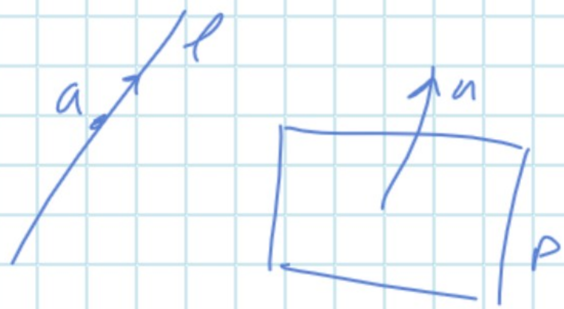
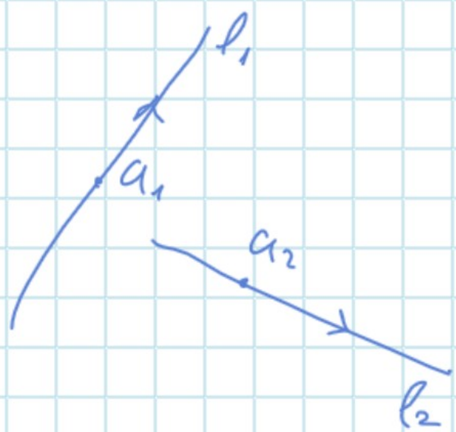
11.04.19

Угол между прямой l с напр. вектором a и плоскостью с нормалью n

$$\angle(l, P) = \frac{\pi}{2} - \min(\angle(n, a), \angle(n, -a))$$



Угол между двумя прямыми



$$\angle(l_1, l_2) = \min(\angle(a_1, a_2), \angle(a_1, -a_2))$$

Угол между плоскостями

$$\angle(P_1, P_2) = \min(\angle(n_1, n_2), \angle(n_1, -n_2))$$

Линейные операторы

V - вект. про-во над F, $\dim V = n < \infty$

Опр. Линейным оператором на V называется всякое лин. отображение $\varphi: V \to V$ (то есть из V в себя)

$L(V) = \{$все линейные операторы$\} = \mathrm{Hom}(V, V)$

$\varphi: V \to V$ - лин. оп.

$\mathbb{e} = (e_1 \dots e_n)$ - базис в V

$(\varphi(e_1) \dots \varphi(e_n)) = (e_1 \dots e_n) \cdot A$, $A \in M_n(F)$ - матрица лин. оп. φ в $\mathbb{e}$

Обозн. $A(\varphi, \mathbb{e})$

Столбец $A^{(j)}$ состоит из координат вектора $\varphi(e_j)$ в базисе $\mathbb{e}$

Примеры: ① $\varphi: V \to V$, $\varphi(v) = v \cdot \lambda$, $\lambda \in F$

В любом базисе $\mathbb{e}$ имеем $A(\varphi, \mathbb{e}) = \lambda E = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$

② $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ - поворот на угол α, $\mathbb{e}$ - полож. ориент. ортонорм. базис

$$\Rightarrow A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

③ $V = \mathbb{R}[x]_{\leq n}$; $\varphi: V \to V$ - дифференцирование.

$f \mapsto f'$, $\mathbb{e} = (1, x, x^2 \dots x^n)$

$$A(\varphi, e) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Следствия общих фактов о лин. отображениях

1) $\mathbb{e}$ - базис V $\Rightarrow$ отобр. $L(V) \to M_n(F)$, $\varphi \mapsto A(\varphi, \mathbb{e})$

является изоморфизмом вект. про-в

В частности 1а) φ однозначно определяется $A(\varphi, \mathbb{e})$

1б) $\forall$ базиса $\mathbb{e}$ и $\forall A \in M_n(F)$

$\exists!\ \varphi \in L(V)$ т. ч. $A(\varphi, \mathbb{e}) = A$

2) $\mathbb{e}$ - базис V, $A(\varphi, \mathbb{e}) = A$

$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

$y = \varphi(x) = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

3) e, e' - два базиса

$(e_1' \dots e_n') = (e_1 \dots e_n) \cdot C$ - матр. перехода

$A = A(\varphi, e)$, $A' = A(\varphi, e') \Rightarrow A' = C^{-1}AC$

Следствие из 3)

а) определитель $\det A$ не зависит от выбора базиса

б) $\operatorname{tr} A$ - " - " - " -

Итог: $\det A$ и $\operatorname{tr} A$ являются инвариантами лин. оп φ

Обозн: $\det \varphi$, $\operatorname{tr} \varphi$

Опр. Две матрицы $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ называются подобными, если $B = C^{-1}AC$ для $C \in M_n(\mathbb{F})$, $\det C \neq 0$

Замечание: Подобие - отношение эквив.

Всё M_n разбивается на классы подобных матриц.

Предложение: След. ус. эквив для $\varphi \in L(V)$

1) $\ker \varphi = \{0\}$

2) $\operatorname{Im} \varphi = V$

3) φ - изоморфизм V на себя

4) $\det \varphi \neq 0$

$\triangleright$ (1) $\Leftrightarrow$ (2) т.к. $\dim V = \dim \ker\varphi + \dim \operatorname{Im}\varphi$

(1) and (2) $\Leftrightarrow$ (3) было.

(2) $\Leftrightarrow$ (4) $\operatorname{Im}\varphi = V \Leftrightarrow \dim \operatorname{Im}\varphi = \dim V \Leftrightarrow \operatorname{rk}\varphi = \dim V$

$\Leftrightarrow \det\varphi \neq 0$ $\triangleleft$

Опр. φ называется невырожденным, если $\det\varphi \neq 0$

Опр. Подпр-во $U \subseteq V$ называется инвариантным отн. φ, если $\varphi(U) \subseteq U$

В этой ситуации корр. определён л.оп. $\varphi|_U \in L(U)$, $\varphi|_U : U \to \varphi(U)$, он называется ограничением л.о. φ на U.

Примеры: (1) $\{0\}$ и V

(2) $\ker\varphi$

(3) $\operatorname{Im}\varphi$

Наблюдение [1] U – φ-инв подпр-во в V, $(e_1 \ldots e_k)$ – базис U, дополним его до базиса $\underbrace{(e_1, \ldots e_n)}_{e}$ в V. Тогда

$$A(\varphi, e) = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline O & C \end{array}\right) \begin{array}{l} k \\ n-k \end{array} \\ \begin{array}{ll} k & \end{array} \end{array} \quad (*)$$

При этом $A = A(\varphi|_U, (e_1 \ldots e_k))$

если $U = \ker\varphi$, то $A = 0$

если $U = \operatorname{Im}\varphi$, то $C = 0$

Обратно, если для некоторого базиса $\mathbb{e}$ $A(\varphi, \mathbb{e}) = (*)$, то $U = \langle e_1, \dots e_k \rangle$ - φ-инв. под-во.

$\boxed{2}$ Последние $n-k$ базисных векторов порождают φ-инв. под-во $\Longleftrightarrow$ в этом базисе матр. л. оп φ имеет вид

$$\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline B & C \end{array}\right) & \begin{array}{l} k \\ n-k \end{array} \\ \begin{array}{l} k \end{array} & \end{array}$$

$\boxed{3}$ $U_1, U_2 \subseteq V$ - два φ-инв. под-ва, причём $V = U_1 \oplus U_2$ $(e_1 \dots e_k)$ - базис U_1, $(e_{k+1} \dots e_n)$ - базис U_2

$\mathbb{e} = (e_1 \dots e_n)$ - базис в V $\Longrightarrow$

$$A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c|c} & 0 \\ \hline 0 & \end{array}\right) & \begin{array}{l} k \\ n-k \end{array} \\ \begin{array}{cc} k & n-k \end{array} & \end{array}$$

$\boxed{4}$

$$A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} \boxed{*} & & & & 0 \\ & \boxed{*} & & & \\ & & \boxed{*} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \boxed{*} \end{pmatrix}$$ - блочно-диагональный вид.

$\Leftrightarrow$ под-ва $U_1 \dots U_s$ φ-инвариантные.

$U_1 = \langle e_1 \dots e_{k_1} \rangle$

$U_2 = \langle e_{k_1+1}, \dots, e_{k_1+k_2} \rangle$

. . . .

<u>Предел мечтаний:</u> Найти такой базис e в V, для которого матрица $A(\varphi, e)$ была бы диагональной (к сожалению, это не всегда возможно ☹)