

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE FÍSICA



LABORATORIO 3

Analisis espectral y filtrado de batidos

Autores:

ANDREU, Gonzalo
MALPARTIDA, Bryan
PUGLIESE, Facundo

9 de Marzo de 2016

Resumen

1. Introducción

Este trabajo se centra alrededor del análisis de *señales*. Una *señal* es una diferencia de potencial $S(t)$ que se genera en alguna sección del circuito. En su forma más general, se puede definir una señal $S(t) = V_o \cdot f(t)$ donde V_o es un voltaje constante que representa la *amplitud* y $f(t)$ es una función del tiempo que define el *tipo de señal* y es la que define el comportamiento del circuito. Para un circuito compuesto por resistencias R , capacitancias C e inductancias L , este comportamiento puede ser muy complicado de predecir teóricamente. Sin embargo, para una señal del tipo $V(t) = V_o \cdot \cos(\omega t)$ el comportamiento está ampliamente estudiado y resulta sencillo de predecir.

Es aquí donde entra en juego la *Serie de Fourier*, que consiste en escribir una función periódica $f(t)$ como una serie de senos y cosenos pesados por coeficientes a_n y b_n según. Funciones que no sean periódicas pero que estén definidas en un intervalo finito $[-\tau; \tau]$ también puede expandirse de forma periódica. Si 2τ es el período (o la longitud del intervalo) de la función $f(t)$, se tiene que

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{\tau}t\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{\tau}t\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{\tau}t + \phi_n\right) \quad (1)$$

donde $f_n = \frac{n}{2\tau}$ es la frecuencia del n -ésimo armónico y

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} f(t) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{\tau}t\right) dt \\ b_n &= \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} f(t) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{\tau}t\right) dt \\ \alpha_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \phi_n &= -\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \end{aligned} \quad (2)$$

Entonces resulta posible considerar a toda señal $S(t)$ como una suma de infinitas señales sinusoidales y gracias a la linealidad de los componentes R , C y L , el comportamiento será igual al comportamiento de la suma. Es más, considerando que vale $a_n \rightarrow 0$ y $b_n \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$, cada término de la sumatoria tendrá menos peso que los anteriores. Por lo tanto, es posible estimar el comportamiento aproximado del circuito como si la señal fuera una suma finita de sinusoides. Para una función $f(t) \in C^k$, cuanto mayor suave sea k , más rápido será este decaimiento y menos términos de la serie se necesitarán para aproximar el comportamiento. Bajo esta idea, si fuera posible filtrar una única frecuencia $\omega_n = \frac{n\pi}{\tau}$, se obtendría una señal de salida sinusoidal cuya amplitud sería α_n .

Este filtro puede ser un circuito RLC resonante, el cual consiste en una fuente $V(t) = V_o \cdot \cos(\omega t)$, un capacitor C , una inductancia L (de resistencia interna R_L) y una resistencia R conectados en serie. Si se mide la amplitud de la caída de potencial sobre la resistencia R resulta de la forma $V_R = V_o \frac{R}{|Z|}$ donde $Z = (R + R_L) + i(\omega L - \frac{1}{\omega C})$. Definiendo la *transmisión* $T(\omega) = \frac{V_R}{V_o}$ resulta $T(\omega) = \frac{R}{|Z|}$ cuyo máximo se encuentra en $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ tal que $T_{max} = T(\omega_0) = \frac{R}{R + R_L}$. Por último, definiendo una *banda de resonancia* $[\omega_1; \omega_2]$ tal que $\frac{T_{max}}{\sqrt{2}} \leq T(\omega) \leq T_{max}$ para todo $\omega \in [\omega_1; \omega_2]$ y el *ancho de banda* $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ resulta $\Delta\omega = \frac{R_L + R}{L}$. En resumen,

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \Delta\omega &= \frac{R_L + R}{L} \end{aligned} \quad (3)$$

Bajo esta idea, es posible tomar una señal cualquiera $S(t)$ y, mediante un circuito RCL resonante, filtrar una única frecuencia $\omega_n = \frac{n\pi}{\tau}$ fijando la frecuencia natural del circuito $\omega_0 = \omega_n$. Si la campana es lo suficientemente fina, lo que implica un $\Delta\omega \ll \frac{\pi}{\tau}$, es posible obtener una transmisión máxima para cada ω_0 $T_{max}(\omega_n) = \alpha_n$.

Por lo tanto, si se envía una señal cuadrada de la forma $C(t) = \begin{cases} -V_o & t \in [-\tau, 0) \\ V_o & t \in [0, \tau) \end{cases}$ su serie de Fourier resulta $C(t) = V_o \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin(\frac{\pi}{\tau}(2k+1)t)$ de forma tal que los coeficientes α_n resultan

$$\alpha_n(C) = \frac{2V_o(1 - (-1)^n)}{n\pi} \quad (4)$$

Similarmente, para el caso de una señal *parabólica* de la forma $P(t) = V_o \cdot (\frac{t}{\tau})^2$ definida en $t \in [-\tau, \tau)$ se obtiene a serie de Fourier $P(t) = \frac{V_o}{3} + V_o \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{(n\pi)^2} \cos(\frac{\pi}{\tau}nt)$ cuyos coeficientes resultan

$$\alpha_n(P) = \frac{4V_o(-1)^n}{(n\pi)^2} \quad (5)$$

Siguiendo la idea anterior, es posible considerar el *espectro de potencia* de una señal en un intervalo de tiempo $[t_0; t_1]$ como una función $\alpha^2(\omega) = |\frac{1}{t_1-t_0} \int_{t_0}^{t_1} f(t) \cdot e^{i\omega t} dt|^2 = |\frac{1}{t_1-t_0} \int_{t_0}^{t_1} f(t) \cdot \cos(\omega t) dt - \frac{i}{t_1-t_0} \int_{t_0}^{t_1} f(t) \cdot \sin(\omega t) dt|^2 = (\frac{1}{t_1-t_0} \int_{t_0}^{t_1} f(t) \cdot \cos(\omega t) dt)^2 + (\frac{1}{t_1-t_0} \int_{t_0}^{t_1} f(t) \cdot \sin(\omega t) dt)^2$. En esta definición puede verse que si $t_1 - t_0 = \tau$, $\alpha(n\frac{\pi}{\tau}) = \alpha_n$ para una función $f(t)$ de período 2τ . Por lo tanto,

Ahora, si se supone una señal de la forma $V(t) = A \cdot \cos(\omega_1 t) + A \cdot \cos(\omega_2 t)$ que resulta de la suma de dos señales sinusoidales, ocurre un efecto denominado *batido*. Esto se da gracias a que, mediante identidades trigonométricas, se obtiene $V(t) = 2A \cdot \cos(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t) \sin(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t)$ donde el primer término se llama *modulador* y el segundo *portador*. Por lo tanto, si se suman dos señales de entrada $V_1(t) = V_o \cdot \cos(\omega_1 t)$ y $V_2(t) = V_o \cdot \cos(\omega_2 t)$, la señal de salida $V(t)$ tendrá una forma que no será sinusoidal a primera vista.

Para lograr esta suma, puede montarse un circuito como el de la **Figura 1**, donde se configuran las resistencias según $r_1 = r_2 \equiv r$ y $R \gg r$. Resolviendo el circuito, se obtiene $V_s(t) = \frac{V_1(t) + V_2(t)}{\frac{r}{R} + 2} = \frac{V_1(t) + V_2(t)}{2}$ dado que $R \gg r$.

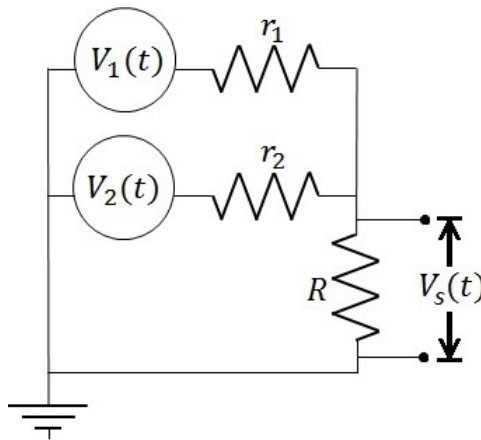


Figura 1: Circuito sumador con $R \gg r_1, r_2$, los valores de r_1 y r_2 permiten pesar en que proporción se suma cada coeficiente. En la experiencia se utilizó $r_1 = r_2 \equiv r$ y dos fuentes sinusoidales.

Por otro lado, teniendo una señal de entrada con batido $V(t)$, sería válido querer recuperar una de las dos señales $V_1(t)$ o $V_2(t)$ que la componen, eliminando la otra. Aunque podría nuevamente utilizarse el circuito RCL descrito más arriba, un circuito RCL antiresonante (donde la capacitancia C y la inductancia L están en paralelo) puede resultar más adecuado. Esto es debido a que muchas veces, una señal no sinusoidal $S(t)$ de período 2τ se *modula* utilizando una señal sinusoidal $V_m(t) = A \cdot \cos(\omega t)$ (llamada moduladora), generando una nueva señal $S'(t) = S(t) + A \cdot \cos(\omega t)$. En este caso, $S(t)$ es una suma de infinitas sinusoides como se explicó más arriba y un RLC resonante solo permitiría que una de estas señales atravesase el filtro.

Un circuito RLC antiresonante, sin embargo, elimina las señales sinusoidales cuya frecuencia sea $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. El ancho de banda resulta para este caso $\Delta\omega = \frac{1}{(R_L + R)C}$. En resumen,

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\Delta\omega = \frac{1}{(R_L + R)C} \quad (6)$$

Por lo tanto, si se conoce la frecuencia ω de la moduladora y se cumple que $|\omega - \frac{pi}{\tau}n| \gg \Delta\omega \forall n$, resulta posible recuperar la señal $S(t)$ a la salida del filtro. Para el caso de dos sinusoides, se busca que $|\omega_1 - \omega_2| \gg \Delta\omega$.

2. Desarrollo experimental

Durante esta experiencia se utilizó un generador de funciones de dos canales capaz de generar diferencias de potencial $V(t)$ a frecuencias con un error relativo del 0,01 % en un rango entre $1\mu\text{Hz}$ y 5MHz . El voltaje *pico-pico* tiene un error relativo del 1 % para el rango de voltaje utilizado ($2\text{V} - 20\text{V}$). Además, se utilizó una resistencia variable por décadas en el intervalo ($1\Omega - 11110\Omega$), una capacitancia variable por décadas en el intervalo ($1\text{nF} - 1110\text{nF}$) y una inductancia variable por décadas en el intervalo ($1\text{mH} - 1110\text{mH}$). Usando un multímetro digital se midieron los valores utilizados en todos estos elementos junto con su precisión que era de la forma $\pm(1\% + 2d)$ para la resistencia, $\pm(0,7\% + 5d)$ para la capacitancia y $(0,7\% + 5d)$ para la inductancia; además de comprobar la continuidad de los cables utilizados.

Se utilizó además un osciloscopio digital con dos canales de entrada capaces de medir diferencias de potencial entre sus dos terminales en un rango de 2mV a 5V con un error relativo del 3 % del valor *pico-pico*. El osciloscopio también contaba con un programa de adquisición de datos el cual permitía importar en una computadora las mediciones en su pantalla para luego ser analizadas.

A la hora de medir voltaje, fue necesario asegurarse que el cable a tierra del osciloscopio estuviera conectado al cable a tierra del generador de funciones. Cuando se utilizaron ambos canales, se hicieron coincidir las 3 tierras.

2.1. Análisis de espectro

Como ya se explicó, para realizar el análisis del espectro de una señal es necesario separar la frecuencia $\omega_n = \frac{n\pi}{\tau}$ y filtrar el resto. Para ello se utilizó un circuito RLC resonante como el que muestra la **Figura 2**.

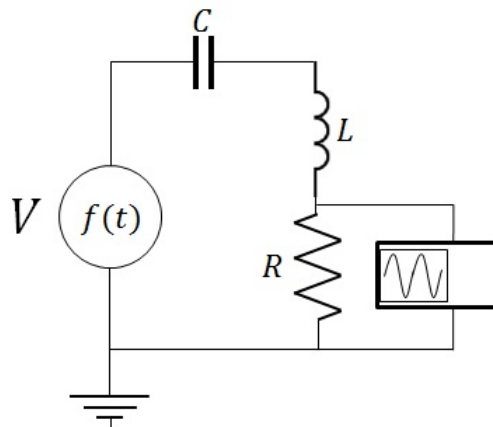


Figura 2: Circuito RLC utilizado para obtener el espectro de frecuencia de Fourier

El análisis se realizó para señales $f(t)$ de forma cuadrada y parabólica, las cuales tenían una amplitud $(3,90 \pm 0,02)\text{V}$ y $(10,0 \pm 0,2)\text{V}$ respectivamente. El objetivo fue poder calcular la transmisión y obtener los coeficientes dados por (4) y (5) en cada caso.

Para ello, al tener en cuenta la importancia del ancho de banda del circuito a la hora de filtrar señales, se usó una resistencia $R = (750 \pm 7)\Omega$ y una inductancia $L = (1003 \pm 5)mH$ la cual aportaba una resistencia $R_L = (243 \pm 2)\Omega$; por lo que de (3) se obtiene $\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = (158 \pm 3)Hz$ y una transmisión máxima $T_{max} = (0,75 \pm 0,01)$.

Además, es claro que las frecuencias que se desean filtrar son múltiplos de la frecuencia $f_s = \frac{1}{2\tau}$ por lo que no dependen de la forma de la señal. Debido a esto, se impusieron a las dos señales una frecuencia $f_s = (500 \pm 0,05)Hz$ para garantizar la relación $(994 \pm 14)Hz = \Delta\omega < \frac{\pi}{\tau} = (3150,0 \pm 0,3)Hz$.

De esta manera, el parámetro ω_0 podía variar únicamente variando la capacitancia C , teniendo la frecuencia de resonancia $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$.

Sabiendo esto, se determinaron los valores de C para que ω_0 coincidiese con los armónicos de f_s , como muestra la **Tabla 1**.

Armónico Buscado	Capacitancia C Utilizada (nF)	Frecuencia de resonancia f_0 (Hz)
1	101 ± 4	500 ± 11
2	$25,0 \pm 1,3$	1005 ± 29
3	$10,7 \pm 0,7$	1536 ± 54
4	$6,00 \pm 0,3$	2046 ± 56
5	$4,02 \pm 0,19$	2506 ± 65
6	$2,98 \pm 0,14$	2911 ± 76
7	$1,99 \pm 0,14$	3562 ± 107

Tabla 1: Capacitancias utilizadas para que ω_0 sea idéntica a los armónicos de $f_s = (500 \pm 0,05)Hz$

Y así, para cada uno de ellos, se midió la caída de potencial sobre la resistencia utilizando el osciloscopio.

Para garantizar que la frecuencia fuera la de resonancia, se hizo un barrido de mediciones en el intervalo de frecuencias $[440, 560]Hz$, con el fin de encontrar un máximo de transmisión, para cada f_0 .

2.2. Caracterización del sumador

Para obtener el fenómeno de batido entre señales se utilizaron los dos canales del generador de funciones para armar un circuito *sumador* como el que mostró la **Figura 1**, con valores de resistencias $r = (10,5 \pm 0,4)\Omega$ y $R = (200 \pm 3)\Omega$.

Antes de realizar las mediciones en las que se utilizó el *sumador* fue necesario determinar el rango dinámico del mismo. Para ellos, se programaron ambos generadores con una señal triangular con frecuencia $(500 \pm 0,05)Hz$ y una amplitud $(3,00 \pm 0,03)V$.

El objetivo era ver que la amplitud de salida era proporcional al promedio de las amplitudes de entrada; o en caso de no serlo, determinar el rango de voltaje de entrada en el cual la respuesta era lineal. Para ello, al adquirir los datos de la señal de salida, primero se comprobó que tuviera una forma triangular; y luego se calculó la transmisión observando el intervalo donde esta se puede ajustar por una función lineal. Así mismo se determinó si el sumador modificaba la frecuencia de salida, tomando un promedio entre los máximos consecutivos de la señal triangular de salida; y por otro lado, al comparar los tiempos entre máximos de la señal de entrada y salida se pudo ver si había desfase entre ellas.

2.3. Modulaci3n y filtrado

Una vez hecho esto, se cambiaron las formas de las se~al es de entrada por una sinusoidal en ambos canales para obtener una se~al de salida modulada.

Para filtrar una de las se~al es de entrada se utiliz3 un circuito RLC anti-resonante como el que muestra la **Figura 3**.

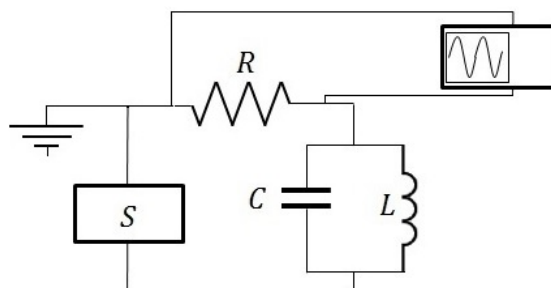


Figura 3: filtro

Donde el elemento **S** es el sumador y la diferencia de potencia que entrega es la que sale de sus terminales libres; la resistencia $R = (750 \pm 7)\Omega$, inductancia $L = (10,0 \pm 0,3)mH$ con resistencia $R_L = (5,8 \pm 0,1)\Omega$, y una capacitancia $C = (101,2 \pm 0,8)nF$.

Al quedar fijos estos par3metros, a partir de (6) se obtiene una frecuencia de anti-resonancia $f_0 = (5003 \pm 95)Hz$ y un ancho de banda $\Delta f = (2080 \pm 36)Hz$.

Entonces se utiliz3 una frecuencia $f_1 = (10844 \pm 1)Hz$ para un canal, y $f_2 = (5003 \pm 0,5)Hz$ para el otro, y ambas fuentes con una amplitud $V_0 = (3,00 \pm 0,03)V$.

3. Resultados

3.1. An3lisis de espectro

Como se dijo, la se~al de entrada era una cuadrada, cuyos coeficientes de Fourier vienen dado por (4). Sin embargo, para cada valor de C , se medían las transmisiones para distintas frecuencias de entrada. Los resultados que se obtuvieron para cada uno de estos barridos se ejemplifican en el gr3fico de la **Figura 4**, que representa el caso del primer arm3nico. Aquí puede verse claramente que el m3ximo se alcanza para $f_s = (500,00 \pm 0,05)Hz$.

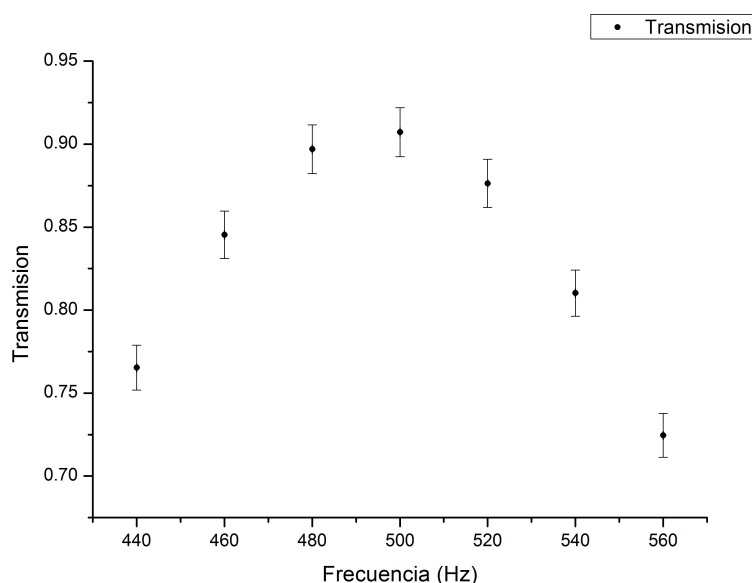


Figura 4: Gr3fico de transmisi3n en funci3n de frecuencia para $f_0 = (500 \pm 11)Hz$ correspondiente al primer arm3nico

Como puede verse en (4), para los armónicos pares la frecuencia $f_s = (500,00 \pm 0,05)$ debe resultar un máximo mientras que para los impares debe resultar, por lo menos, un mínimo. En todos los casos, el máximo o mínimo (dependiendo del armónico) se halló para $f_s = (500,00 \pm 0,05)$, con excepción del segundo armónico, cuyo mínimo se halló en $f = (490 \pm 10)Hz$ dado que el mismo valor mínimo se halló en $f_s = (480,00 \pm 0,05)Hz$ y en $f_s = (500,00 \pm 0,05)Hz$. El gráfico de la **Figura 5** muestra los valores de transmisión para cada armónico impar con su ajuste que arroja un $R-Square = 0,96953$ y un $\chi^2 = 54,38873$ que indican una gran subestimación de errores. Del ajuste se obtiene un $A = (0,91 \pm 0,09)$ que corresponde al valor $T_{max} \cdot \frac{4}{\pi} = (0,962 \pm 0,004)$, cuya diferencia es despreciable frente a los valores manejados, al igual que la ordenada $b = (-0,05 \pm 0,02)$.

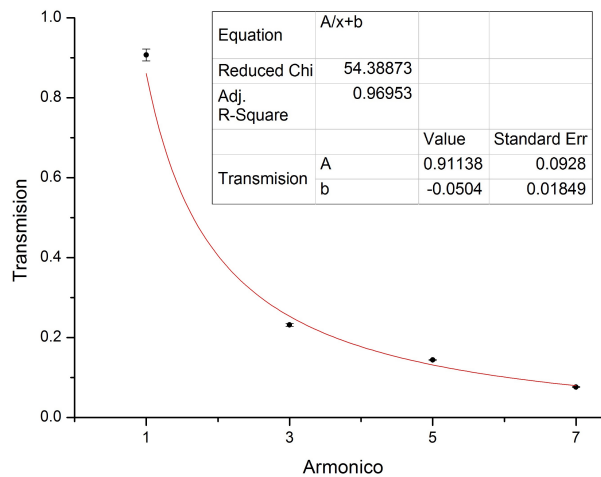


Figura 5: Transmisión en función del armónico analizado, cuyo ajuste arroja los parametros esperados

Para el caso de la señal parabólica, la ecuación (5) pone a todos los coeficientes en pie de igualdad, por lo que para los distintos valores de f_o se esperaría que $f_s = (500,00 \pm 0,05)Hz$ fuera un máximo de transmisión en el intervalo barrido. Esto se hizo de forma idéntica al análisis de la onda cuadrada, con la diferencia de que no todos los máximos se hallaron en $f_s = (500,00 \pm 0,05)Hz$ como muestra la **Tabla 2**.

Armónico	Frecuencia de máxima transmisión (Hz)
1	500,00 ± 0,05
2	500,00 ± 0,05
3	480,00 ± 0,05
4	480,00 ± 0,05
5	500,00 ± 0,05
6	480,00 ± 0,05

Tabla 2: Frecuencia de máxima transmisión para cada armónico analizado de una señal parabólica. En este caso, no todas las frecuencias son idénticas.

El gráfico de transmisión en función de armónico puede verse en la **Figura 6**, donde se utilizan los valores de máxima transmisión de cada barrido. Ajustando según (5), arroja un $R-Square = 0,89488$ y un $\chi^2 = 59,20285$, lo cual indica un ajuste medianamente confiable. El parámetro $A = (0,44 \pm 0,07)$ corresponde al parámetro $T_{max} \cdot \frac{4}{\pi^2} = (0,3060 \pm 0,0012)$, donde la diferencia ya no resulta despreciable, aun frente a los errores. Nuevamente, la ordenada $b = (0,011 \pm 0,005)$ resulta despreciable frente a las magnitudes manejadas. Cabe aclarar que el término $(-1)^n$ que aparece en (5) se ve absorbido por la fase ϕ_n de (2) dado que la prioridad era analizar la amplitud en módulo.

3.2. Caracterización del sumador

Para caracterizar el sumador, en primer lugar se procedió a chequear que el voltaje de salida, sea proporcional a la suma de los voltajes generados por las fuentes. Para esto, se realizó un gráfico que relacionara el voltaje de salida con el voltaje de entrada, como se ve en la **Figura 7**

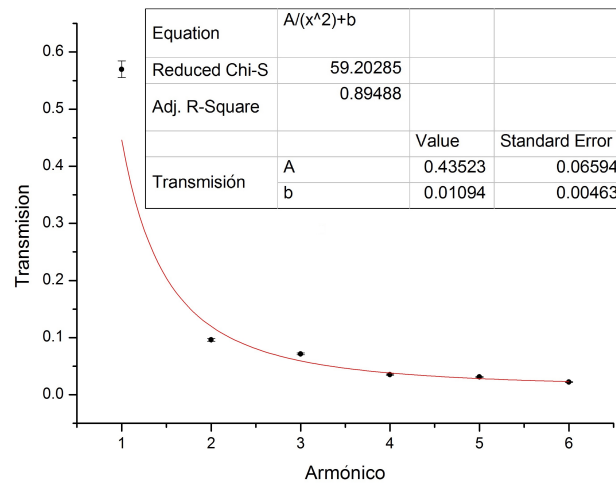


Figura 6: Transmisión en función del armónico analizado, donde se utilizaron los valores de transmisión máximos de cada barrido

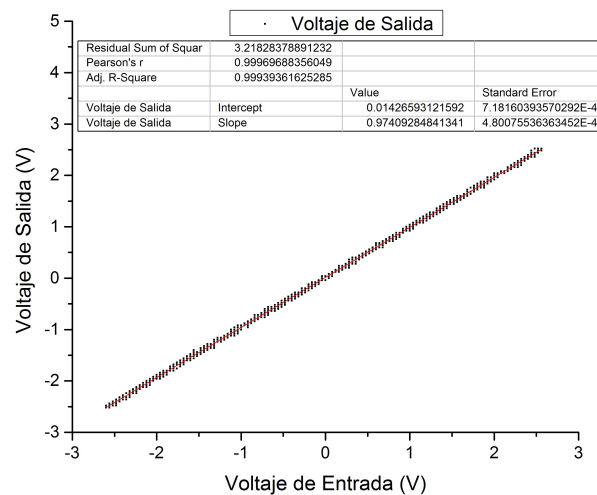


Figura 7: Gráfico que muestra la relación entre el voltaje de salida y el de entrada para un circuito con las características ilustradas en la **Figura 1**

Se puede ver que la relación es lineal. Además, el ajuste realizado confirma esa suposición, ya que arroja un $R - Square = 0,999999$. Teniendo entonces que la pendiente obtenida del ajuste es el factor de proporción del sumador, que resulto de $(0,9741 \pm 0,0005)$.

Posteriormente se construyó un gráfico de la señal de salida como se muestra en la **Figura 8**, y se relevaron los extremos a fin de poder encontrar la frecuencia con la que estos se repetían.

Con los datos obtenidos de los máximos, y luego de los mínimos, se calculó la diferencia entre cada par de valores consecutivos para obtener su periodo, para luego hacer un promedio y obtener la frecuencia $f = (500 \pm 1) \text{ hz}$ que, como se esperaba, coincide con la utilizada.

Finalmente, se verificó que el sumador no provocara ningún desfase en la señal de salida. Para esto realizó un gráfico de la señal de entrada en función del tiempo, que resulto idéntico al del voltaje de salida, y se relevó la posición de los extremos del mismo. Luego se los comparó, con las posiciones encontradas anteriormente, y la diferencia obtenida $D = (2 \pm 4) \mu\text{s}$ es el desfase provocado por el sumador. El cual resultó tres ordenes de magnitud menor que el periodo $\tau = (2 \pm 0,004) \text{ ms}$ utilizado, por lo cual se lo consideró despreciable.

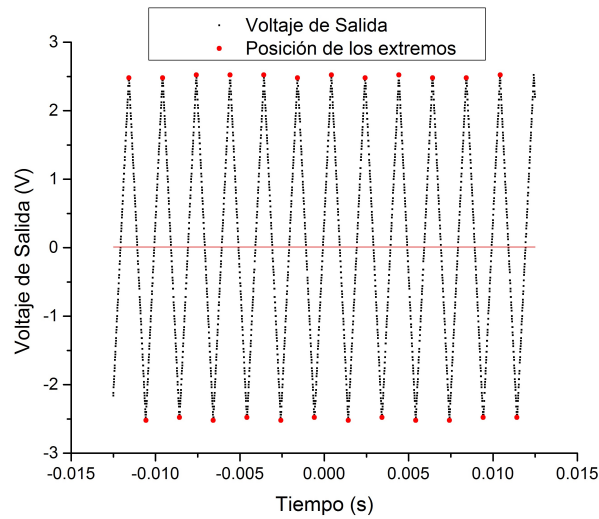


Figura 8: Gráfico que muestra el voltaje de salida en función del tiempo. Los puntos de mayor tamaño marca la posición de los extremos.

3.3. Modulación y filtrado

4. Conclusiones

5. Referencias

[1] Frank S. Crawford, *Berkeley physics course 3: Ondas*, 1994, Editorial Reverte S.A.