14.02.19

$\beta : V \times V \to F$ – билин. ф.

<u>Теорема</u>: Пусть в поле F выполнено условие $1+1 \neq 0$ (т.е. $2 \neq 0$)

Тогда отображение $\beta \mapsto Q_\beta$ является биекцией между симметр. б. ф. и мн-вом квадр. ф.

▷ Q – кв. ф. $\Rightarrow \exists \beta$ – б. ф. т. ч. $Q = Q_\beta$, т.е.

$Q(x) = \beta(x, x) \quad \forall x \in V$.

Положим $\sigma(x,y) = \frac{1}{2}(\beta(x,y) + \beta(y,x))$. Тогда σ – сим. б. ф.

$\sigma(x,x) = \beta(x,x) = Q(x) = Q_\beta$. – <u>Сюръективность</u>

<u>Инъекти.</u>

$\beta : V \times V$ – сим. б. ф., $Q = Q_\beta$

$$Q(x+y) = \beta(x+y, x+y) = \underbrace{\beta(x,x)}_{Q(x)} + \underline{\beta(x,y)} + \underline{\beta(y,x)} + \underbrace{\beta(y,y)}_{Q(y)} =$$

$$= Q(x) + 2\beta(x,y) + Q(y) \Rightarrow$$

$$\beta(x,y) = \frac{1}{2}(Q(x+y) - Q(x) - Q(y)) \Rightarrow \beta \text{ однозначно восст. по } Q$$

◁

Замечание 1) Сим. б. ф. $\sigma = \frac{1}{2}(\beta(x,y) - \beta(y,x))$

называется симметризацией б. ф. β

Если B, S – матрицы б. ф. β и σ, то

$$S = \frac{1}{2}(B + B^T)$$

2) Сим. б. ф. $\beta(x,y) = \frac{1}{2}(Q(x,y) - Q(x) - Q(y))$

называется поляризацией кв. ф. Q

Далее считаем $1+1 \neq 0$ в F.

Опр. Матрицей кв. ф. Q в базисе e назыв. матрица её поляризации в базисе e. (обозн. $B(Q,e)$)

Пример: $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$

$e = (e_1, e_2) \Rightarrow \quad B(Q,e) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

$$Q(x_1, x_2) = (x_1 \ x_2)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Опр. Квадр. ф. Q имеет в базисе e канонический вид, если $\forall\, v = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$

$$Q(v) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_nx_n^2 \ (\Leftrightarrow B(Q,e) = \mathrm{diag}(a_1 \ldots a_n))$$

Теорема: $(1+1\neq 0)$. Для всяких кв. ф. Q $\exists$ базис в котором Q имеет кан. вид.

Д-во (метод Лагранжа)

Индукция по n.

$n=1 \Rightarrow Q(x_1) = a x_1^2$ — верно.

Шаг: Докажем для n.

Пусть в исходном базисе e $B(Q,e) = (b_{ij})$

Тогда $Q(x_1 \dots x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} b_{ii} x_i^2 + \sum 2b_{ij} x_i x_j$

Случай 0: $b_{ij} = 0$ — тривиально.

Случай 1: $\exists i; : b_{ij} \neq 0$. Переименовав переменные получим $b_{11} \neq 0$

$$Q(x_1 \dots x_n) = b_{11} x_1^2 + 2b_{12} x_1 x_2 + \dots + 2b_{1n} x_1 x_n + Q(x_2 \dots x_n) =$$

$$= b_{11} \left(x_1^2 + 2x_1 \left(\frac{b_{12}}{b_{11}} x_2 + \dots \frac{b_{1n}}{b_{11}} x_n \right) \right) + Q(x_2 \dots x_n) =$$

$$= b_{11} \left(x_1 + \frac{b_{12}}{b_{11}} x_2 + \dots + \frac{b_{1n}}{b_{11}} x_n \right)^2 - \underbrace{b_{11} \left(\frac{b_{12}}{b_{11}} x_2 + \dots + \frac{b_{1n}}{b_{11}} x_n \right)^2 + Q(x_2 \dots x_n)}_{Q_2(x_2 \dots x_n)} =$$

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + \frac{b_{12}}{b_{11}} x_2 + \dots \\ x_2' = x_2 \\ \vdots \\ x_n' = x_n \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_1' - \frac{b_{12}}{b_{11}} x_2' + \dots \\ x_2 = x_2' \\ \dots \\ x_n = x_n' \end{cases}$$

$= b_{11} x_1'^2 + Q_2(x_2' \dots x_n')$. Дальше по индукции.

Случай 2. $b_{ii}=0$, но $\exists\, i\neq j$ $b_{ij}\neq 0$.

Снова перенумеровав переменные считаем $b_{12}\neq 0$

Делаем замену

$$\begin{cases} x_1 = x_1' + x_2' \\ x_2 = x_1' - x_2' \\ x_3 = x_3' \\ \dots \end{cases} \qquad x_1 \cdot x_2 = x_1'^2 - x_2'^2$$

В новых координатах

$$Q(x_1' \dots x_n') = 2b_{12}x_1'^2 - 2b_{12}x_2'^2 + \sum 2b_{ij}x_i'x_j'$$ и мы попали в случай 1

Замечание: базис, в котором Q имеет кан. вид, а также сам кан. вид определены не однозначно.

Пример. $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, $e = (e_1, e_2)$

$e' = (2e_1, 2e_2)$

$$Q(x_1', x_2') = 4x_1^2 + 4x_2^2$$

$\mathbf{e} = (e_1 \ldots e_n)$ - фикс. базис. Рассмотрим систему векторов.

$\mathbf{e}' = (e_1' \ldots e_n')$, т. ч.

$$* \begin{cases} e_1' = e_1 \\ e_2' \in e_2 + \langle e_1 \rangle \\ e_3' \in e_3 + \langle e_1, e_2 \rangle \\ \ldots \end{cases}$$

$\forall k \quad (e_1' \ldots e_k') = (e_1 \ldots e_k) C_k$

$\det C_k \neq 0 \Rightarrow \langle e_1 \ldots e_k \rangle = \langle e_1' \ldots e_k' \rangle$.

Пусть $Q: V \to F$ - кв. форма.

$B = B(Q, \mathbf{e})$

$B_k = B_k(Q, \mathbf{e})$ - левый верхний $k \times k$ блок.

$\delta_k = \delta_k(Q, \mathbf{e}) = \det B_k$

<u>k-ый угловой минор</u>. $\delta_0 := 1$.

<u>Лемма</u>: Пусть $\mathbf{e}'$ - базис вида $(*)$.

$\forall k$ положим $\delta_k' = \delta_k(Q, \mathbf{e}')$. Тогда $\delta_k' = \delta_k$

$\triangleright$ $B_k' = B_k(Q, \mathbf{e}')$

$B_k' = C_k^T B_k \cdot C_k \Rightarrow \delta_k' = \det B_k' = \det(C_k^T \cdot B_k C_k) =$

$= \underbrace{\det C_k^T}_{=1} \cdot \underbrace{\det B_k}_{=\delta_k} \cdot \det C_k$ $\triangleleft$

Теорема: (метод Якоби прив. кв. ф. к кан. виду)

Пусть $\delta_k \neq 0 \ \forall k = 1 \dots n$. Тогда $\exists!$ базис $e' = (e_1' \dots e_n')$ т. ч.

1) e' имеет вид (*)

2) в новых коор-ах $Q(x_1' \dots x_n') = \delta_1 x_1'^2 + \frac{\delta_2}{\delta_1} x_2'^2 + \dots + \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} x_n'^2$.

$\triangleright$ По инд. Пусть вектора $e_1', \dots e_{n-1}'$ уже найдены,

т.е. $B_{n-1}' = \begin{pmatrix} \delta_1 & & 0 \\ & \delta_2/\delta_1 & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$. Пусть β - поляризация кв. ф. Q

Ищем вектор e_n' в виде $e_n' = e_n + \lambda_1 e_1' + \dots + \lambda_{n-1} e_{n-1}'$

Тогда $\forall k = 1 \dots n-1 \quad \beta(e_n', e_k') = \beta(\downarrow, e_k') =$

$= \beta(e_n, e_k') + \lambda_1 \beta(e_1', e_k') + \dots = \beta(e_n, e_k') + \lambda_k \beta(e_k', e_k')$

(т.к. $\beta(e_i', e_k') \neq 0 \Rightarrow i = k$) $\Longrightarrow \lambda_k = -\frac{\beta(e_n, e_k')}{\beta(e_k', e_k')}$

Тогда в базисе e' имеем.

$B(Q, e') = \begin{pmatrix} \delta_1 & & 0 \\ & \delta_2/\delta_1 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & ? \end{pmatrix}$

По лемме $\delta_k = \delta_k' =$

$= \delta_1 \cdot \frac{\delta_2}{\delta_1} \cdot \dots \cdot ? = \delta_n$

$\Downarrow$

$? = \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}}$

$\triangleleft$