28.02.19

Евклидовы пространства $(F = \mathbb{R})$

Опр. Евклидово пр-во — это вект. пр-во $\mathbb{E}$ над полем $\mathbb{R}$, на котором задана пол. опр. симм. бил. ф.

$(\cdot,\cdot): \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R}$

пол. опр $\Longleftrightarrow (x, x) > 0 \ \forall x \neq 0$

Б. ф. $(\cdot,\cdot)$ называется скалярным произведением

Примеры: ① $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$$

$$(x, x) = x_1^2 + \ldots + x_n^2 \ (>0)$$

Важный частный случай: $n=2$; $n=3$

② $\mathbb{E} = Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$, $(A, B) = tr(A^T \cdot B)$

$$(A, A) = tr(A^T \cdot A) = \sum\sum a_{ij}^2 \ (>0)$$

③ $E = C([0,1])$, $(f, g) = \int_0^1 f(x) g(x)\, dx$

$$(f, f) = \int_0^1 f^2(x)\, dx \ (>0)$$

Замечание: Всякое под-во евклидова пр-ва является евклидовым с тем же скалярным произв.

Опр. Длина вектора $x \in E$ — это

$|x| = \sqrt{(x,x)}$ $\quad (|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0)$

Замечание: в примере 2 длина матрицы A называется нормой Фробениуса.

Предл. (неравенство Коши–Буняковского)

$\forall x, y \in E$: $|(x,y)| \leq |x| \cdot |y|$, причём „=", когда x, y пропорц.

$\triangleright$ 1) x, y пропорц. $\Rightarrow$ можно считать $y = \alpha x$, тогда

$$|(x,y)| = |(x, \alpha x)| = |\alpha (x,x)| = \alpha |x|^2 = |x| \cdot (\alpha |x|) = |x| \cdot |y|$$

2) x, y не пропорц $\Rightarrow$ x, y лин. нез. $\Rightarrow$ x, y — базис в $\langle x, y \rangle$.

Рассмотрим матрицу ограничения $(\cdot, \cdot)$ на подп-во $\langle x, y \rangle$ в базисе x, y.

$$G = \begin{pmatrix} (x,x) & (x,y) \\ (y,x) & (y,y) \end{pmatrix}$$

Крит. Сильвестра $\Rightarrow \det G > 0$

$\Rightarrow (x,x)(y,y) - (x,y)^2 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow |x| \cdot |y| > |(x,y)|$

Н. К-Б. $\Rightarrow \forall$ ненулевых $x, y \in \mathbb{E}$ верно

$$-1 \leq \frac{(x,y)}{|x| \cdot |y|} \leq 1$$

<u>Опр.</u> Угол между двумя ненулевыми вектора $x, y \in \mathbb{E}$ — это такое значение $\alpha \in [0; \pi]$, что $\cos\alpha = \frac{(x,y)}{|x| \cdot |y|}$

<u>Опр.</u> Матрица Грама системы векторов $(v_1 \dots v_k)$ — это

$$G(v_1 \dots v_k) = \begin{pmatrix} (v_1; v_1) & (v_1, v_2) & \dots & \\ \vdots & (v_2 v_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & (v_k, v_k) \end{pmatrix}$$

<u>Предложение</u>: $\det G \geq 0$. Более того.

$\det G = 0 \Longleftrightarrow v_1 \dots v_k$ лин. зав.

$\triangleright$ 1) $v_1 \dots v_k$ лин. нез.

Тогда $G(v_1 \dots v_k)$ — матрица ограничения $(\cdot, \cdot)$ на под-во $\langle v_1 \dots v_k \rangle$ в базисе $(v_1 \dots v_k)$.

Тогда по крит. Сильвестра $\det G > 0$.

2) $v_1 \dots v_k$ — лин. зав. $\Rightarrow \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$, $(\alpha_1 \dots \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}^n$.

$\forall j$ имеем $\alpha_1 (v_1 v_j) + \dots \alpha_n (v_n, v_j) = 0 \Rightarrow$

$\alpha_1 G_{(1)} + \dots + \alpha_n G_{(n)} = 0 \Rightarrow \det G = 0$

Опр. Векторы $x, y \in \mathbb{E}$ называются ортогональными, если $(x, y) = 0$

Опр. Система ненулевых векторов $(v_1, \dots v_k)$ в $\mathbb{E}$ называется ① ортогональной, если $(v_i, v_j) = 0 \ \forall i \neq j$

(т.е $G(v_1 \dots v_k)$ диаг. и невыр.)

② ортонормированной, если

$(v_i, v_j) = 0 \ \forall i \neq j$ и $|v_i| = 1 \ \forall i \ (\Leftrightarrow G = E)$

Замечание: всякая ортогон. система векторов лин. нез.

Далее считаем $\dim \mathbb{E} = n < \infty$

Опр. Базис $(e_1 \dots e_n)$ в $\mathbb{E}$ называется ортогональным (соотв. ортонорм.) если система $(e_1 \dots e_n)$ ортог. (соотв. ортонорм.)

Пример: $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ со станд. скал. произв.

Станд базис $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

Теорема: Во всяком конечномерном евкл. про-ве $\exists$ орт. базис.

$\triangleright$ Вытекает о нормальном виде квадратичной формы над $\mathbb{R}$ (+ пол. опр.) $\triangleleft$

$(e_1 \ldots e_n)$ – ортон. базис $\mathbb{E}$

$(e_1' \ldots e_n')$ – другой базис в $\mathbb{E}$

$(e_1' \ldots e_n') = (e_1 \ldots e_n) \cdot C$

Предл. $(e_1' \ldots e_n')$ ортонорм. $\Longrightarrow C^T \cdot C = E$

$\triangleright$ Матрица кв. ф (x, x) в базисе $\mathbb{e}'$ равна $G(\mathbb{e}') =$
$= C^T \underbrace{G(\mathbb{e})}_{= E} C = C^T \cdot C$ $\triangleleft$

Опр. Матрица $C \in M_n(\mathbb{R})$ называется ортогональной, если $C^T \cdot C = E$

Замеч: $C^{-1} = C^T$ (в частн. $\det C \neq 0$)

Свойства орт. матрица

1) $|C^{(i)}| = 1 \quad \forall i; \quad (C^{(i)}, C^{(j)}) = 0 \quad \forall i \neq j$
(столбцы – орт. норм базис в $\mathbb{R}^n$)

2) $|C_{(i)}| = 1 \quad \forall i; \quad (C_{(i)}, C_{(j)}) = 0$

в частности $|c_{ij}| \leq 1$

3) $\det C = \pm 1$

Примеры:

$$n=2 \Rightarrow \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$e_1 \dots e_k \in \mathbb{E}$ – лин. незав. система

i-й угловой минор в $G(e_1 \dots e_k)$ – это $\det G(e_1 \dots e_i) \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ применим метод Якоби. $\Rightarrow \exists$ система векторов $f_1 \dots f_k$,

т.ч. 1) $f_1 = e_1$

$f_2 \in e_2 + \langle e_1 \rangle$

$\dots$

$f_k \in e_k + \langle e_1 \dots \rangle$

2) $\forall i = 1 \dots k \quad f_i = e_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1} \frac{(e_i, f_j)}{(f_j, f_j)} \cdot f_j \quad (*)$

3) $\forall i = 1 \dots k \quad \det G(e_1 \dots e_i) = \det G(f_1 \dots f_i) \Rightarrow$

$\Rightarrow f_1 \dots f_k$ – ортог. базис в $\langle e_1 \dots e_k \rangle$

Построение системы $f_1 \dots f_k$ по формуле $(*)$ называется процессом (методом) ортогонализации Грама – Шмидта