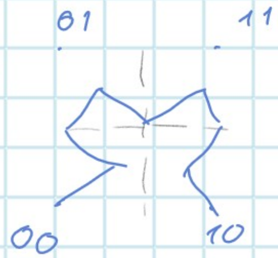
$l(\Gamma_n) = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \to \infty$ при $n \to \infty$

Пример 2   Кривая Пеано

Γ_1



Γ_2



Кривая Пеано $\Gamma = \lim\limits_{n\to\infty} \Gamma_n$ и

1. непрерывна
2. неспрямляема
3. проходит через все точки квадрата

Теорема: Если $\Gamma = \{x(t), y(t), t \in [\alpha, \beta]\}$

$x(t)$, $y(t)$ непрерывно дифференцируемы $\Rightarrow$

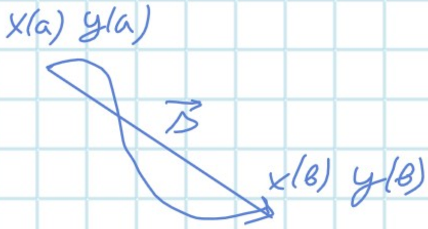
Γ спрямляема и $l(\Gamma) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\, dt$

Док-во 1) спрямляемость

Лемма 1 Пусть $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ непрерыв. дифф на $[a,b]$

Пусть $\vec{\Delta} = (x(b) - x(a), y(b) - y(a))$. Тогда

$$\|\vec{\Delta}\| \le \max_{t\in[a,b]} \|\vec{r}(t)\| \cdot (b-a)$$



Введём функцию

скалярное произв.

$$f(t) = \langle \vec{r}(t) - \vec{r}(a), \vec{\Delta} \rangle =$$

$$= (x(t) - x(a))(x(b) - x(a)) + (y(t) - y(a))(y(b) - y(a))$$

Заметим, что $f(a) = 0$, $f(b) = \|\vec{\Delta}\|^2$

$$f'_t = x'_t(x(b) - x(a)) + y'_t(y(b) - y(a)) = \langle r'_t, \vec{\Delta} \rangle$$

Применим формулу конечных приращений.

$\exists c \in [a, b]$:

$$\underbrace{f(b) - f(a)}_{= \|\vec{\Delta}\|^2} = \underbrace{f'(c)(b-a)}_{\leq \|\vec{\Delta}\| \cdot \|r'_t(c)\|(b-a)}$$

$$\|\vec{\Delta}\|^2 \leq \|\vec{\Delta}\| \cdot \|r'_t(c)\| \cdot (b-a) \leq \|\vec{\Delta}\| \cdot \max_{[a,b]} \|r'_t\| \cdot (b-a)$$

Лемма 2 Длина любой ломаной, вписанной в

$\Gamma = \{ \vec{r}(t) \mid t \in [\alpha, \beta] \}$ ограничена величиной

$\max\limits_{[\alpha,\beta]} \| \vec{r}\,'_t \| \cdot (\beta - \alpha)$

▷ По лемме 1 для каждого звена ломаной имеем

$\| \vec{\Delta}_i \| \leq \max\limits_{[t_{i-1}, t_i]} \| \vec{r}\,'_t \| \cdot (t_i - t_{i-1}) \leq \max\limits_{[\alpha,\beta]} \| \vec{r}\,'_t \| (t_i - t_{i-1})$

суммируем ◁

В итоге доказали:

① Длины всех ломаных, вписанных в Г, ограничены сверху. Значит Г спрямляемая

② $l(\Gamma) \leq \max\limits_{[\alpha,\beta]} \| \vec{r}\,'_t \| \cdot (\beta - \alpha)$

2) Докажем формулу для длины кривой

Замеч. Если Г спрямляема на $[\alpha, \beta]$, то она же спрямляема и на всех подотрезках.

Рассмотрим функцию $L(t) = \ell(\Gamma \text{ на отрезке } [\alpha, t])$

// расстояние, пройденное за время t.

Найдём L в точке t_0

$$L'_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{L(t_0+\Delta t) - L(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\ell(\Gamma \text{ на отрезке } [t_0, t_0+\Delta t])}{\Delta t}.$$

Имеем $\|\vec{z}(t_0+\Delta t) - \vec{z}(t_0)\| \underset{\text{нерав. треуг.}}{\le} \ell(\Gamma \text{ на } [t_0, t_0+\Delta t]) \underset{\text{лемма 2}}{\le} \max\limits_{[t_0, t_0+\Delta t]} \|\vec{z}'_t\| \cdot \Delta t$

Поделим на Δt и устремим Δt к 0.

Правая часть:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\max \|\vec{z}'_t\| \Delta t}{\Delta t} = \|\vec{z}'_t(t_0)\|$$

Левая часть:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\|\vec{z}(t_0+\Delta t) - \vec{z}(t_0)\|}{\Delta t} \overset{\text{т. Пифагора}}{=} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sqrt{(x(t_0+\Delta t) - x(t_0))^2 + (y(t_0+\Delta t) - y(t_0))^2}}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \sqrt{\left(\frac{x(t_0+\Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{y(t_0+\Delta t) - y(t_0)}{\Delta t}\right)^2} = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} =$$

$$= \|\vec{z}'_t(t_0)\|$$

$\Rightarrow L'(t_0) = \|\vec{r}\,'_t(t_0)\| = \sqrt{x'_t(t_0)^2 + y'_t(t_0)^2}$

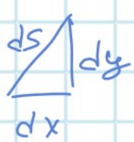
По формуле Ньютона – Лейбница имеем

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\,dt = L(\beta) - \underset{0}{\underset{\|}{L(\alpha)}}$$

Немного „смысла“ $\quad x'_t = \frac{dx}{dt}$

$$\ell(\Gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_\alpha^\beta ds$$

называется элементом длины и обозначается ds.



Приближённое вычисление опр. интегралов:

Квадратурные формулы

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx - ?$$

<u>Опр.</u> Выражение вида $\sum_{i=1}^n A_i f(c_i)$, $c_i \in [a,b]$ называется квадратурной формулой.

Пример 1. Пусть $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ разбиение $[a, b]$ (например равномерное $x_i = a + \frac{b-a}{n} \cdot i$) и пусть

$$c_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$$

Формула $\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta x_i \cdot f(c_i)$ называется формулой прямоугольников.

Пример 2. $\{x_i\}_{i=1}^{n}$

Формула $\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta x_i \cdot \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$ — формула трапеции

Пример 3.

$\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta x_i \left(\frac{1}{6} f(x_{i-1}) + \frac{4}{6} f(c_i) + \frac{1}{6} f(x_i)\right)$ — формула Симпсона.

Фото (тот геом. смысл)