

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE FÍSICA



LABORATORIO 3

Transitorio y tiempo característico de circuitos

Autores:

ANDREU, Gonzalo
MALPARTIDA, Bryan
PUGLIESE, Facundo

17 de Febrero de 2016

Resumen

El objetivo del siguiente trabajo fue caracterizar circuitos RC, RL y RCL.

Para los dos primeros casos, los circuitos RC y RL, se buscó determinar el tiempo característico de cada uno variando los parámetros de cada sistema. Además de poder observar los fenómenos particulares en estos sistemas, como la carga y descarga del capacitor y la disminución de la corriente debido a la inductancia, utilizando una fuente de alimentación que emitía señales cuadradas y osciloscopio como instrumento de medición.

Por otro lado, el estudio del circuito RCL se centró en la observación de los comportamientos que tiene el mismo para distintos parámetros del sistema. Para ellos se obtenían teóricamente los valores necesarios de cada parámetro para luego *settear* los elementos del circuito y comprobar que la evolución del sistema cumpliera el modelo teórico. Dichas observaciones se obtuvieron nuevamente utilizando una fuente de señal cuadrada y un osciloscopio.

Finalmente, el método resultó eficiente a la hora de comprobar las ecuaciones referidas al circuito RC y, en menor medida, al circuito RL. En el caso del circuito RCL, pudieron analizarse los casos extremos de comportamiento, pero no el comportamiento borde debido a lo fino del mismo.

1. Introducción

Para llevar a cabo el objetivo de caracterizar los circuitos RC, RL y RCL es necesario comprender como responden a distintos tipos de combinaciones (capacitor C , resistencia R e inductancia L) y fuentes de voltaje. Recordando que $\frac{dq(t)}{dt} = I(t)$ donde $q(t)$ es la carga en el capacitor C , la caída de potencial en cada elemento se obtiene a partir de:

$$\begin{aligned}\Delta V_C &= \frac{q}{C} \\ \Delta V_R &= IR \\ \Delta V_L &= \frac{dI}{dt}\end{aligned}\tag{1}$$

Considerando un circuito cerrado de una única malla compuesto por una fuente de voltaje constante V_0 , una resistencia R y un capacitor C , las ecuaciones anteriores dictan que la ecuación que rige la evolución del sistema es $V_0 = \frac{q(t)}{C} + IR$ [1]. Entonces, tomando como condición inicial $q(0) = 0$ la solución de la ecuación es:

$$q(t) = V_0 C (1 - e^{-\frac{t}{RC}})\tag{2}$$

Y al ser $q(t)$ una exponencial creciente se conoce a este fenómeno como la *carga* del capacitor.

Ahora si, utilizando una *llave ideal*, se corta la fuente V a tiempo t_0 la nueva solución del sistema es de la forma:

$$q(t - t_0) = V_0 C (1 - e^{-\frac{t_0}{RC}}) e^{-\frac{t}{RC}}\tag{3}$$

Entonces se define a $\tau_{RC} = RC$ *tiempo característico* del circuito, dado que para $t > \tau_{RC} = RC$ resulta $e^{-\frac{t}{RC}} < e^{-1} < 0,40$ por lo que el término exponencial se vuelve pequeño y virtualmente despreciable. Por lo tanto, si $\tau_{RC} < t_0$ se puede observar el efecto de *descarga* del capacitor pues $q(t - t_0)$ es una exponencial decreciente. Para la corriente $I(t) = \frac{dq(t)}{dt}$, las ecuaciones que describen su comportamiento en cada caso son:

$$I(t) = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}\tag{4}$$

$$I(t - t_0) = \frac{V_0}{R} (e^{\frac{t_0}{RC}} - 1) e^{-\frac{t}{RC}}\tag{5}$$

Por otro lado, si en el circuito anterior se reemplaza al capacitor C por una inductancia L , la noción de carga desaparece y queda la de corriente $I(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ en una ecuación diferencial de la forma $V_0 = L \frac{dI(t)}{dt} + R I(t)$ [1]. La solución para el caso de $V = V_0$ es muy similar a la anterior:

$$I(t) = \frac{V_0}{R} (1 - e^{-\frac{Rt}{L}})\tag{6}$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{V_0}{L} e^{-\frac{Rt}{L}}\tag{7}$$

En este caso, el *tiempo característico* del circuito es $\tau_{RL} = \frac{L}{R}$ (y cumple las mismas propiedades que para el caso del RC) y puede verse que la corriente I *aumenta* hasta alcanzar su valor ideal (el valor de la corriente en un circuito sin inductancia).

Cuando se corta la fuente V a tiempo t_0 se tiene el caso en que la corriente I *disminuye* hasta volverse nula. En esta situación, la solución del sistema es:

$$I(t - t_0) = \frac{V_0}{R} (1 - e^{-\frac{Rt_0}{L}}) e^{-\frac{Rt}{L}}\tag{8}$$

$$\frac{dI(t-t_0)}{dt} = -\frac{V_0}{L}(1 - e^{-\frac{Rt_0}{L}})e^{-\frac{Rt}{L}} \quad (9)$$

Un circuito más complicado puede generarse combinando los dos anteriores; una fuente de voltaje constante V_0 , una resistencia R , un capacitor C y una inductancia L . En este caso, la ecuación diferencial que rige la dependencia temporal de la carga $q(t)$ resulta [1]:

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2}L + \frac{dq(t)}{dt}R + \frac{q(t)}{C} = V_0 \quad (10)$$

cuyo polinomio característico es $\lambda^2.L + \lambda.R + \frac{1}{C} = 0$ que tiene como raíces $\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{(\frac{R}{2L})^2 - \frac{1}{LC}}$ donde $\omega_o^2 = \frac{1}{LC} > 0$ se denomina *frecuencia natural* del circuito. Esta frecuencia $\omega_o^2 = \frac{1}{LC}$ es la frecuencia de oscilación del circuito en el caso en que no existe componente disipativo ($R = 0$). Dependiendo del valor del discriminante $\omega^2 = \beta^2 - \omega_o^2$ donde $\beta = \frac{R}{2L} > 0$ las soluciones del polinomio característico serán reales, real doble o complejas no reales y la función $q(t)$ tendrá un comportamiento sobreamortiguado, subamortiguado o amortiguado, respectivamente.

Para el caso $\beta < \omega_o$ resulta $\omega^2 < 0$ y por lo tanto las raíces del polinomio característico son complejas y distintas. Esto conlleva a una solución de la forma:

$$q(t) = a.e^{-\beta t}.\cos(|\omega|(t + \phi)) + V_0C \quad (11)$$

donde a y ϕ se obtienen a través de las condiciones iniciales del sistema y $|\omega| = \sqrt{\omega_o^2 - \beta^2}$. Este es el caso del *oscilador amortiguado*.

Para el caso $\beta = \omega_o$ se tiene $\omega^2 = 0$ y la raíz del polinomio característica resulta doble y única. Esto conlleva a una solución de la forma:

$$q(t) = e^{-\beta t}(A + B.t) + V_0C \quad (12)$$

donde A y B nuevamente se obtienen a través de las condiciones iniciales del sistema. Este es el caso límite conocido como *oscilador subamortiguado*.

Finalmente, para el caso $\beta > \omega_o$ es $\omega^2 > 0$ y las raíces del polinomio característico son reales y distintas. Esto conlleva a una solución exponencial de la forma:

$$q(t) = e^{-\beta t}[C.\cosh(\omega t) + D.\sinh(\omega t)] \quad (13)$$

donde C y D se obtienen a través de las condiciones iniciales del sistema. Este caso corresponde al *oscilador sobreamortiguado*, dado que al ser una combinación lineal de exponenciales decrecientes ($\beta > \omega > 0$) nunca puede completarse una oscilación.

Si, como en el caso de los circuitos RC y RL, se cambia el voltaje con una *llave ideal* a tiempo t_0 , dado que todos los comportamientos cumplen $q(t \rightarrow \infty) = 0$, el período donde $V = 0$ resulta en una solución $q(t) = 0$ pues tanto las condiciones iniciales como la inhomogeneidad de la ecuación diferencial son nulas. Si la señal vuelve a adquirir el valor $V = V_0$ a tiempo $2t_0$, se recuperan las soluciones anteriores. Sin embargo, para esto se requiere un tiempo $t_0 > \beta$ para asegurarse de que la carga $q(t)$ decaiga lo suficiente.

2. Desarrollo experimental

Dado que toda la teoría previa se apoya sobre el concepto de *llave ideal*, un generador de funciones capaces de generar ondas cuadradas debió ser utilizado para emular esta característica (variación instantánea de voltaje). Este generador es capaz de emitir frecuencias con un error relativo del 0,01 % en un rango entre 1 μ Hz y 5 MHz cuyo voltaje pico-pico tiene un error relativo del 1 % para el rango de voltaje utilizado (2V – 20V). Además, se utilizó una capacitancia fija $C = (100,0 \pm 0,2)nF$ y una resistencia variable por décadas cuyo error fue a priori desconocido. Usando un multímetro digital se midieron las resistencias utilizadas junto con su error, que era de la forma $\pm(1\% + 2d)$ para el rango de resistencias utilizadas (mayores a 100 Ω). La resistencia del capacitor resultó despreciable. También,

se utilizó una inductancia fija $L = (1,000 \pm 0,002)H$ que poseía una resistencia interna (medida por el multímetro) $R_L = (294 \pm 3)\Omega$.

Finalmente, se utilizó un osciloscopio digital capaz de medir diferencias de potencial entre las dos terminales que dispone en un rango de 2mV a 5V con un error relativo del 3%. A la hora de medir voltaje, fue necesario asegurarse que el cable a tierra del osciloscopio estuviera conectado al cable a tierra del generador de funciones.

2.1. Circuito RC

La primera parte del trabajo consistió en caracterizar un circuito RC. Para ello se montó un circuito utilizando el generador de funciones ε , la resistencia variable por décadas R y el capacitor $C = (100,0 \pm 0,2)nF$, conectándose en serie para formar un circuito cerrado de una única malla como se ve en la **Figura 1**.

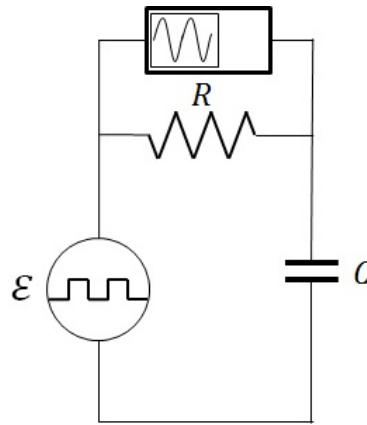


Figura 1: Circuito RC con una fuente de onda cuadrada

El objetivo fue medir la carga y descarga del capacitor C y la corriente sobre la resistencia R (que resultan proporcionales a la caída de potencial en cada elemento, respectivamente) para obtener el tiempo característico $\tau_{RC} = RC$ del circuito presente en las ecuaciones (2), (3), (4) y (5).

Se programó la fuente para que emitiera una señal cuadrada con un voltaje máximo $\varepsilon = (2,00 \pm 0,02)V$ y un voltaje mínimo nulo cuya frecuencia era variable. Sin embargo, esta frecuencia $f = \frac{\omega_f}{2\pi}$ debió elegirse de forma tal que la carga q llegará a su máximo o mínimo (y por ende la corriente I se anula) en medio período de la señal $\frac{\tau_f}{2} = \frac{\pi}{\omega_f} > \tau_{RC}$ para poder analizar todo el comportamiento.

Para medir la diferencia de tensión se conectó un osciloscopio en paralelo al elemento que se quería medir, como se puede ver en la **Figura 1** donde muestra el caso de la resistencia. A su vez, el generador de funciones estaba conectado al osciloscopio para poder visualizar la forma funcional de la fuente. De esta forma se puede apreciar que tanto su señal como la caída de potencial en el elemento se encontraban en fase. Se lo utilizó además para tener un *trigger externo* que asegurara una imagen estática en la pantalla del osciloscopio. Y utilizando un software de recopilación de datos se pudo importar a una computadora las mediciones registradas por el osciloscopio para ser analizadas posteriormente. Este proceso se realizó para distintos valores de R , considerándose despreciable la resistencia aportada por C .

2.2. Circuito RL

De manera análoga, la siguiente parte del trabajo consistió en caracterizar un circuito RL. En este caso se reemplazó el capacitor C por la inductancia $L = (1,000 \pm 0,002)H$. La forma del circuito se puede ver en la **Figura 2**.

El método utilizado para obtener el tiempo característico $\tau_{RL} = \frac{L}{R}$, fue el mismo que para el circuito RC exceptuando el voltaje entregado por la fuente cuyo valor fue $\varepsilon = (8,00 \pm 0,08)V$ y la resistencia de la inductancia $R_L = (294 \pm 3)\Omega$, que en este caso no pudo ser despreciada, debió sumarse a la re-

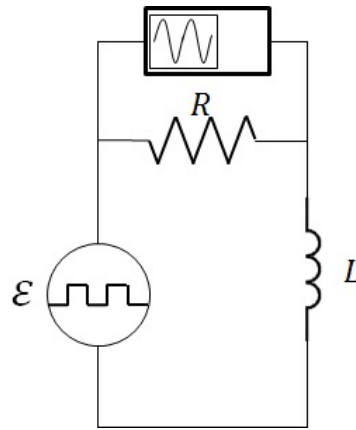


Figura 2: Circuito RL con una fuente de onda cuadrada

sistencia R pues estaba en serie. Se midieron las caídas de potencial en la resistencia R (proporcional a la corriente I) y en la inductancia L (proporcional a $\frac{dI(t)}{dt}$).

Nuevamente, se buscaron frecuencias $f = \frac{\omega_f}{2\pi}$ tal que la corriente se estabilizara (llegara a un máximo o mínimo) en medio período de la señal $t_0 = \frac{\tau_f}{2} = \frac{\pi}{\omega_f} > \tau_{RL}$ para poder analizar todo el comportamiento.

2.3. Circuito RCL

Por ultimo, se buscó estudiar el comportamiento de un circuito RCL. Para ello se montó un circuito cerrado que tenía en serie la fuente programable ε , la resistencia variable por décadas R , una inductancia variable L y un capacitor C como muestra la **Figura 3**.

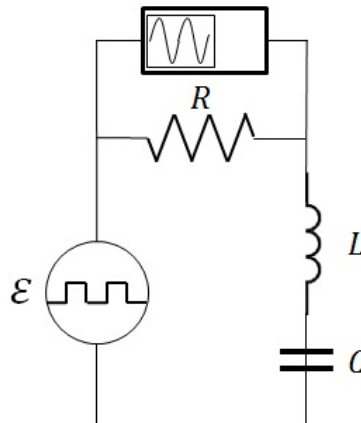


Figura 3: Circuito RCL con una fuente de onda cuadrada

Para caracterizar el circuito, la ecuación diferencia (10) determina distintos *comportamientos* que dependen de los parámetros involucrados en el circuito.

Utilizando el método de adquisición de datos ya explicado, se midió la diferencia de potencial sobre la resistencia (que resulta proporcional a la corriente I). Esta diferencia de potencial era generada por una señal cuadrada de $(3,08 \pm 0,04)V$.

Por lo tanto se estudió el circuito para distintos valores de R, C y L con el fin de encontrar cada uno de estos *comportamientos*. Para ello, se fijaban dos parámetros y se buscaba que el tercero cumpliera las condiciones que determinan cada *comportamiento* (11), (12) y (13) individualmente.

Para cada comportamiento, como se dijo en la **Introducción**, se buscó una frecuencia f tal que la corriente I se anulara y, por lo tanto, se descargara el capacitor C ($q = 0$) en un medio período de la señal $\frac{\tau_f}{2} = \frac{\pi}{\omega_f} > \beta$.

3. Resultados

3.1. Circuito RC

Para la primera configuración del circuito RC, se dispuso una resistencia de $R = (3,00 \pm 0,02)k\Omega$, se midió la caída de potencial sobre la resistencia y mediante el analizador de datos se obtuvo un gráfico que ilustra la **Figura 4**.

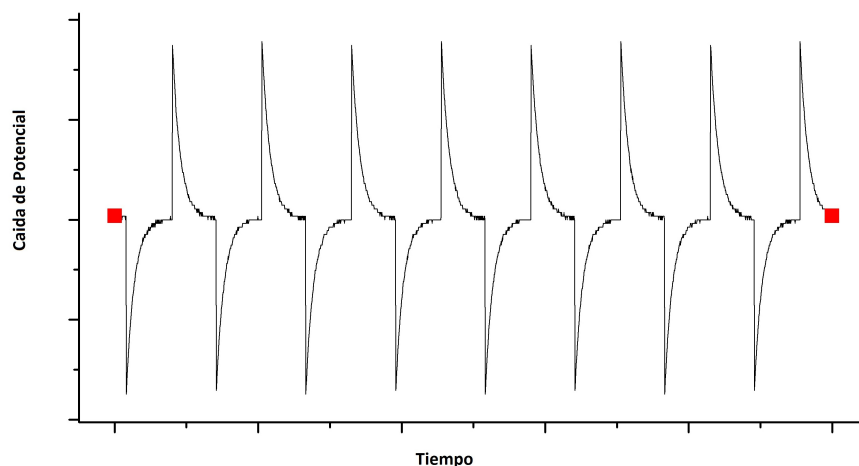


Figura 4: Caída de potencial sobre la resistencia en función del tiempo en un circuito RC

Sabiendo que la variación en el voltaje medida sobre la resistencia es proporcional a la corriente, se utilizaron las ecuaciones (4) y (5) para realizar ajustes sobre cada uno de los picos que aparecían en el gráfico y así obtener un valor de τ_{RC} para cada uno. Y luego se realizó un intervalo de confianza de nivel 0,95 (**Ver apéndice**) con todos los valores de τ_{RC} , para obtener un valor representativo del tiempo característico de este circuito, que resultó $\tau_{RC} = (0,315 \pm 0,004)ms$.

Cuando la medición se realizó sobre el capacitor C se obtuvo el gráfico ilustrado por la **Figura 5**, en el cual se utilizaron las ecuaciones (2) y (3); y realizándose un análisis idéntico al realizado con los valores de la **Figura 4**, se obtuvo un $\tau_{RC} = (0,316 \pm 0,005)ms$.

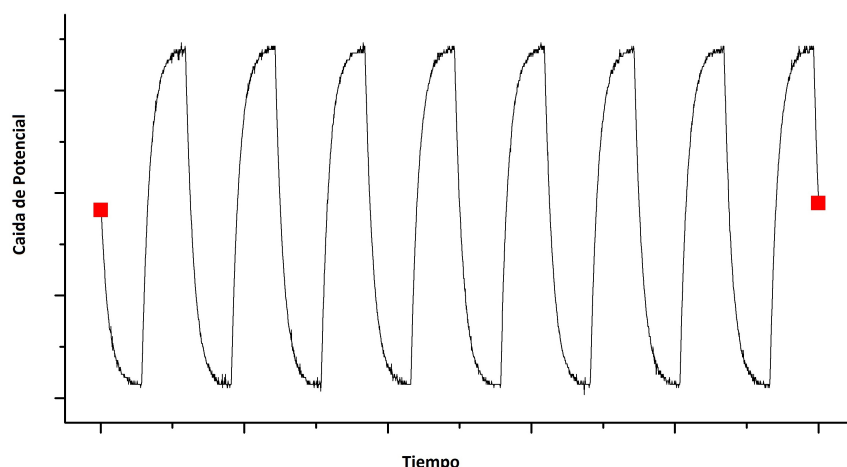


Figura 5: Caída de potencial sobre el capacitor en función del tiempo en un circuito RC

Se puede ver que los resultados de los obtenidos de las distintas mediciones son indistinguibles, ya que sus intervalos de incerteza se solapan, lo cual resulta consistente ya que el tiempo característico depende intrínsecamente de la configuración del circuito y no del lugar de la medición.

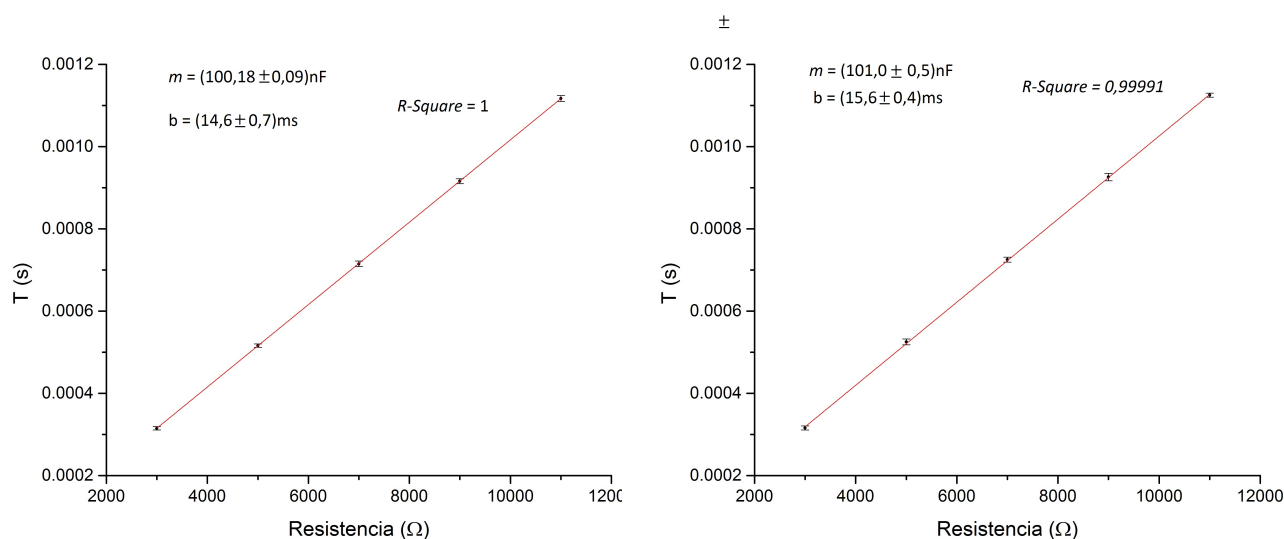
Posteriormente se realizó el mismo análisis para configuraciones con resistencias de $(5,00 \pm 0,03)k\Omega$, $(7,00 \pm 0,04)k\Omega$, $(9,00 \pm 0,05)k\Omega$ y $(11,00 \pm 0,05)k\Omega$, sin variar los demás parámetros y se obtuvieron

los valores presentados en la **Tabla 1**, donde se puede observar lo resaltado anteriormente; para cada par de resultados correspondientes a una misma configuracion, estos son indistinguibles.

Resistencia (k Ω)	Valor	
	τ_R (ms)	τ_C (ms)
3,00 \pm 0,02	0,315 \pm 0,004	0,316 \pm 0,005
5,00 \pm 0,03	0,516 \pm 0,004	0,525 \pm 0,007
7,00 \pm 0,03	0,715 \pm 0,007	0,725 \pm 0,006
9,00 \pm 0,03	0,916 \pm 0,006	0,926 \pm 0,009
11,00 \pm 0,03	1,117 \pm 0,007	1,125 \pm 0,005

Tabla 1: Valores obtenidos de los tiempos característicos en el circuito RC

Finalmente, teniendo en cuenta que segun el modelo propuesto, el tiempo característico de un circuito tiene una correspondencia lineal con la resistencia se construyeron dos de gráficos que relacionan estos valores y se realizo un ajuste sobre los mismos como se puede ver en la **Figura 6**.



(a) Medicion sobre la resistencia

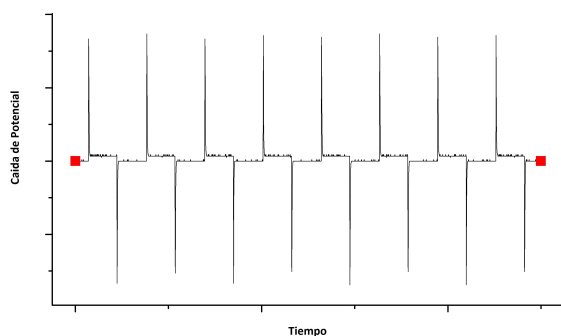
(b) Medicion sobre el capacitor

Figura 6: Variacion del tiempo característico en funcion de la resistencia en un circuito RC

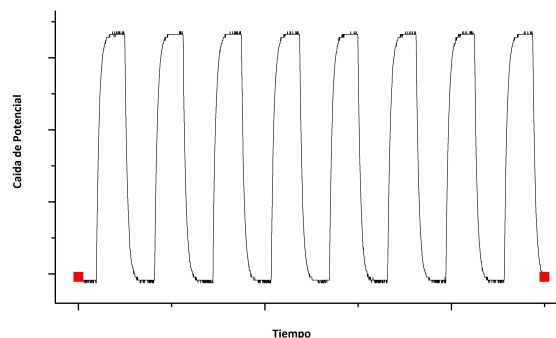
El resultado esperado seria que la pendiente de ambos graficos sea equivalente al valor de la capacitancia $C = (100 \pm 0,2)nF$. Efectivamente para la **Figura 6a** la pendiente arroja un valor $m_R = (100,18 \pm 0,09)nF$ una ordenada $b_R = (14,6 \pm 0,7)\mu s$ con un coeficiente R -Square = 1 mientras que para la **Figura 6b** la pendiente es $m_C = (101,0 \pm 0,5)nF$ y a ordenada $b_C = (15,6 \pm 0,4)ms$ con un coeficiente R -Square = 0,99991. Los R -square aseguran la bondad del ajuste y las ordenadas b_C , b_R resultan despreciables frente a los valores τ_{RC} manejados.

3.2. Circuito RL

El procedimiento realizado con el circuito RL es absolutamente analogo al realizado con el RC. Se realizaron mediciones para distintas configuraciones que relevaban multiples curvas como muestra la **Figura 7**. En el caso de los graficos de tipo **7b**, como corresponden a las mediciones sobre la resistencia, se utilizaron las ecuaciones (6) y (8) para realizar los ajustes, ya que la caída de potencial medida en ese lugar es proporcional a la corriente. En cambio, para los graficos de tipo **7a**, correspondientes a las mediciones sobre la inductancia, se utilizaron las ecuaciones (7) y (9) ya que, en este caso, es proporcional a la derivada de la corriente.



(a) Sobre la Inductancia



(b) Sobre la Resistencia

Figura 7: Caída de potencial en función del tiempo en un circuito RL

Posteriormente, con los resultados provistos por los ajustes, se realizó el mismo análisis, obteniéndose los resultados exployados en la **Tabla 2**.

Valor		
Posicion osciloscopio	Resistencia ($k\Omega$)	τ_{RL} (ms)
Resistencia	$0,600 \pm 0,003$	$1,373 \pm 0,006$
	$0,800 \pm 0,004$	$1,04 \pm 0,01$
	$1,000 \pm 0,005$	$0,770 \pm 0,003$
	$1,200 \pm 0,006$	$0,656 \pm 0,004$
	$1,400 \pm 0,007$	$0,570 \pm 0,002$
Inductancia	$3,00 \pm 0,02$	$0,27 \pm 0,03$
	$5,00 \pm 0,03$	$0,157 \pm 0,002$
	$7,00 \pm 0,04$	$0,114 \pm 0,002$
	$9,00 \pm 0,05$	$0,091 \pm 0,005$
	$11,00 \pm 0,05$	$0,071 \pm 0,008$

Tabla 2: Valores obtenidos de los tiempos característicos en el circuito RL

Luego se construyo el **grafico 8** que relaciona las duplas, se realizo un ajuste esperando que se respete la relacion $\tau_{RL} = L/R$ y que, ademas, se consiga un valor de $L = (1,000 \pm 0,002)H$.

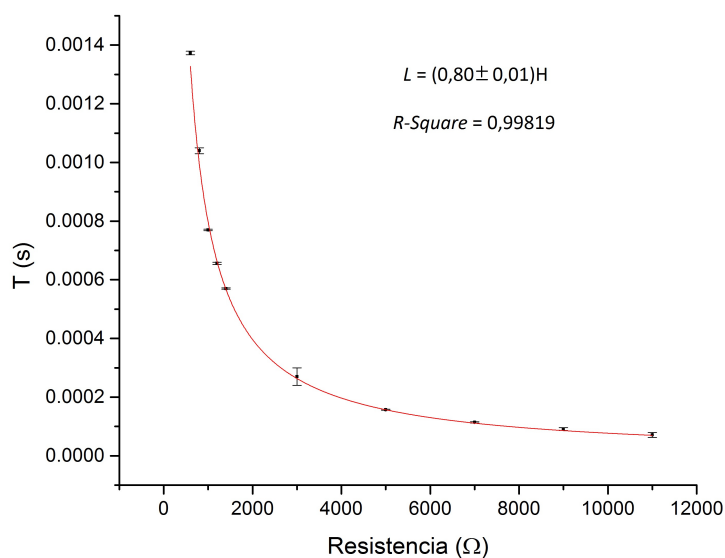


Figura 8: Variacion del tiempo caracteristico en función de la resistencia en un circuito RL

Efectivamente, una vez realizado ese proceso, se obtiene un $R - Square = 0,99819$ que ratifica la bondad del ajuste pero el valor de la inductancia calculado por este metodo fue $L = (0,80 \pm 0,01)H$, que es ligeramente inferior.

3.3. Circuito RCL

Para realizar la primer medición, se fijó una resistencia $R = (400 \pm 4)\Omega$, una inductancia $L = (1,000 \pm 0,001)H$ que añadía una resistencia de $R_L = (296 \pm 3)\Omega$, y una capacitancia $C = (100,0 \pm 0,2)nF$. Bajo esos parametros se esperaba una respuesta regida por la ecuación (11) y, efectivamente, se puede ver en la **Figura 9** que el ajuste propuesto es correcto, pues arroja un $R - Square = 0,99827$. Cabe destacar, que para este tipo de circuito, no se realizó el analisis utilizado en los dos casos anteriores, por lo que se se priorizó obtener la maxima resolucion posible de un único pico con el osciloscopio.

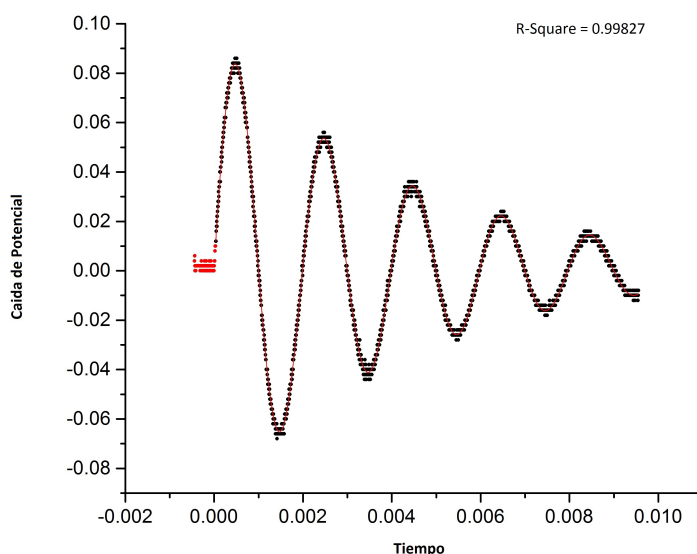


Figura 9: Variacion del potencial en funcion del tiempo en un circuito RLC (Oscilador amortiguado)

Del ajuste se puede extraer el valor de la frecuencia de oscilacion $f_A = (501,3 \pm 0,7)Hz$ el cual es consistente con la calculada de manera teorica, $f_{teo} = (500,2 \pm 0,6)Hz$, ya que como sus intervalos de incerteza se solapan, son indistigibles.

Luego, se propusieron parametros para lograr una respuesta regida por la ecuación (13). Se dispuso una resistencia $R = (1110 \pm 11)\Omega$, una inductancia $L = (30,00 \pm 0,03)mH$, y una capacitancia $C = (100,0 \pm 0,2)nF$. Y luego mediante el osciloscopio se obtuvo la **Figura 10**.

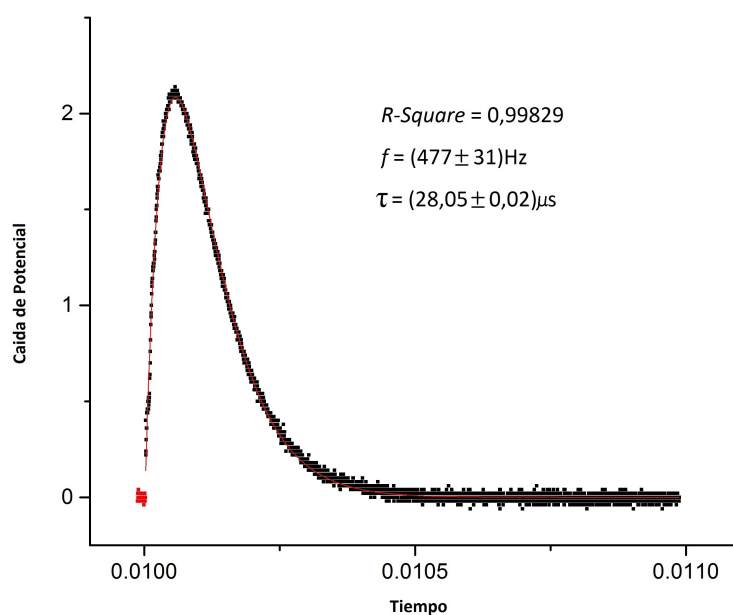


Figura 10: Variación del potencial en función del tiempo en un circuito RLC (Oscilador Sobreamortiguado)

El ajuste realizado sobre la misma arroja un $R - Square = 0,99829$, y aporta valores para la frecuencia $f_A = (477 \pm 31)Hz$ y para el tiempo característico $\tau_A = (28,05 \pm 0,02)\mu s$. Si se los compara con los resultados teóricos, $f_{teo} = (475 \pm 9)Hz$ y $\tau_{teo} = (27,0 \pm 0,3)\mu s$, puede verse que las frecuencias coinciden, y que, aunque la diferencia es pequeña frente a las magnitudes manejadas, los τ no.

Finalmente se intentó construir un circuito para el caso crítico, para el cual se fijó una inductancia $L = (1 \pm 0,001)H$ y una capacitancia de $C = (100 \pm 0,2)nF$, y se se fijó una resistencia $R = (6,30 \pm 0,03)k\Omega$ la cual contenía dentro de su margen de incerteza el resultado de calcular el valor para el cual el polinomio característico de la ecuación (10) diera una raíz doble, y así la evolución del sistema estuviera regido por la ecuación (12). Así se obtuvo el gráfico de la **Figura 11**.

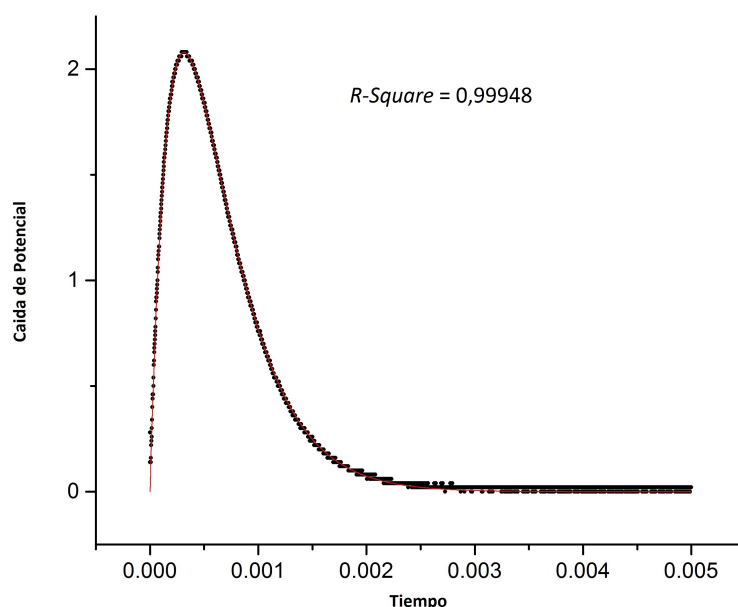


Figura 11: Variación del potencial en función del tiempo en un circuito RLC (Oscilador Subamortiguado) ajustado como un oscilador sobreamortiguado

Durante el análisis fue imposible realizar un ajuste a partir de la ecuación (12) y solo se pudo obtener un ajuste viable cuando se utilizó la ecuación del oscilador sobreamortiguado (13). El $R -$

$Square = 0,99948$ confirma la bondad del ajuste, por lo cual es posible afirmar que la **Figura 11** no corresponde al caso crítico.

4. Conclusiones

Para comenzar, los datos arrojados para el caso del circuito RC son más que consistentes. Los tiempos característicos τ_R y τ_C mostrados en la **Tabla 1** resultan indistinguibles dentro del error, comprobando las relaciones entre las ecuaciones (2), (3), (4) y (5). Ante todo, los ajustes lineales de la **Figura 6** permiten comprobar con enorme seguridad la dependencia del tiempo característico con los parámetros C y R , dado que ambas pendientes $m_R = (100,18 \pm 0,09)nF$ y $m_C = (101,0 \pm 0,5)nF$ resultan indistinguibles.

Sin embargo, para el caso del circuito RL, dado que la metodología de medición y análisis utilizado fueron los mismos que para el circuito RC se obtuvo una inconsistencia en los resultados. Esto se debe a que de los valores registrados en la **Tabla 2** se obtiene un ajuste bondadoso de la relación $\tau_{RL} = \frac{L}{R}$, el cual se ve en la **Figura 8** con un $R-Square = 0,99819$, pero que difiere del valor esperado. Y puesto que el marco teórico del trabajo se comprobó correcto en la sección del RC al igual que los métodos de medición y análisis; se puede atribuir esta inconsistencia a alguna característica de los elementos no tenida en cuenta o a un descuido experimental sistemático a la hora de las mediciones que pudo hacer que el valor real de las resistencias utilizadas en el circuito fuera mayor al valor registrado.

Por último; el estudio de los circuitos RCL se pudieron observar eficientemente los casos de *oscilador amortiguado* y *oscilador sobreamortiguado*, los cuales se muestra en las **Figuras 9 y 10** respectivamente. Esto se puede concluir a partir de que los ajustes realizados en cada caso se hicieron utilizando las funciones esperadas, y los estimadores de bondad aseguraron dichos ajustes. Por otro lado; de las mediciones realizadas para el caso del *oscilador subamortiguado*, en los cuales se dispusieron los valores de los elementos de manera que coincidiesen con las condiciones teóricas, no se pudo ajustar la curva esperada para este caso, sin embargo si se logró utilizando el ajuste del caso *oscilador sobreamortiguado*, el cual debido a la bondad de su ajuste, se pudo garantizar que efectivamente corresponde a dicho caso. Es por ello que de los distintos parámetros utilizados, ninguna configuración correspondió al caso crítico. Esto es esperable considerando que este caso es muy fino y que la precisión de los parámetros debe ser mayor que fue utilizada en la experiencia.

5. Apéndice

A la hora de analizar largas tiras de datos, los Intervalos de Confianza son herramientas muy útiles. Matemáticamente, si X_1, \dots, X_n son variables aleatorias idénticamente distribuidas tal que su esperanza $E(X_i) = \mu$ y varianza $V(X_i) = \sigma^2 > 0$ es posible construir un intervalo de confianza del promedio $\bar{X}_n = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n}$. Físicamente, asumiendo las X_1, \dots, X_n como distintas mediciones de una misma magnitud X , es posible considerar $\mu = X$ y construir un intervalo de confianza para este parámetro \bar{X}_n . Sin embargo, es necesario conocer la distribución $F(\theta_1, \dots, \theta_m)$ tal que $X_i \sim F(\theta_1, \dots, \theta_m)$.

Se define $(a; b)_\theta$ como un intervalo de confianza de nivel $1 - \alpha$ para un parámetro θ según:

$$P(\theta \in (a; b)_\theta) = 1 - \alpha \quad (14)$$

Según el Teorema Central del Límite, cuando $n \rightarrow \infty$ resulta $\bar{X}_n \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ donde N representa la distribución normal. De esta forma, a la hora de estimar μ es posible, asumiendo n suficientemente grande, utilizar un intervalo de confianza sobre la variable aleatoria \bar{X}_n . En particular, definiendo la variable aleatoria $Z \sim N(0, 1)$, vale asintóticamente que $\bar{X}_n = \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z$ de forma tal que $\Phi(x) =$

$\int_{-\infty}^x \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz = P(Z < x)$. Por otro lado, definiendo z_p tal que $\Phi(z_p) = 1 - p$ y recordando que $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ es posible, a través de (14), definir un intervalo de confianza $(-z_{\frac{\alpha}{2}}; z_{\frac{\alpha}{2}})$:

$$P(|Z| < z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha \quad (15)$$

De esta forma, asumiendo conocida la varianza $V(\bar{X}_n) = \sigma^2$ y utilizando que $Z = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \cdot \sqrt{n}$ es posible utilizar (15) para obtener un intervalo de confianza de nivel $1 - \alpha$ para μ . Sin embargo, dado que σ no es un parámetro conocido, es posible simplemente aproximarlos por el *desvío estándar muestral* tal que $\sigma^2 \simeq \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x}_n)^2}{n-1}$. Definiendo σ de esta forma y $\bar{x}_n = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}$ con x_i el valor obtenido en la i -ésima medición., se puede calcular un intervalo de confianza de nivel $1 - \alpha$ de la forma:

$$\mu_\alpha = \bar{x}_n \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \simeq \bar{x}_n \pm \frac{z_{\alpha/2}}{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2} \quad (16)$$

6. Referencias

- [1] Felix Rodriguez Trelles, *Temas de Electricidad y Magnetismo*, 1984, Editorial EUDEBA