Математический анализ. Лекция 2

08.09.2018

Опр. Множество отрезков $\{[a_1, b_1], [a_2, b_2]...\}$ называется **системой вложенных отрезков**, если $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \forall n \in \mathbb{N}$, т.е. каждый следующий отрезок содержится в предыдущем.

Лемма о вложенных отрезках (*принцип непрерывности Кантора*) Для каждой системы вложенных отрезков $\exists c \in \mathbb{R}$, что $\forall n \in \mathbb{N} : c \in [a_n, b_n]$

► $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}, B = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$
Имеем $\forall n, m \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+m} \leq b_{n+m} \leq b_m$
Значит $\forall$ элемент из A меньше $\forall$ элемента из B. По аксиоме непрерывности Кантора $\exists c \in R : a_n \leq c \leq b_n,\ \forall a_n \in A; \forall b_n \in B$ ■

Опр. Система вложенных отрезков называется **стягивающейся**, если
$\forall \epsilon > 0\ \ \exists n \in \mathbb{N} : b_n - a_n < \epsilon$

Теорема Стягивающаяся система вложенных отрезков имеет ровно одну точку

► Предположим противное. $c \neq c`\ \ \forall n\ c, c` \in [a_n, b_n]$ Для определённости $c \leq c`$
$\forall n\ a_n \leq c \leq c` \leq b_n \Rightarrow c` - c \leq b_n - a_n \Rightarrow$
$\exists k \in \mathbb{N} : c` - c \leq b_k - a_k$ противоречит определению ■

Опр. **Бесконечные десятичные дроби** - выражения вида $\alpha = \pm\alpha_0\text{,}\alpha_1\alpha_2...$, где
$\alpha_0 \in \{0, 1, 2, ...\}$
$\alpha_n \in \{0, 1, 3, ..., 9\}$
Если знак "$+$"$\Rightarrow \alpha \geq 0$
Если знак "$-$"$\Rightarrow \alpha \leq 0$
Сначала для б.д.д. определим операции "$\leq$"sup", а затем "$+$", "$-$"

Опр. Сравнение б.д.д.

1. Пусть $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ б.д.д. $\alpha = \alpha_0\text{,}\alpha_1\alpha_2\alpha_3...$ $\beta = \beta0\text{,}\beta1\beta2\beta3...$ Скажем, что $\alpha < \beta$, если волняется хотя бы одно утверждение
   - $\alpha_0 < \beta_0$
   - $\alpha_0 = \beta_0$ и $\alpha_1 < \beta_1$
   - $\alpha_0 = \beta_0$ и $\alpha_1 = \beta_1$ и $\alpha_2 < \beta_2$
   - ......
2. $\alpha \leq 0$ и $\beta \geq 0$ и $\exists(\alpha$ или $\beta) \neq 0 :\ \ \beta > \alpha$
3. $\alpha \leq 0$ и $\beta \leq 0 :\ \ \beta < \alpha \Leftrightarrow -\beta > -\alpha$

Опр. Определим точную верхнюю грань произвольного множества б.д.д

Пусть X - ограниченное сверху множество б.д.д. (т.е. $\exists$ б.д.д. $c \ : \ \forall x \in X \ : \ x \le c$)
Определим $\gamma = \gamma_0,\gamma_1\gamma_2... = supX$ алгоритмом
$\gamma_0 = max\{\alpha_0 \mid \alpha \in X\} \ \mid \ A_1 := \{\alpha \in X \mid \alpha_0 = \gamma_0\}$
$\gamma_1 = max\{\alpha_1 \mid \alpha \in A_1\} \ \mid \ A_2 := \{\alpha \in A_1 \mid \alpha_1 = \gamma_1\}$
$\gamma_2 = max\{\alpha_2 \mid \alpha \in A_2\} \ \mid \ A_3 := \{\alpha \in A_2 \mid \alpha_2 = \gamma_2\}$

Опр. **Сумма** б. д. д.
$\alpha = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3...$
$\beta = \beta 0,\beta 1\beta 2\beta 3...$
$(\alpha + \beta) := sup\{x + y \mid {}^{0 \le x \le \alpha}_{0 \le y \le \beta}\}$ x, y - конечные десятичные дроби

Проверим *аксиому непрервыности* (а. 14)
A и B, $\forall a \in A$, $b \in B$, $a \le b$, $\exists c \in R : \ a \le c \le b$ Проверим для A и B - б.д.д.
Возьмём в множестве б.д.д $c := supA$ Мы знаем (по построению) $\forall a \in A \ \ a \le c$
Теорема **о единственности множества вещественных чисел**.
Пусть $\mathbb{R}$ и $\widetilde{\mathbb{R}}$ - множества, удоволетворяющие всем аксиомам (1 - 14). Тогда имеет место *биекция* $\mathbb{R} \longleftrightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$ такая, что

- $x + y \leftrightarrow \widetilde{x} + \widetilde{y}$
- $xy \leftrightarrow \widetilde{x}\widetilde{y}$
- $x \le y \leftrightarrow \widetilde{x} \le \widetilde{y}$