21.02.19

V - векторное пространство над F, $\dim V = n < \infty$

$Q: V \to F$ - кв. форма.

Было: $\exists\, e$, т.ч. в этом базисе $Q(x) = a_1 x_1^2 + \dots a_n x_n^2$

$B(Q, e) = \mathrm{diag}(a_1 \dots a_n)$

Далее считаем $F = \mathbb{R}$

<u>Опр.</u> Кв. ф. Q имеет в базисе e <u>нормальный вид</u>, если в этом базисе

$Q(x) = \varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_n x_n$, где $\varepsilon_i \in \{1, -1, 0\}$.

<u>Следствие</u> из метода Лагранжа: $\forall$ кв. ф. Q над $\mathbb{R}$ $\exists$ базис в котором Q имеет нормальный вид.

$\triangleright$ Знаем, что $\exists\, e$, в котором $Q(x) = a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2$

Делаем замену $$x_i = \begin{cases} \dfrac{x_i'}{\sqrt{|a_i|}}, & a_i \neq 0 \\ x_i', & a_i = 0. \end{cases}$$

Тогда в новых координатах $Q(x) = \varepsilon_1 x_1^2 + \dots + \varepsilon_n x_n^2$,

где $$\varepsilon_1 = \begin{cases} 1, & a_i > 0 \\ 0, & a_i = 0 \\ -1, & a_i < 0 \end{cases}$$ $\triangleleft$

Замечание: В случае $F = \mathbb{C}$ аналогичными рассуждениями можем привести к виду $Q(x) = x_1^2 + \ldots + x_k^2$, где $k = \operatorname{rk} Q$

Пусть Q — кв. ф. над $\mathbb{R}$ норм. вида.

s — число „+" в норм. виде

t — число „−"

Теорема (Закон инерции):

Числа $i_+ = s$, $i_- = t$ не зависят от выбора базиса, в котором Q имеет норм. вид.

i_+ — положительный индекс инерции

i_- — отрицательный индекс инерции.

Док-во: $\operatorname{rk} Q = s + t$ не зависит от выбора базиса. $\Rightarrow$ достаточно док-ть инвариантность одного из них.

Пусть есть e и e'

в 1-ом $Q(x) = x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_t^2$

в 2-ом $Q(x) = x_1'^2 + \ldots + x_{s'}'^2 - x_{s'+1}'^2 - \ldots - x_{t'}'^2$

Без ограничения общности считаем, что в 1-ом случае число плюсов больше

Расм. в V подпрост.

$L_1 = \langle e_1 \dots e_s \rangle$, $\dim L_1 = s$

$L_2 = \langle e'_{s'+1} \dots e_n \rangle$, $\dim L_2 = n - s'$

$L_1 + L_2 \subseteq V \Rightarrow \dim(L_1 + L_2) \leq n$

$\dim(L_1 \cap L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim L_1 \cap L_2 \geq s - s' > 0$

$\Rightarrow v \in L_1 \cap L_2$, т.ч. $v \neq 0$.

Т.к. $v \in L_1$, то $Q(v) > 0$

Т.к. $v \in L_2$, то $Q(v) \leq 0$ — противоречие

---

e - базис V

$B = B(Q, e)$, $\delta_k = \delta_k(Q, e)$ – k-ый угловой минор

<u>Следствие метода Якоби:</u>

Пусть $\delta_k \neq 0$ $\forall k$. Тогда число i_+ равно кол-ву сохранения знака $1, \delta_1, \delta_2 \dots \delta_n$. i_- наоборот.

Метод Якоби $\Rightarrow \exists$ базис, в котором

$Q(x) = \delta_{11} x_1^2 + \frac{\delta_{12}}{\delta_{11}} x_2^2 + \dots$

+ единственность нормального вида

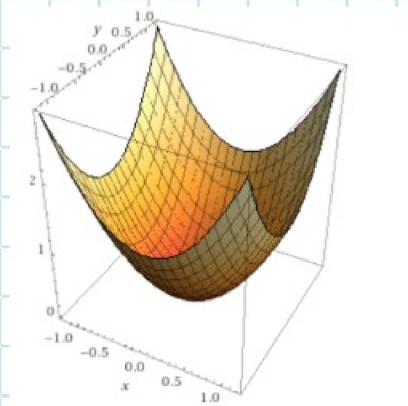
Опр. Кв. ф. над $\mathbb{R}$ называется

Термин	Запись	Условие	Норм. вид
Положительно определённой	$Q>0$	$Q(x)>0 \quad \forall x\neq 0$	$x_1^2+\ldots+x_n^2$
Отрицательно опр.	$Q<0$	$Q(x)<0 \quad \forall x\neq 0$	$-x_1^2-\ldots-x_n^2$
Неотрицательно опр.	$Q\geq 0$	$Q(x)\geq 0 \quad \forall x$	$x_1^2+\ldots+x_k^2 \quad k<n$
Неположительно опр.	$Q\leq 0$	$Q(x)\leq 0 \quad \forall x$	$-x_1^2-\ldots-x_k^2$
Неопределённой	—	$\exists x,y: Q(x)>0$, $Q(y)<0$	$s\geq 1,\ t\geq 1$

Примеры: $V=\mathbb{R}^2$

1) $Q(x,y)=x^2+y^2$

$Q>0$



2) $Q(x,y)=-x^2-y^2$

$Q<0$

3) $Q(x,y)=x^2$

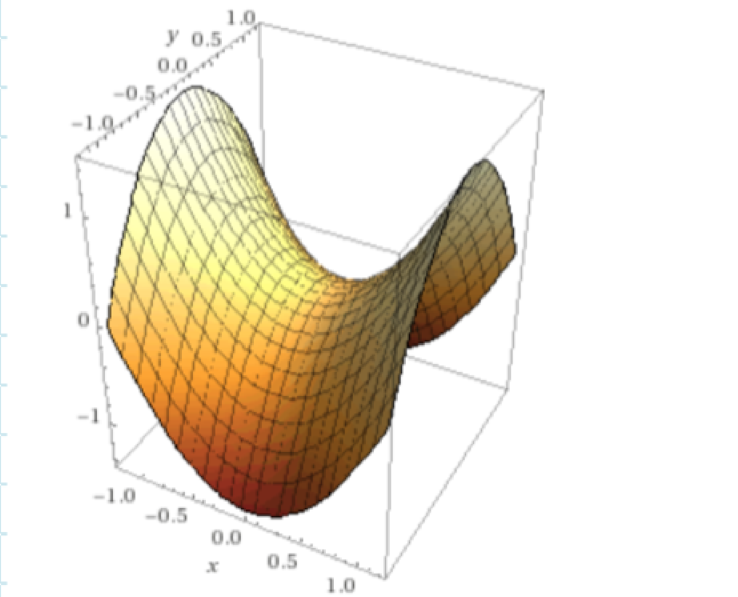
$Q\geq 0$

4) $Q(x,y)=-x^2$

$Q\leq 0$

5) $Q(x,y)=x^2-y^2$

Q неопр.



Применение:

$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

$x=x_0+y$, $x_0\in\mathbb{R}^n$ – точка, $y\in\mathbb{R}^n$ – малое приращение

Предположим, что

$$f(x)=f(x_0)+\underbrace{a_1y_1+\ldots+a_ny_n}_{\text{лин. форма } l(y)}+\underbrace{\sum_{i=1}^{n} b_{ii}y_i^2+\sum_{1\le i<j\le n} b_{ij}y_iy_j}_{\text{кв. форма } Q(y)}+\overline{o}(|y|^2)$$

Теорема: 1) $l(y)\neq 0 \Rightarrow f$ не имеет экстр.

2) Пусть $l(y)\neq 0$

Тогда а) Если $Q(y)>0$, то лок мин.

б) Если $Q(y)<0$, то макс.

в) Если $Q(y)$ неопр, то нет экстр.

Q – кв. ф. над $\mathbb{R}$, e – базис. $B = B(Q, e)$,

B_k – k-ый угловой блок. $\delta_k = \det B_k$.

Теорема: (критерий Сильвестра).

$Q(x) > 0 \iff \delta_k > 0 \ \forall k$

Док-во: $\Leftarrow$ следствие метода Якоби. $i_+ = n \Rightarrow Q > 0$

$\Rightarrow$ $Q > 0 \Rightarrow \exists C \in M_n(\mathbb{R})$, $\det C \neq 0$, т.ч.

$C^T B \cdot C = E \Rightarrow \det C^T \cdot \det B \cdot \det C = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \delta_n = \frac{1}{(\det C)^2} > 0.$

$\forall k$ рассмотрим ограничение кв. ф. Q на подпространство $\langle e_1 \ldots e_k \rangle$. Это ограничение > 0.

В базисе $(e_1 \ldots e_k)$ это B_k $\ldots$ $\det B_k > 0$ $\triangleleft$

Следствие (критерий отр. опр.)

$Q < 0 \iff \delta_k > 0$ при $\forall k \,⋮\, 2$

$\delta_k < 0$ при $\forall k \,\not⋮\, 2$

Док-во: $Q < 0 \Rightarrow -Q > 0$ $\triangleleft$