

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE FÍSICA



LABORATORIO 3

Circuitos de Corriente Continua

Autores:

ANDREU, Gonzalo
MALPARTIDA, Bryan
PUGLIESE, Facundo

10 de Febrero de 2016

Resumen

Este trabajo está centrado en el estudio de una serie de fenómenos fundamentales presentes en los circuitos eléctricos. Utilizando distintos circuitos compuestos por fuentes de voltaje constante y resistencias, tanto constantes como variables, los experimentos realizados tuvieron como objetivo comprobar empíricamente primero la Ley de Ohm para un circuito de malla única. Para un circuito más complejo de dos mallas se comprobaron las Leyes de Kirchhoff, la Ley de Joule y el Teorema de Thevenin, además de estudiar el comportamiento de la eficacia del circuito para distintas resistencias.

1. Introducción

Para empezar, segun el fenómeno denominado ley de Ohm [1], si una fuente ε y una resistencia R forman un circuito cerrado, la corriente eléctrica i que circula por la resistencia se obtiene con:

$$i = \frac{\varepsilon}{R} \quad (1)$$

Si se define una rama como todo conjunto de elementos conectados en serie y un nodo como la intersección de tres o mas rama; para todo nodo vale:

$$\sum_e i_e - \sum_s i_s = 0 \quad (2)$$

Donde se ve que la suma de corrientes i_e entrantes al nodo es igual a la suma de corrientes i_s salientes del mismo. A este fenomeno se lo conoce como la ley de Kirchoff de los nodos [1].

Por otro lado; el teorema de Thevenin [1] enuncia que si se desea conocer el comportamiento de un circuito entre dos terminales A y B , el resto del circuito puede reemplazarse por una rama que consiste de una resistencia equivalente R_{th} y una fuente equivalente ε_{th} .

La resistencia R_{th} se calcula desconectando las fuentes y resolviendo el sistema de resistencias que se obtiene entre las terminales. Por otro lado, la fuente equivalente ε_{th} se obtiene calculando la diferencia de potencial entre A y B . Un caso particular de esto es el que muestra la **Figura 1**

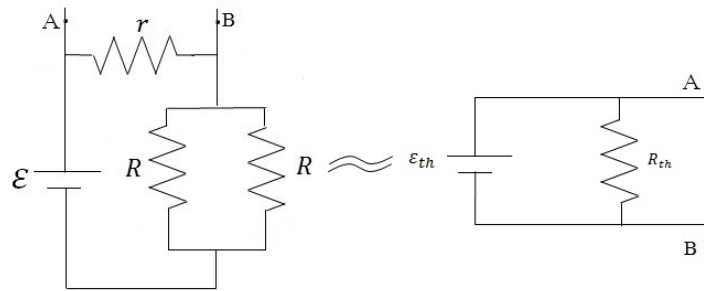


Figura 1: Caso particular de un circuito utilizado para calcular su equivalente de Thevenin

Donde R_{th} y ε_{th} de este circuito son:

$$R_{th} = \frac{rR}{2r + R} \quad (3)$$

$$\varepsilon_{th} = \frac{2\varepsilon r}{2r + R} \quad (4)$$

Por ultimo, para poder calcular la potencia disipada por una resistencia R , la ley de Joule [1] determina la siguiente ecuación:

$$P = i^2 R \quad (5)$$

Donde la i es la corriente que pasa por la resistencia.

De esta forma, si se coloca una resistencia de carga R_v en paralelo con una resistencia de un circuito, y calculando su respectivo equivalente de Thevenin, se puede obtener la potencia disipada por R_v como:

$$P_{R_v} = \frac{\varepsilon_{th}^2 R_v}{(R_v + R_{th})^2} \quad (6)$$

Una curva acampanada cuyo máximo se encuentra en $R_{max} = R_{th}$.

Sin embargo, maxima disipación no implica máxima eficiencia. Por lo tanto, se define la eficacia como el cociente entre la potencia disipada por una resistencia R y la potencia entregada por una fuente ε :

$$E = \frac{P_R}{P_e} \quad (7)$$

Por lo tanto, si se quiere conocer la eficacia de una resistencia R se puede calcular su equivalente de Thevenin para obtener la relación:

$$E = \frac{\varepsilon_{th}}{\varepsilon} \frac{1}{1 + \frac{R_{th}}{R}} \quad (8)$$

2. Desarrollo experimental

Para tener una fuente constante V_0 se utilizó una fuente de alimentación programable capaz de emitir una señal constante con una precisión de $\pm(0,5\% + 0,02)$ en un rango de voltaje de salida de $0 \sim 32V$. Además se utilizaron dos resistencias $R = (1000,0 \pm 0,5)\Omega$ idénticas, otra resistencia $r = (100,00 \pm 0,05)$ y una resistencia R_v variable por décadas la cual en principio se desconocía su error. Para determinar dicho error se utilizó un multímetro digital midiéndose la resistencia con una precisión de $\pm(1\% + 2d)$ debido al rango de resistencias utilizadas (mayores a 100Ω). También se usó el multímetro para las correspondientes mediciones de corriente con una resolución de $1\mu A$ y una precisión de $\pm(0,8\% + 1d)$ en el rango de $2mA \sim 20mA$, y una resolución de $1mA$ y una precisión de $\pm(1,5\% + 1d)$ en el rango de $2A \sim 10A$ en su modo de amperímetro en cual imponía una resistencia adicional $R_A = (11,8 \pm 0,4)\Omega$.

2.1. Ley de Ohm

La primer parte del trabajo se desarrolló en torno a la comprobación empírica de la Ley de Ohm (1) para circuitos de corriente continua. El montaje del sistema consistió en la fuente de alimentación programable, que actuó como una fuente de voltaje constante, conectada en serie con la resistencia variable y el multímetro el cual fue utilizado como instrumento de medición. Esto permitió generar un circuito de una única malla que consiste en una resistencia y una fuente de voltaje constante (Ver **Figura 2**).

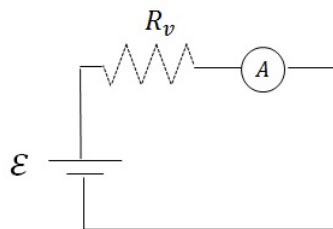


Figura 2: Circuito de malla única utilizado para la experiencia. Tanto la fuente ε como la resistencia R_v eran variables, por lo que se utilizó el multímetro en su función de amperímetro A para medir la corriente que circulaba en esa rama.

La resistencia del multímetro utilizado en su función de amperímetro era $R_A = (11,8 \pm 0,4)\Omega$, la cual debió sumarse a la resistencia variable R_v (pues están en serie) a la hora de calcular la resistencia total del circuito. La resistencia interna de la Fuente se asumió despreciable. Para empezar, se fijó la resistencia variable $R_v = (500 \pm 5)\Omega$ y se fue variando el voltaje de entrada ε , registrándose la corriente I resultante para cada valor de ε . Posteriormente, utilizando el mismo circuito se planteó analizar la relación entre I y R fijando el voltaje de la fuente a $\varepsilon = (15,0 \pm 0,1)V$ y variando la resistencia total $R = R_v + R_A$ a través de R_v .

2.2. Equivalente de Thevenin y Ley de Joule

Terminado lo anterior, se propuso montar otro circuito con dos mallas con el primer objetivo de medir sus corrientes de rama y compararlas con el resultado teórico esperado. Se utilizaron las dos resistencias $R = (1000,0 \pm 0,5)\Omega$ y la resistencia $r = (100,00 \pm 0,05)\Omega$, mientras que la fuente de voltaje

$\varepsilon = (5,00 \pm 0,05)V$ fue generada nuevamente por la fuente de alimentación programable, unidos por cables como se ve en el circuito de la **Figura 3**.

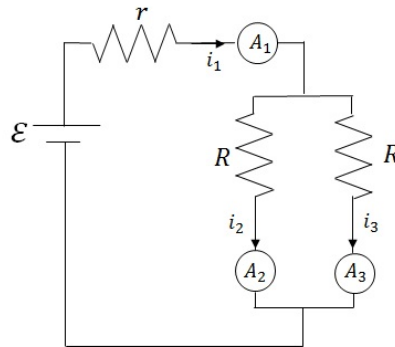


Figura 3: Circuito de dos mallas utilizado para la experiencia. La fuente constante $\varepsilon = (5,00 \pm 0,05)V$ generaba corrientes eléctricas que circulaban por las resistencias $R = (1000,0 \pm 0,05)\Omega$ y la resistencia $r = (100,00 \pm 0,05)\Omega$. Los A_i representan los lugares donde se ubicó el multímetro para medir las correspondientes corrientes.

Inicialmente, se utilizaron las ecuaciones (1) y (2) para resolver el circuito mediante el método de ramas para obtener el valor de las corrientes i_1 , i_2 e i_3 en base a los parámetros.

Luego se ubicó el multímetro en las posiciones A_1 , A_2 y A_3 (Ver **Figura 3**) para medir las corrientes i_1 , i_2 e i_3 respectivamente, considerando despreciable la resistencia interna del multímetro.

Posteriormente, se buscó calcular el equivalente de Thevenin en forma teórica a través de los parámetros R , r del circuito y ε usando (3) y (4) para obtener la resistencia y la fuente equivalente vista desde las terminales A y B, entre las cuales se conectó una resistencia de carga $R_q = R_v + R_A$ (ver **Fig 4**), donde R_v es la resistencia variable por décadas y R_A es la resistencia propia del amperímetro.

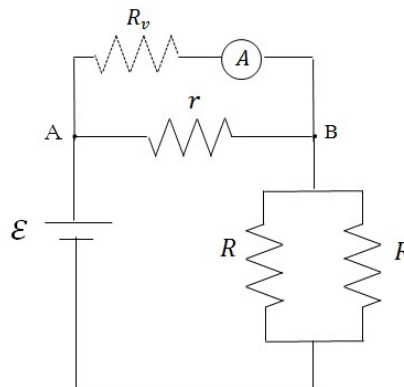


Figura 4: Circuito compuesto del circuito utilizado en la Figura 3 al cual se le conectó en paralelo una resistencia R_v variable por décadas. Utilizando el multímetro en su función de amperímetro se midieron las corrientes que circulaban por esta nueva rama para los distintos voltajes de salida de ε

Conectando el multímetro en paralelo en las terminales A y B se midió la diferencia de potencial ΔV_{AB} y la resistencia R_{AB} entre ambas terminales.

Una vez hecho esto, fue posible conectar una resistencia de carga R_v representada por una resistencia variable por décadas en serie con el multímetro en modo amperímetro. El objetivo fue medir la corriente I para distintos valores de R_v y en base a ambas magnitudes calcular la potencia P disipada por R_q a través de (5) buscando relevar la curva acampanada $P(R_v)$.

3. Resultados

3.1. Ley de Ohm

Los resultados de la primer medición con la resistencia $R = (512 \pm 5)\Omega$ constante pueden verse en la **Figura 5**, cuyo ajuste lineal arroja una pendiente $m_1 = (1,979,10^{-3} \pm 5,10^{-6})\Omega^{-1}$ y una ordenada

$b_1 = (-0,23 \pm 0,03)mA$ muy cercana a cero con un $R - square = 0,99995$, que asegura la bondad del ajuste. Siguiendo (1), se esperaría que la pendiente $m_1 = (1,979,10^{-3} \pm 5,10^{-6})\Omega^{-1}$ fuera igual a $\frac{1}{R}$. Efectivamente, resulta $\frac{1}{m_1} = (505,3 \pm 1,3)\Omega$, el cual se acerca mucho a $R = (512 \pm 5)\Omega$.

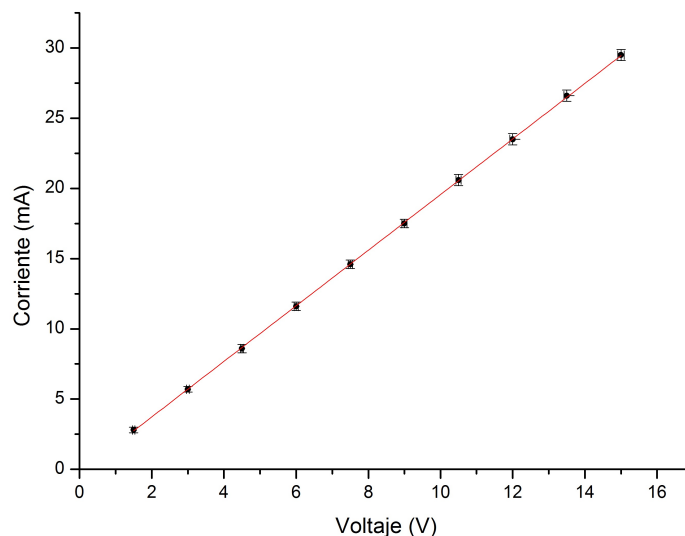


Figura 5: Relación entre Voltaje (ϵ) y Corriente (I)

Luego, con las mediciones correspondientes a un voltaje constante, se decidió realizar un gráfico que relacionara las corrientes medidas con el inverso de las resistencias seleccionadas, de esa forma, si se cumple la ley de Ohm, debería haber una correspondencia lineal entre esos pares de valores. Como se puede ver en la **Figura 6** se confirma lo esperado, ya que una vez realizado un ajuste lineal, nos arroja un $R - square = 0,99998$.

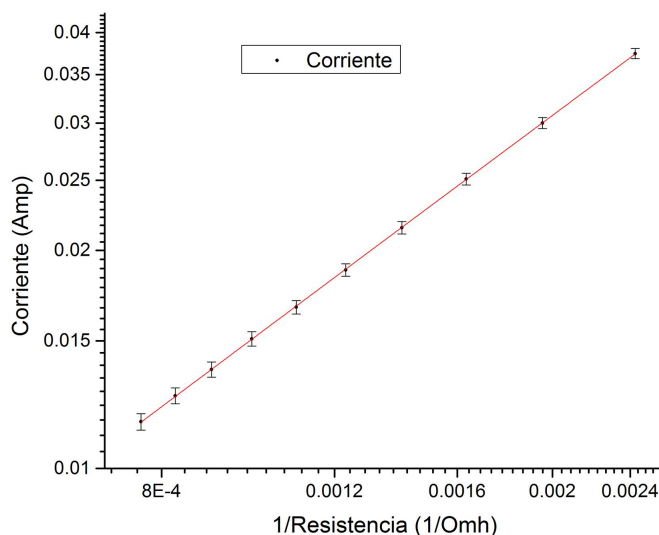


Figura 6: Relación entre el inverso de Resistencia ($1/R$) y Corriente (I)

Cabe destacar, que para resistencias suficientemente altas, las corrientes resultantes deberían estar por debajo del límite de resolución de cualquier instrumento de medición; por lo cual, es consistente que el ajuste arroje una intersección con el eje de ordenadas muy cercano al 0. Efectivamente el valor obtenido es de $b = (-0,23 \pm 0,03)mA$. Adicionalmente, según la ecuación (1) se esperaría que la pendiente de esta recta fuera el voltaje de entrada. En este caso resulta ser ligeramente superior con un valor $m_2 = (15,4 \pm 0,2)V$

3.2. Equivalente de Thevenin y Ley de Joule

De las mediciones y calculos hechos de las corrientes A_1 , A_2 y A_3 puede verse, en la **Tabla 1**, que los valores obtenidos con ambos metodos coinciden dentro del error.

| Corriente | Valor | |
|-----------|-----------------|---------------|
| | Teórico (mA) | Medido (mA) |
| i_1 | $8,33 \pm 0,09$ | $8,3 \pm 0,3$ |
| i_2 | $4,17 \pm 0,05$ | $4,2 \pm 0,2$ |
| i_3 | $4,17 \pm 0,05$ | $4,1 \pm 0,2$ |

Tabla 1: Valores obtenidos de las corrientes mediante cálculo (teórico) y medición directa

Luego, a través del cálculo del equivalente de Thevenin se obtuvieron los parametros equivalentes $\varepsilon_{th} = (0,83 \pm 0,08)V$ y $R_{th} = (83,3 \pm 0,7)\Omega$. Cabe aclarar que en este cálculo no intervinieron las corrientes previamente calculadas, si no que se utilizó directamente su dependencia con los parámetros del circuito. Alternativamente, mediante medición directa se obtuvo $\Delta\varepsilon_{AB} = (0,84 \pm 0,06)V$ y $R_{th} = (83,4 \pm 0,6)\Omega$, valores que resultan indistinguibles dentro del error de los anteriormente calculados.

De los datos obtenidos se tiene el gráfico de la **Figura 7** donde se puede observar que el comportamiento de la potencia entregada por el circuito esta dentro de los parametros esperados. Luego, realizando un ajuste, se obtiene una resistencia máxima $R_{max} = (78,5 \pm 0,8)\Omega$ y un voltaje $\varepsilon = (0,74 \pm 0,01)V$ ambos muy cercanos a los valores de Thevenin calculados anteriormente. Sin embargo, el coeficiente $\chi^2_{red} = 0,01362$ muestra una enorme sobreestimación de los errores, visible ya en la **Figura 7**.

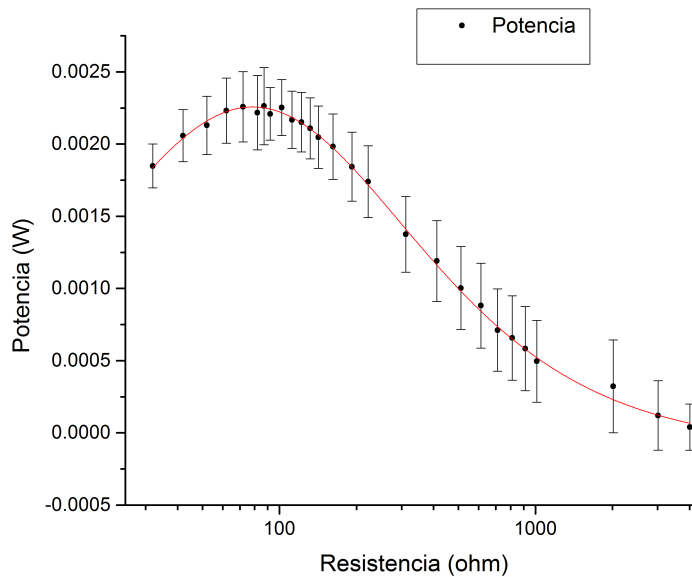


Figura 7: Relacion entre la potencia disipada y el valor de la resistencia de carga

Finalmente, se calculo la eficacia con la cual se traspasaba la potencia de nuestro circuito sobre la carga. En el grafico de la **Figura 8** se ve que hay una tendencia creciente pero que en los ultimos puntos se empieza a dispersar.

Desestimando los puntos en cuyos calculos contenian corrientes con incertezas comparables con su valor, el ajuste realizado utilizando (8) arroja un $\chi^2_{red} = 0,00155$ que indica la ya notoria exageración de los errores obtenidos debido a la propagación de errores.

En resumen, los distintos valores obtenidos de R_{th} y ε_{th} con los distintos métodos se pueden ver en la **Tabla 2**.

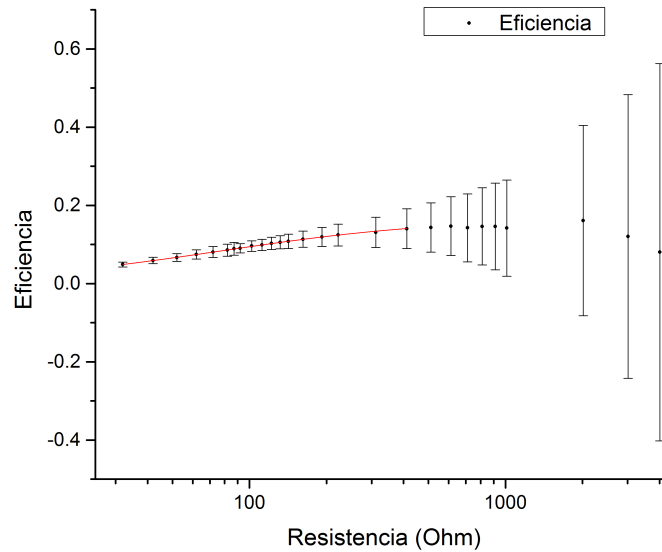


Figura 8: Relación entre la eficacia de la entrega de potencia y el valor de la resistencia de carga

| Magnitud | Valor | | |
|----------|------------------------|------------------------|------------------------|
| | Teórico | Medido | Ajustado |
| R_{th} | $(83,3 \pm 0,7)\Omega$ | $(83,4 \pm 0,6)\Omega$ | $(78,5 \pm 0,8)\Omega$ |
| E_{th} | $(0,83 \pm 0,08)V$ | $(0,84 \pm 0,06)V$ | $(0,74 \pm 0,01)V$ |

Tabla 2: Valores obtenidos para el equivalente de Thevenin mediante cálculo (teórico), medición directa y ajuste de curva de potencia

4. Conclusiones

En conclusión, los resultados obtenidos en la sección referente a la Ley de Ohm resultan consistentes. Aunque la forma funcional de (1) queda bien comprobada en los gráficos de las **Figuras 5 y 6**, los ajustes arrojan parámetros que no resultan equivalentes a los del sistema. El parámetro $\frac{1}{m_1} = (505,3 \pm 1,3)\Omega$ arrojado por la **Figura 5** no resulta indistinguible a $R = (512 \pm 5)\Omega$, aunque la diferencia es muy pequeña y puede considerarse despreciable frente a las magnitudes manejadas. Para el caso del parámetro $m_2 = (15,4 \pm 0,2)V$ arrojado por la **Figura 6** la situación resulta similar al caso anterior frente al parámetro del sistema $\varepsilon = (15,0 \pm 0,1)V$. En este caso, sin embargo, el error puede deberse a que algunas de las corrientes medidas eran menores a $15mA$, lo cual se acerca al límite de resolución del instrumento.

Empezando con la sección de Thevenin, la **Tabla 1** permite ver que las corrientes i_1 , i_2 e i_3 medidas y teóricas son indistinguibles dentro del error, por lo que puede asumirse que la relación dictada por las Leyes de Kirchoff de las ecuaciones (1) y (2). Por lo tanto, el método de ramas fue usado validamente.

Como puede verse en la **Tabla 2**, los valores de E_{th} y R_{th} para el caso de medición directa y cálculo teórico son indistinguibles dentro del error y, por ende, son iguales. Sin embargo, los valores obtenidos mediante el ajuste de la **Figura 7** difieren notoriamente de los anteriores. Observando los órdenes de magnitud manejados en la **Figura 7** puede notarse que los valores de potencia disipada son menores a $3mW$. Esta baja potencia deviene realmente de los bajos valores de corrientes medidas, que se ubicaron en el intervalo $[0,1mA; 7,6mA]$ con un error mínimo de $0,2mA$, por lo que gran parte de las corrientes medidas se encontraban muy cerca del límite de resolución del multímetro, por lo que las fluctuaciones y el ruido del instrumento generan incertezas muy altas no contempladas por el error asignado. Esto acarreado con el error al calcular la potencia genera una enorme brecha

entre el valor esperado (y medido) y el valor obtenido. El coeficiente $\chi_{red}^2 = 0,01362$ obtenido en el ajuste de la **Figura 7** es un claro reflejo de este problema, pues al ser tan pequeño frente a 1 indica una sobrestimación de errores. Por lo tanto, si nos concentramos en los dos primeros valores, que se obtienen en forma más directa, tenemos una comprobación empírica del teorema de Thevenin.

A la hora de analizar la eficiencia en la **Figura 8**, nuevamente el coeficiente $\chi_{red}^2 = 0,00155$ previene sobre una enorme sobrestimación de errores, acarreado principalmente del cálculo de la potencia (como se ha visto en el párrafo anterior). Aún desestimando los puntos provenientes de las corrientes más bajas, el error propagado resulta tan grande que resulta difícil asegurar que el ajuste es el correcto.

5. Referencias

- [1] Felix Rodriguez Trelles, *Temas de Electricidad y Magnetismo*, 1984, Editorial EUDEBA