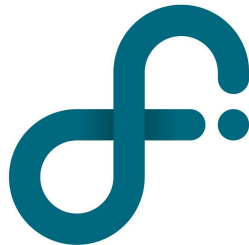


UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE FÍSICA



LABORATORIO 3

**Medición del tiempo característico de circuitos
RC, RL y observación de los modos de un circuito
RCL utilizando una fuente de señal cuadrada**

Autores:
ANDREU, Gonzalo
MALPARTIDA, Bryan
PUGLIESE, Facundo

FECHA

Resumen

1. Introducción

Para llevar a cabo el objetivo de caracterizar los circuitos RC, RL y RCL es necesario definir los siguientes conceptos.

Si consideramos un circuito cerrado de una única malla compuesto por una fuente de alimentación constante V_0 , una resistencia R y un capacitor C , la ecuación que rige la evolución del sistema es $V_0 = \frac{q(t)}{C} + \frac{dq(t)}{dt}R$ donde $q(t)$ es la carga eléctrica del sistema. Entonces, si tomamos como condición inicial $q(0) = 0$ la solución de la ecuación es:

$$q(t) = V_0 C (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (1)$$

Y al ser $q(t)$ una exponencial creciente se denomina a este fenómeno como la carga del capacitor.

Ahora si, utilizando una *llave ideal*, se corta la fuente V a tiempo t_0 la nueva solución del sistema es de la forma:

$$q(t - t_0) = V_0 C (e^{\frac{t_0}{RC}} - 1) e^{-\frac{t}{RC}} \quad (2)$$

Entonces se define a $\tau_{RC} = RC$ tiempo característico del circuito. Por lo tanto, si $\tau_{RC} < t_0$ se puede observar el efecto de descarga del capacitor pues $q(t - t_0)$ es una exponencial decreciente.

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{V_0}{L} e^{-\frac{Rt}{L}} \quad (3)$$

$$\frac{dI(t - t_0)}{dt} = -\frac{V_0}{L} (e^{\frac{Rt_0}{L}} - 1) e^{-\frac{Rt}{L}} \quad (4)$$

$$q(t) = A e^{-\alpha t + \beta t} + B e^{-\alpha t - \beta t} \quad (5)$$

$$\alpha = \frac{R}{2L}, \beta^2 = \left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}$$

$$\text{Si } \beta^2 < 0$$

$$q(t) = A e^{-\alpha t} \sin(\sqrt{-\beta^2} t + \phi_0)$$

$$\text{Si } \beta^2 = 0$$

$$q(t) = (A + Bt) e^{-\alpha t}$$

$$\text{Si } \beta^2 > 0 \quad q(t) = A e^{-\alpha t} \sinh(\beta t + \phi_0)$$

2. Desarrollo experimental

2.1. Circuito RC

La primera parte del trabajo consistió en caracterizar un circuito RC. Para ello se montó un circuito utilizando un generador de funciones ε , una resistencia variable por décadas R y un capacitor $C = (100 \pm 0,2) nF$, conectándose en serie para formar un circuito cerrado de una única malla como se ve en la **Figura 1**.

El objetivo fue medir la carga y descarga del capacitor C , y la corriente sobre la resistencia R para obtener el tiempo característico τ_{RC} del circuito determinado por (**ecuaciones de RC**).

Con el fin de recrear el efecto de la *llave ideal* se programó la fuente para que emitiera una señal cuadrada con un voltaje máximo $\varepsilon = (2,00 \pm 0,02) V$ y un voltaje mínimo nulo cuya frecuencia era variable.

Para medir la diferencia de tensión se conectó un osciloscopio en paralelo al elemento que se quería medir, como se puede ver en la **Figura 1** donde muestra el caso de la resistencia. A su vez, el generador de funciones estaba conectado al osciloscopio para poder visualizar la forma funcional de la fuente. Se lo utilizó además como *trigger externo* para poder apreciar que tanto su señal como la caída de potencial en el elemento se encontraban en fase. Y utilizando un software de recopilación de datos se pudo importar a una computadora las mediciones registradas por el osciloscopio para ser analizadas posteriormente. Este proceso se realizó para distintos valores de R , considerándose despreciable la resistencia aportada por C .

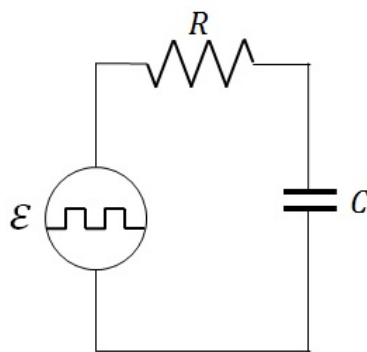


Figura 1: Circuito RC con una fuente de onda cuadrada

2.2. Circuito RL

De manera análoga, la siguiente parte del trabajo consistió en caracterizar un circuito RL. En este caso se reemplazó el capacitor C por una inductancia $L = (1,000 \pm 0,002)H$. La forma del circuito se puede ver en la **Figura 2**.

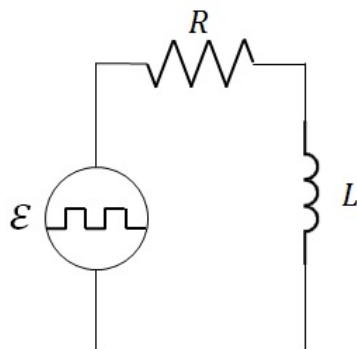


Figura 2: Circuito RL con una fuente de onda cuadrada

El método utilizado para obtener el tiempo característico τ_{RL} , determinado por (**Ecuaciones de RL**), fue el mismo que para el circuito RC exceptuando el voltaje entregado por la fuente cuyo valor fue $\varepsilon = (8,00 \pm 0,08)V$ y la resistencia de la inductancia $R_L = (294 \pm 3)\Omega$, que en este caso no pudo ser despreciada, debió sumarse a la resistencia R pues estaba en serie.

2.3. Circuito RCL

Por ultimo, se buscó estudiar el comportamiento de un circuito RCL. Para ello se montó un circuito cerrado que tenía en serie la fuente programable ε , la resistencia variable por decadas R , una inductancia variable L y un capacitor C como muestra la **Figura 3**.

Para caracterizar el circuito, la ecuación (**ecuaciones de RCL**) determina distintos *comportamientos* que dependen de los parámetros que se usen.

Utilizando el método de adquisición de datos ya explicado, se midió la diferencia de potencial sobre la resistencia. Esta diferencia de potencial era generada por una señal cuadrada de $(3,08 \pm 0,04)V$.

Por lo tanto se estudió el circuito para disintos valores de R, C y L con el fin de encontrar cada uno de estos *comportamientos*. Para ello, se fijaban dos parametros y se buscaba que el tercero cumpliese las condiciones (**discriminante del polinomio que sale de la ecuacion diferencial**) que determinan cada *comportamiento*.

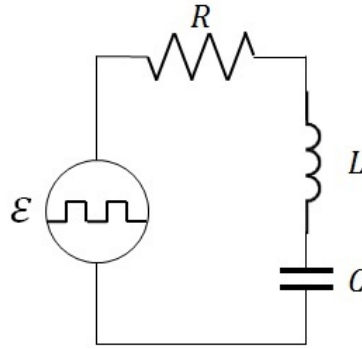


Figura 3: Circuito RCL con una fuente de onda cuadrada

3. Resultados

3.1. Circuito RC

3.2. Circuito RL

3.3. Circuito RCL

4. Conclusiones

5. Apéndice

A la hora de analizar largas tiras de datos, los Intervalos de Confianza son herramientas muy útiles. Matemáticamente, si X_1, \dots, X_n son variables aleatorias idénticamente distribuidas tal que su esperanza $E(X_i) = \mu$ y varianza $V(X_i) = \sigma^2 > 0$ es posible construir un intervalo de confianza del promedio $\bar{X}_n = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n}$. Físicamente, asumiendo las X_1, \dots, X_n como distintas mediciones de una misma magnitud X , es posible considerar $\mu = X$ y construir un intervalo de confianza para este parámetro \bar{X}_n . Sin embargo, es necesario conocer la distribución $F(\theta_1, \dots, \theta_m)$ tal que $X_i \sim F(\theta_1, \dots, \theta_m)$.

Se define $(a; b)_\theta$ como un intervalo de confianza de nivel $1 - \alpha$ para un parámetro θ según:

$$P(\theta \in (a; b)_\theta) = 1 - \alpha \quad (6)$$

Según el Teorema Central del Límite, cuando $n \rightarrow \infty$ resulta $\bar{X}_n \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ donde N representa la distribución normal cuya función de densidad se define como:

$$f_N(x) := \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \quad (7)$$

De esta forma, a la hora de estimar μ es posible, asumiendo n suficientemente grande, utilizar un intervalo de confianza sobre la variable aleatoria \bar{X}_n . En particular, definiendo la variable aleatoria $Z \sim N(0, 1)$, vale asintóticamente que $\bar{X}_n = \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z$ de forma tal que $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz = P(Z < x)$. Por otro lado, definiendo z_p tal que $\Phi(z_p) = 1 - p$ y recordando que $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ es posible, a través de (6), definir un intervalo de confianza $(-z_{\frac{\alpha}{2}}; z_{\frac{\alpha}{2}})$:

$$P(|Z| < z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha \quad (8)$$

De esta forma, asumiendo conocida la varianza $V(\bar{X}_n) = \sigma^2$ y utilizando que $Z = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ se obtiene utilizando (8) un intervalo de confianza de nivel $1 - \alpha$ para μ :

$$I_\mu = (\bar{x}_n - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x}_n + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) \quad (9)$$

Donde $\bar{x}_n = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}$ con x_i el valor obtenido en la i -ésima medición. Dado que σ no es un parámetro conocido, es posible simplemente aproximarla por el *desvío estandar muestral* tal que $\sigma^2 \simeq \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x}_n)^2}{n-1}$. Definiendo σ de esta forma, se puede calcular un intervalo de confianza de nivel $1 - \alpha$ de la forma:

$$\mu_\alpha = \bar{x}_n \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \simeq \bar{x}_n \pm \frac{z_{\alpha/2}}{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2} \quad (10)$$

6. Referencias

[1] Frank S. Crawford, *Berkeley physics course 3: Ondas*, 1994, Editorial Reverte S.A.