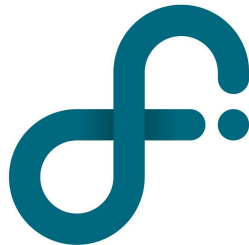


UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA



LABORATORIO 3

---

## Analisis espectral y filtrado de batidos

---

*Autores:*

ANDREU, Gonzalo  
MALPARTIDA, Bryan  
PUGLIESE, Facundo

9 de Marzo de 2016

**Resumen**

## 1. Introducción

Este trabajo se centra alrededor del análisis de *señales*. Una *señal* es una diferencia de potencial  $S(t)$  que se genera en alguna sección del circuito. En su forma más general, se puede definir una señal  $S(t) = V_o \cdot f(t)$  donde  $V_o$  es un voltaje constante que representa la *amplitud* y  $f(t)$  es una función del tiempo que define el *tipo de señal* y es la que define el comportamiento del circuito. Para un circuito compuesto por resistencias  $R$ , capacitancias  $C$  e inductancias  $L$ , este comportamiento puede ser muy complicado de predecir teóricamente. Sin embargo, para una señal del tipo  $V(t) = V_o \cdot \cos(\omega t)$  el comportamiento está ampliamente estudiado y resulta sencillo de predecir.

Es aquí donde entra en juego la *Serie de Fourier*, que consiste en escribir una función periódica  $f(t)$  como una serie de senos y cosenos pesados por coeficientes  $a_n$  y  $b_n$  según. Funciones que no sean periódicas pero que estén definidas en un intervalo finito  $[-\tau; \tau]$  también puede expandirse de forma periódica. Si  $2\tau$  es el período (o la longitud del intervalo) de la función  $f(t)$ , se tiene que

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{\tau}t\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{\tau}t\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{\tau}t + \phi_n\right) \quad (1)$$

donde  $f_n = \frac{n}{2\tau}$  es la frecuencia del  $n$ -ésimo armónico y

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} f(t) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{\tau}t\right) dt \\ b_n &= \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} f(t) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{\tau}t\right) dt \\ \alpha_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \phi_n &= -\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \end{aligned} \quad (2)$$

Entonces resulta posible considerar a toda señal  $S(t)$  como una suma de infinitas señales sinusoidales y gracias a la linealidad de los componentes  $R$ ,  $C$  y  $L$ , el comportamiento será igual al comportamiento de la suma. Es más, considerando que vale  $a_n \rightarrow 0$  y  $b_n \rightarrow 0$  para  $n \rightarrow \infty$ , cada término de la sumatoria tendrá menos peso que los anteriores. Por lo tanto, es posible estimar el comportamiento aproximado del circuito como si la señal fuera una suma finita de sinusoides. Para una función  $f(t) \in C^k$ , cuanto mayor suave sea  $k$ , más rápido será este decaimiento y menos términos de la serie se necesitarán para aproximar el comportamiento. Bajo esta idea, si fuera posible filtrar una única frecuencia  $\omega_n = \frac{n\pi}{\tau}$ , se obtendría una señal de salida sinusoidal cuya amplitud sería  $\alpha_n$ .

Este filtro puede ser un circuito RLC resonante, el cual consiste en una fuente  $V(t) = V_o \cdot \cos(\omega t)$ , un capacitor  $C$ , una inductancia  $L$  (de resistencia interna  $R_L$ ) y una resistencia  $R$  conectados en serie. Si se mide la amplitud de la caída de potencial sobre la resistencia  $R$  resulta de la forma  $V_R = V_o \frac{R}{|Z|}$  donde  $Z = (R + R_L) + i(\omega L - \frac{1}{\omega C})$ . Definiendo la *transmisión*  $T(\omega) = \frac{V_R}{V_o}$  resulta  $T(\omega) = \frac{R}{|Z|}$  cuyo máximo se encuentra en  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  tal que  $T_{max} = T(\omega_0) = \frac{R}{R + R_L}$ . Por último, definiendo una *banda de resonancia*  $[\omega_1; \omega_2]$  tal que  $\frac{T_{max}}{\sqrt{2}} \leq T(\omega) \leq T_{max}$  para todo  $\omega \in [\omega_1; \omega_2]$  y el *ancho de banda*  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$  resulta  $\Delta\omega = \frac{R_L + R}{L}$ . En resumen,

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \Delta\omega &= \frac{R_L + R}{L} \end{aligned} \quad (3)$$

Bajo esta idea, es posible tomar una señal cualquiera  $S(t)$  y, mediante un circuito RCL resonante, filtrar una única frecuencia  $\omega_n = \frac{n\pi}{\tau}$  fijando la frecuencia natural del circuito  $\omega_0 = \omega_n$ . Si la campana es lo suficientemente fina, lo que implica un  $\Delta\omega \ll \frac{\pi}{\tau}$ , es posible obtener una transmisión máxima para cada  $\omega_0$   $T_{max}(\omega_n) = \alpha_n$ .

Por lo tanto, si se envía una señal cuadrada de la forma  $C(t) = \begin{cases} -V_o & t \in [-\tau, 0) \\ V_o & t \in [0, \tau) \end{cases}$  su serie de Fourier resulta  $C(t) = V_o \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin(\frac{\pi}{\tau}(2k+1)t)$  de forma tal que los coeficientes  $\alpha_n$  resultan

$$\alpha_n(C) = \frac{2V_o(1 - (-1)^n)}{n\pi} \quad (4)$$

Similarmente, para el caso de una señal *parabolica* de la forma  $P(t) = V_o \cdot (\frac{t}{\tau})^2$  definida en  $t \in [-\tau, \tau)$  se obtiene a serie de Fourier  $P(t) = \frac{V_o}{3} + V_o \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{(n\pi)^2} \cos(\frac{\pi}{\tau}nt)$  cuyos coeficientes resultan

$$\alpha_n(P) = \frac{4V_o(-1)^n}{(n\pi)^2} \quad (5)$$

Siguiendo la idea anterior, es posible considerar el *espectro de potencia* de una señal en un intervalo de tiempo  $[t_0; t_1]$  como una función  $\alpha^2(\omega) = |\frac{1}{t_1-t_0} \int_{t_0}^{t_1} f(t) \cdot e^{i\omega t} dt|^2 = |\frac{1}{t_1-t_0} \int_{t_0}^{t_1} f(t) \cdot \cos(\omega t) dt - \frac{1}{t_1-t_0} \int_{t_0}^{t_1} f(t) \cdot \sin(\omega t) dt|^2 = (\frac{1}{t_1-t_0} \int_{t_0}^{t_1} f(t) \cdot \cos(\omega t) dt)^2 + (\frac{1}{t_1-t_0} \int_{t_0}^{t_1} f(t) \cdot \sin(\omega t) dt)^2$ . En esta definición puede verse que si  $t_1 - t_0 = \tau$ ,  $\alpha(n\frac{\pi}{\tau}) = \alpha_n$  para una función  $f(t)$  de período  $2\tau$ . Por lo tanto,

Ahora, si se supone una señal de la forma  $V(t) = A \cdot \cos(\omega_1 t) + A \cdot \cos(\omega_2 t)$  que resulta de la suma de dos señales sinusoidales, ocurre un efecto denominado *batido*. Esto se da gracias a que, mediante identidades trigonométricas, se obtiene  $V(t) = 2A \cdot \cos(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t) \sin(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t)$  donde el primer término se llama *modulador* y el segundo *portador*. Por lo tanto, si se suman dos señales de entrada  $V_1(t) = V_o \cdot \cos(\omega_1 t)$  y  $V_2(t) = V_o \cdot \cos(\omega_2 t)$ , la señal de salida  $V(t)$  tendrá una forma que no será sinusoidal a primera vista.

Para lograr esta suma, puede montarse un circuito como el de la **Figura 1**, donde se configuran las resistencias según  $r_1 = r_2 \equiv r$  y  $R \gg r$ . Resolviendo el circuito, se obtiene  $V_s(t) = \frac{V_1(t) + V_2(t)}{\frac{r}{R} + 2} = \frac{V_1(t) + V_2(t)}{2}$  dado que  $R \gg r$ .

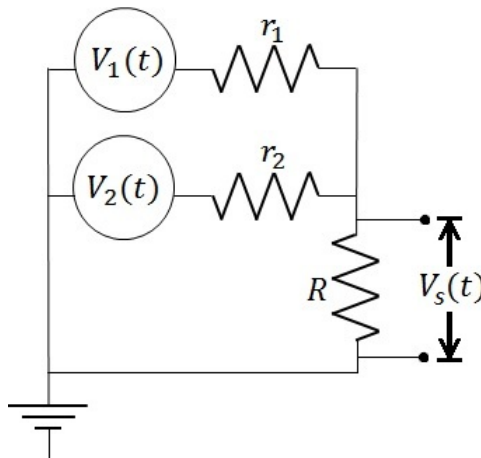


Figura 1: Circuito sumador con  $R \gg r_1, r_2$ , los valores de  $r_1$  y  $r_2$  permiten pesar en que proporción se suma cada coeficiente. En la experiencia se utilizó  $r_1 = r_2 \equiv r$  y dos fuentes sinusoidales.

Por otro lado, teniendo una señal de entrada con batido  $V(t)$ , sería válido querer recuperar una de las dos señales  $V_1(t)$  o  $V_2(t)$  que la componen, eliminando la otra. Aunque podría nuevamente utilizarse el circuito RCL descrito más arriba, un circuito RCL antirresonante (donde la capacitancia  $C$  y la inductancia  $L$  están en paralelo) puede resultar más adecuado. Esto es debido a que muchas veces, una señal no sinusoidal  $S(t)$  de período  $2\tau$  se *modula* utilizando una señal sinusoidal  $V_m(t) = A \cdot \cos(\omega t)$  (llamada moduladora), generando una nueva señal  $S'(t) = S(t) + A \cdot \cos(\omega t)$ . En este caso,  $S(t)$  es una suma de infinitas sinusoides como se explicó más arriba y un RLC resonante solo permitiría que una de estas señales atravesase el filtro.

Un circuito RLC antirresonante, sin embargo, elimina las señales sinusoidales cuya frecuencia sea  $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . El ancho de banda resulta para este caso  $\Delta\omega = \frac{1}{(R_L + R)C}$ . En resumen,

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\Delta\omega = \frac{1}{(R_L + R)C} \quad (6)$$

Por lo tanto, si se conoce la frecuencia  $\omega$  de la moduladora y se cumple que  $|\omega - \frac{pi}{\tau}n| \gg \Delta\omega \forall n$ , resulta posible recuperar la señal  $S(t)$  a la salida del filtro. Para el caso de dos sinusoides, se busca que  $|\omega_1 - \omega_2| \gg \Delta\omega$ .

## 2. Desarrollo experimental

Durante esta experiencia se utilizó un generador de funciones de dos canales capaz de generar diferencias de potencial  $V(t)$  a frecuencias con un error relativo del 0,01 % en un rango entre  $1\mu\text{Hz}$  y  $5\text{MHz}$ . El voltaje *pico-pico* tiene un error relativo del 1 % para el rango de voltaje utilizado ( $2\text{V} - 20\text{V}$ ). Además, se utilizó una resistencia variable por décadas en el intervalo ( $1\Omega - 11110\Omega$ ), una capacitancia variable por décadas en el intervalo ( $1\text{nF} - 1110\text{nF}$ ) y una inductancia variable por décadas en el intervalo ( $1\text{mH} - 1110\text{mH}$ ). Usando un multímetro digital se midieron los valores utilizados en todos estos elementos junto con su precisión que era de la forma  $\pm(1\% + 2d)$  para la resistencia,  $\pm(0,7\% + 5d)$  para la capacitancia y  $(0,7\% + 5d)$  para la inductancia; además de comprobar la continuidad de los cables utilizados.

Se utilizó además un osciloscopio digital con dos canales de entrada capaces de medir diferencias de potencial entre sus dos terminales en un rango de  $2\text{mV}$  a  $5\text{V}$  con un error relativo del 3 % del valor *pico-pico*. A la hora de medir voltaje, fue necesario asegurarse que el cable a tierra del osciloscopio estuviera conectado al cable a tierra del generador de funciones. Cuando se utilizaron ambos canales, se hicieron coincidir las 3 tierras.

### 2.1. Análisis de espectro

Como ya se explicó, para poder realizar el análisis del espectro de una señal es necesario filtrar la frecuencia  $\omega_n = \frac{n\pi}{\tau}$ . Para ello se utilizó un circuito RLC resonante como el que muestra la **Figura 2**.

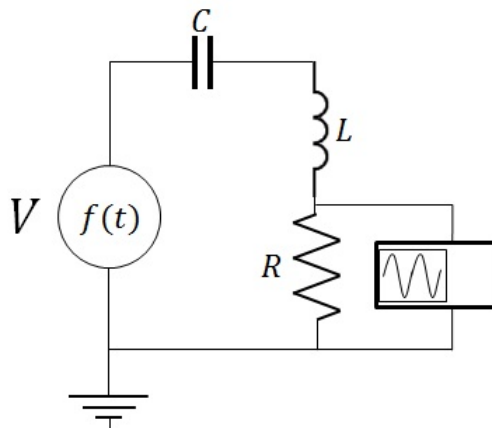


Figura 2: Circuito RLC utilizado para obtener el espectro de frecuencia de Fourier

El análisis se realizó para señales  $f(t)$  de forma cuadrada y parabólica, las cuales tenían una amplitud  $(3,90 \pm 0,02)\text{V}$  y  $(10,0 \pm 0,2)\text{V}$  respectivamente. El objetivo fue poder calcular la transmisión y obtener los coeficientes dados por (4) y (5) en cada caso.

Para ello, al tener en cuenta la importancia del ancho de banda del circuito a la hora de filtrar señales, se usó una resistencia  $R = (750 \pm 7)\Omega$  y una inductancia  $L = (1003 \pm 5)\text{mH}$  la cual aportaba una resistencia  $R_L = (243 \pm 2)\Omega$ ; por lo que de (3) se obtiene  $\Delta\omega = (994 \pm 14)\text{Hz}$ .

Ademas, es claro que las frecuencias que se desean filtrar son múltiplos de la frecuencia  $f_0 = \frac{1}{2\tau}$  por lo que no dependen de la forma de la señal. Debido a esto, se impusieron a las dos señales una frecuencia  $f_0 = (500 \pm 0,05)Hz$  para garantizar la relación  $\Delta\omega \ll \frac{\pi}{\tau}$ .

De esta manera, el parámetro  $\omega_0$  podía variar únicamente variando la capacitancia  $C$ .

Sabiendo esto, se determinaban los valores de  $C$  para que  $\omega_0$  coincidiese con los armónicos de  $f_0$ . Y así, para cada armónico, poder medir la caída de potencial sobre la resistencia utilizando el osciloscopio.

Para garantizar que la frecuencia fuera la de resonancia, se hizo un barrido de mediciones en el intervalo de frecuencias  $[440, 560]Hz$ , con el fin de encontrar un máximo de transmisión.

## 2.2. Modulación y filtración

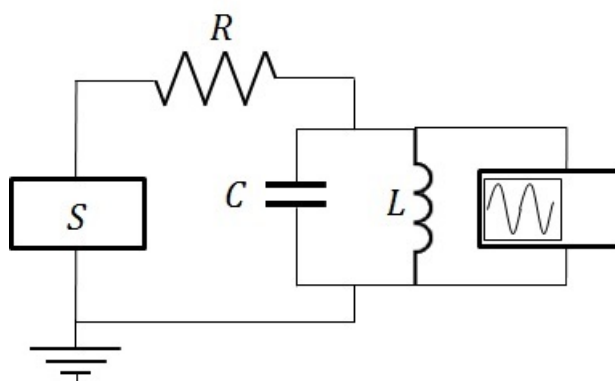


Figura 3: filtro

## 3. Resultados

### 3.1. Analisis de espectro

Como se dijo, la señal de entrada era una cuadrada, cuyos coeficientes de Fourier vienen dado por (4). Sin embargo, para cada valor de  $C$ , se medían las transmisiones para distintas frecuencias de entrada. Los resultados que se obtuvieron para cada uno de estos barridos se ejemplifican en el gráfico de la **Figura 4**, que representa el caso del primer armónico. Aquí puede verse claramente que el máximo se alcanza para  $f_s = (500,00 \pm 0,05)Hz$ .

Como puede verse en (4), para los armónicos pares la frecuencia  $f_s = (500,00 \pm 0,05)$  debe resultar un máximo mientras que para los impares debe resultar, por lo menos, un mínimo. En todos los casos, el máximo o mínimo (dependiendo del armónico) se halló para  $f_s = (500,00 \pm 0,05)$ , con excepción del segundo armónico, cuyo mínimo se halló en  $f = (490 \pm 10)Hz$  dado que el mismo valor mínimo se halló en  $f_s = (480,00 \pm 0,05)Hz$  y en  $f_s = (500,00 \pm 0,05)Hz$ . El gráfico de la **Figura 5** muestra los valores de transmisión para cada armónico impar con su ajuste que arroja un  $R_{square} = 0,96953$  y un  $\chi^2 = 54,38873$  que indican una gran subestimación de errores. Del ajuste se obtiene un  $A = (0,91 \pm 0,09)$  que corresponde al valor  $T_{max} \cdot \frac{4}{\pi} = (0,962 \pm 0,004)$ , cuya diferencia es despreciable frente a los valores manejados, al igual que la ordenada  $b = (-0,05 \pm 0,02)$ .

Para el caso de la señal parabólica, la ecuación (5) pone a todos los coeficientes en pie de igualdad, por lo que para los distintos valores de  $f_0$  se esperaría que  $f_s = (500,00 \pm 0,05)Hz$  fuera un máximo de transmisión en el intervalo barrido. Esto se hizo de forma idéntica al análisis de la onda cuadrada, con la diferencia de que no todos los máximos se hallaron en  $f_s = (500,00 \pm 0,05)Hz$  como muestra la **Tabla 2**.

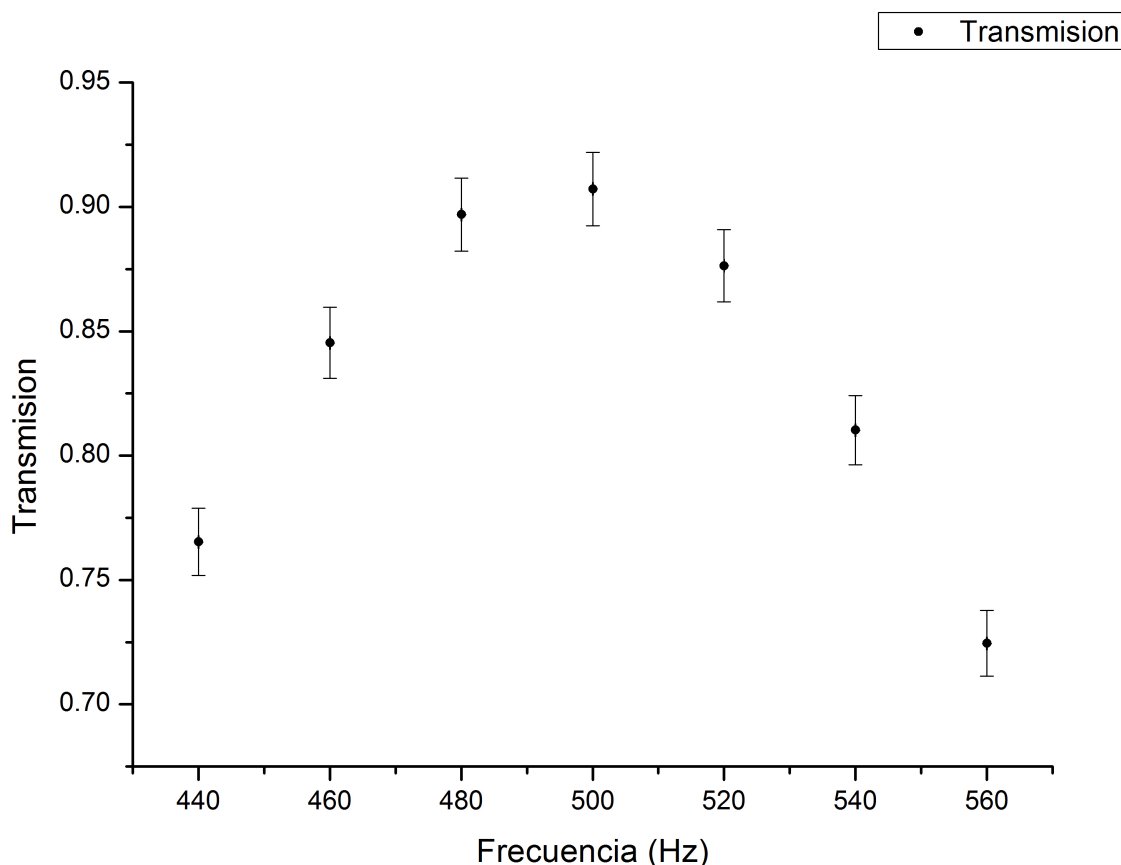


Figura 4: Grafico de transmisión en función de frecuencia para  $f_0 = (500 \pm 11)$  Hz correspondiente al primer armónico

Armónico	Frecuencia de máxima transmisión (Hz)
1	$500,00 \pm 0,05$
2	$500,00 \pm 0,05$
3	$480,00 \pm 0,05$
4	$480,00 \pm 0,05$
5	$500,00 \pm 0,05$
6	$480,00 \pm 0,05$

Tabla 2: Frecuencia de máxima transmisión para cada armónico analizado de una señal parabólica. En este caso, no todas las frecuencias son idénticas.

El gráfico de transmisión en función de armónico puede verse en la **Figura 6**, donde se utilizan los valores de máxima transmisión de cada barrido. Ajustando según (5), arroja un  $R_{square} = 0,89488$  y un  $\chi^2 = 59,20285$ , lo cual indica un ajuste medianamente confiable. El parámetro  $A = (0,44 \pm 0,07)$  corresponde al parámetro  $T_{max} \cdot \frac{4}{\pi^2} = (0,3060 \pm 0,0012)$ , donde la diferencia ya no resulta despreciable, aun frente a los errores. Nuevamente, la ordenada  $b = (0,011 \pm 0,005)$  resulta despreciable frente a las magnitudes manejadas. Cabe aclarar que el término  $(-1)^n$  que aparece en (5) se ve absorbido por la fase  $\phi_n$  de (2) dado que la prioridad era analizar la amplitud en módulo.

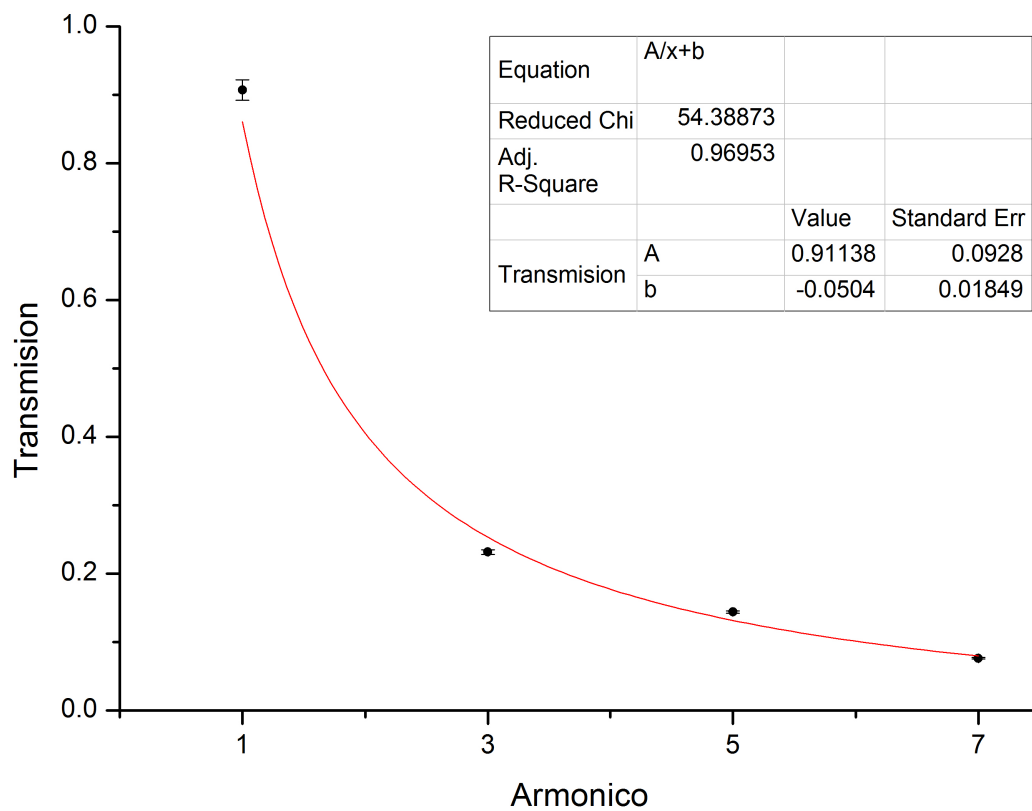


Figura 5: Transmisión en función del armónico analizado, cuyo ajuste arroja los parametros esperados

### 3.2. Modulación y filtración

## 4. Conclusiones

## 5. Referencias

[1] Frank S. Crawford, *Berkeley physics course 3: Ondas*, 1994, Editorial Reverte S.A.

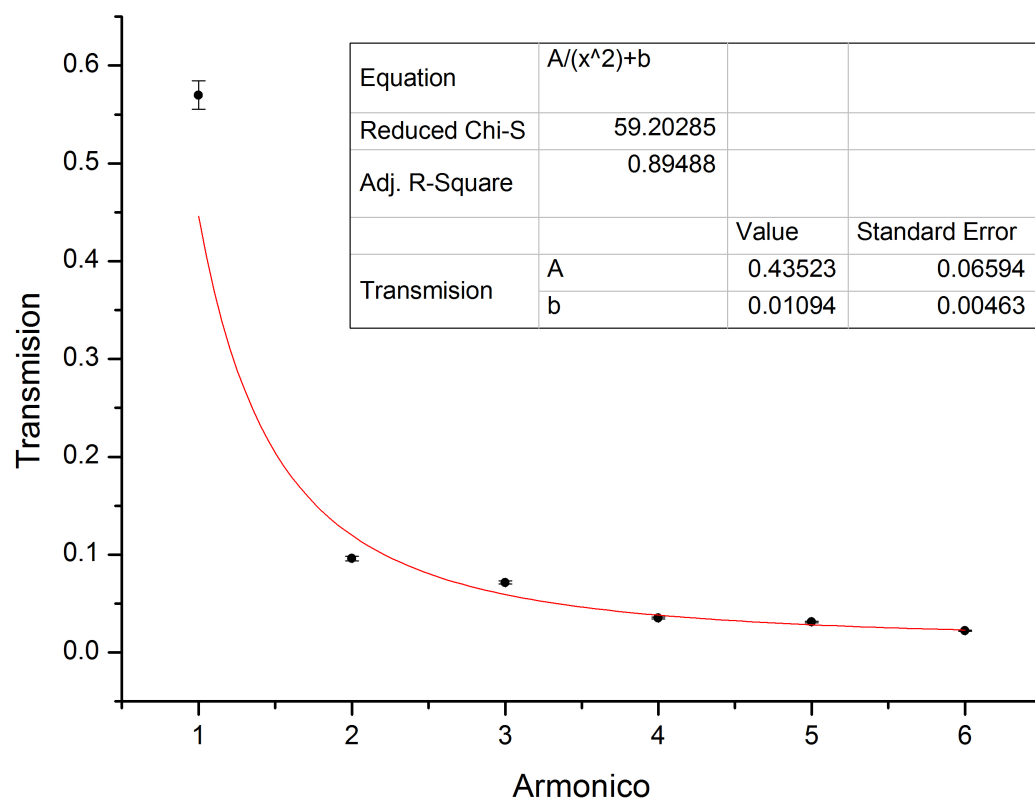


Figura 6: Transmisión en función del armónico analizado, donde se utilizaron los valores de transmisión máximos de cada barrido