27.02.19

$$f\in C([a,b]) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b$$

Замечание: Если f кусочно-непрерывна на $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_{x_0}^{x_1} + \ldots + F(x)\Big|_{x_{k-1}}^{x_k}$$

Основные методы вычисления определённого интеграла

Теорема 1: (замена переменной)

Пусть φ и φ' непрерывны на $[\alpha;\beta]$, а f непрерывна на $\varphi([\alpha,\beta])$, $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$. Тогда:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

▷ Пусть $\Phi(x)\in\int f(x)\,dx$. Тогда $\Phi(\varphi(t))\in\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ (согласно методу замены в неопр. инт.)

Имеем:

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \Phi(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta = \Phi(b)-\Phi(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

◁

Теорема 2. (Интегрирование по частям)

Пусть $u, v, u', v' \in C([a,b])$. Тогда

$$\int_a^b u(x)\, v'(x) = u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\, u'(x)\, dx$$

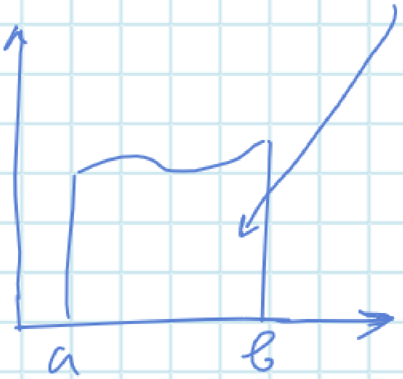
Геометрические приложения опр. инт.

① Пусть $f(x) \in R([a,b])$ и $f(x) \geq 0$ на $[a,b]$

Опр. Фигура.

$$\Phi = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x) \}$$

называется криволинейной трапецией

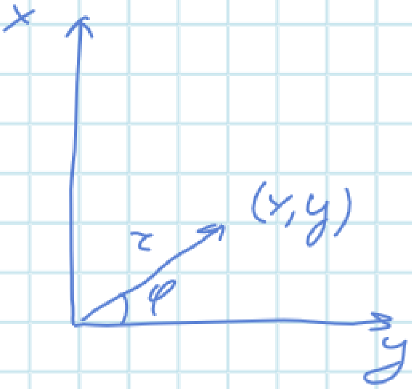


Утв. Площадь криволинейной трапеции равна $\int_a^b f(x)dx$

①' Пусть $f(x) \geq g(x)$ на $[a,b]$. Тогда площадь фигуры

$\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ g(x) \leq y \leq f(x) \}$ равна $\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

2



(r, φ) – полярные координаты

Переход: $\begin{cases} x = r \cdot \cos\varphi \\ y = r \cdot \sin\varphi \end{cases}$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi = \left[\begin{array}{ll} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + 2\pi k & x>0 \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi + 2\pi k & x<0 \\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k & x=0,\ y>0 \\ -\frac{\pi}{2} + 2\pi k & x=0,\ y<0 \\ \text{любое число} & x=0,\ y=0 \end{array} \right. \end{cases}$$

Пусть кривая Γ задана в полярных координатах уравнением $r = f(\varphi)$. Т. е.

$$\Gamma = \{ (r, \varphi) \mid \alpha \le \varphi \le \beta,\ r = f(\varphi) \}$$

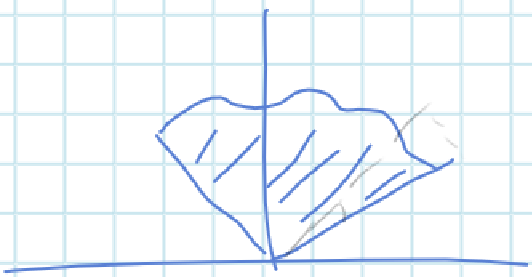
<u>Замечание</u>: Можно рассматривать кривые, заданные в полярных координатах как част. случай параметризованных кривых следующего образа: Пусть $\varphi \in [a, b]$ – парамет(р). Тогда

$$\begin{cases} x = f(\varphi) \cdot \cos(\varphi) \\ y = f(\varphi) \cdot \sin(\varphi) \end{cases}$$

Опр. Пусть $\alpha < \beta$ и $\beta - \alpha \leq 2\pi$ и пусть $f(\varphi) \geq 0$ при $\varphi \in [\alpha, \beta]$. Фигура

$$\Phi = \{(r, \varphi) \mid \alpha \leq \varphi \leq \beta,\ 0 \leq r \leq f(\varphi)\}$$

называется криволинейным сектором



Утв. Площадь криволинейного сектора $= \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} f(\varphi)^2 d\varphi$

▷ Рассмотрим разбиение $\tau = \{\varphi_i\}_{i=0}^{n_\tau}$ отрезка $[\alpha, \beta]$

Пусть, как и раньше,

$$m_i = \inf_{[\varphi_{i-1}, \varphi_i]} f(\varphi), \quad M_i = \sup_{[\varphi_{i-1}, \varphi_i]} f(\varphi)$$

Рассмотрим 2 фигуры.

$$\underline{\Phi_\tau} = \bigcup_{i=1}^{n_\tau} \{(r, \varphi) \mid \varphi_{i-1} \leq \varphi \leq \varphi_i;\ 0 \leq r \leq m_i\}$$

$$\overline{\Phi_\tau} = \text{—"—"—};\ 0 \leq r \leq M_i\}$$

Имеем $\underline{\Phi_\tau} \subseteq \Phi \subseteq \overline{\Phi_\tau}$

$$S(\underline{\Phi_\tau}) = \sum_{i=1}^{n_\tau} \frac{1}{2} \cdot m_i^2 \cdot \Delta\varphi_i; \quad S(\overline{\Phi_\tau}) = \sum_{i=1} \frac{1}{2} M_i^2 \cdot \Delta\varphi_i$$

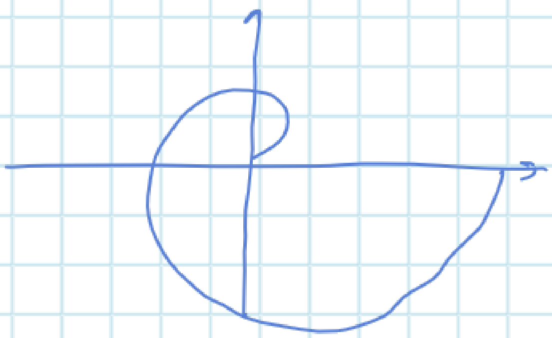
(поскольку площадь кругового сектора радиуса R равна $\frac{1}{2} R^2 \cdot \gamma$)

$$S(\underline{\Phi_\tau}) \le S(\Phi) \le S(\overline{\Phi_\tau})$$

Заметим, что это верхняя и нижняя интегральные суммы Дарбу для функции $\frac{1}{2} f(\varphi)^2$.

Пример. Спираль Архимеда

$r = \varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi]$



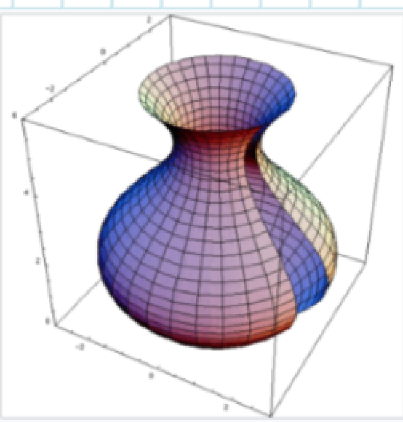
$$S(\Phi_{Арх}) = \frac{1}{6} \varphi^3 \Big|_0^{2\pi}$$

---

③ Пусть $f(x) \in R([a,b])$, $f \ge 0$

Опр. Телом вращения называется 3-мерная фигура, „заметаемая" криволинейной трапецией при вращении вокруг Ox.

$$\Omega = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \le x \le b,\ \sqrt{y^2+z^2} \le f(x) \}$$



Образование поверхности вращения

Утв. Объём тела вращения Ω равен

$$\int_a^b \pi f(x)^2 dx$$

④ Длина кривых.

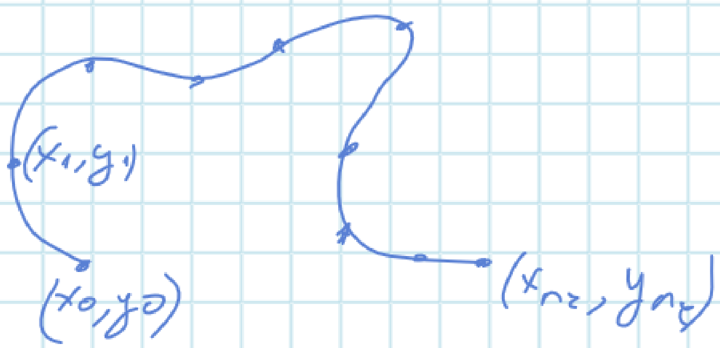
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]$$

кривая Γ.

[Определим длину Γ]

Пусть $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{n_\tau}$ разбиение $[\alpha, \beta]$

$x_i = x(t_i)$
$y_i = y(t_i)$



Γ_τ – ломаная с узлами (x_i, y_i)

$$\ell(\Gamma_\tau) = \sum_{i=1}^{n_\tau} \sqrt{(x_i - x_{i+1})^2 + (y_i - y_{i+1})^2}$$

Опр. кривая Γ называется спрямляемой, если

$\exists\, \ell = \sup\limits_{\tau} \ell(\Gamma_\tau) < \infty$. ℓ – называется длиной кривой.

Теорема Пусть $x'(t)$ и $y'(t)$ $\exists$ и $\in C([a,b])$, то

$$l = \int_a^b \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\,dt$$