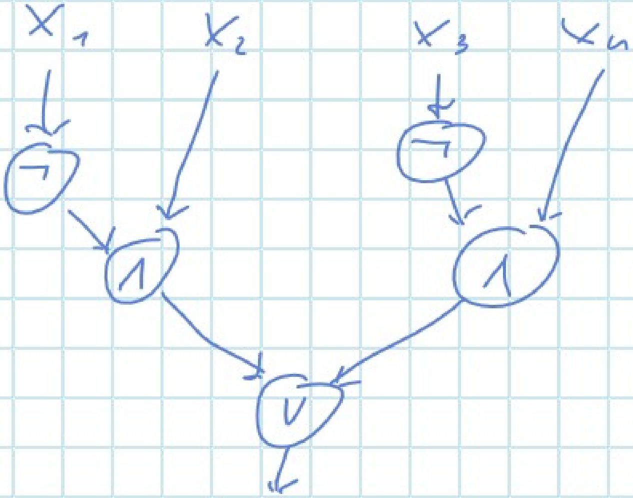
19.02.19.

Схема – послед. присваиваний (операции $\{\neg, \vee, \wedge\}$)



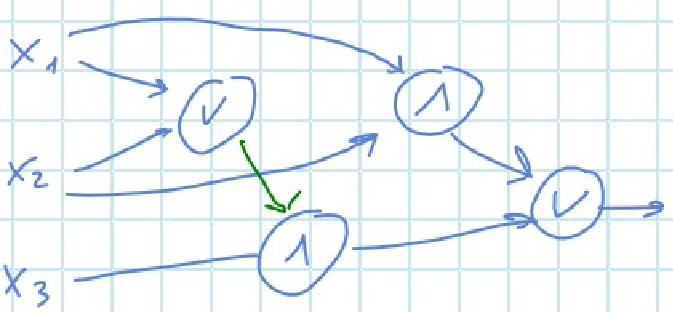
$S_1 = \neg x_1$

$S_2 = S_1 \wedge x_2$

$S_3 = \neg x_3$

$S_4 = S_3 \wedge x_4$

$S_5 = S_2 \vee S_4$



$Maj(x_1, x_2, x_3)$

Общий случай: Базис – мно-во функций $S = \{f_1(x_1 \dots x_n), \dots f_k\}$

$S_i = f(z_1, \dots z_n)$, $f \in S$, $z_j = S_m$, $m < i$

или

$z_j = x_m$

$S = \{MAJ_3(x_1, x_2, x_3), \wedge, \vee\}$

$S_1 = MAJ_3(x_1, x_2, x_3)$

$S_2 = MAJ_3(x_1, x_2, x_4)$

$S_3 = MAJ_3(x_1, x_3, x_4)$

$S_4 = S_1 \vee S_2$

$S_5 = S_4 \vee S_3$

$S = \{\wedge, \vee\}$ $\neq \{\wedge, \vee, 1\}$. Не может создать $f(x) = \overline{x}$.

$$\begin{cases} S_i = x_1 \\ S_i = S_j \vee S_k \\ S_i = S_j \wedge S_k \end{cases} \qquad x_1 = 0 \quad S_j == 0 \quad S_k == 0 \quad \Downarrow \quad S_i == 0$$

Базис S – полный, схемы с баз. S реализуют все булевые функции.

$\{\wedge, \vee\}$ – монотонный базис.

$S = \{1, \oplus, \wedge\}$

$\neg x = 1 \oplus x$

$x_1 \vee x_2 = \neg((\neg x_1) \wedge (\neg x_2))$

Теорема Поста.

$(a_1 \dots a_n) \leq (b_1 \dots b_n)$, если $\forall i \; a_i \leq b_i$

если $\vec{a} \leqslant \vec{b} \Rightarrow f(a_1 \dots a_n) \leqslant f(b_1 \dots b_n)$

$\{1, \oplus, \wedge\}$ — базис Жегалкина.

$1 \oplus x_1 \oplus (x_1 \wedge x_2)$

$x_{i_1} \wedge x_{i_2} \dots \wedge x_{i_n}$

$\bigwedge\limits_{i \in S} x_i \quad P = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$

$\left(\bigwedge\limits_{i \in S_1} x_i\right) \oplus \left(\bigwedge\limits_{i \in S_2} x_i\right) \dots$

$$\bigoplus_{S \in P} \bigwedge_{i \in S} x_i$$

Каждый многочлен реализует свою булеву функцию

$\{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$