13.03.19

Несобственные интегралы

Опр. Пусть $f: [a, b) \to \mathbb{R}$; $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, интегрируема по Риману на любом $[a, \tilde{b}] \subset [a, b)$.

Символ $\int\limits_a^b f(x)dx$ (*) называется несобственным интегралом по интервалу $[a, b)$.

Говорят, что (*) сходится и пишут

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\tilde{b} \to b-0} \int\limits_a^{\tilde{b}} f(x)dx,$$ если $\exists$ такой предел.

В противном случае говорят, что (*) расходится.

Замечание Если $f \in C([a, b])$, то несоб. интеграл совпадает с обычным.

Замечание 2 Интересны 2 случая: либо $b = +\infty$, либо f неограничена при $x \to b-0$.

Аналогично определяется несобств интеграл с особенностью в левом конце интегрирования.

Примеры ① $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_1^{b} \frac{1}{x}dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \ln b - \ln 1 = +\infty$

$\Rightarrow$ расходится.

② $\int\limits_0^{1} \ln x\,dx = \lim\limits_{a\to 0+0} (x\ln x - x)\Big|_a^1 = \lim\limits_{a\to 0+0} (-1 - \underbrace{a\ln a}_{\downarrow 0}) = -1$

③ Пусть $\alpha > 0$

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \text{расходится при } \alpha = 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\Big|_1^{+\infty} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \alpha > 1 \\ \text{расходится} & \alpha < 1 \end{cases} \end{cases}$$

④ $$\int\limits_0^{1} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \text{расходится при } \alpha \geq 1 \\ \text{сходится при } \alpha < 1 \end{cases}$$

Св-ва несобственных интегралов

① Пусть $\int\limits_a^{b} f(x)dx$ сходится. Тогда

$$\int\limits_a^{b} f(x)dx = \underbrace{\int\limits_a^{c} f(x)dx}_{\text{опред}} + \underbrace{\int\limits_c^{b} f(x)dx}_{\text{несоб.}} \quad c \in [a, b)$$

② Линейность

Если $\int_a^b f\,dx$ и $\int_a^b g\,dx$ сходятся и имеют особенность

либо в b, либо в a

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)\,dx \quad \lambda \int_a^b f\,dx + \mu \int_a^b g\,dx$$

③ Монотонность несоб. интеграла.

Если $\int_a^b f\,dx$ и $\int_a^b g\,dx$ сходятся и $f \leq g$ при $x \in [a, b)$

Тогда $\int_a^b f\,dx \leq \int_a^b g\,dx$

④ Пусть $f \in C([a, b))$ и Φ - первообразная для f.

Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\Phi(b-0)}_{\lim\limits_{x \to b-0} \Phi(x)} - \Phi(a)$$

⑤ Интегрирование по частям:

<u>Обозначение</u>: $u, v \in C^1([a,b]) \Leftrightarrow u, v$ непрерыв. дифференцируемые.

Пусть $u, v \in C^1([a,b])$. Тогда

$$\int_a^b u \cdot v' dx = u \cdot v \Big|_a^{b-0} - \int_a^b u' v \, dx$$

⑥ Замена переменной

Пусть $f \in C([a,b])$, $\varphi \in C^1([\alpha,\beta])$ и выполнено

$$a = \varphi(\alpha) \leq \varphi(t) < b = \lim_{t \to \beta - 0} \varphi(t)$$

Тогда $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt$

<u>Пример</u>: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{e^{-\operatorname{tg} t}}{\cos^2 t} dt = \int_0^{\pi/2} e^{-\operatorname{tg} t} d(\operatorname{tg} t) = \begin{bmatrix} \operatorname{tg} t = x \\ \operatorname{tg} 0 = 0 \\ \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = +\infty \end{bmatrix} =$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 1$$

Лемма. Пусть $f \geq 0$ на $[a, b)$. Тогда

$\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится $\Longleftrightarrow \exists M \ \forall \tilde{b} \in [a, b)$:

$\int\limits_a^{\tilde{b}} f(x)dx \leq M$

$\square$ Функция $F(\tilde{b}) = \int\limits_a^{\tilde{b}} f(x)dx$ нестрого возрастает, как функция от $\tilde{b}$.

Для возраст. функций ограниченность совпадает с существованием предела $\blacksquare$

Замечание $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится $\Longleftrightarrow \int\limits_{a^*}^b f(x)dx$ сходится.

Теорема (сравнения)

Пусть $f, g \in R([a, \tilde{b}]) \ \forall [a, \tilde{b}] \subset [a, b)$ и пусть $0 \leq f \leq g$ на $[a, b)$. Тогда

1. Сходимость $\int\limits_a^b g(x)dx$ влечёт сходимость $\int\limits_a^b f(x)dx$
2. Расходимость $\int\limits_a^b f(x)dx$ влечёт расходимость $\int\limits_a^b g(x)dx$

$\square$ Согласно лемме $\exists M \ \forall \tilde{b}$

$\int\limits_a^{b} f(x)dx \underset{\text{т.к. } f \leq g}{\leq} \int\limits_a^{\tilde{b}} g(x)dx \leq M$. По лемме $\exists \int\limits_a^b f(x)dx$

2. От. противного $\blacksquare$

Следствие. Пусть $f, g \in R([a, \tilde{b}])$ $\forall [a, \tilde{b}] \subset [a, b)$

Пусть $f, g > 0$ на $[a, b)$ и пусть

$\exists \lim\limits_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = k \in (0, +\infty)$

Тогда сходимость первого интеграла $\Leftrightarrow$ сходимости второй

$\triangleright$ Т.к. $\exists \lim\limits_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = k$, то $\exists \tilde{b} \in [a, b)$ такая, что

$\forall x \in [\tilde{b}, b)$ $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - k \right| < \underset{\varepsilon}{\underset{\shortparallel}{\frac{k}{2}}}$

$$\frac{k}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq \frac{3}{2} k$$

$$\frac{k}{2} g(x) \leq f(x) \leq \frac{3}{2} k \cdot g(x)$$

Если $\int\limits_a^b g(x)\,dx$, то сходится $\int\limits_a^b \frac{3}{2} k\, g(x)$.

Значит по теореме сравнения $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится.

$\triangleleft$

Пример: $\int\limits_0^{+\infty} \frac{2x^8 + 5}{x^{10} + 2x^9 + x + 6}\,dx$