20.02.19

$R([a,b])$ - мн-во функций, интегрируемых по Риману на $[a,b]$.

Замечание: Пусть $f \in R([a,b])$, тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|\tau| \to 0} S_\tau(f, C)$$

Можно выбрать последовательность разбиений τ_n т. ч. $\lim\limits_{n\to\infty} |\tau_n| = 0$ и последовательность C_n (промеж. точ.)

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S_{\tau_n}(f, C_n)$$

Опр. $f(x)$ называется кусочно непрерывной на $[a,b]$, если у неё конечное число точек разрыва 1-ого рода (а во всех остальных точках $f(x)$ непрерывна)

Эквивалентно: $\exists$ разбиение $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_k < b$ и $f(x)$ непрерывна на (a_i, a_{i+1}) и существуют односторонние пределы $\lim\limits_{x \to a_i \pm 0} f(x)$

Теорема: Если $f(x)$ кусочно непрерывна, то

$$f(x) \in R([a,b])$$

Свойства определённых интегралов:

(0) $\int_a^b 1 \cdot dx = b - a$

(1) Пусть $f(x) \in R([a, b])$ и $[\tilde{a}, \tilde{b}] \subset [a, b]$. Тогда
$f \in R([\tilde{a}, \tilde{b}])$

(2) (Аддитивность определённого интеграла относительно отрезка интегрирования)
Пусть $a < c < b$ и $f \in R([a, c])$ и $f \in R([c, b])$.
Тогда $f \in R([a, b])$ и $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

(3) (Линейность)
$f, g \in R([a, b])$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, тогда
$\lambda f + \mu \cdot g \in R([a, b])$ и
$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx$$

(4) (Монотонность интегрирования)
Пусть $f(x) \leq g(x)$ на $[a, b]$ и $f, g \in R([a, b])$
Тогда $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

(5) Пусть $f \in R([a,b])$. Тогда $|f| \in R([a,b])$ и

$$\int_a^b |f(x)|\,dx = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$$

(6) Если $f, g \in R([a,b])$, то $f \circ g \in R([a,b])$

(7) Если $f \in R([a,b])$ и $f \geq \alpha > 0$ на $[a,b]$. То

$\frac{1}{f} \in R([a,b])$

<u>Теорема</u> (о среднем).

Пусть $f, g \in R([a,b])$ и $m \leq f(x) \leq M$

Пусть $g(x)$ не меняет знака на $[a,b]$.

Тогда $\exists \mu \in [m, M]$: $\int_a^b f(x) g(x)\,dx = \mu \cdot \int_a^b g(x)\,dx$.

При дополнительном предположении, что

$f \in C([a,b])$: $\exists c \in [a,b]$:

$$\int_a^b f(x) g(x)\,dx = f(c) \cdot \int_a^b g(x)\,dx$$

$\triangleright$ Для определённости пусть $g \geq 0$ на $[a,b]$

$$m \le f(x) \le M$$

$$m \cdot g(x) \le f(x) \cdot g(x) \le M g(x)$$

$$\int_a^b m \cdot g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\, g(x)\,dx \le \int_a^b M g(x)\,dx \quad \text{(по моното.)}$$

$$m \cdot \int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x) g(x)\,dx \le M \int_a^b g(x)\,dx \quad (*)$$

① Если $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, то $(*) \Rightarrow \int_a^b f(x) g(x)\,dx = 0$

Можно взять произвольное μ

② Если $\int_a^b g(x)\,dx \ne 0$, то $\int_a^b g(x)\,dx > 0$ (т.к. $g \ge 0$)

Поделим $(*)$ на $\int_a^b g(x)\,dx$.

$$m \le \underbrace{\frac{\int_a^b f(x)\, g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}}_{\mu} \le M$$

Если $f(x) \in C([a,b])$, то можно взять в качестве m минимум $f(x)$ на $[a,b]$

—״— ״— M – максимум.

Тогда $f(x)$ принимает все возможные значения между m и M

В частности $\exists c \in [a,b] : f(c) = \mu \in [m, M]$ ◁

Следствие: Если $f \in C([a,b])$, то

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a) \quad , \quad c \in [a,b]$$

Связь опр. и неопр. интегралов

Соглашение • $\int_a^a f(x)dx = 0$

• если $a<b$, то $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

После такого соглашения верны свойства.

① $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ для $\forall a, b, c$

② $\forall a, b \ \exists c \in [a, b] : \int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a)$ $(f \in C([a,b]))$

Опр: Пусть $f(t) \in R([a,b])$. Тогда $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \Big|_{x\in[a,b]}$

называется интегралом с переменным верхним пределом интегрирования.

$G(x) = \int_x^b f(t)dt$

Теорема: Пусть $f \in C([a,b])$

Тогда $F(x)$ и $G(x)$ дифференцируемы на $[a,b]$

и $F'(x) = f$; $G'(x) = -f$

▷ По опр. производной.

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{\Delta x} =$$

$$= (\text{по аддитивности}) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x} = \begin{bmatrix} \text{т-ма} \\ \text{о} \\ \text{ср} \end{bmatrix} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c) \cdot (x + \Delta x - x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c) = f(x), \text{ т.к. } c \in [x, x+\Delta x]$$

Про $G(x)$ заметим, что $F(x) + G(x) = cost$.

$$F'(x) - G'(x) = 0$$ ◁

Теорема: Пусть f непрерывна на $\langle a, b \rangle$. Тогда она имеет на $\langle a, b \rangle$ первообразную.

▷ В качестве первообразной можно взять

$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$, где $x_0 \in \langle a, b \rangle$ ◁

Теорема (основная теорема интегрального исчисления, формула Ньютона-Лейбница).

Пусть $f \in C([a,b])$, а Φ — её первообр. на $[a,b]$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

$\triangleright$ Из предыдущего

$$F(x) = \Phi(x) + c$$

$$\int_a^x f(t)dt = \Phi(x) + c. \quad \text{подставим } x=a$$

$$0 = \int_a^a f(t)dt = \Phi(a) + c \Rightarrow c = -\Phi(a)$$

подставим $x=b$

$$\int_a^b f(t)dt = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Запись $\Phi(x)\Big|_a^b := \Phi(b) - \Phi(a)$