17.04.19

$\mathbb{R}^n$

Теорема Больцано – Вейерштрасса:
У ограниченной последовательности $\{x^{(k)} \in \mathbb{R}^n\}_{k=1}^{\infty}$ можно выделить сходящуюся подпос-ть.

$\triangleright$ Мы уже доказали для $n=1$.
Выделим подпос-ть с номерами $k_1^{(s)}$ такую, что $\{x_1^{k_1^{(s)}}\}$ сходится. Выделим в полученной последовательности подпос-ть с номерами $k_2^{(s)}$, для которой сходятся вторые координаты. И т.д. В конце получается подпос-ть, у которой каждая координата к чему-то сходится. $\triangleleft$

Опр. Подмно-во $A \subset \mathbb{R}^n$ называется компактом, если оно замкнуто и ограничено.

Пример: $\mathbb{R}^1$ $[a, b]$ – компакт.

В $\mathbb{R}^2$ $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$ – компакт

Компакты – аналоги отрезков.

Если $A \subset \mathbb{R}^n$ компакт и $\{x^{(k)} \in A\}_{k=1}^{\infty}$ послед-ть.
Тогда $\exists$ подпосл-ть, которая сходится к точке из A.

Функции многих переменных

Пусть $f: X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ - числовая функция.
Тогда X называется областью определения функции f

Опр. Графиком функции $f: \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{X}} \to \mathbb{R}$ называется мно-во

$$\left\{(x_1, \dots x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \begin{matrix} x = (x_1 \dots x_n) \\ y = f(x) \end{matrix}\right\}$$

Говорят, что если f опр. на E, то $E \subseteq X$

Опр. Пусть $f: X \to \mathbb{R}$ определена на E и $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ — предельная точка на мно-ве E. Число $a \in \mathbb{R}$ называется пределом f при $x \to x^{(0)}$ (по мно-ву E) если выполнено одно из след. эквив. утв.

① $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) \ \forall x \in E, \ 0 < d(x, x_0) < \delta$:

$$|f(x) - a| < \varepsilon \quad (\text{по Коши})$$

② $\forall \varepsilon > 0 \ \exists$ открытое $U \ni x^{(0)} \ \forall x \in \overset{\circ}{U} \cap E$:

$$|f(x) - a| < \varepsilon$$

③ $\forall$ посл-ти $\{X^{(k)} \in E\}$, сходящейся к $X^{(0)}$ выполнено

$$\lim_{k\to\infty} f(X^{(k)}) = a \quad \text{(по Гейне)}$$

<u>Пример:</u> $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 \cdot \sin x_3$

$$\lim_{x\to(1,3,\frac{\pi}{2})} f(x) = 4$$

Объяснить можно например по Гейне

$(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}) \to (1, 3, \frac{\pi}{2})$, т.е. $x_1^{(k)} \to 1$, $x_2^{(k)} \to 3$, $x_3^{(k)} \to \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{k\to\infty} (x_1^{(k)} + x_2^{(k)} \cdot \sin x_3^{(k)}) = \lim_{k\to\infty} x_1^{(k)} + \lim_{k\to\infty} x_2^{(k)} \cdot \sin(\lim_{k\to\infty} x_3^{(k)}) = 4$$

Из. арифм. свойств пределов и непрерывности синуса

<u>Пример 2</u> $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ (*) — не существует.

Как док-ть? ① Повторные пределы:

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$$

<u>Утв.</u> Если $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = a$, то повторные пределы $\exists$ и совпадают с a

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x+y}{x-y} = \lim_{y\to 0} -1 = -1$$

$$\neq \Rightarrow (*) \nexists$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x+y}{x-y} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

② предел по направлению (α, β)

$$x = x_0 + \alpha t$$

$$y = y_0 + \beta t$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ \text{по напр. } (\alpha,\beta)}} f(x,y) := \lim_{t\to 0} f(x_0+\alpha t, y_0+\beta t)$$

$$\lim_{(\alpha,\beta)}\frac{x+y}{x-y} = \frac{\alpha t+\beta t}{\alpha t-\beta t} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$$ - зависит от α, β

Опр. $f: X \to \mathbb{R}$ ограничена сверху на $X \subseteq \mathbb{R}^n$, если $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in X \quad f(x) \leq C$.

Пример 3 $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} = 0$

$\rhd$ $\left|\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right| \leq 1$, $\left|\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right| \leq 1$, $z \to 0$, если $(x,y,z) \to (0,0,0)$

Утв. произведение бесконечно малой на ограниченную — это б. м. $\lhd$

Опр. $f: X \to \mathbb{R}$ называется непрерывной в точке $x^{(0)} \in X$, если

$$\lim_{x\to x^{(0)}} f(x) = f(x^{(0)})$$

f непрерывна на X, если она непрерывна в любой точке. Св-ва те же.

Теорема Вейерштрасса: Пусть $f: X \to \mathbb{R}$ непрерывна и $X \subset \mathbb{R}^n$ — компакт. Тогда f ограничена и достигает max и min