ДЗ 10.01.19

№К7.2

б) $A := \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$

При $\lambda = 1$ $rk\,A = 2$

При $\lambda = 2$ $rk\,A = 3$

При $\lambda = 3$ $rk = 3$, иначе 4

д) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-\lambda^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda^2 \end{pmatrix} -2$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda^2 \end{pmatrix}$

При $\lambda = \pm 1$ $rk = 3$

При $\lambda = \pm 2$ $rk = 3$

Иначе $rk = 4$

е) $\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -\lambda & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -\lambda & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} \to$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -\lambda \\ 2 & 3 & -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda & 3 & 2 \\ -\lambda & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -3 \\ -2 \\ -1 \\ +\lambda \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -\lambda-3 \\ 0 & 1 & -\lambda-2 & -1 \\ 0 & -\lambda-1 & 2 & 1 \\ 0 & 1+\lambda & 2+\lambda & 3+\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -\lambda-1 \\ \\ \lambda+1 \end{matrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -\lambda-3 \\ 0 & 0 & -\lambda-4 & -\lambda-4 \\ 0 & 0 & 2\lambda+4 & \lambda^2+4\lambda+4 \\ 0 & 0 & -\lambda & -\lambda(\lambda+3) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -\lambda-3 \\ 0 & 0 & -\lambda-4 & -\lambda-4 \\ 0 & 0 & -\lambda & -\lambda(\lambda+3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

При $\lambda = 0$ $rk = 3$ Иначе $rk = 4$

$\lambda = -4$ $rk = 3$

3) $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \dots & \lambda^n \\ 2 & 1 & \lambda & \dots & \lambda^{n-1} \\ 2 & 2 & 1 & \dots & \lambda^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

Вычитая из второй строки две первых получаем

$1-2\lambda \quad \lambda-2\lambda^2 \quad \lambda^2-2\lambda^3 \dots$

$=0$ в случае, когда $\lambda = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow rk = n$, иначе $rk = n+1$

№ К7.4

Пусть $A = M_{n\times k}$, $B = M_{k\times m}$

$A \cdot B = C$, тогда

$$C^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots + a_{1k}b_{k1} \\ a_{21}b_{11} \;\ldots \\ \ldots \end{pmatrix}$$

Вынесем $b_{i1}$ из каждого столбца и получим, что столбец является лин. комб. столбцов матрицы A аналогично можно сделать для всех других столбцов $\Rightarrow rk(A\cdot B) \le rk(A)$. Аналогично для B

---

№ К7.7.

$A = M_{m\times n}$. Приведём её к ступенчатому виду.

$rk A = r$. Тогда

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \ldots \\ A_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ A_2 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots$$

17.01.19

№35.14

в) $S = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle; \quad T = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -2 \\ -3 \\ -1 \\ \\ -5 \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \dim(S+T) = 3$$

$\dim S = 3 \qquad \dim T = 3$

$\Downarrow$

$\dim S \cap T = 3$

№35.15

в) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & y_1 & y_2 & y_3 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \underline{1} & \underline{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & b_3 \end{array}$$

$U+V = \langle a_1, a_2, a_3, b_1 \rangle$

$y_2, y_3$ – любые $\quad y_1 = y_2 + y_3$

$(y_2+y_3)b_1 + y_2 b_2 + y_3 b_3 = y_2(b_1+b_2) + y_3(b_1+b_3)$

$U \cap V = \langle b_1+b_2, b_1+b_3 \rangle =$

$$= \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}2\\2\\2\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

2)
$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \end{array}\end{array} \begin{matrix} -2 \\ -1 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} -3 \\ -2 \end{matrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -24 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & y_1 & y_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad y_1 = -3y_2$$

$$U+V = \langle a_1 \ a_2 \ b_1 \rangle$$

$$-3y_2 b_1 + y_2 b_2 = -3b_1 + b_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}} =$$

$$= U \cap V$$

g)
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -6 & -7 \\ -2 & 1 & -1 & -5 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & y_1 & y_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$U+V = \langle \underline{a_1 \ a_2 \ a_3} \rangle \ b_1 \ b_2$$

№35.16

а) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

б) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

24.01.19

№35.19

① $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} -1 \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} 2 \to$

$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow U + V = \langle u_1, u_2, v_1, v_2 \rangle = \mathbb{R}^4$

② $\operatorname{rk} U = 2, \quad \operatorname{rk} V = 2, \quad \operatorname{rk} \mathbb{R}^4 = 4$

из ① и ② $\Rightarrow \mathbb{R}^4 = U \oplus V$

Д/З №34.11 (б), №34.12 ($a=3$, $a=1$)

№36.3, №36.4

$V = W = \mathbb{R}^2$

ст. базиси

$S$ – симметрия относительно $Ox$

$P$ – симметрия отн. $x=-y$

Найти матр. отобр. $S$ и $P$ и образы $(3, 17)$ при $S$ и $P$

№34.11

б) $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$S' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ -2 & -3 & -5 & -4 \\ 2 & 2 & 5 & 4 \\ -1 & -3 & -4 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & -2 & -3 & -5 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & -1 & -3 & -4 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 8 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & -1 & -3 & -1 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \ldots$

№36.3) $\mathcal{A}: V \to W$

$e_1, e_2, e_3 \quad f_1, f_2 \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

$e_1' = e_1 \qquad f_1' = f_1$

$e_2' = e_1 + e_2 \qquad f_2' = f_1 + f_2$

$e_3' = e_1 + e_2 + e_3$

$C_{e \to e'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C_{f \to f'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A_{e', f'} = C^{-1}_{f \to f'} A \cdot C_{e \to e'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \ldots$

07.02.19

№1 $\varphi = \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\boxed{1} x^3 - \cancel{6x^2} + 12x - 8 + \boxed{6}\, \cancel{x^2} - 24x + 24 + \boxed{13}\, x - 26 + \boxed{10} = x^3 + x$

$x^3 + x = 10e_1 + 13e_2 + 6e_3 + e_4$

$$A(\varphi, e, f) \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 148 \end{pmatrix}$$

$\varphi = 28f_1 + 148f_2$

---

№3

21.02.19

№38.18

$$x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 =$$

$$= (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - (x_2 + 2x_3)^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3 =$$

$$(x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3) = \frac{1}{1}\big(x_1 + \underbrace{x_2 + 2x_3}_{\frac{x_k}{2ax_1}}\big)^2 - \frac{1}{1}(x_2 + 2x_3)^2$$

$$= y_1^2 + (x_2^2 - 2x_2x_3) - 3x_3^2 = y_1^2 + (x_2 - x_3)^2 - x_3^2 - 3x_3^2 =$$

$$= y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

№37.6.

a)
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} e_1' &= e_1 - e_2 \\ e_2' &= e_1 + e_3 \\ e_3' &= e_1 + e_2 + e_3 \end{aligned}$$

$$C_{e \to e'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad E = C^T \cdot B \cdot C = \ldots$$

a)
$$F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x &= (1, 0, 3) \\ y &= (-1, 2, -4) \end{aligned}$$

$$f(x, y) = x\ F \cdot y^T = -43$$

28.02.19

№38.9

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 0 & -1\\ 3 & -1 & 3\end{pmatrix} \quad \delta_0 = 1 \quad \delta_1 = 1 \quad \delta_2 = -4$$

$$\delta_3 = -2\cdot 3 - 2\cdot 3 - 1 - 2\cdot 2\cdot 3 = -25$$

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 3 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 5\end{pmatrix} \quad \Delta_0 = 1 \quad \Delta_1 = 1 \quad \Delta_2 = -8 \quad \Delta_3 = -41$$

$$Q_1(x) \not\cong x_1^2 - 4x_2^2 + \frac{25}{4}x_3^2$$

$$Q_2(y) \not\cong x_1^2 - 8x_2^2 + \frac{41}{8}x_3^2$$

а) да

б) нет

№38.11

б) $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1 x_2 + 2x_1\lambda_3$

$$\begin{pmatrix}2 & \lambda & 1\\ \lambda & 1 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix} \quad \delta_1 = 2 \quad \delta_2 = 2-\lambda^2 \quad \delta_3 = -3\lambda^2 + 5 \quad \Rightarrow |\lambda| < \sqrt{\tfrac{5}{3}}$$

№38.14

б) $\lambda x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

$$\begin{pmatrix}\lambda & 1 & -1\\ 1 & -2 & 1\\ -1 & 1 & -3\end{pmatrix} \quad \delta_1 = \lambda \quad \delta_2 = -2\lambda - 1 \quad \delta_3 = 5\lambda + 3$$