10.04.19

(X, d) $\quad x \in X$

Открытый шар $B_\varepsilon(x) = \{y \mid d(y,x) < \varepsilon\}$

Замкнутый шар $\overline{B}_\varepsilon(x) = \{y \mid d(y,x) \leq \varepsilon\}$

Проколотый шар $\mathring{B}_\varepsilon(x) = B_\varepsilon(x) \setminus \{x\}$

Открытые и замкнутые мн-ва в (X, d)

Опр. Подмн-во $A \subseteq X$ называется открытым, если $\forall x \in A \ \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq A$

Опр. точка $x \in X$ называется предельной для подмн-ва $A \subseteq X$, если $\forall \varepsilon > 0 : \mathring{B}_\varepsilon(x) \cap A \neq \varnothing$

Пример: $\mathbb{R}^2$

Опр. Подмн-во $A \subseteq X$ называется замкнутым, если оно содержит все предельные точки.

Замечание: Открытость и замкнутость не антонимы.

Примеры:

– не открыто
– не замкнуто

$\varnothing$, $\mathbb{R}^2$ и открытое и замкнутое

Факты (упражнения)

В произвольном метрическом пр-ве (X, d)

1) Объединение любого числа открытых подмножеств открыто.

2) Пересечение конечного числа открытых подмножеств открыто.

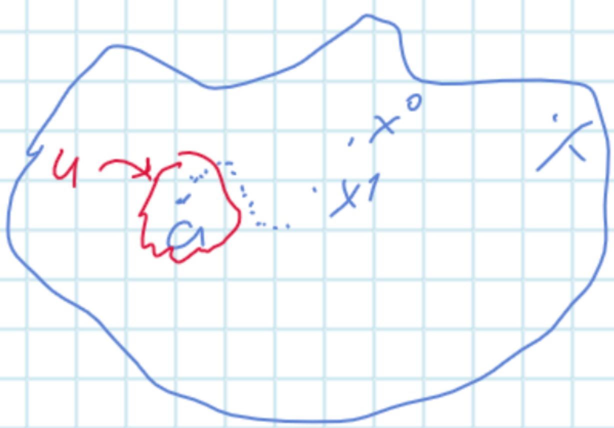
3) $\varnothing$, X - открыты

4) Если A открыто, то $\bar{A}$ замкнуто. И наоборот.

5) Открытый шар открыт, и замкнутый замкнут.

6) $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = a \quad (\in X) \iff$

$\forall$ открытого мн-ва $\underset{X}{\overset{}{U \subseteq}} \ni a \quad \exists n_0 \quad \forall k \geq n_0 \quad x^{(k)} \in U$



Опр. Совокупность всех открытых подмножеств метрич. пр-ва (X, d) называется топологией на X

Замечание: Топология состоит из подмно-в, которые можно понимать как окрестности.

Опр. Две метрики d и $\tilde{d}$ на мно-ве X называются эквивалентными, если они задают на X одинаковую топологию (т.е подмно-во $A \subset X$ открыто относительно d также открыто относительно $\tilde{d}$)

Лемма: Пусть $\exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ т.ч. $\forall x, y \in X$:

$$c_1 d(x,y) \underset{(1)}{\leq} \tilde{d}(x,y) \underset{(2)}{\leq} c_2 d(x,y).$$

Тогда d эквивалентна $\tilde{d}$

▷ пусть $U \subseteq X$ - подмно-во, открытое в метрике $\tilde{d}$, т.е. $\forall x \in U\ \exists \varepsilon > 0 : B_{\varepsilon}^{(\tilde{d})}(x) \subseteq U$

$$B^{(d)}_{\frac{\varepsilon}{c_2}}(x) = \{y \mid d(y,x) < \tfrac{\varepsilon}{c_2}\} = \{y \mid c_2 d(y,x) < \varepsilon\}$$

$\Downarrow$ согласно (2)

$$\subseteq \{y \mid \tilde{d}(y,x) < \varepsilon\}$$

Значит U откр. в метрике d

Аналогично из (1) следует, что d-открытость влечёт $\tilde{d}$-открытость ◁

Замечание: Если $d \sim \tilde{d}$, то сходимость в d эквивалентна сходимости в $\tilde{d}$

Основной пример – утверждение:

В $\mathbb{R}^n$ d_2, d_1, d_∞ эквивалентны

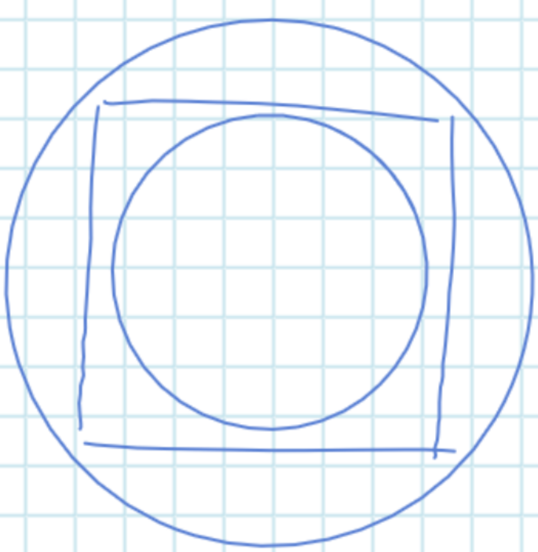
▷ $d_2 \sim d_\infty$

$$d_\infty(x,y) \leq \underset{\displaystyle \max_{i=1\ldots n}|x_i-y_i| \leq \sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots}}{d_2(x,y)} \leq \sqrt{n}\, d_\infty(x,y)$$

$$\max_{i=1\ldots n}|x_i-y_i| \leq \sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots} \leq \sqrt{n \max|x_i-y_i|^2}$$

$d_1 \sim d_\infty$ – аналогично ◁

Геометрическая идея $d_2 \sim d_\infty$



Что означает, что $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = a \; (\in \mathbb{R}^n)$

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \;\; \forall k \geq n_0 : d_\infty(x^{(k)}, a) < \varepsilon$ (d любая из d_1, d_2, d_∞)

(*)

$x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$

$a = (a_1 \dots a_n)$

$\max |x_i^{(k)} - a_i| < \varepsilon$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} |x_1^{(k)} - a_1| < \varepsilon \\ \dots\dots \end{cases}$$

$$(*) \Longleftrightarrow \begin{cases} \lim x_1^{(k)} = a_1 \\ \vdots \\ \lim x_n^{(k)} = a_n \end{cases}$$

$$\lim_{k\to\infty} (x_1^{(k)} \dots x_n^{(k)}) = (\lim x_1^{(k)}, \dots, \lim x_n^{(k)})$$

Ограниченные последовательности в $\mathbb{R}^n$

<u>Опр</u> подмно-

НЕ