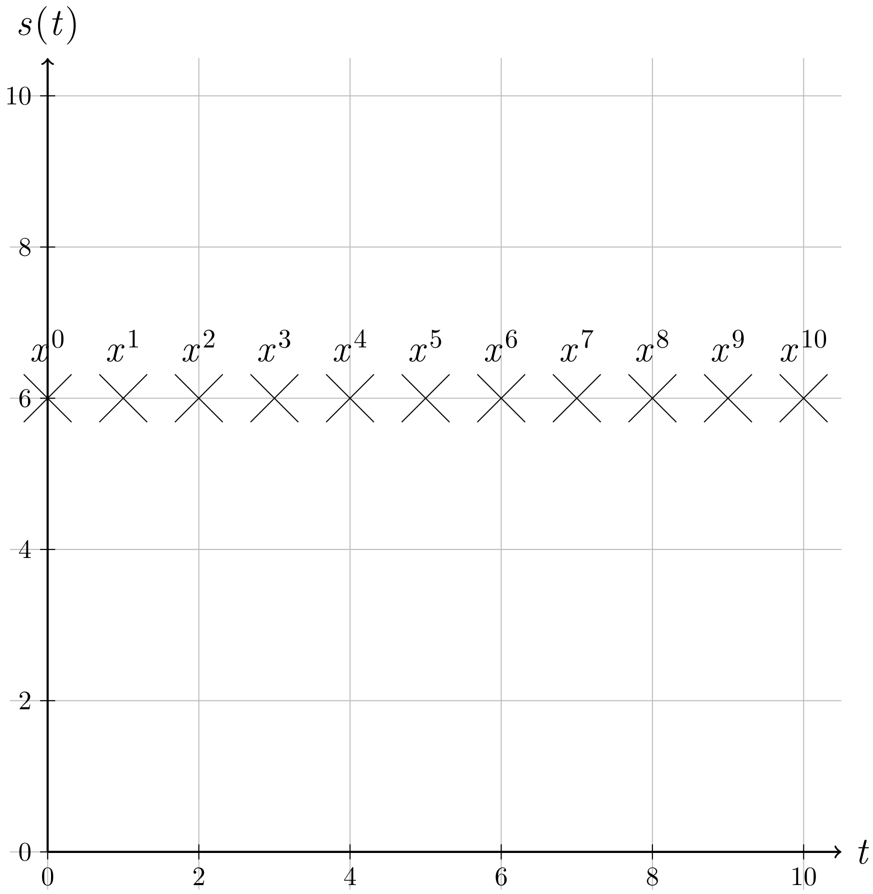
Musterlösung
Iterierte Abbildungen

1 Lineare Iterierte Abbildungen

Teilaufgaben a und b

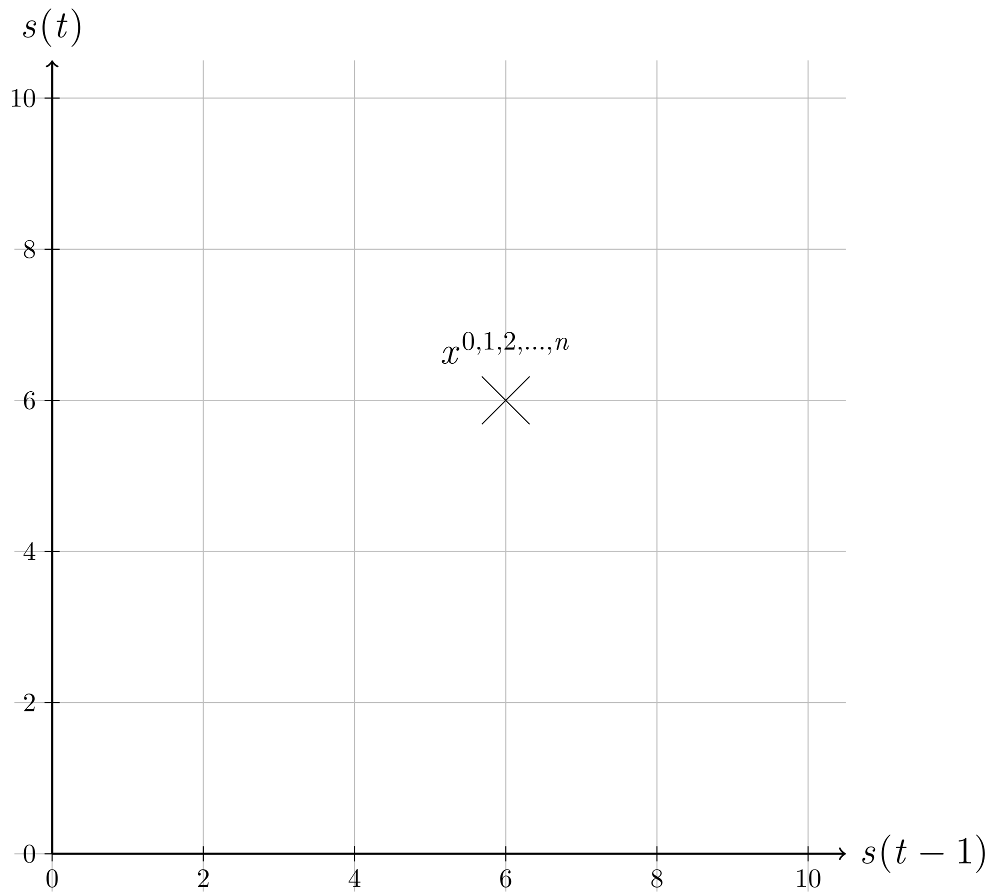
s(t) = c mit c = 6



Vorgehensweise: Da wir c auf 6 festgelegt haben, können wir die Orbite folgendermaßen berechnen.

- $x^0 = 6$

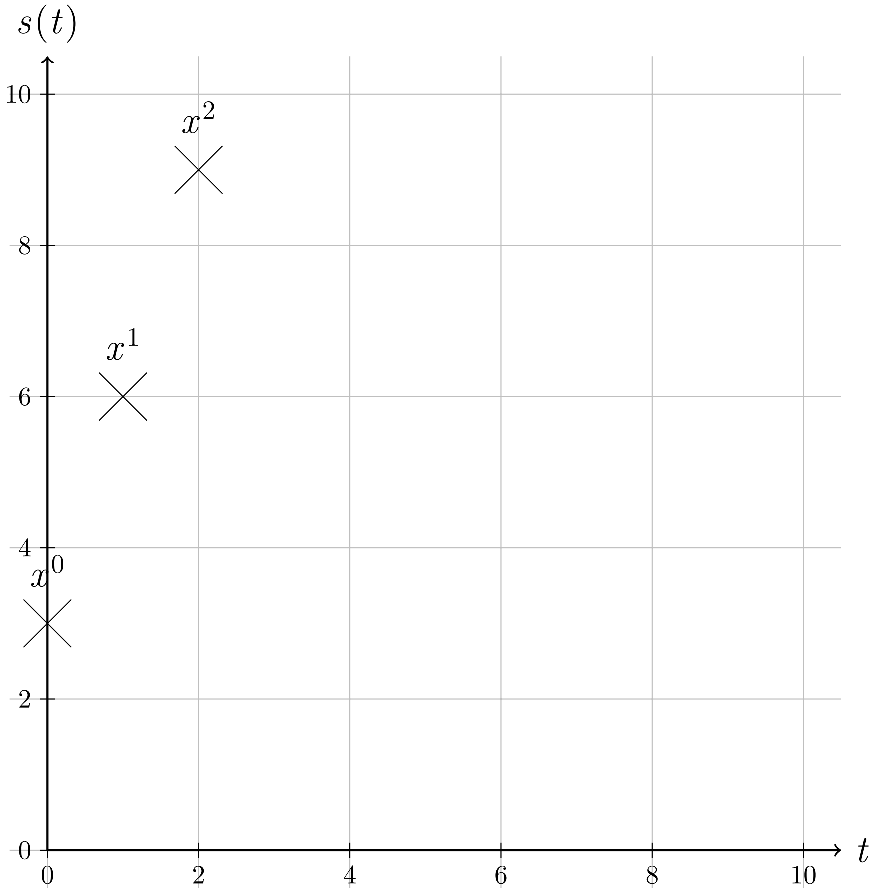
- $x^1 = \mathrm{s}(x^0) = \mathrm{s}(6) = 6$
- $x^2 = \mathrm{s}(\mathrm{s}(x^0)) = \mathrm{s}(\mathrm{s}(6)) = \mathrm{s}(6) = 6$
- ...



Vorgehensweise: Da wir c auf 6 festgelegt haben, können wir die Orbite folgendermaßen berechnen.

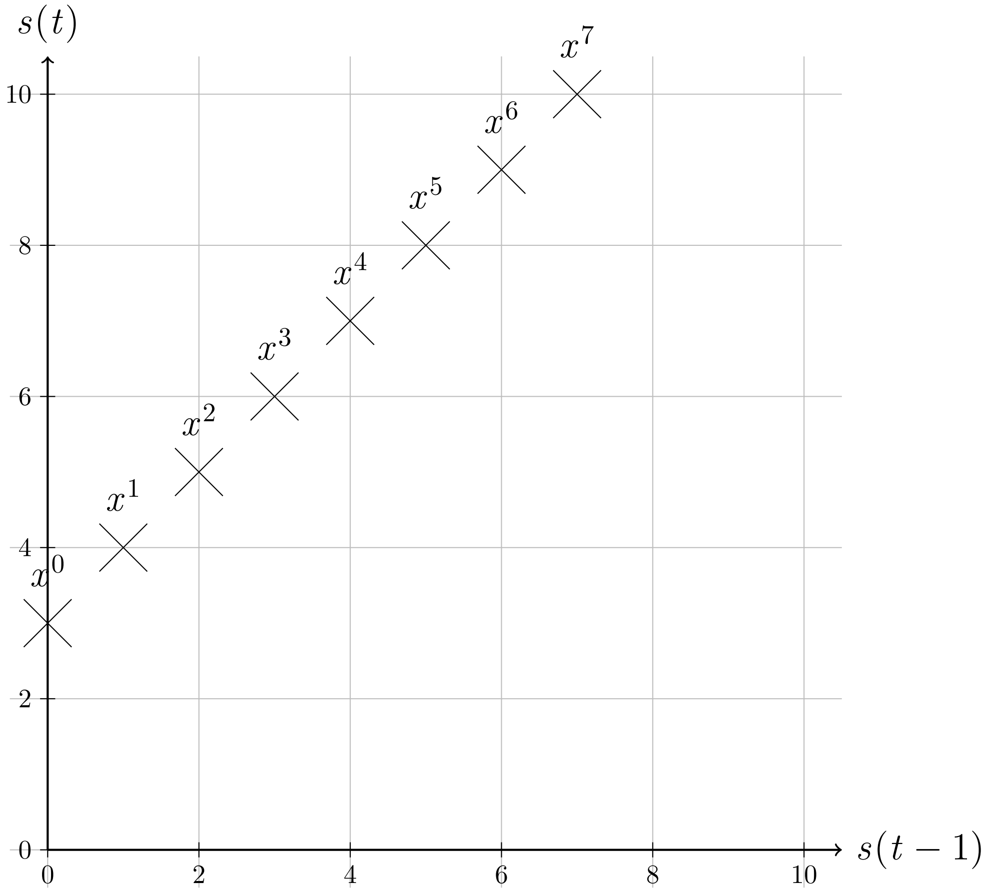
s(t-1)	s(t) = c
6	6

s(t) = c => s(t) ist immer c => s(t-1) ist immer c s(t) = s(t-1) + v mit v = 3



Vorgehensweise: Da wir v auf 3 festgelegt haben, können wir die Orbite folgendermaßen berechnen.

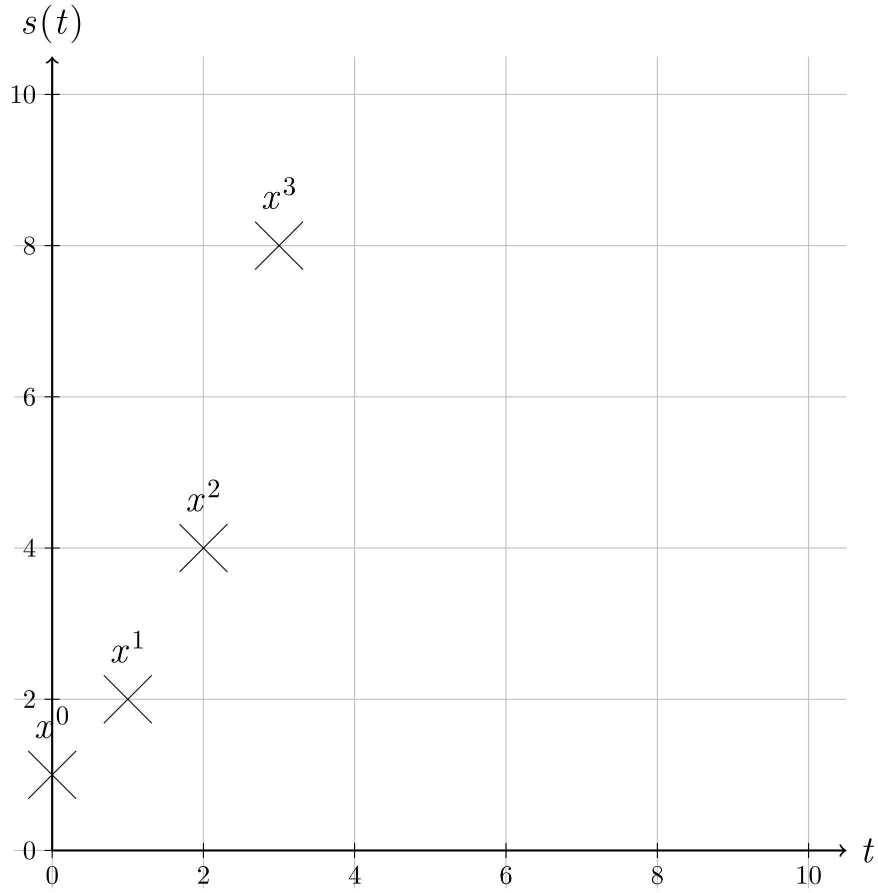
- $x^0 = 3$
- $x^1 = x^0 + 3 = 6$
- $x^2 = x^1 + 3 = 9$
- ...



Vorgehensweise: Da wir v auf 3 festgelegt haben, können wir die Orbite folgendermaßen berechnen.

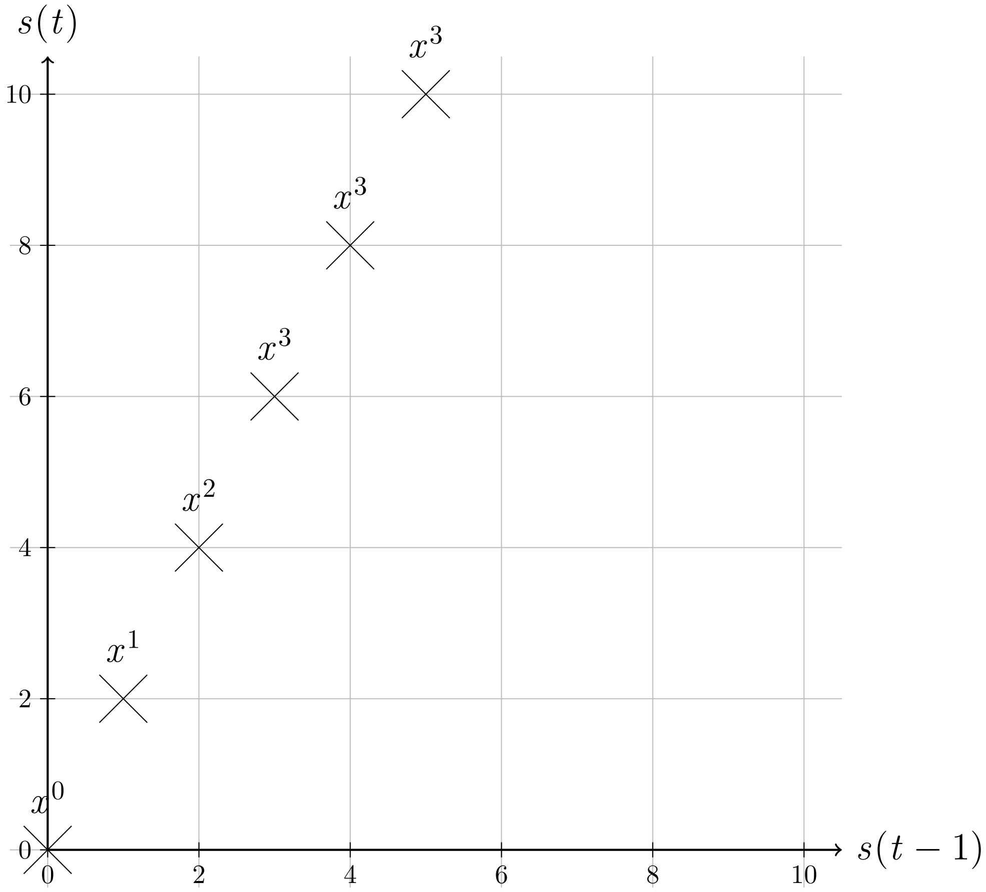
s(t-1)	s(t) = s(t-1) + 3
0	0 + 3 = 3
1	1 + 3 = 4
2	2 + 3 = 5
3	6
4	7
5	8
6	9
7	10

$$s(t) = as(t-1);\ a > 1 \text{ mit } a = 2 \text{ und } s(0) = 1$$



Vorgehensweise: Da wir a auf 2 festgelegt haben, können wir die Orbite folgendermaßen berechnen.

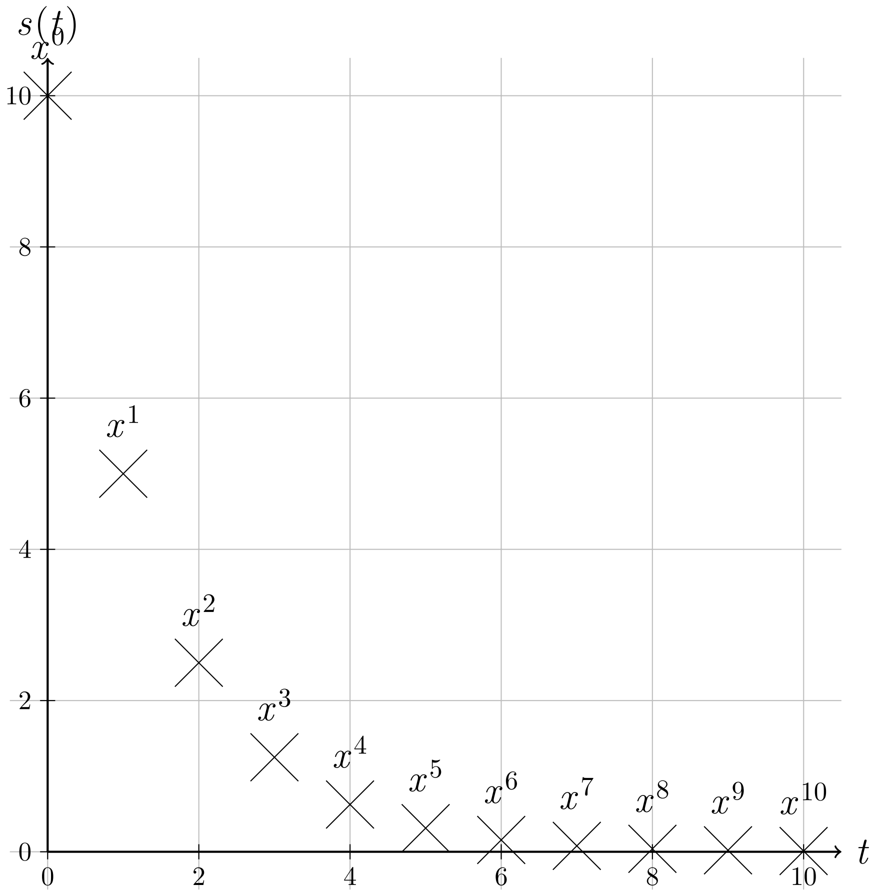
- $x^0 = 1$ (selbst definiert)
- $x^1 = s(x^0) = s(1) = 2 * 1 = 2$
- $x^2 = 2 * x^1 = 4$
- $x^3 = 2 * x^2 = 8$
- ...



Vorgehensweise: Da wir a auf 2 festgelegt haben, können wir die Orbite folgendermaßen berechnen.

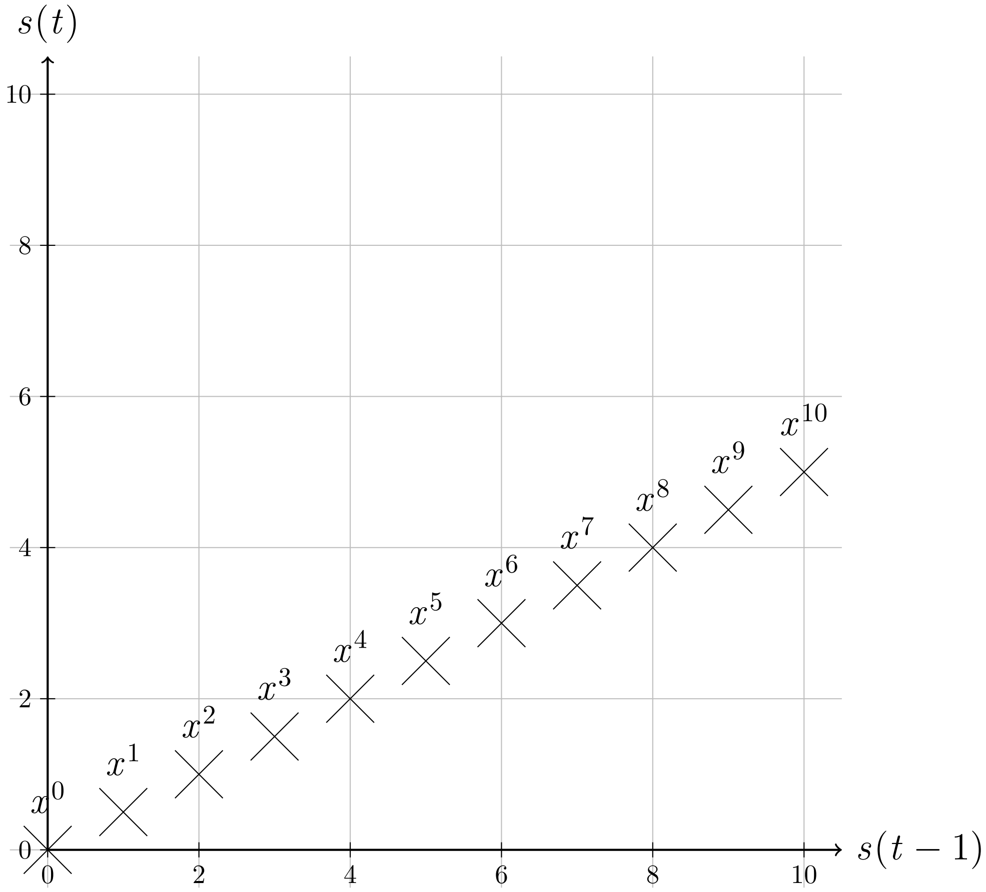
s(t-1)	s(t) = 2 * s(t-1)
0	2 * 0 = 0
1	2 * 1 = 2
2	2 * 2 = 4
3	2 * 3 = 6
4	2 * 4 = 8
5	2 * 5 = 10

s(t) = as(t-1); $0 < a < 1$ mit a = 0.5 und s(0) = 10



Vorgehensweise: Da wir a auf 0.5 festgelegt haben, können wir die Orbite folgendermaßen berechnen.

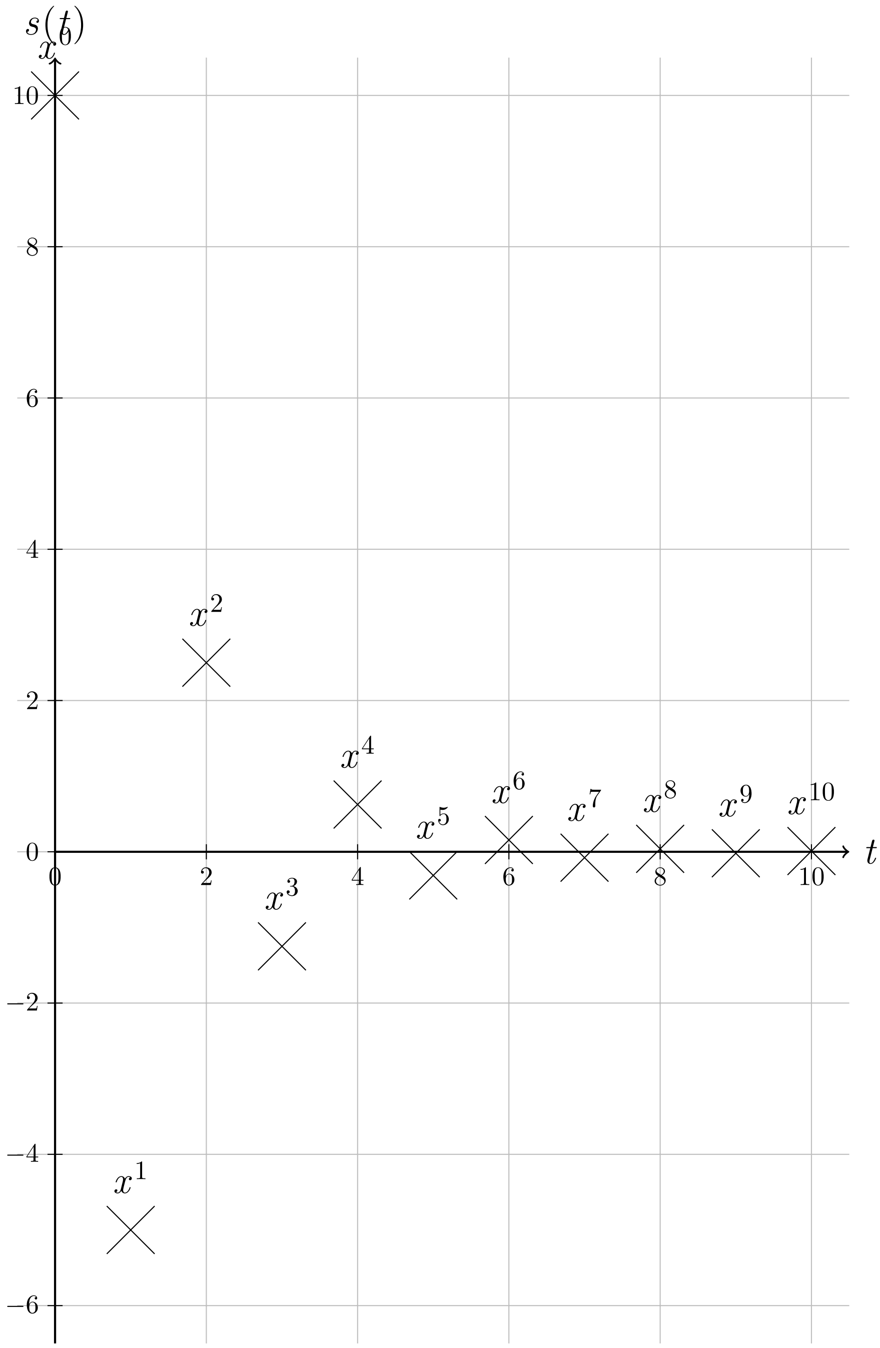
- x^0 = 10 (selbst definiert)
- x^1 = s(x^0) = s(10) = 0.5 * 10 = 5
- x^2 = 0.5 * x^1 = 2.5
- x^3 = 0.5 * x^2 = 1.25
- x^4 = 0.5 * x^3 = 0.625
- x^5 = 0.5 * x^4 = 0.3125
- x^6 = 0.5 * x^5 = 0.15625
- x^7 = 0.5 * x^6 = 0.078125
- ...



Vorgehensweise: Da wir a auf 0.5 festgelegt haben, können wir die Orbite folgendermaßen berechnen.

s(t-1)	s(t) = 2 * s(t-1)
0	0.5 * 0 = 0
1	0.5 * 1 = 0.5
2	0.5 * 2 = 1
3	0.5 * 3 = 1.5
4	0.5 * 4 = 2
5	0.5 * 5 = 2.5
6	0.5 * 6 = 3
7	0.5 * 7 = 3.5
8	0.5 * 8 = 4
9	0.5 * 9 = 4.5
10	0.5 * 10 = 5

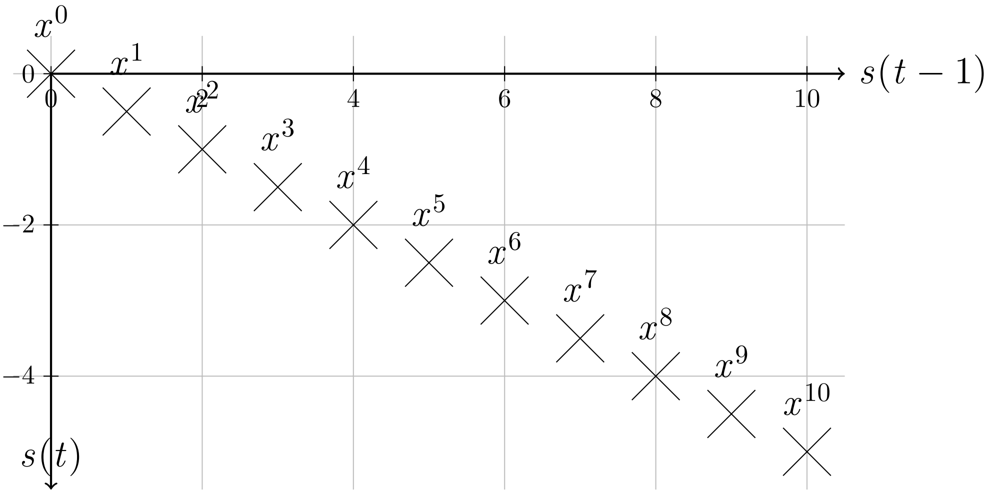
s(t) = as(t-1); $-1 < a < 0$ mit a = -0.5 und s(0) = 10



Vorgehensweise: Da wir a auf -0.5 festgelegt haben, können wir die Orbite folgendermaßen berechnen.

- x^0 = 10 (selbst definiert)
- x^1 = s(x^0) = s(10) = -0.5 * 10 = -5
- x^2 = -0.5 * x^1 = 2.5

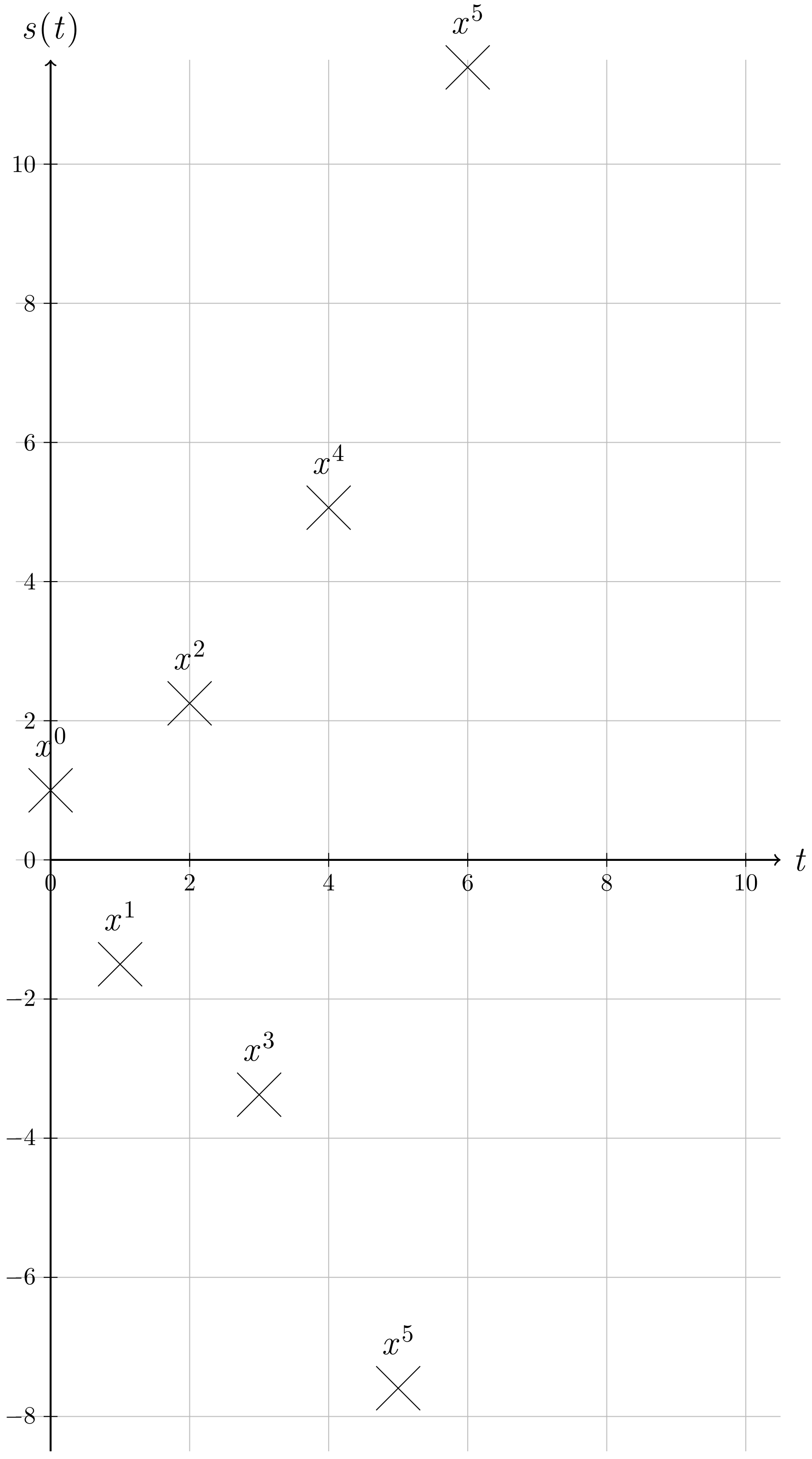
- x^3 = -0.5 * x^2 = -1.25
- x^4 = -0.5 * x^3 = 0.625
- x^5 = -0.5 * x^4 = -0.3125
- x^6 = -0.5 * x^5 = 0.15625
- x^7 = -0.5 * x^6 = -0.078125
- ...



Vorgehensweise: Da wir a auf -0.5 festgelegt haben, können wir die Orbite folgendermaßen berechnen.

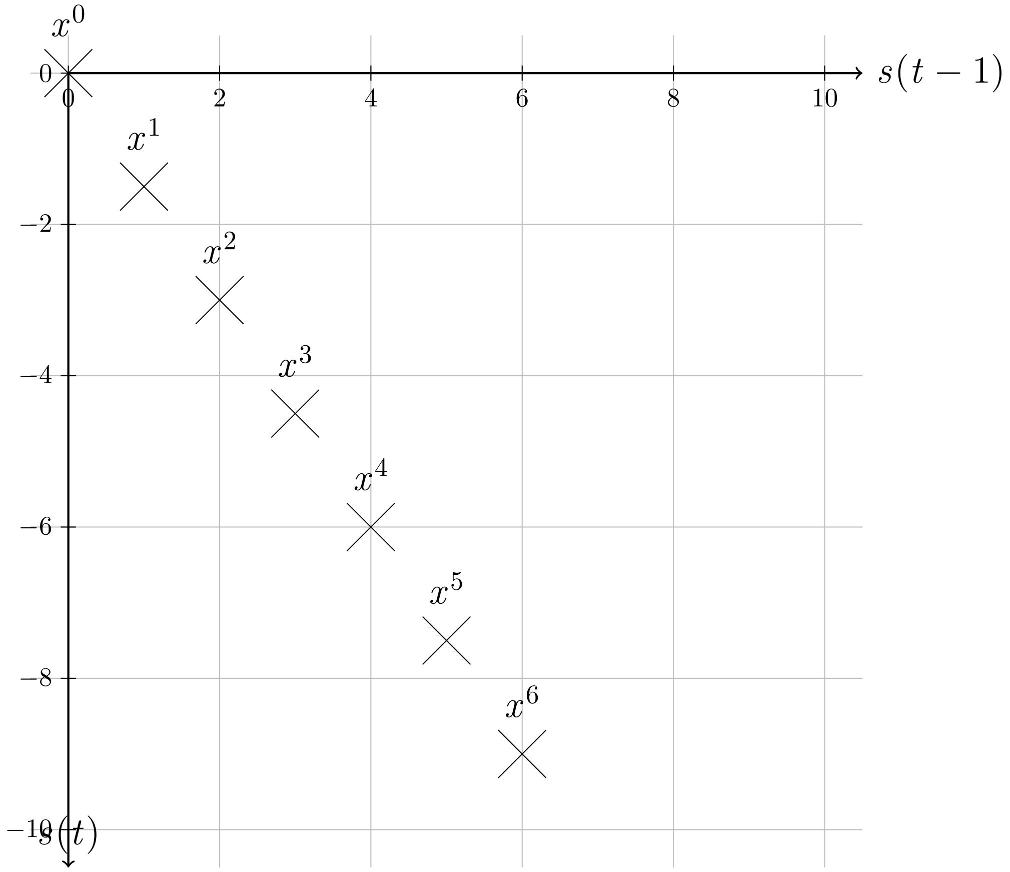
s(t-1)	s(t) = 2 * s(t-1)
0	-0.5 * 0 = 0
1	-0.5 * 1 = -0.5
2	-0.5 * 2 = -1
3	-0.5 * 3 = -1.5
4	-0.5 * 4 = -2
5	-0.5 * 5 = -2.5
6	-0.5 * 6 = -3
7	-0.5 * 7 = -3.5
8	-0.5 * 8 = -4
9	-0.5 * 9 = -4.5
10	-0.5 * 10 = -5

s(t) = as(t-1); $a < -1$ mit a = -1.5 und s(0) = 1



Vorgehensweise:
Da wir a auf -1.5 festgelegt haben, können wir die Orbite folgendermaßen berechnen.

- $x^0 = 1$ (selbst definiert)
- $x^1 = \text{s}(x^0) = \text{s}(1) = \text{-1.5 * 1} = \text{-1.5}$
- $x^2 = \text{-1.5 * } x^1 = 2.25$
- $x^3 = \text{-1.5 * } x^2 = \text{-3.375}$
- $x^4 = \text{-1.5 * } x^3 = 5.0625$
- $x^5 = \text{-1.5 * } x^4 = \text{-7.59375}$
- $x^6 = \text{-1.5 * } x^5 = 11.390625$
- ...

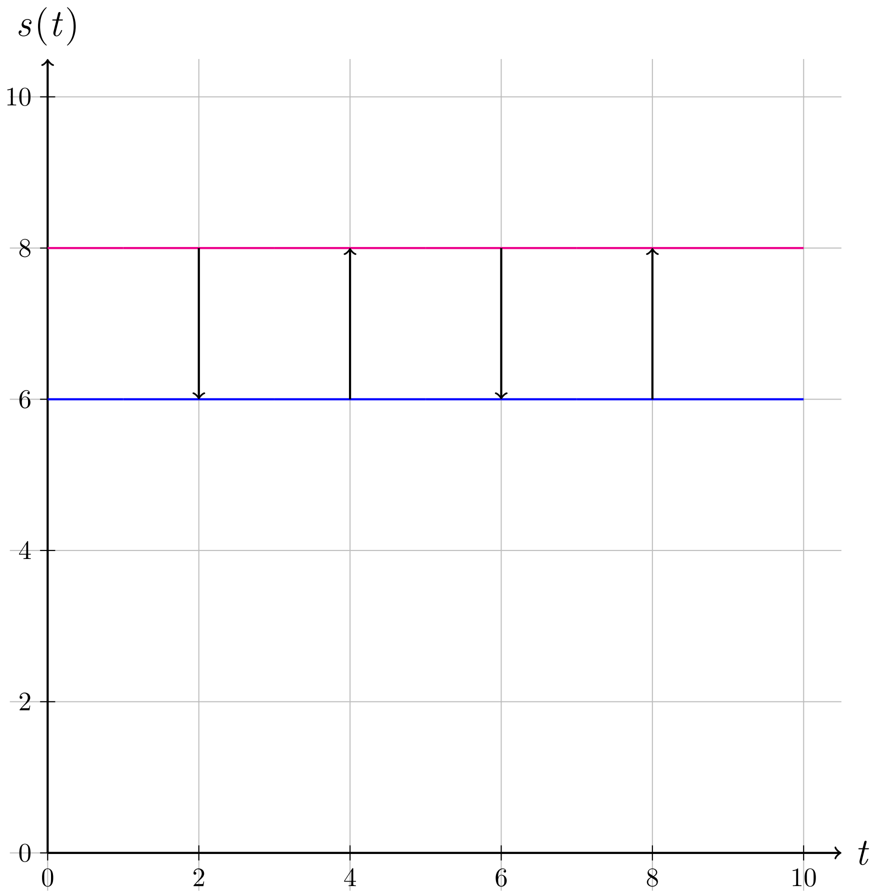


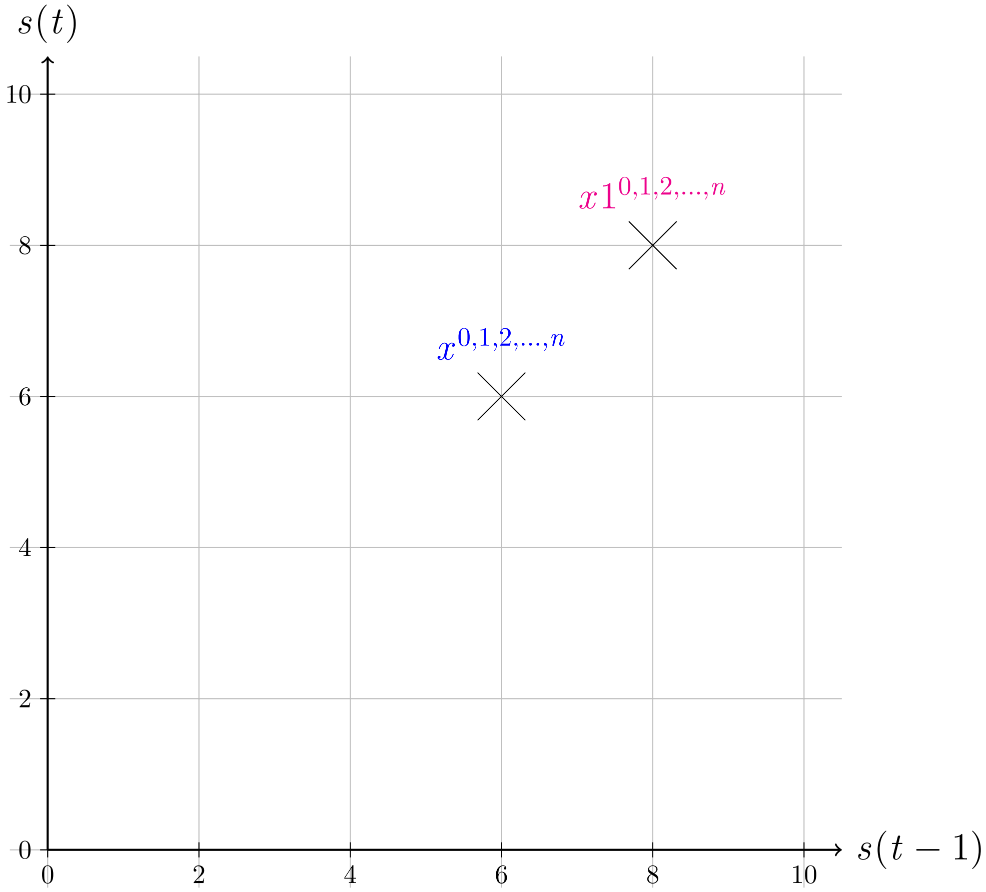
Vorgehensweise: Da wir a auf -1.5 festgelegt haben, können wir die Orbite folgendermaßen berechnen.

s(t-1)	s(t) = 2 * s(t-1)
0	-1.5 * 0 = 0
1	-1.5 * 1 = -1.5
2	-1.5 * 2 = -3
3	-1.5 * 3 = -4.5
4	-1.5 * 4 = -6
5	-1.5 * 5 = -7.5
6	-1.5 * 6 = -9

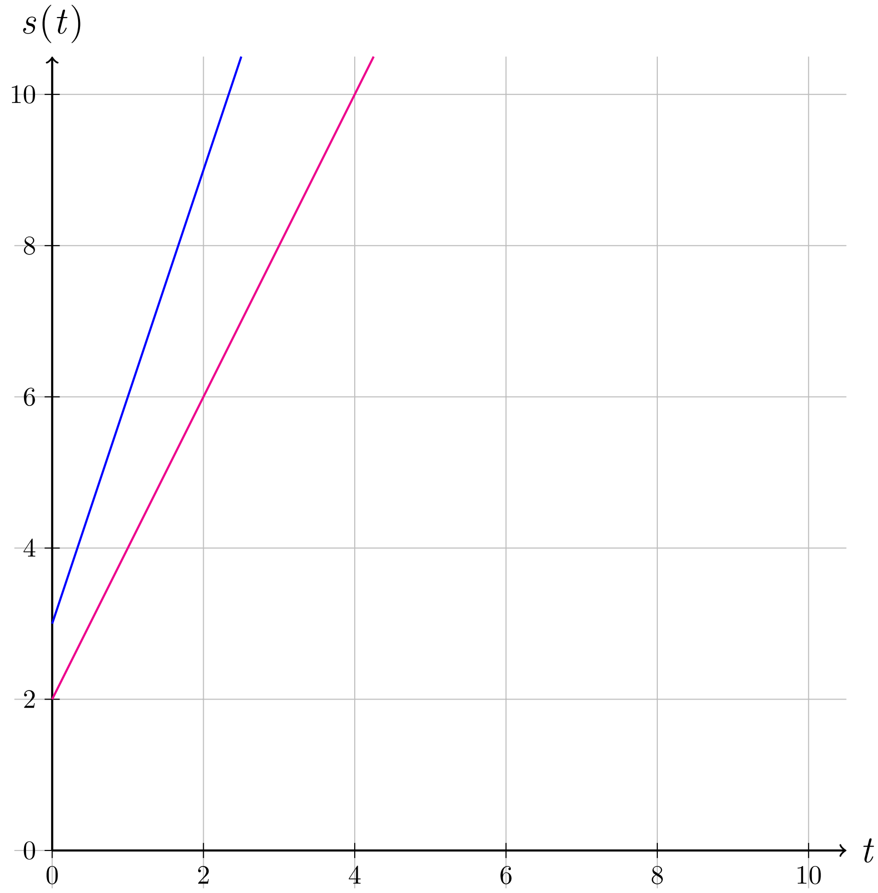
Teilaufgaben c und d

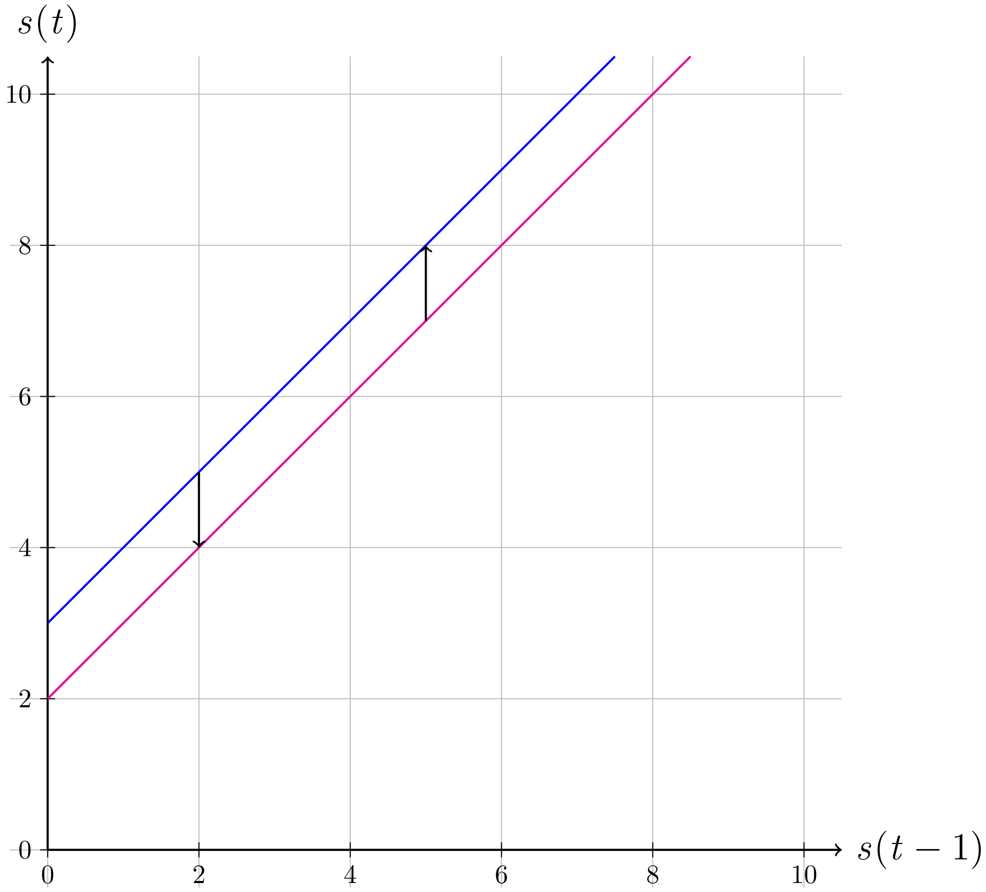
$$\text{s(t)} = \text{c mit } \text{c} = 6 \text{ und } \text{c} = 8$$




$s(t)$
10
8
6
4
2
0
$x1^{0,1,2,\ldots,n}$
$x^{0,1,2,\ldots,n}$
0
2
4
6
8
10
$s(t-1)$

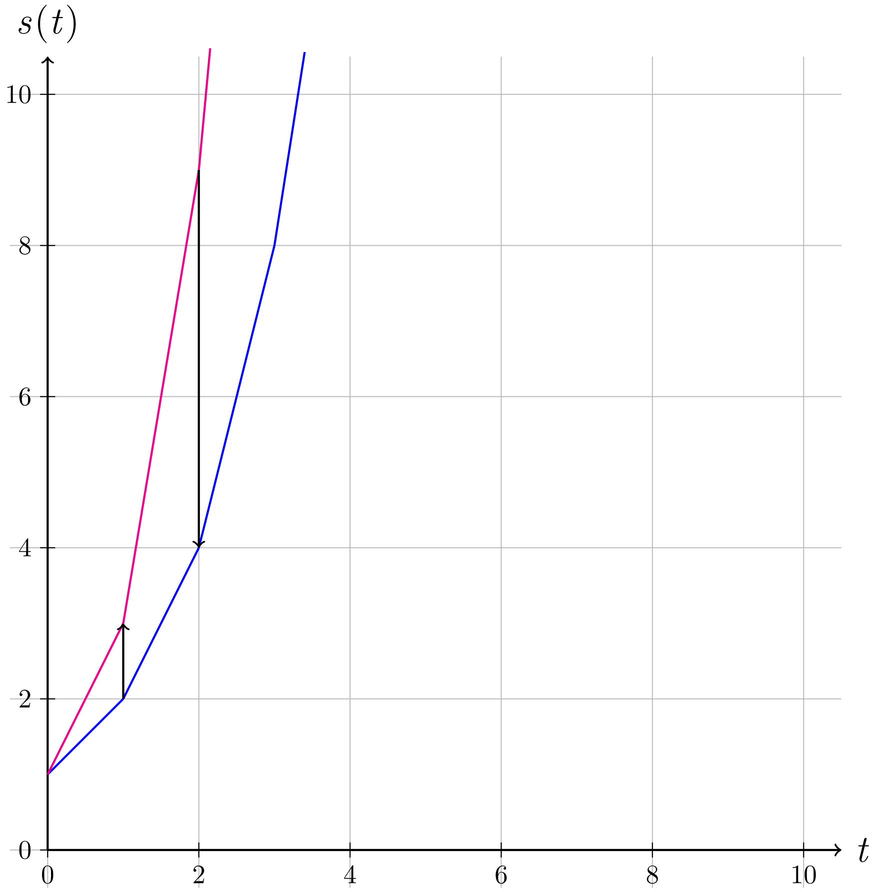
$$s(t) = s(t\text{-}1) + v \text{ mit } {\color{blue} v = 3} \text{ und } {\color{magenta} v = 2}$$

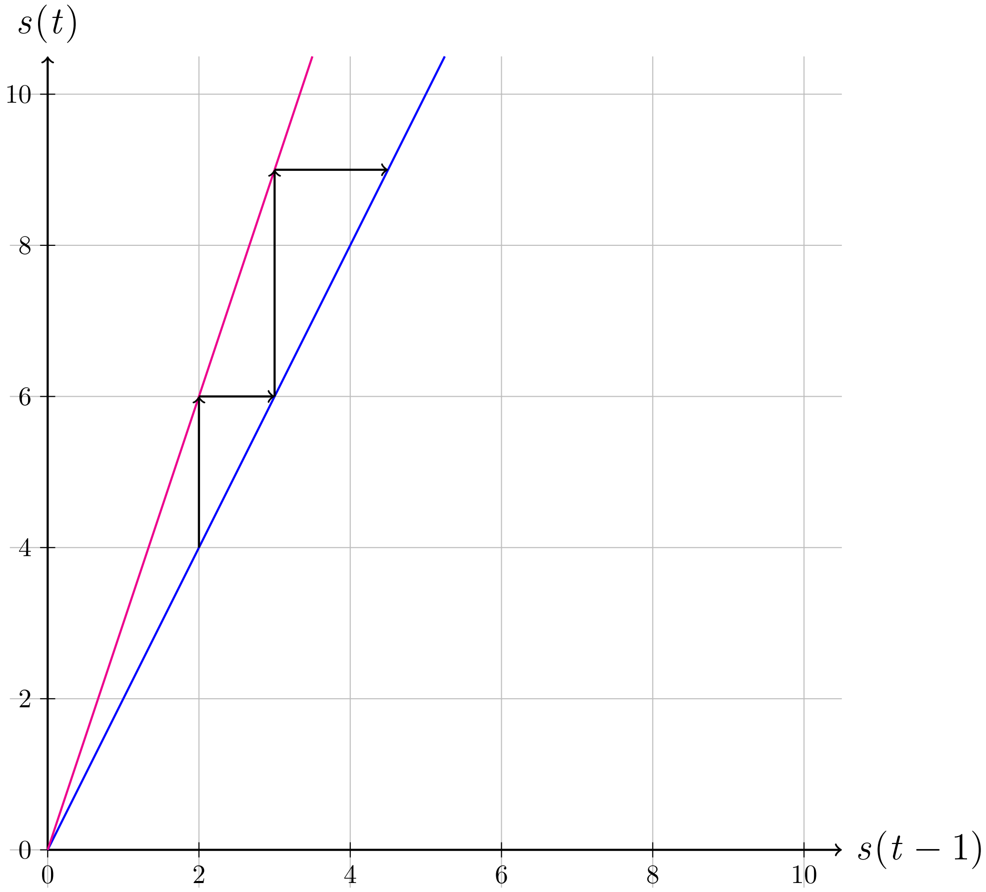




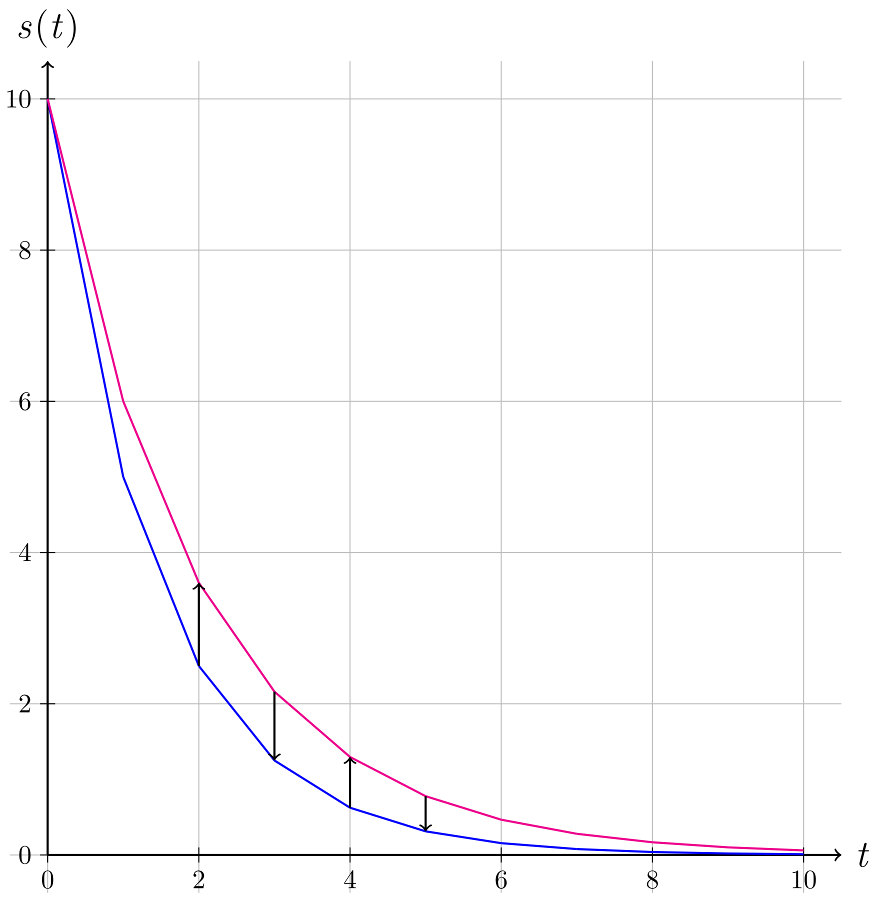
$s(t)$
10
8
6
4
2
0
0
2
4
6
8
10
$s(t-1)$

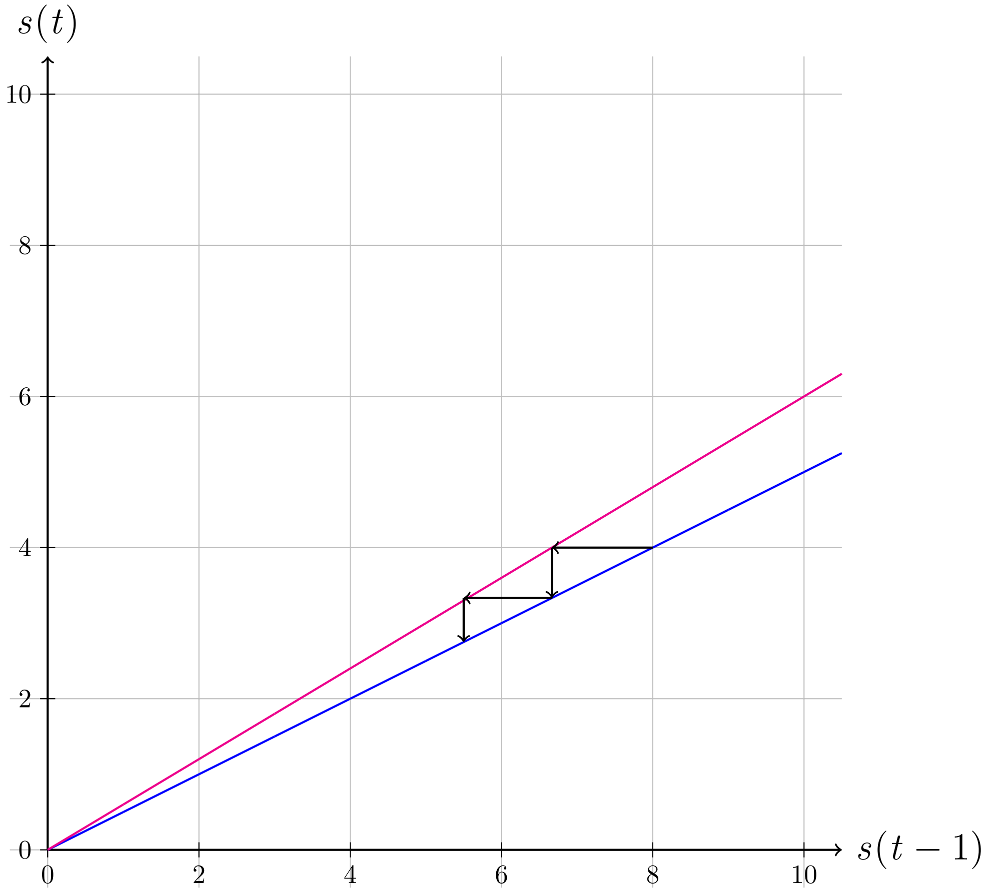
s(t) = as(t-1); $a > 1$ mit a = 2 und a = 3 und s(0) = 1



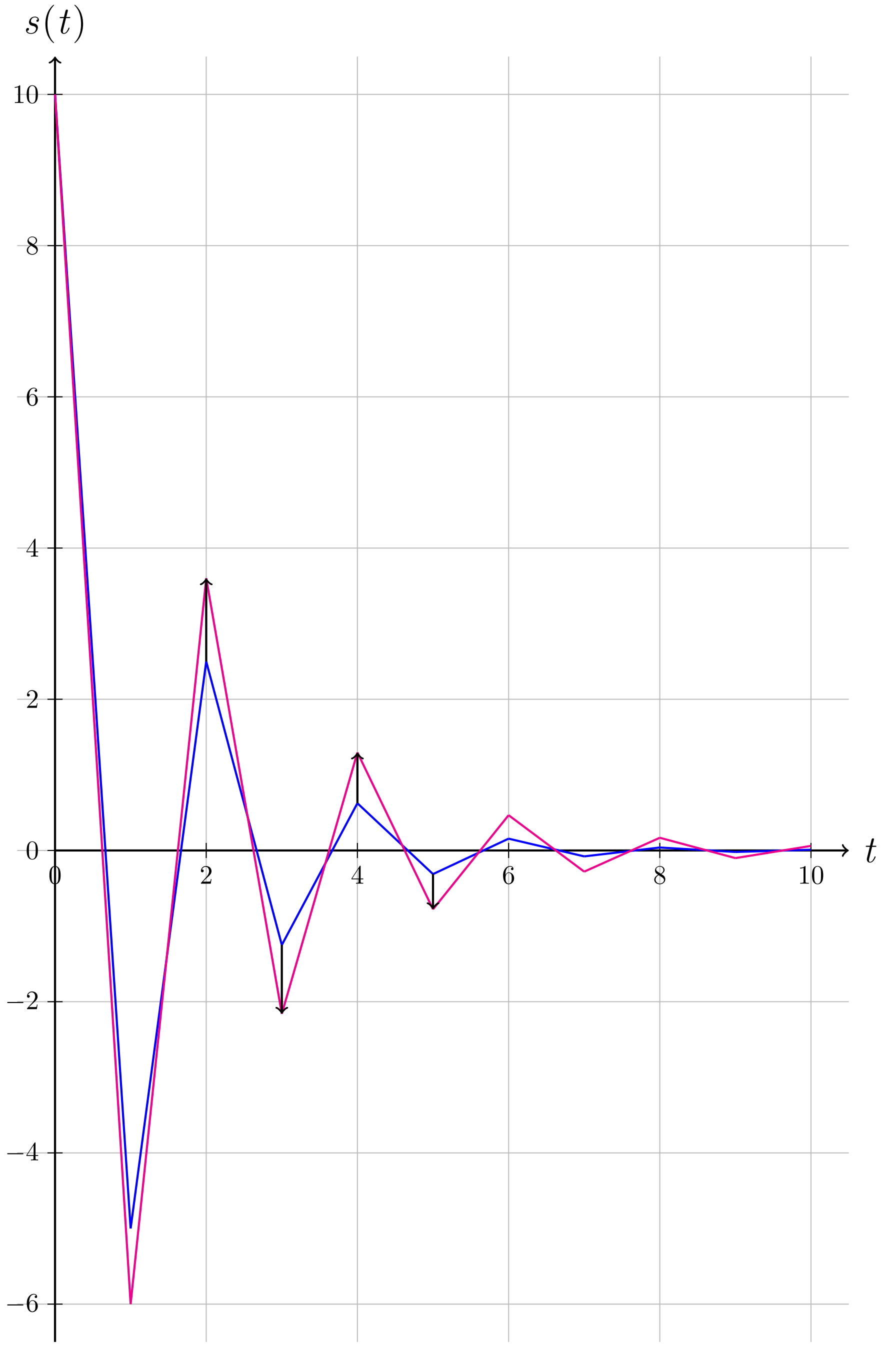

$s(t)$
10
8
6
4
2
0
0
2
4
6
8
10
$s(t-1)$

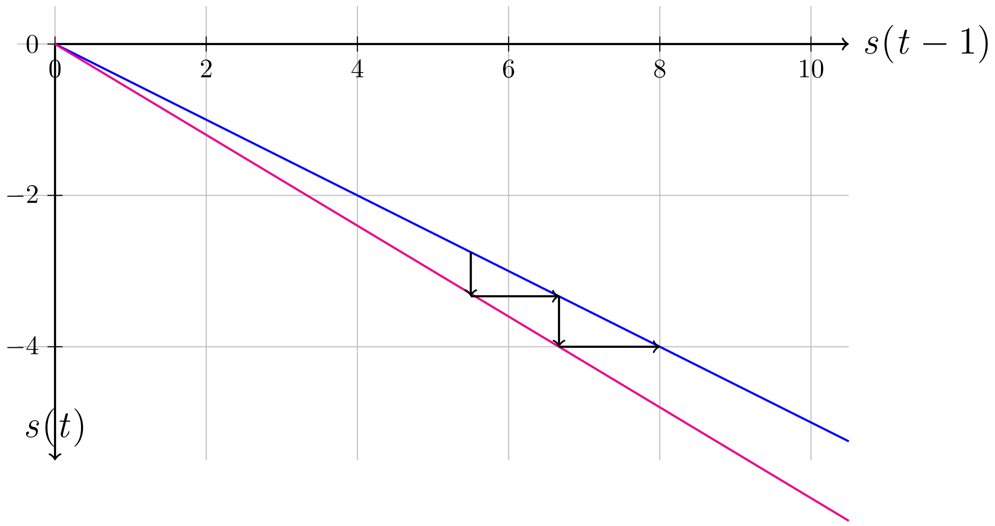
s(t) = as(t-1); $0 < a < 1$ mit a = 0.5 und a = 0.6 und s(0) = 10




$s(t)$
10
8
6
4
2
0
0
2
4
6
8
10
$s(t-1)$

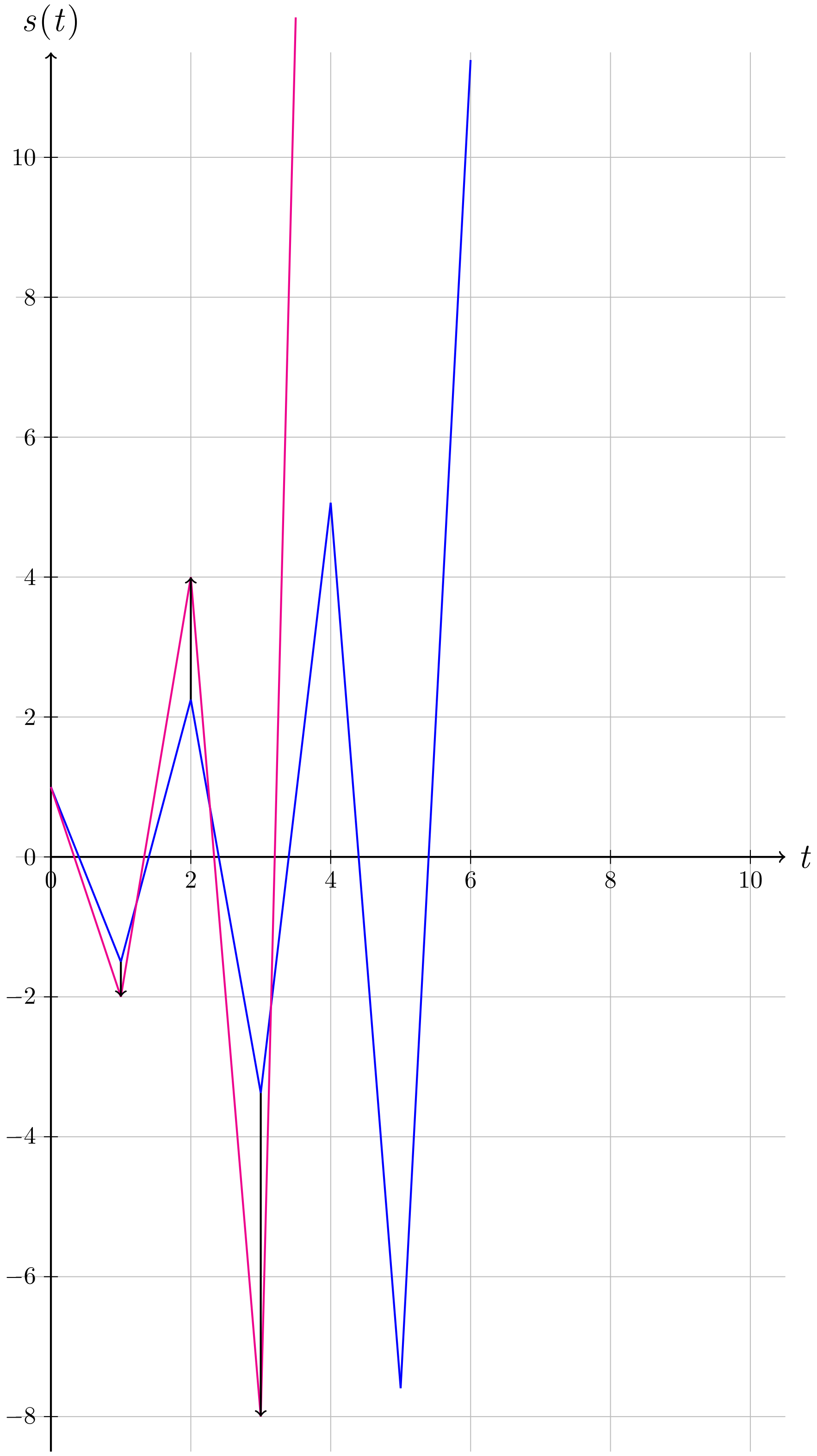
s(t) = as(t-1); $-1 < a < 0$ mit a = -0.5 und a = -0.6 und s(0) = 10

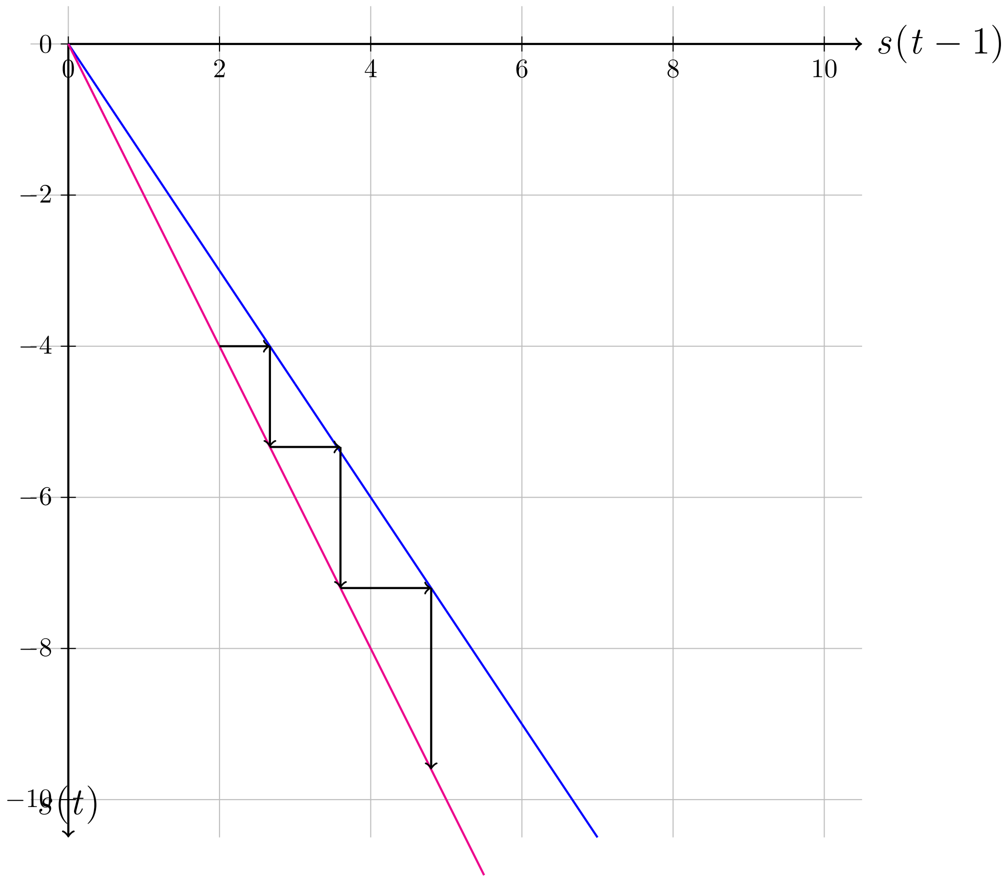




0
2
4
6
8
10
−2
−4
$s(t-1)$
$s(t)$

s(t) = as(t-1); $a < -1$ mit a = -1.5 und a = -2 und s(0) = 1





2 Nichtlineare Iterierte Abbildungen

Teilaufgabe a)

Fixpunkte von

$$x_{n+1} = f(x_n) = ax_n(1 - \frac{x_n}{K})$$

ergeben sich aus $f(x^*) = x^* \Rightarrow \begin{cases} x^* = ax^*(1 - \frac{x^*}{K}) \rightarrow x^* = 0 \\ \text{für} x^* \neq 0 \rightarrow 1 = a - \frac{ax^*}{K} \rightarrow x^* = \frac{(a-1)K}{a} \end{cases}$

Teilaufgabe b)

Damit für $a = 1,01$ ein Fixpunkt entsteht, muss:

$$K = \frac{ax^*}{a-1} = \frac{1,01 \cdot 7000}{0,01} = 707000$$

gewählt werden.

Teilaufgabe c)

$x_{n+1} = 3,3x_n(1 - \frac{x_n}{K}) \Longrightarrow$

$\boldsymbol{n}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\boldsymbol{x_n}$	0,90	0,297	0,689	0,707	0,684	0,713	0,675	0,724	0,659	0,742	0,632