12.02.19

Математическое ожидание

Случайная величина

$f : U \to \mathbb{R}$

$$\mathbb{E} = \sum_{a \in U} f(a) \cdot P_r(a)$$

$U = \{1, \dots 6\}$

$f(k) = k$

$$\mathbb{E}[f] = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6}$$

Лемма: Пусть с. в. f принимает значения $y_1 \dots y_m$

Тогда $\mathbb{E}[f] = y_1 P_r[f(y_1) = y_1] + \dots + y_m P_r[f(y_m) = y_m]$

$U = \{(x_1, x_2 \dots x_5) \mid x_i \in \{0, 1\}\}$

$f((x_1 ., x_5)) = x_1 + x_2 . . + x_5$

$$\mathbb{E}[f] = 0 \cdot \frac{1}{32} + 1 \cdot \frac{5}{32} + 2\frac{\binom{5}{2}}{32} + 3\frac{\binom{5}{3}}{32} + \dots$$

Свойство линейности: $\mathbb{E}[f+g] = \mathbb{E}[f] + \mathbb{E}[g]$

$\triangleright$

$$\mathbb{E}[f+g] = \sum_{u \in U} (f(u) + g(u)) \cdot P_r(u) = \sum f(u) P_r(u) + \sum g(u) P_r(u) \ \triangleleft$$

$f_i(x_1 \dots x_5) = x_i$ $\qquad \mathbb{E}[f_i] = 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2}$

$f = f_1 + f_2 + \dots f_5$

$$\mathbb{E}[f] = \mathbb{E}[f_1] + \ldots = 5\,\mathbb{E}[f_1] = \frac{5}{2}$$

$$f = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}, \quad \text{тогда } \mathbb{E}[f] = P_r[A]$$

f – <u>индикатор.</u> Обозн: $\mathbb{I}_A$

$F_B(i)$ = день рождения i-ого студента

ст. $1, \ldots n$ ← Элементарный исход

$$U = \{F_B \mid F_B : \{1 \ldots n\} \to \{1, \ldots, 365\}\}$$

$f(n)$ – кол-во неуп. пар людей, родившихся в один день.

$$g_{ij}(U) = \begin{cases} 1, & U(i) = U(j) \\ 0, & U(i) \neq U(j) \end{cases}$$

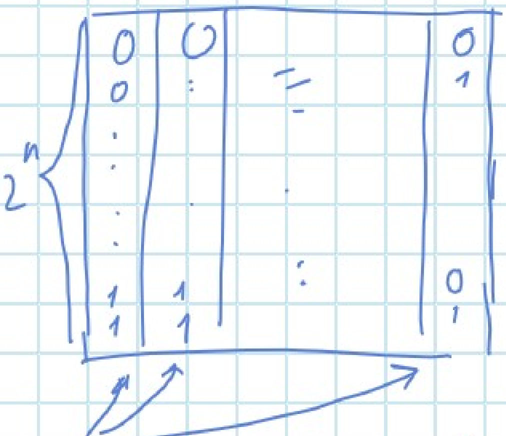
$$\boxed{\mathbb{E}[g_{ij}] = \frac{1}{365}}$$

$$f(u) = \sum_{1 \le i \le j \le n} g_{ij}(u)$$

$$\mathbb{E}[f] = \sum \mathbb{E}[g_{ij}] = \frac{1}{365} \cdot \frac{n(n-1)}{2}$$

Выбираем случайное подмножество S двоичных строк длины n

$f(S) = \underset{\text{число } 1.}{\#1}$ во всех строках S ; $g(w) = |w| - \#$единиц в w



$N = 2^n$

$a_i = 1 \Longleftrightarrow w \in N$

2^{n-1} единиц. $h_i(S) = \#1$ в i-ом столбце у строк из S.

$f(S) = h_1(S) + h_2(S) + \ldots h_n(S)$

$\mathbb{E}[f] = n \cdot \mathbb{E}[h_1] = \dfrac{n \cdot 2^{n-1}}{2}$

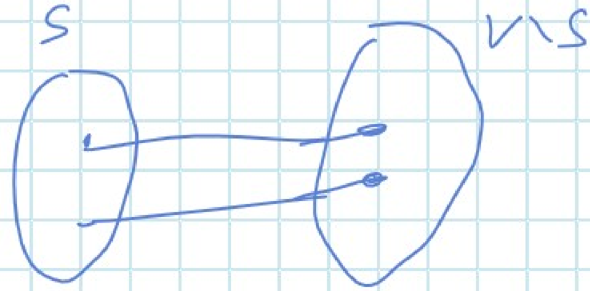
$h_1 = w_1[1] + w_2[1] + \ldots + w_{2^n}[1]$

Лемма: $\min(f) \leq \mathbb{E}[f] \leq \max(f)$

$\triangleright$ $\mathbb{E}[f] = y_1 \Pr[f = y_1] + y_2 \Pr[f = y_2] + \ldots \leq$

$\leq y_m \Pr[f = y_1] + y_m \Pr[f = y_2] + \ldots = y_m$ $\triangleleft$

Разрез:



<u>Утв.</u> В каждом графе есть разрез. $|E_S| \geq \frac{|E|}{2}$

$\{u, v\}$

$Pr[u \in S, v \notin S] = \frac{1}{4}$ $\qquad$ $f(S) = \#$ рёбер в разрезе $S, V \setminus S$

$Pr[v \in S, u \notin S] = \frac{1}{4}$

$Pr[\{u, v\} \in E_S] = \frac{1}{2}$

$g_e(S) = \begin{cases} 1, & e \in E_S \\ 0, & e \notin E_S \end{cases}$, $\quad f(S) = \sum_{e \in E} g_e(S) \quad \mathbb{E}[f] = \frac{|E|}{2}$

<u>Теорема.</u> Пусть $f : U \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, тогда | Неравенство Маркова.

$$Pr[f \geq \alpha] = \frac{\mathbb{E}[f]}{\alpha}$$

$\triangleright$ $E[f] = y_1 p_1 + \dots y_k p_k + \overbrace{y_{k+1} p_{k+1} + \dots y_m p_m}^{\geq \alpha p_{k+1} + \dots \alpha p_m = \alpha (p_{k+1} \dots p_m) =} = \alpha Pr[f \geq \alpha]$

$y_1 \leq y_2 \dots \leq y_m$, $\quad y_k < \alpha$, $\quad y_{k+1} \geq \alpha$ $\quad \triangleleft$
