07.03.19

$\mathbb{E}$ – евкл. пр-во, $\dim \mathbb{E} = n < \infty$

$e_1 \dots e_k \xrightarrow{\text{мет. орт. Г-Ш}} f_1 \dots f_k$

лин. нез. ортогональная система

$$f_i = e_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{(e_i, f_j)}{(f_j, f_j)} f_j \quad (*)$$

$\forall i \ \langle e_1 \dots e_i \rangle = \langle f_1 \dots f_i \rangle$

Предл. Всякую орт. систему векторов в $\mathbb{E}$ можно дополнить до орт. базиса в $\mathbb{E}$

▷ Дополнить до какого-нибудь базиса и ортогонизовать ◁

Предл. $e = (e_1 \dots e_n)$ – орт. базис в $\mathbb{E} \Rightarrow \forall v \in \mathbb{E}$

$$v = \sum_{i=1}^{n} \frac{(v, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i$$

. Если ортонорм.

$$v = \sum_{i=1}^{n} (v, e_i) e_i$$

▷ $v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n \Rightarrow \forall i$

$$(v, e_i) = \lambda_1 (e_1, e_i) + \dots + \lambda_n (e_n, e_i) = \lambda (e_i, e_i)$$

◁

Напоминание:

V – вект. про-во

$V = U \oplus W$

$\forall v \in V : \exists! \, x \in U, \, y \in W$ т.ч. $v = x + y$

x – проекция v на U вдоль W.

$S \subseteq \mathbb{E}$ – под-во

Опр. Ортогональное дополнение подмнож. S – это мно-во $S^{\perp} := \{x \in \mathbb{E} \mid (x, y) = 0 \ \forall y \in S\}$

Утв. 1) $S^{\perp}$ – подпространство $\mathbb{E}$

2) $S^{\perp} = \langle S \rangle^{\perp}$

Предл. Пусть S – под-во.

а) $\mathbb{E} = S \oplus S^{\perp}$ (в частн. $\dim S^{\perp} = n - \dim S$)

б) если $(e_1 \dots e_k)$ – орт базис в S, то $\forall v \in \mathbb{E}$ проекция v на S вдоль $S^{\perp}$ равна $\sum_{i=1}^{k} \frac{(v, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i$

в) $(S^{\perp})^{\perp} = S$

$\triangleright$ а, б) Пусть $v \in S \cap S^{\perp}$. Тогда $(v, v) = 0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow S \cap S^{\perp} = \{0\}$

Теперь покажем, что $\mathbb{E} = S + S^{\perp}$ $(e_1 \dots e_k)$ – орт. базис в S.

берём $\forall v \in \mathbb{E}$ и положим, что $x = \sum_{i=1}^{k} \frac{(v, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i \in S$, а

$y = v - x$

Осталось показать, что $y \in S^\perp$

$S = \langle e_1 \ldots e_k \rangle \Rightarrow$ дост. показать, что $(y, e_j) = 0 \ \forall j$

$$(y, e_j) = \left(v - \frac{(v, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i, e_j\right) = (v, e_j) - \sum \frac{(v, e_i)}{(e_i, e_i)} (e_i, e_j) =$$

$$= (v, e_j) - (v, e_j) = 0$$

в) По опр. имеем $S \subseteq (S^\perp)^\perp$

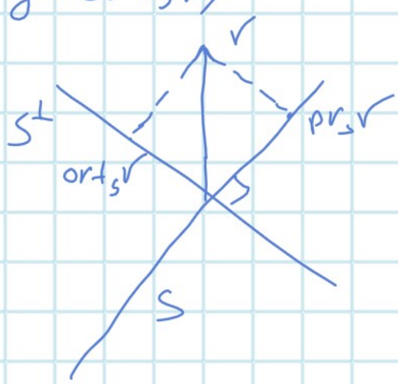
$\dim (S^\perp)^\perp = n - \dim S^\perp = n - (n - \dim S) = \dim S \Rightarrow (S^\perp)^\perp = S$

Имеем: $S \subseteq E \Rightarrow E = S \oplus S^\perp$

$\forall v \in E \ \exists! x \in S, y \in S^\perp : v = x + y.$

Опр. x называется орт. проекцией на S.
(обозн. $x = pr_S v$)

y называется орт. составляющей на S
(обозн. $y = ort_S v$)



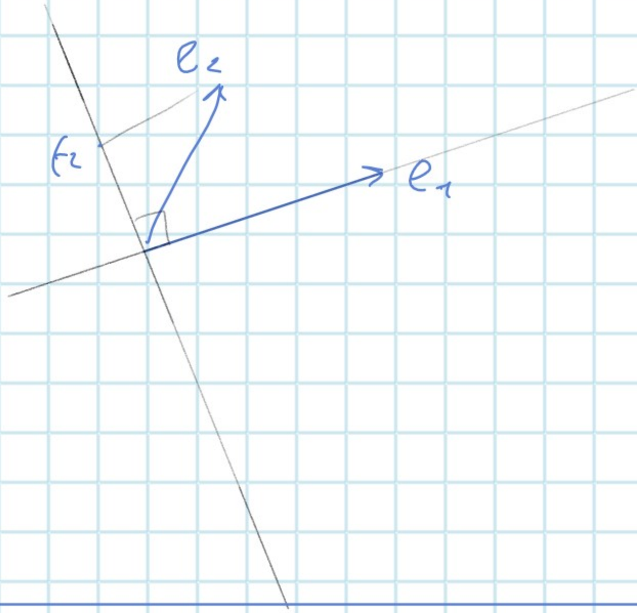
Пункт б)

Если $e_1 \ldots e_k$ - орт. базис в $S \Rightarrow pr_S v = \sum_{i=1}^{k} \frac{(v, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i$

Г-Ш.

$$(*)\ f_i = e_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{(e_i, f_j)}{(f_j, f_j)} f_j$$

На самом деле $f_i = e_i - pr_{\langle f_1 \ldots f_{i-1} \rangle} e_i = ort_{\langle f_1 \ldots f_{i-1} \rangle} e_i$



Пусть $E = \mathbb{R}^n$ со станд. скал. произв.

$S \subseteq E$ - подп-во

$a_1 \ldots a_k$ - базис в S

Запишем $a_1 \ldots a_k$ в матр. $A \in Mat_{n \times k}$ (по столб.)

Теорема: $\forall v \in \mathbb{R}^n \quad pr_S v = A(A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot v$

▷ корректность $A^T \cdot A = G(a_1 \dots a_k)$

т.к. $a_1 \dots a_k$ лин. нез. $\Rightarrow \det G \neq 0$

$v \in \mathbb{E} \Rightarrow v = x + y$, $x = pr_S v$, $y = ort_S v$

$x \in S \Rightarrow x_1 A^{(1)} + \dots + x_k A^{(k)} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$

$y \in S^\perp \Rightarrow A^T y = 0$

$$A(A^TA)^{-1}A^T v = A(A^TA)^{-1}A^T(x+y) = A(A^TA)^{-1}A^T x + A(A^TA)^{-1}\underbrace{A^T y}_{0} =$$

$$= A\underbrace{(A^T A)^{-1} A^T A}_{E}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = x = pr\, v$$ ◁

Предл. (теор. Пифагора)

$x, y \in \mathbb{E}$, $(x,y) = 0 \Rightarrow |x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2$

▷ $|x+y|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) = |x|^2 + |y|^2$

◁

Опр. Расстояние между векторами

$x, y \in \mathbb{E}$ – это число $\rho(x,y) = |x-y|$

Предл. (нерав. треуг.)

$\forall x, y, z \quad \rho(x,y) + \rho(y,z) \geq \rho(x,z)$

▷ Положим $a = x - y$, $b = y - z$

$|a| + |b| \geq |a+b|$ | $|a+b|^2 = (a+b, a+b) = |a|^2 + 2(a,b) + |b|^2 \leq (|a| + |b|)^2$

$(a,b) \leq |a| \cdot |b|$ – Коши-Буняк.

$P, Q \subseteq \mathbb{E}$ - два мн-ва

<u>Опр.</u> Расстояние между P и Q — это число

$$\rho(P,Q) := \inf_{\substack{x\in P\\ y \in Q}} \rho(x,y)$$

$x \in \mathbb{E}$, $S \subseteq \mathbb{E}$ — под-во.

<u>Теорема.</u> $\rho(x,S) = |\operatorname{ort}_S x|$, причём $\operatorname{pr}_S x$ является единственным ближайшим к x вектором S.

▷ $y = \operatorname{pr}_S x$, $z = \operatorname{ort}_S x$. Возьмём $\forall y' \in S$, $y' \neq 0$

$$\rho(x, y+y')^2 = |x-y-y'|^2 = |z-y'|^2 = |z|^2 - |y|^2 > |z|^2 = |x-y|^2 = \rho(x,y)^2$$

◀