31.01.19

Предл. а) $\ker\varphi$ – подпространство в V

б) $\operatorname{Im}\varphi$ – подпр-во в W

Док-во а) 1) $\varphi(0_V) = 0_W \Rightarrow 0_V \in \ker\varphi$

2) $v_1, v_2 \in \ker\varphi \Rightarrow \varphi(v_1, v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = 0+0=0$

3) $v \in \ker\varphi,\ \lambda \in F \Rightarrow \varphi(\lambda \cdot v) = \lambda\varphi(v) = \lambda \cdot 0 = 0$

б) 2) $w_1, w_2 \in \operatorname{Im}\varphi \Rightarrow \exists\, v_1, v_2 \in V$, т.ч.

$w_1 = \varphi(v_1)$, $w_2 = \varphi(v_2)$, $w_1 + w_2 = \varphi(v_1 + v_2)$

1) $0_W = \varphi(0_V) \in \operatorname{Im}\varphi$

3) ...

Предл. а) φ инъективна $\Longleftrightarrow \ker\varphi = \{0\}$

б) φ сюръективна $\Longleftrightarrow \operatorname{Im}\varphi = W$

Док-во а) $\Rightarrow$ т.к. $\ker :=$ прообраз нуля

$\Leftarrow$ $v_1, v_2 \in V$, пусть $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$. Тогда

$0 = \varphi(v_2) - \varphi(v_1) = \varphi(v_2 - v_1) \Rightarrow v_2 - v_1 \in \ker\varphi = \{0\}$

$\Rightarrow v_1 = v_2$

б) очевидно

Следствие: φ - изом. $\Longleftrightarrow \begin{cases} \ker\varphi = \{0\} \\ \operatorname{Im}\varphi = W \end{cases}$

Лемма $U \subseteq V$, $(e_1 \ldots e_k)$ - базис $U \Rightarrow$

$\varphi(U) = \langle \varphi(e_1) \ldots \varphi(e_k) \rangle$. В частности, $\dim \varphi(U) \leq \dim U$

$\dim \operatorname{Im}\varphi \leq \dim V$

$\rhd$ Упр. $\lhd$

Теорема 1: e - базис в V, f - базис в W,

$A = A(\varphi, e, f)$. Тогда $\operatorname{rk} A = \dim \operatorname{Im}\varphi$

$\rhd$ $e = (e_1 \ldots e_n) \Rightarrow \operatorname{Im}\varphi = \langle \varphi(e_1) \ldots \varphi(e_n) \rangle$ (по лемме)

$\Rightarrow \dim \operatorname{Im}\varphi = \operatorname{rk}\{\varphi(e_1) \ldots \varphi(e_n)\}$

Т.к $\forall j$ столбец $A^{(j)}$ состоит из к-т вектора $\varphi(e_j)$

в базисе f, то $\forall \alpha_1 \ldots \alpha_n \in F$

$\alpha_1 A^{(1)} + \ldots + \alpha_n A^{(n)} = 0 \Longleftrightarrow \alpha_1 \varphi(e_1) + \ldots + \alpha_n \varphi(e_n) = 0 \Rightarrow$

$\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}\{\varphi(e_1) \ldots \varphi(e_n)\} \Rightarrow \operatorname{rk} A = \dim \operatorname{Im}\varphi$ $\lhd$

Следствие

$\operatorname{rk} A = \dim \operatorname{Im}\varphi$ не зависит от выбора базисов e и f

Опр. Это число $\operatorname{rk} A = \dim \operatorname{Im}\varphi$ называется

рангом л. отобр. φ. Обозн: $\operatorname{rk}\varphi$

__Следствие__ Ранг матрицы не меняется при умножении слева и справа на невырожденную матрицу.

▷ Пусть $A \in Mat_{m \times n}$, $C \in M_n$, $D \in M_m$, $\det C, D \neq 0$

Реализуем A как матр. л. о. $\varphi: F^n \to F^m$ в какой-нибудь паре базисов $\mathbb{e}$ и f. Тогда в паре базисов $\mathbb{e}' = \mathbb{e}C$ и $f' = fD$ φ будет иметь матрицу $D^{-1}AC \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по теореме $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}(D^{-1}AC)$ ◁

__Предл__ Пусть $(e_1 \dots e_k)$ – базис в $\ker\varphi$. Дополним его до базиса $(e_1 \dots e_n)$ в базис V. Тогда $\varphi(e_{k+1}) \dots \varphi(e_n)$ – базис в $\operatorname{Im}\varphi$

▷ Имеем $\operatorname{Im}\varphi = \langle \underset{0}{\underset{\parallel}{\varphi(e_1)}} \dots \underset{0}{\underset{\parallel}{\varphi(e_k)}}, \varphi(e_{k+1}), \varphi(e_n) \rangle =$

$= \langle \varphi(e_{k+1}), \varphi(e_n) \rangle$

Осталось док-ть, что векторы $\varphi(e_{k+1}) \dots \varphi(e_n)$ лин. нез. Пусть $\alpha_{k+1}\varphi(e_{k+1}) + \dots + \alpha_n \varphi(e_n) = 0$

$\Leftrightarrow \varphi(\alpha_{k+1}e_{k+1} + \dots \alpha_n e_n) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_{k+1}e_{k+1} + \dots \alpha_n e_n \in \ker\varphi$

$\alpha_{k+1}e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k$ — лин нез. ◁

Теорема 2: $\dim V = \dim \ker \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi$

$\triangleright$ Пусть $(e_1 \dots e_k)$ — базис $\ker \varphi$. Дополним его до $(e_1 \dots e_n)$ всего V. Тогда $\varphi(e_{k+1}), \dots \varphi(e_n)$ — базис $\operatorname{Im} \varphi$ $\Rightarrow \dim \operatorname{Im} \varphi = n - k = \dim V - \dim \ker \varphi$ $\triangleleft$

Предл. Пусть $\operatorname{rk} \varphi = r$. Тогда $\exists$ базис e в V и базис f в W т.ч.

$$A(\varphi, e, f) = \begin{array}{c} \\ r \\ m-r \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} r & n-r \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \quad (*)$$

$\triangleright$ Пусть $(e_{r+1}, \dots e_n)$ — базис e $\ker \varphi$.
Дополним его векторами $(e_1 \dots e_r)$ до $e = (e_1 \dots e_n)$ всего V. Положим $f_1 = \varphi(e_1) \dots f_r = \varphi(e_r)$. Тогда $(f_1 \dots f_r)$ — базис в $\operatorname{Im} \varphi$. Дополним его векторами $f_{r+1}, \dots f_n$ до базиса $f = (f_1 \dots f_n)$ всего W. Тогда базисы e, f — искомые. $\triangleleft$

Следствие $\forall A \in \operatorname{Mat}_{m \times n}$ $\exists C \in M_n$, $D \in M_m$, $\det C, D \neq 0$ т.ч. $D^{-1} A C$ имеет вид $(*)$

V – вект. про-во над F

<u>Опр.</u> Линейная функция (линейная форма, линейный функционал) называется всякое лин. отобр. из векторного про-ва в поле $\varphi: V \to F$

<u>Примеры</u>. 1) $V = F^n$ $\quad V = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = a(V) = (a_1 \dots a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$

2) $V = F(X, \mathbb{R}) := \{$все ф-ции из мн-ва X в $\mathbb{R}\}$

$\alpha(f) := f(x_0)$

3) $V = C[a, b]$

$\alpha: V \to \mathbb{R}$, $\quad \alpha(f) = \int_a^b f(x)\,dx$

4) $V = M_n(F)$

$\alpha: V \to F$

$\alpha(X) = \mathrm{tr}\, X.$

Далее считаем $\dim V = n < \infty$

Из общей теории лин отобр:

1) $V^* := \mathrm{Hom}(V, F)$ - век. про-во

(оно называется сопряжённым или двойственным к V)

2) $(e_1, \dots e_n)$ - базис в $V \Rightarrow$ имеется изоморфизм

$V^* \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mat}_{1\times n}(F) \leftarrow$ строки длины n.

$a \mapsto (a_1 \dots a_n)$, где $a_i = \alpha(e_i)$ - коэф-ты л. функ α в

базисе e. Тогда $\forall v = x_1 e_1 \dots e_n e_n$

$$\varphi(v) = (a_1 \dots a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

<u>Следствие</u> $\dim V^* = n = \dim V$ (в част. $V \simeq V^*$)