20.03.19

Несобственные интегралы от знакопеременных функциях

<u>Теорема</u>: (Критерий Коши для несобственных интегралов)

???

Тогда $\int_a^b f(x)dx$ сходится $\Longleftrightarrow$ выполнено условие

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n: \ \forall n_1, n_2 \quad n < n_1 < b, \ n < n_2 < b:$

$\left|\int_{n_1}^{n_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$

▷ LOST ◁

<u>Опр.</u> Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называется абсолютно сходящимся, если сходится $\int_a^b |f(x)|dx$

<u>Теорема</u>: Если $\int_a^b f(x)dx$ абсолютно сходится, то он сходится.

▷ Согласно критерию Коши.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists b_\varepsilon \in [a, b) \ \forall \tilde{b} \text{ и } \tilde{\tilde{b}} > b_\varepsilon$

$\left|\int_{\tilde{b}}^{\tilde{\tilde{b}}} |f(x)|dx\right| < \varepsilon$. Заметим теперь, что

$$\left|\int\limits_{\tilde{b}}^{\tilde{\tilde{b}}} f(x)dx\right| \leq \left|\int\limits_{\tilde{b}}^{\tilde{\tilde{b}}} |f(x)|dx\right| < \varepsilon$$

Теперь по критерию Коши сходится

$$\int\limits_a^b f(x)dx$$

<u>Опр.</u> Если $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится, а $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ расходится,

то говорят, что $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится <u>условно</u>.

<u>Пример</u>: Несобств. интеграл

$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ условно сходится.

1) $$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{-1}{x}d(\cos x) = \underbrace{-\frac{\cos x}{x}\Big|_1^{+\infty}}_{0+\frac{\cos 1}{1}} + \underbrace{\int\limits_1^{+\infty} -\frac{\cos x}{x^2}dx}_{\text{сходится, т.к.}}$$

$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ сходится и $|\cos x| < 1$

#фото.

2) Заметим, что $\sin^2 x \leq |\sin x|$. Поэтому достаточно

док-ть расходимость $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}dx$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}dx = \left[\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right] = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx - \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}dx$$

A B C

C сходится (аналогично доказанному)

Если бы A сходился, то сходился бы и B, но B расходится $\Rightarrow$ A расходится.

Признаки Дирихле (и Абеля) сходимости интеграл вида $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ (*)

<u>Теорема</u> (признак Дирихле) Пусть

1. $f \in C([a,+\infty))$ и имеет ограниченную первообр.

2. $g \in C_1([a,+\infty))$ и монотонна

3. $g(x) \to 0$ при $x \to +\infty$. Тогда (*) сходится.

<u>Пример:</u> $f(x) = \sin x$; $g(x) = \frac{1}{x}$, $F(x) = -\cos x$ огр.

$\frac{1}{x} \to 0$ при $x \to \infty$ $\Rightarrow$ сходится.

▶ Пусть F – первообр. для f.

Тогда $\int_a^{+\infty} f(x) g(x) = \int_a^{+\infty} g(x)\, dF(x) = \underbrace{g(x)}_{\to 0} \underbrace{F(x)}_{\text{огр}} \Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} F(x)\, dg(x)$

Почему сходится $\int_a^{+\infty} F(x) g'(x)\, dx$?

Для определённости пусть $g(x) \searrow$. Докажем, что

сходится $\int_a^{+\infty} |F(x) g'(x)|\, dx$

Пусть $M = \sup\limits_{[a, +\infty)} |F(x)|$ имеем:

$$\int_a^{+\infty} |F(x)|\, |g'(x)|\, dx \leqslant M \cdot \int_a^{+\infty} |g'(x)|\, dx = -M \cdot \int_a^{+\infty} g'(x)\, dx = M g(a)$$

т.к. $g(\infty) = 0$ ◀

<u>Теорема:</u> (признак Абеля) Пусть

① f непрерывна на $[a, +\infty)$ и сходится $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$

② $g \in C_1([a, +\infty))$, монотонна и ограничена

Тогда $\int_a^{+\infty} f(x) g(x)\, dx$ сходится.

Идея: из (2) следует, что $\exists c = \lim\limits_{x \to \infty} g(x)$. Значит

$g(x) - c \to 0$ при $x \to +$

НЕ дописал