

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE FÍSICA



LABORATORIO 3

Análisis espectral y filtrado de batidos

Autores:

ANDREU, Gonzalo
MALPARTIDA, Bryan
PUGLIESE, Facundo

9 de Marzo de 2016

Resumen

El siguiente trabajo tuvo como objetivo estudiar el espectro de frecuencias de distintas señales. Para ello se utilizó como fuente un generador de funciones con dos canales de salida, y un osciloscopio como herramienta de medición.

En primer lugar, se usaron señales cuadradas y parabólicas para calcular los coeficientes de sus respectivas series de Fourier. Para lograr obtener solo un término de cada serie se utilizó un circuito RLC resonante, donde la frecuencia de resonancia se variaba para que coincidiese con los armónicos de la señal. Por otro lado, utilizando un circuito sumador previamente caracterizado; se generó un *batido* entre dos señales sinusoidales con misma amplitud y distinta frecuencia. Luego, utilizando un circuito RLC anti-resonante se buscó filtrar una de las señales de entrada. En este caso, se mantuvo constante la frecuencia de anti-resonancia, por lo cual se estudió la respuesta del circuito tanto en la forma de la señal como su espectro de frecuencias.

1. Introducción

Este trabajo se centra alrededor del análisis de *señales*. Una *señal* es una diferencia de potencial $S(t)$ que se genera en alguna sección del circuito. En su forma más general, se puede definir una señal $S(t) = V_o \cdot f(t)$ donde V_o es un voltaje constante que representa la *amplitud* y $f(t)$ es una función del tiempo que define el *tipo de señal* y es la que define el comportamiento del circuito. Para un circuito compuesto por resistencias R , capacitancias C e inductancias L , este comportamiento puede ser muy complicado de predecir teóricamente. Sin embargo, para una señal del tipo $V(t) = V_o \cos(\omega t)$ el comportamiento está ampliamente estudiado y resulta sencillo de predecir.

Es aquí donde entra en juego la *Serie de Fourier*, que consiste en escribir una función periódica $f(t)$ como una serie de senos y cosenos pesados por coeficientes a_n y b_n según. Funciones que no sean periódicas pero que estén definidas en un intervalo finito $[-\tau; \tau]$ también pueden expandirse de forma periódica. Si 2τ es el período (o la longitud del intervalo) de la función $f(t)$, se tiene que

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{\tau}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{\tau}t\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos\left(\frac{n\pi}{\tau}t + \phi_n\right) \quad (1)$$

donde $f_n = \frac{n}{2\tau}$ es la frecuencia del n -ésimo *armónico* y

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{\tau}t\right) dt \\ b_n &= \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} f(t) \sin\left(\frac{n\pi}{\tau}t\right) dt \\ \alpha_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \phi_n &= -\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \end{aligned} \quad (2)$$

Entonces resulta posible considerar a toda señal $S(t)$ como una suma de infinitas señales sinusoidales y gracias a la linealidad de los componentes R , C y L , el comportamiento será igual al comportamiento de la suma. Es más, considerando que vale $a_n \rightarrow 0$ y $b_n \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$, cada término de la sumatoria tendrá menos peso que los anteriores. Por lo tanto, es posible estimar el comportamiento aproximado del circuito como si la señal fuera una suma finita de sinusoides. Para una función $f(t) \in C^k$, cuanto mayor suave sea k , más rápido será este decaimiento y menos términos de la serie se necesitarán para aproximar el comportamiento. Bajo esta idea, si fuera posible filtrar una única frecuencia $\omega_n = \frac{n\pi}{\tau}$, se obtendría una señal de salida sinusoidal cuya amplitud sería α_n .

Este filtro puede ser un circuito RLC resonante, el cual consiste en una fuente $V(t) = V_o \cos(\omega t)$, un capacitor C , una inductancia L (de resistencia interna R_L) y una resistencia R conectados en serie. Si se mide la amplitud de la caída de potencial sobre la resistencia R resulta de la forma $V_R = V_o \frac{R}{|Z|}$ donde $Z = (R + R_L) + i(\omega L - \frac{1}{\omega C})$. Definiendo la *transmisión* $T(\omega) = \frac{V_R}{V_o}$ resulta $T(\omega) = \frac{R}{|Z|}$ cuyo máximo se encuentra en $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ tal que $T_{max} = T(\omega_o) = \frac{R}{R+R_L}$. Por último, definiendo una *banda de resonancia* $[\omega_1; \omega_2]$ tal que $\frac{T_{max}}{\sqrt{2}} \leq T(\omega) \leq T_{max}$ para todo $\omega \in [\omega_1; \omega_2]$ y el *ancho de banda* $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ resulta $\Delta\omega = \frac{R_L + R}{L}$. En resumen,

$$\begin{aligned} \omega_o &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \Delta\omega &= \frac{R_L + R}{L} \end{aligned} \quad (3)$$

Bajo esta idea, es posible tomar una señal cualquiera $S(t)$ y, mediante un circuito RCL resonante, filtrar una única frecuencia $\omega_n = \frac{n\pi}{\tau}$ fijando la frecuencia natural del circuito $\omega_o = \omega_n$. Si la campana es lo suficientemente fina, lo que implica un $\Delta\omega \ll \frac{\pi}{\tau}$, es posible obtener una transmisión máxima para cada ω_o $T_{max}(\omega_n) = \alpha_n$.

Por lo tanto, si se envía una señal cuadrada de la forma $C(t) = \begin{cases} -V_o & t \in [-\tau, 0) \\ V_o & t \in [0, \tau] \end{cases}$ su serie de Fourier resulta $C(t) = V_o \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin(\frac{\pi}{\tau}(2k+1)t)$ de forma tal que los coeficientes α_n resultan

$$\alpha_n(C) = \frac{2V_o(1-(-1)^n)}{n\pi} \quad (4)$$

Similarmente, para el caso de una señal *parabolica* de la forma $P(t) = V_o \cdot (\frac{t}{\tau})^2$ definida en $t \in [-\tau, \tau]$ se obtiene a serie de Fourier $P(t) = \frac{V_o}{3} + V_o \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{(n\pi)^2} \cos(\frac{\pi}{\tau}nt)$ cuyos coeficientes resultan

$$\alpha_n(P) = \frac{4V_o(-1)^n}{(n\pi)^2} \quad (5)$$

Siguiendo la idea anterior, es posible considerar el *espectro de potencia* de una señal en un intervalo de tiempo $[t_0; t_1]$ como una función $\alpha^2(\omega) = |\frac{1}{t_1-t_0} \int_{t_0}^{t_1} f(t).e^{i\omega t} dt|^2 = |\frac{1}{t_1-t_0} \int_{t_0}^{t_1} f(t).\cos(\omega t)dt - \frac{i}{t_1-t_0} \int_{t_0}^{t_1} f(t).\sin(\omega t)dt|^2 = (\frac{1}{t_1-t_0} \int_{t_0}^{t_1} f(t).\cos(\omega t)dt)^2 + (\frac{1}{t_1-t_0} \int_{t_0}^{t_1} f(t).\sin(\omega t)dt)^2$. En esta definición puede verse que si $t_1 - t_0 = 2\tau$, $\alpha(n\frac{\pi}{\tau}) = \alpha_n$ para una función $f(t)$ de período 2τ . La operación *FFT* o *Fast Fourier Transformation* toma una función definida en este intervalo $[t_0; t_1]$ y grafica su respectivo espectro de potencia $\alpha^2(\omega)$. Por lo tanto, al analizar los coeficientes de Fourier se está analizando la potencia espectral de una señal para un conjunto de frecuencias determinado, que en el caso de una cuadrada son sus máximos y, por ende, los que más peso tienen.

Ahora, si se supone una señal de la forma $V(t) = A.\cos(\omega_1 t) + A.\cos(\omega_2 t)$ que resulta de la suma de dos señales sinusoidales, ocurre un efecto denominado *batido*. Esto se da gracias a que, mediante identidades trigonométricas, se obtiene $V(t) = 2A.\cos(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t)\sin(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t)$ donde el primer término se llama *modulador* y el segundo *portador*. Por lo tanto, si se suman dos señales de entrada $V_1(t) = V_o.\cos(\omega_1 t)$ y $V_2(t) = V_o.\cos(\omega_2 t)$, la señal de salida $V(t)$ tendrá una forma que no será sinusoidal a primera vista.

Para lograr esta suma, puede montarse un circuito como el de la **Figura 1**, donde se configuran las resistencias según $r_1 = r_2 \equiv r$ y $R \gg r$. Resolviendo el circuito, se obtiene $V_s(t) = \frac{V_1(t)+V_2(t)}{\frac{r}{R}+2} = \frac{V_1(t)+V_2(t)}{2}$ dado que $R \gg r$.

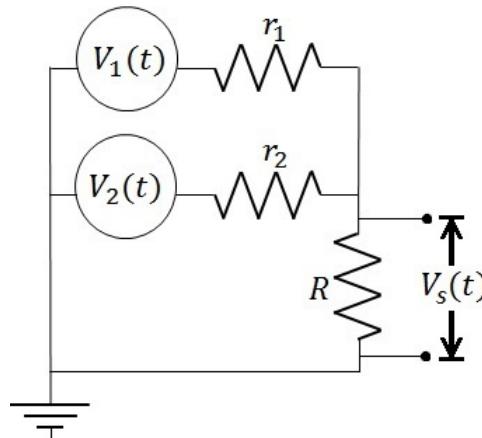


Figura 1: Circuito sumador con $R \gg r_1, r_2$, los valores de r_1 y r_2 permiten pesar en que proporcion se suma cada coeficiente. En la experiencia se utilizó $r_1 = r_2 \equiv r$ y dos fuentes sinusoidales.

Por otro lado, teniendo una señal de entrada con batido $V(t)$, sería válido querer recuperar una de las dos señales $V_1(t)$ o $V_2(t)$ que la componen, eliminando la otra. Aunque podría nuevamente utilizarse el circuito RCL descripto más arriba, un circuito RCL antiresonante (donde la capacitancia C y la inductancia L están en paralelo) puede resultar más adecuado. Esto es debido a que muchas veces, una señal no sinusoidal $S(t)$ de período 2τ se *modula* utilizando una señal sinusoidal $V_m(t) = A.\cos(\omega t)$ (llamada *moduladora*), generando una nueva señal $S'(t) = S(t) + A.\cos(\omega t)$. En este caso, $S(t)$ es una suma de infinitas sinusoides como se explicó más arriba y un RLC resonante solo permitiría que una de estas señales atravesie el filtro.

Un circuito RLC antiresonante, sin embargo, elimina las señales sinusoidales cuya frecuencia sea $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. El *ancho de banda* resulta para este caso $\Delta\omega = \frac{1}{(R_L+R)C}$. En resumen,

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \Delta\omega &= \frac{1}{(R_L+R)C}\end{aligned}\tag{6}$$

Por lo tanto, si se conoce la frecuencia ω de la moduladora y se cumple que $|\omega - \frac{p_i}{\tau}n| \gg \Delta\omega \forall n$, resulta posible recuperar la señal $S(t)$ a la salida del filtro. Para el caso de dos sinusoides, se busca que $|\omega_1 - \omega_2| \gg \Delta\omega$.

2. Desarrollo experimental

Durante esta experiencia se utilizó un generador de funciones de dos canales capaz de generar diferencias de potencial $V(t)$ a frecuencias con un error relativo del 0,01 % en un rango entre $1\mu\text{Hz}$ y 5MHz . El voltaje *pico-pico* tiene un error relativo del 1 % para el rango de voltaje utilizado (2V – 20V). Además, se utilizó una resistencia variable por décadas en el intervalo (1Ω – 11110Ω), una capacitancia variable por décadas en el intervalo (1nF – 1110nF) y una inductancia variable por décadas en el intervalo (1mH – 1110mH). Usando un multímetro digital se midieron los valores utilizados en todos estos elementos junto con su precisión que era de la forma $\pm(1 \% + 2d)$ para la resistencia, $\pm(0,7 \% + 5d)$ para la capacitancia y $(0,7 \% + 5d)$ para la inductancia; ademas de comprobar la continuidad de los cables utilizados.

Se utilizó además un osciloscopio digital con dos canales de entrada capaces de medir diferencias de potencial entre sus dos terminales en un rango de 2mV a 5V con un error relativo del 3 % del valor *pico-pico*, y una función *FFT* capas mostrar su espectro de frecuencias. El osciloscopio también contaba con un programa de adquisición de datos el cual permitía importar en una computadora las mediciones en su pantalla para luego ser analizadas.

A la hora de medir voltaje, fue necesario asegurarse que el cable a tierra del osciloscopio estuviera conectado al cable a tierra el generador de funciones. Cuando se utilizaron ambos canales, se hicieron coincidir las 3 tierras.

2.1. Análisis de espectro

Como ya se explicó, para realizar el análisis del espectro de una señal es necesario separar la frecuencia $\omega_n = \frac{n\pi}{\tau}$ y filtrar el resto. Para ello se utilizó un circuito RLC resonante como el que muestra la **Figura 2**.

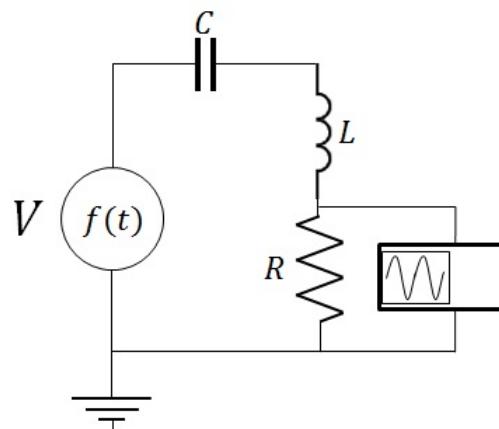


Figura 2: Circuito RLC utilizado para obtener el espectro de frecuencia de Fourier

El análisis se realizó para señales $f(t)$ de forma cuadrada y parabólica, las cuales tenían una amplitud $(3,90 \pm 0,02)V$ y $(10,0 \pm 0,2)V$ respectivamente. El objetivo fue poder calcular la transmisión y obtener los coeficientes dados por (4) y (5) en cada caso.

Para ello, al tener en cuenta la importancia del ancho de banda del circuito a la hora de filtrar señales, se usó una resistencia $R = (750 \pm 7)\Omega$ y una inductancia $L = (1003 \pm 5)mH$ la cual aportaba una resistencia $R_L = (243 \pm 2)\Omega$; por lo que de (3) se obtiene $\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = (158 \pm 3)Hz$ y una transmisión máxima $T_{max} = (0,75 \pm 0,01)$.

Ademas, es claro que las frecuencias que se desean filtrar son múltiplos de la frecuencia $f_s = \frac{1}{2\tau}$ por lo que no dependen de la forma de la señal. Debido a esto, se impusieron a las dos señales una frecuencia $f_s = (500 \pm 0,05)Hz$ para garantizar la relación $(994 \pm 14)Hz = \Delta\omega \ll \frac{\pi}{\tau} = (3150,0 \pm 0,3)Hz$.

De esta manera, el parámetro ω_0 podía variar únicamente variando la capacitancia C , teniendo la frecuencia de resonancia $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$.

Sabiendo esto, se determinaron los valores de C para que ω_0 coincidiese con los armónicos de f_s , como muestra la **Tabla 1**.

Armónico Buscado	Capacitancia C Utilizada (nF)	Frecuencia de resonancia f_0 (Hz)
1	101 ± 4	500 ± 11
2	$25,0 \pm 1,3$	1005 ± 29
3	$10,7 \pm 0,7$	1536 ± 54
4	$6,00 \pm 0,3$	2046 ± 56
5	$4,02 \pm 0,19$	2506 ± 65
6	$2,98 \pm 0,14$	2911 ± 76
7	$1,99 \pm 0,14$	3562 ± 107

Tabla 1: Capacitancias utilizadas para que ω_0 sea idéntica a los armónicos de $f_s = (500 \pm 0,05)Hz$

Y así, para cada uno de ellos, se midió la caída de potencial sobre la resistencia utilizando el osciloscopio.

Para garantizar que la frecuencia fuera la de resonancia, se hizo un barrido de mediciones en el intervalo de frecuencias $[440,560]Hz$, con el fin de encontrar un máximo de transmisión, para cada f_0 .

2.2. Caracterización del sumador

Para obtener el fenómeno de batido entre señales se utilizaron los dos canales del generador de funciones para armar un circuito *sumador* como el que mostró la **Figura 1**, con valores de resistencias $r = (10,5 \pm 0,4)\Omega$ y $R = (200 \pm 3)\Omega$.

Antes de realizar las mediciones en las que se utilizó el *sumador* fue necesario determinar el rango dinámico del mismo. Para ellos, se programaron ambos generadores con una señal triangular con frecuencia $(500 \pm 0,05)Hz$ y una amplitud $(3,00 \pm 0,03)V$.

El objetivo era ver que la amplitud de salida era proporcional al promedio de las amplitudes de entrada; o en caso de no serlo, determinar el rango de voltaje de entrada en el cual la respuesta era lineal. Para ello, al adquirir los datos de la señal de salida, primero se comprobó que tuviera una forma triangular; y luego se calculó la transmisión observando el intervalo donde esta se puede ajustar por una función lineal. Así mismo se determinó si el sumador modificaba la frecuencia de salida, tomando un promedio entre los máximos consecutivos de la señal triangular de salida; y por otro lado, al comparar los tiempos entre máximos de la señal de entrada y salida se pudo ver si había desfasaje entre ellas.

2.3. Modulación y filtrado

Una vez hecho esto se cambiaron las formas de las señales de entrada por una sinusoidal, con frecuencias distintas, en ambos canales para obtener una señal de salida modulada.

Para filtrar una de las señales de entrada se utilizó un circuito RLC anti-resonante como el que muestra la **Figura 3**.

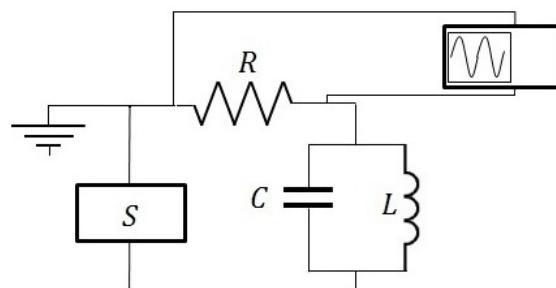


Figura 3: Circuito RLC anti-resonante utilizado para filtrar una de las señales dadas por el sumador S

Donde el elemento S es el sumador y la diferencia de potencia que entrega es la que sale de sus terminales libres; la resistencia $R = (7500 \pm 70)\Omega$, inductancia $L = (10,0 \pm 0,3)mH$ con resistencia $R_L = (5,8 \pm 0,1)\Omega$, y una capacitancia $C = (101,2 \pm 0,8)nF$.

Al quedar fijos estos parámetros, a partir de (6) se obtiene una frecuencia de anti-resonancia $f_0 = (5003 \pm 95)Hz$ y un ancho de banda $\Delta f = (210 \pm 4)Hz$.

Entonces se utilizó una frecuencia $f_1 = (10844 \pm 1)Hz$ para un canal, y $f_2 = (5003 \pm 0,5)Hz$ para el otro, y ambas fuentes con una amplitud $V_0 = (3,00 \pm 0,03)V$.

El objetivo fue observar el filtrado de la señal con frecuencia $f_2 = (5003 \pm 0,5)Hz$, dado que coincidía con la frecuencia de anti-resonancia $f_0 = (5003 \pm 95)Hz$. Para ello se midió la respuesta del circuito RLC para distintas frecuencias f_2 cercanas a f_0 y se calculó su espectro de frecuencias, para compararlas con la señal de entrada.

En paralelo, se utilizó la función FFT del osciloscopio para realizar la misma comparación entre señales.

3. Resultados

3.1. Análisis de espectro

Como se dijo, la señal de entrada era una cuadrada, cuyos coeficientes de Fourier vienen dados por (4). Sin embargo, para cada valor de C , se median las transmisiones para distintas frecuencias de entrada. Los resultados que se obtuvieron para cada uno de estos barridos se ejemplifican en el gráfico de la Figura 4, que representa el caso del primer armónico. Aquí puede verse claramente que el máximo se alcanza para $f_s = (500,00 \pm 0,05)Hz$.

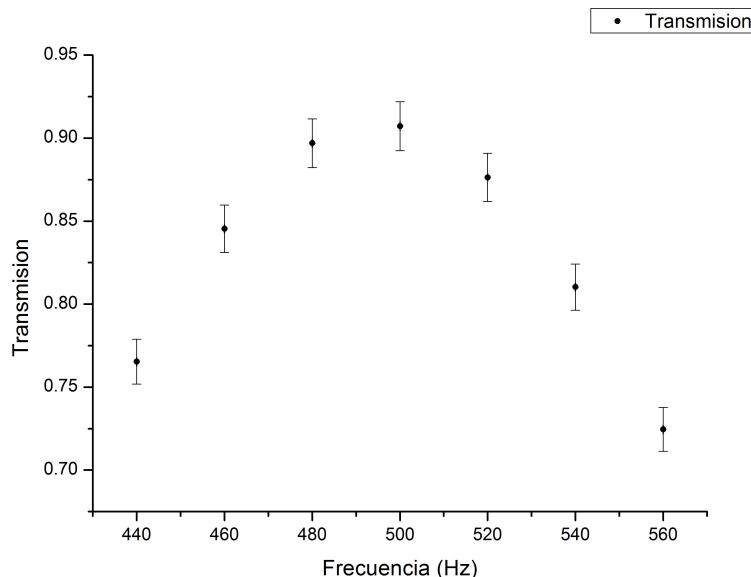


Figura 4: Gráfico de transmisión en función de frecuencia para $f_0 = (500 \pm 11)Hz$ correspondiente al primer armónico

Como puede verse en (4), para los armónicos pares la frecuencia $f_s = (500,00 \pm 0,05)$ debe resultar un máximo mientras que para los impares debe resultar, por lo menos, un mínimo. En todos los casos, el máximo o mínimo (dependiendo del armónico) se halló para $f_s = (500,00 \pm 0,05)$, con excepción del segundo armónico, cuyo mínimo se halló en $f = (490 \pm 10)\text{Hz}$ dado que el mismo valor mínimo se halló en $f_s = (480,00 \pm 0,05)\text{Hz}$ y en $f_s = (500,00 \pm 0,05)\text{Hz}$. El gráfico de la **Figura 5** muestra los valores de transmisión para cada armónico impar con su ajuste que arroja un $R - Square = 0,96953$ y un $\chi^2 = 54,38873$ que indican una gran subestimación de errores. Del ajuste se obtiene un $A = (0,91 \pm 0,09)$ que corresponde al valor $T_{max} \cdot \frac{4}{\pi} = (0,962 \pm 0,004)$, que resulta indistinguible dentro del error mientras que la ordenada $b = (-0,05 \pm 0,02)$ resulta despreciable frente a las magnitudes manejadas. Es importante destacar que los mínimos de transmisión al analizar los armónicos pares nunca llegaron a ser menores a 0,1, claramente mayores a cero a pesar de ser mínimos.

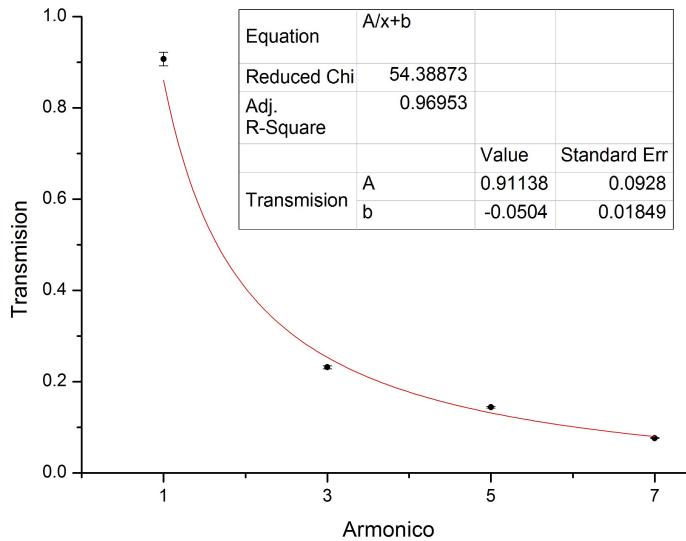


Figura 5: Transmisión en función del armónico analizado, cuyo ajuste arroja los parámetros esperados

Para el caso de la señal parabólica, la ecuación (5) pone a todos los coeficientes en pie de igualdad, por lo que para los distintos valores de f_0 se esperaría que $f_s = (500,00 \pm 0,05)\text{Hz}$ fuera un máximo de transmisión en el intervalo barrido. Esto se hizo de forma idéntica al análisis de la onda cuadrada, con la diferencia de que no todos los máximos se hallaron en $f_s = (500,00 \pm 0,05)\text{Hz}$ como muestra la **Tabla 2**.

Armónico	Frecuencia de máxima transmisión (Hz)
1	$500,00 \pm 0,05$
2	$500,00 \pm 0,05$
3	$480,00 \pm 0,05$
4	$480,00 \pm 0,05$
5	$500,00 \pm 0,05$
6	$480,00 \pm 0,05$

Tabla 2: Frecuencia de máxima transmisión para cada armónico analizado de una señal parabólica. En este caso, no todas las frecuencias son identicas.

El gráfico de transmisión en función de armónico puede verse en la **Figura 6**, donde se utilizan los valores de máxima transmisión de cada barrido. Ajustando según (5), arroja un $R - Square = 0,89488$ y un $\chi^2 = 59,20285$, lo cual indica un ajuste medianamente confiable. El parámetro $A = (0,44 \pm 0,07)$ corresponde al parámetro $T_{max} \cdot \frac{4}{\pi^2} = (0,3060 \pm 0,0012)$, donde la diferencia no resulta despreciable, aun frente a los errores. Nuevamente, la ordenada $b = (0,011 \pm 0,005)$ resulta despreciable frente a las magnitudes manejadas. Cabe aclarar que el término $(-1)^n$ que aparece en (5) se ve absorbido por la fase ϕ_n de (2) dado que la prioridad era analizar el módulo de la amplitud.

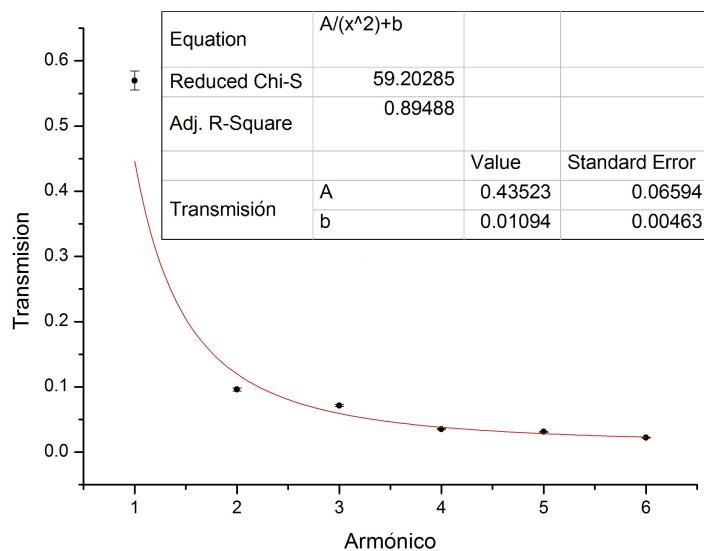


Figura 6: Transmisión en función del armónico analizado, donde se utilizaron los valores de transmisión máximos de cada barrido

3.2. Caracterización del sumador

Para caracterizar el sumador, en primer lugar se procedió a chequear que el voltaje de salida sea proporcional a la suma de los voltajes generados por las fuentes. Para esto, se realizó un gráfico que relacionara el voltaje de salida con el voltaje de entrada, como se ve en la Figura 7

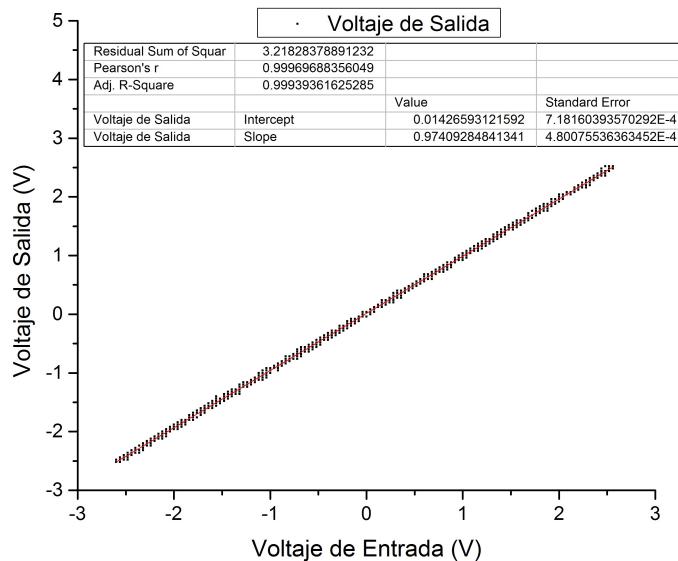


Figura 7: Gráfico que muestra la relación entre el voltaje de salida y el de entrada para un circuito con las características ilustradas en la Figura 1

Se puede ver que la relación es lineal. Además, el ajuste realizado confirma esa suposición, ya que arroja un $R - Square = 0,99939$. Teniendo entonces que la pendiente obtenida del ajuste es el factor de proporción del sumador, que resultó de $(0,9741 \pm 0,0005)$.

Posteriormente se construyó un gráfico de la señal de salida como se muestra en la Figura 8, y se relevaron los extremos a fin de poder encontrar la frecuencia con la que estos se repetían.

Con los datos obtenidos de los máximos, y luego de los mínimos, se calculó la diferencia entre cada par de valores consecutivos para obtener su periodo, para luego hacer un promedio y obtener la frecuencia $f = (500 \pm 1)Hz$ que, como se esperaba, coincide con la utilizada.

Finalmente, se verificó que el sumador no provocara ningún desfasaje en la señal de salida. Para

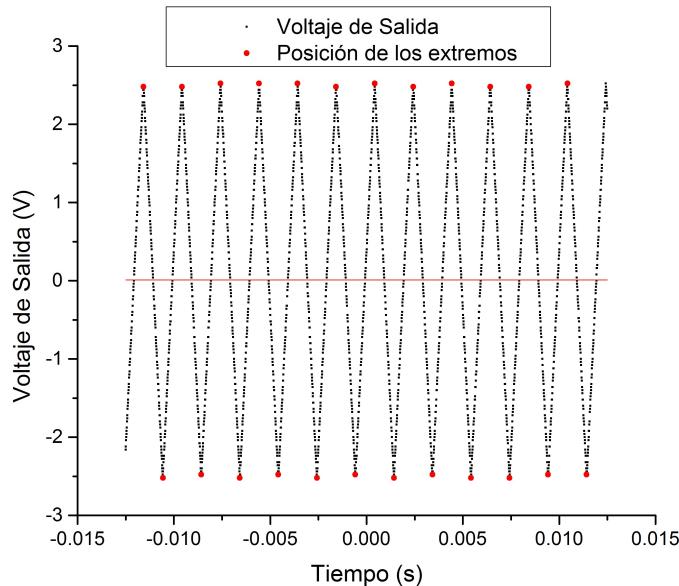


Figura 8: Gráfico que muestra el voltaje de salida en función del tiempo. Los puntos de mayor tamaño marca la posición de los extremos.

estos realizó un gráfico de la señal de entrada en función del tiempo, que resultó idéntico al del voltaje de salida, y se relevó la posición de los extremos del mismo. Luego se los comparó, con las posiciones encontradas anteriormente, y la diferencia obtenida $D = (2 \pm 4)\mu s$ es el desfasaje provocado por el sumador. El cual resultó tres órdenes de magnitud menor que el periodo $\tau = (2 \pm 0,004)ms$ utilizado, por lo cual se lo consideró despreciable.

3.3. Modulación y filtrado

Para esta parte de la experiencia se realizaron batidos entre distintas señales. La Figura 9 muestra el resultado de enviar dos señales sinusoidales distintas con el *sumador*.

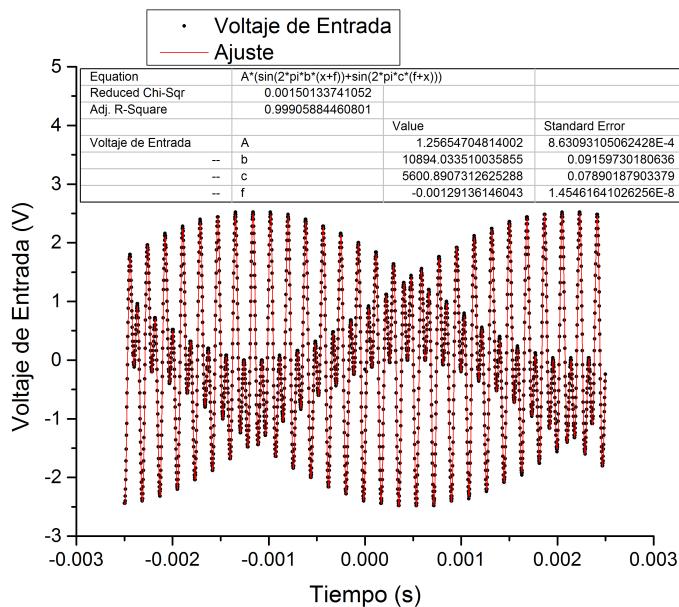


Figura 9: Gráfico que muestra el resultado de enviar dos señales sinusoidales distintas con el dispositivo ilustrado en la Figura 1.

Sobre el gráfico se realizó un ajuste utilizando una suma de senos para verificar que efectivamente

fuera el batido esperado. Tanto el coeficiente de $R - Square = 0,99906$ muy cercano a uno, como los valores para la frecuencia alta $b = (10894,03 \pm 0,09)Hz$ y baja $c = (5600,89 \pm 0,08)Hz$ que coinciden con las utilizadas, garantizan que se obtuvo la señal buscada.

Esta señal se envió a través del circuito ilustrado en la **Figura 3**, y se midió a la salida lo que se muestra en la **Figura 10**. En esta figura, no se puede apreciar alguna diferencia importante entre los dos graficos. Esto era de esperarse ya que la frecuencia de antiresonancia del circuito era $f_0 = (5003 \pm 95)Hz$ y no coincide con ninguna de las dos.

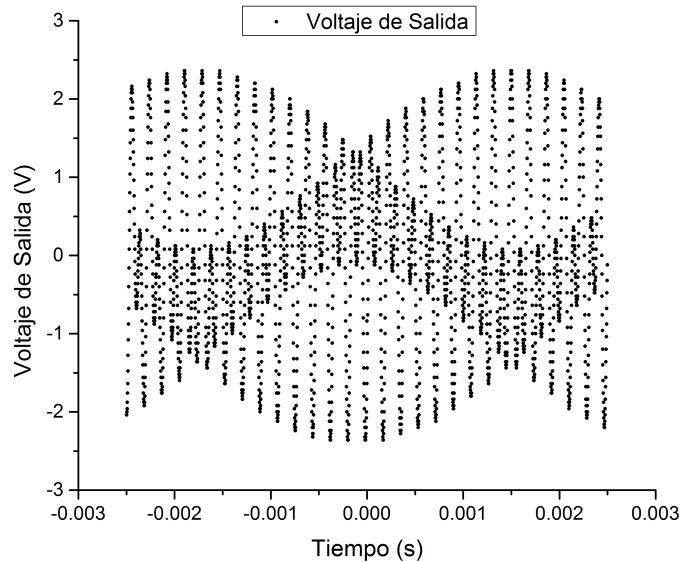
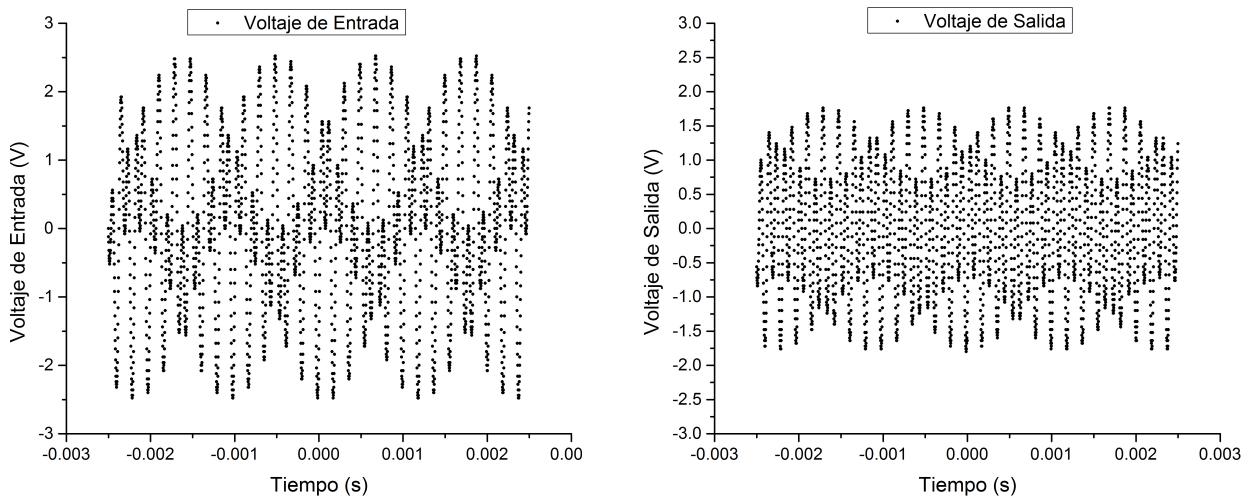


Figura 10: Gráfico que muestra el resultado de enviar la señal de la Figura 9 a través de un circuito RCL anti-resonante utilizado como filtro.

Para una frecuencia baja más cercana a la frecuencia de antiresonancia $f = (5005,5 \pm 0,1)Hz$ se obtuvieron los graficos de la **Figura 11**



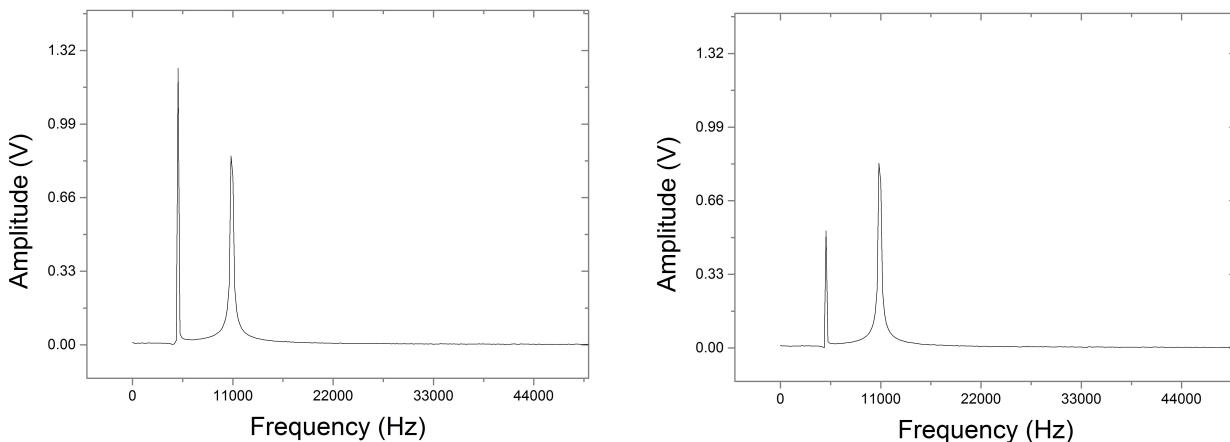
(a) Señal de entrada del filtro.

(b) Señal de salida del filtro.

Figura 11: Gráficos que muestran la suma de dos señales sinusoidales, de las cuales una es cercana a la frecuencia de antiresonancia del circuito utilizado como filtro.

A diferencia del par anterior, existe una diferencia apreciable entre los gráficos, que es consis-

tente con el hecho de que una de las señales debería haberse visto atenuada por el filtro. Para poder observar mejor esta atenuación, se realizó un FFT mediante el programa de procesamiento de datos OriginLab. La **Figura 12** muestra los resultados de realizar la *transformada de Fourier* a cada uno de los graficos anteriores.



(a) Transformada de Fourier del grafico de la **Figura 11a**. (b) Transformada de Fourier del grafico de la **Figura 11b**.

Figura 12: Análisis espectral que permite apreciar la la amplitud de cada sinusoides por separado

En el gráfico de la **Figura 12b** se puede apreciar un decaimiento de la amplitud de la señal de frecuencia $f_{baja} = (5005,5 \pm 0,1)\text{Hz}$ respecto del gráfico de la **Figura 12a**, mientras que la correspondiente a la de frecuencia alta, $f_{alta} = (10844 \pm 1)\text{Hz}$, se mantiene sin cambios apreciables.

Finalmente se procedió a utilizar el FFT realizado por el osciloscopio para cada medición, y a partir de esos datos se construyó un gráfico que compara la transferencia de las dos señales utilizadas en el *sumador*, variando solo la de frecuencia baja. Los resultados se muestran en la **Figura 13**

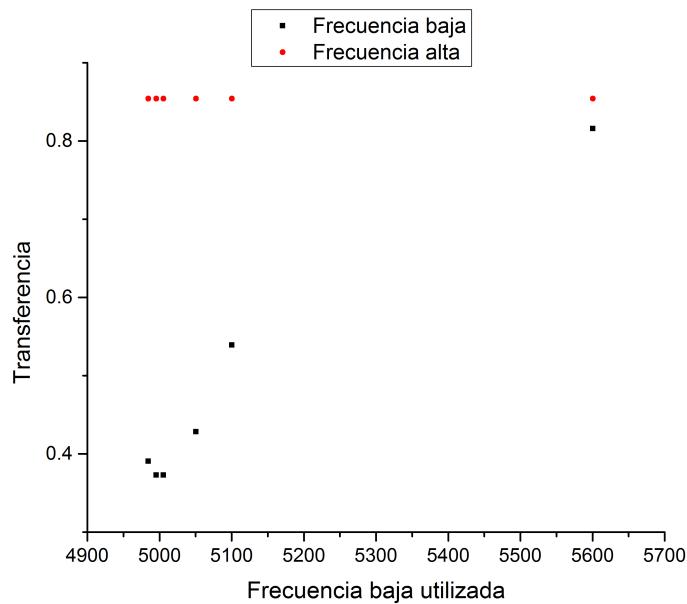


Figura 13: Comparación de la transferencia de un circuito RCL anti-resonante para una señal fija, alejada de su campana de anti-resonancia, y para una señal variable.

Puede verse en el gráfico de la **Figura 13** que la amplitud de la señal de frecuencia baja aumenta a medida que esta se aleja de la frecuencia de antiresonancia, mientras que la señal con frecuencia alta se mantiene sin cambios apreciables.

4. Conclusiones

Comenzando con el análisis de espectro, los resultados se amoldan bastante bien a lo esperado. Para el caso de la señal cuadrada, los extremos se hallaron en todos los casos en $f_s = (500,00 \pm 0,05)Hz$ según lo esperado, con la excepción del segundo armónico cuyo máximo se halló en $f = (490 \pm 10)Hz$, lo cual no contradice la teoría dado que la frecuencia $f_0^{(2)} = (1005 \pm 29)Hz$ del segundo armónico resulta indistinguible de $2f = (980 \pm 20)Hz$. Por lo tanto puede decirse que la frecuencia del segundo armónico de f_s era $f_0^{(2)}$. En el caso de la señal parabólica, puede verse en la **Tabla 2** que las frecuencias de máxima transmisión del tercero, cuarto y sexto armónico resultaron $f = (480,00 \pm 0,05)Hz$. Nuevamente, las frecuencias de los armónicos $f_0^{(3)} = (1536 \pm 54)Hz$, $f_0^{(4)} = (2046 \pm 56)Hz$ y $f_0^{(6)} = (2911 \pm 76)Hz$ tienen diferencias despreciables frente a las magnitudes manejadas con $3f = (1440,0 \pm 0,2)Hz$, $4f = (1920,0 \pm 0,2)Hz$ y $6f = (2880,0 \pm 0,3)Hz$, respectivamente.

Respecto al grafico de la **Figura 5**, el ajuste resulta bondadoso con un $R - Square = 0,96953$ mientras que el coeficiente $A = (0,91 \pm 0,09)$ resulta identico al valor $T_{max} \cdot \frac{4}{\pi} = (0,962 \pm 0,004)$, confirmando lo previsto por (4). Sin embargo, el ajuste de la **Figura 6** posee un $R - Square = 0,89488$ y un $A = (0,44 \pm 0,07)$ distinto a $T_{max} \cdot \frac{4}{\pi^2} = (0,3060 \pm 0,0012)$, lo cual dificulta asegurar la validez de (4).

Claramente, puede verse que los resultados obtenidos con la señal cuadrada son mucho más similares a lo esperado que los obtenidos para la parabólica, lo cual puede deberse a que el ancho de campana $\Delta f = (158 \pm 3)Hz$ no era lo suficientemente menor a $f_0 = (500 \pm 11)Hz$, por lo que a la hora de analizar el n -ésimo armónico, parte de los armónicos $(n-1)$ -ésimo y $(n+1)$ -ésimo atravesaba el filtro y afectaba la medición. En el caso de la cuadrada, esto no es un problema dado que a la hora de medir el $2k$ -ésimo armónico, los armónicos $(2k-1)$ -ésimo y $(2k+1)$ -ésimo debían tener teóricamente amplitud nula. Esto también permite comprender porque en los armónicos pares la amplitud nunca decaía a cero, pues parte de la amplitud de los armónicos pares contiguos no se absorbía. Sin embargo, en la parábola, ningún armónico tenía amplitud nula y cada armónico se veía afectado por el anterior y el siguiente.

Durante la caracterización del *sumador* se encontró que el factor de proporción en la transferencia del promedio de las señales resultó ser de $m = (0,9741 \pm 0,0004)$, que aunque no resulta indistinguible del valor ideal 1, se diferencia de este en menos de un 3%. También se logró verificar que no se realizaban cambios en las frecuencias de las señales utilizadas. Esto se verificó para un caso sencillo en donde las dos señales de entrada eran iguales $f_{entrada} = (500 \pm 0,05)hz$ y se obtuvo una frecuencia en la salida $f_{salida} = (500 \pm 1)hz$ indistinguible con las utilizadas, y posteriormente cuando se realizaron modulaciones entre distintas señales, en todos los casos se pudo encontrar que las frecuencias de las señales de salida eran indistinguibles con las necesarias para formar idealmente la señal de salida. Además, se encontró que el desfasaje provocado por el circuito $D = (2 \pm 4)\mu s$ es indistinguible con el 0, por lo cual puede asumirse que no provocaba desfasaje alguno entre la señal de salida y la de entrada; lo cual es consistente con el hecho de que todas las impedancias son reales. Dicho todo esto, puede asumirse que el comportamiento del *sumador* es completamente lineal en el rango trabajado, por lo cual puede afirmarse que el objetivo de la construcción de un sumador de señales alcanzó las expectativas.

Respecto al funcionamiento del filtro, aunque los resultados tuvieron un comportamiento al esperado, no resultan numericamente compatibles. Claramente, en los gráficos de la **Figura 12** puede verse una atenuación de más del 50% de la señal de frecuencia $f_{baja} = (5005,5 \pm 0,1)Hz$ entre el gráfico de la **Figura 12a** y la **Figura 12b**. Esto se ve confirmado por el hecho de que el gráfico de transmisión de la **Figura 13** tiene un mínimo alrededor de esa frecuencia. Como se dijo, esto es el comportamiento esperado. Sin embargo, este mínimo de transmisión está lejos de ser 0, por lo que el filtrado de la moduladora no fue total. Esto puede deberse a alguna inductancia parásita generada en serie al capacitor, lo cual causaría que el mínimo de transmisión fuera mayor a cero. Simultáneamente, pudo haber ocurrido que el ancho de campana $\Delta f = (210 \pm 4)Hz$ fuera tanto más pequeño que $|f_2 - f_1|$ que mínimo resultó demasiado puntual y difícil de ubicar con precisión.