07.02.19

$V^* := Hom(V; F)$

$V^* \xrightarrow{\sim} Mat_{1\times n}(F)$

$\alpha \mapsto (a_1 \ldots a_n)$, $a_i = \alpha(e_i)$

$v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n \Rightarrow \alpha(v) = (a_1 \ldots a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$

$\dim V^* = \dim V = n \Rightarrow V \simeq V^*$

$\forall i = 1 \ldots n$ рассмотрим $\varepsilon_i \in V^*$ соотв. строке $(0 \ldots 010 \ldots 0)$

Тогда $(\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n)$ - базис в V^*

Он однозначно определяется условием $\varepsilon_i(e_j) =$

$= \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ $(*)$

Опр. Базис $(\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n)$ определённый условием $(*)$ называется двойственным к базису e

Удобная запись условия $(*)$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \ldots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}(e_1 \ldots e_n) = E$$

Предложение: всякий базис про-ва V^* двойственен какому-то базису пр-ва V

□ Пусть $(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n)$ — данный базис в V^*. Возьмём какой-нибудь базис $e' = (e_1' \dots e_n')$ в V. Пусть $(\varepsilon_1' \dots \varepsilon_n')$ базис в V^*, двойственный e'. Тогда они связаны матрицей перехода.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_1' \\ \dots \\ \varepsilon_n' \end{pmatrix}$$

Положим $e = (e_1 \dots e_n) = (e_1' \dots e_n') \cdot C^{-1}$. Тогда

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} (e_1 \dots e_n) = C \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_1' \\ \dots \\ \varepsilon_n' \end{pmatrix} (e_1' \dots e_n')}_{= E} C^{-1} = E.$$

Упр. док-те инъекцию.

Билинейные формы

V - вект. про-во над F

Опр.: Билинейной формой называется всякое отобр. $\beta: V \times V \to F$.

1) $\beta(a+b, c) = \beta(a,c) + \beta(b,c)$

2) $\beta(\lambda x, y) = \lambda \beta(x,y)$

Примеры: (1) $V = F^n$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\beta(x,y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = x^T \cdot y$$

(2) $V = F^2$, $\beta(x,y) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$

(3) $V = C[a,b]$

$$\beta(f,g) = \int_a^b f(x) \cdot g(x) \cdot dx$$

Далее считаем $\dim V = n < \infty$

Зафиксируем базис $\mathbf{e} = (e_1 \dots e_n)$

Опр: Матрица $B = (b_{ij})$, где $b_{ij} = \beta(e_i, e_j)$, называется матрицей б. ф. в базисе $\mathbf{e}$

Обозн.: $B(\beta, \mathbf{e})$

Примеры: (1) $B(\beta, \mathbf{e}) = E$

(2) $\mathbf{e} = (e_1, e_2)$ $\qquad x_1 y_2 - x_2 y_1$

$$B(\beta, \mathbf{e}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

$y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$

$$\beta(x, y) = \beta\left(\sum x_i e_i + \sum y_i e_i\right) = \sum\sum x_i y_j \underbrace{\beta(e_i, e_j)}_{b_{ij}} =$$

$$= \sum\sum x_i b_{ij} y_j = (x_1 \dots x_n)\, B \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\beta(x, y) = (x_1 \dots x_n)\, B \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}} \quad (*)$$

– ф-ла вычисления знач. б.ф. в коорд.

Предл: 1) Всякая билинейная форма однозначно определяется своей матрицей в базисе e

2) $\forall B \in M_n(F)\ \exists!$ б. ф. т., ч. $B(\beta, e) = B$.

▷ 1) (*)

2) единственность следует из 1). Существование:

$B \in M_n$. Зададим β формулой (*). Тогда β билинейна (упр.)

$$\beta(e_i, e_j) = \boxed{(0 \ldots 010 \ldots 0)\, B \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = b_{ij}} \quad (**)$$

◁

$(e_1 \ldots e_n) = e$

$(e'_1 \ldots e'_n) = e'$

$$e' = e \cdot C, \quad B = B(\beta, e), \quad B' = B(\beta, e')$$

Предл. $B' = C^T B \cdot C$

▷ $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n = x'_1 e'_1 + \ldots + x'_n e'_n$

$y = \ldots$

$$\beta(x, y) = (x_1 \ldots x_n)\, B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x'_1 \ldots x'_n)\, C^T \cdot B \cdot C \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}$$

$$\parallel$$

$$(x'_1 \ldots x'_n)\, B' \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} \Longrightarrow B' = C^T \cdot B \cdot C \text{ по } (**)$$

Следствие: $\operatorname{rk} B(\beta, e)$ не зависит от выбора матрицы. Число называется рангом билинейной формы.

Опр. Билинейная форма β называется симметричной, если $\beta(x,y) = \beta(y,x)$

Предл. e – базис. Тогда β симм. $\Longleftrightarrow B(\beta, e)$ симм.

$\boxed{\text{Ш}} \quad B = B(\beta, e)$

$(\Rightarrow)$ $b_{ij} = \beta(e_i, e_j) = \beta(e_j, e_i) = b_{ji}$

$(\Leftarrow)$ $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$

$y = y_1 e_1 + \ldots + y_n e_n$

$$\beta(y,x) = (y_1 \ldots y_n) B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left((y_1 \ldots y_n) B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)^T =$$

$$= (x_1 \ldots x_n) B^T \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1 \ldots x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \beta(x,y)$$

Опр. Квадратичной формой на V называется всякое отобр. $Q: V \to F$, для которого $\exists$ б. ф. β т., ч. $Q(x) = \beta(x,x)$ $\forall x \in V$

Обозн. $Q = Q_\beta$, при этом Q назыв. квадр. ф. ассоциированной с б. ф. β.

$\mathbb{e} = (e_1 \dots e_n)$, $B = B(\beta, \mathbb{e})$, $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$:

$$Q_\beta(x) = (x_1 \dots x_n) B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum \sum x_i b_{ij} x_j =$$

$$= \sum b_{ii} x_i^2 + \sum_{i<j} (b_{ij} + b_{ji}) x_i \cdot x_j$$

Примери: ① $V = F^n$, $\beta(x, y) = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$Q_\beta(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2$$

② $V = \mathbb{R}^2$, $\beta(x, y) = 2x_1 y_2 \Rightarrow Q_\beta(x) = 2x_1 x_2$.

③ $V = \mathbb{R}^2$, $\beta(x, y) = x_1 y_2 + x_2 y_1 \Rightarrow Q(x) = 2x_1 x_2$