

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE FÍSICA



LABORATORIO 3

Transitorios y tiempos caracteristicos de circuitos

Autores:

ANDREU, Gonzalo
MALPARTIDA, Bryan
PUGLIESE, Facundo

17 de Febrero de 2016

Resumen

1. Introducción

Para llevar a cabo el objetivo de caracterizar los circuitos RC, RL y RCL es necesario comprender como responden a distintos tipos de combinaciones y fuentes de voltaje. Primero, deben recordarse las leyes que dictan la caída de potencial en cada elemento; capacitor C , resistencia R e inductancia L . Recordando que $\frac{dq(t)}{dt} = I(t)$

$$\Delta V_C = \frac{q}{C} \Delta V_R = IR \Delta V_L = \frac{dI}{dt} \quad (1)$$

Si consideramos un circuito cerrado de una única malla compuesto por una fuente de voltaje constante V_0 , una resistencia R y un capacitor C , las leyes de Kirchoff dictan que la ecuación que rige la evolución del sistema es $V_0 = \frac{q(t)}{C} + IR$ donde $q(t)$ es la carga eléctrica del capacitor. Entonces, si tomamos como condición inicial $q(0) = 0$ la solución de la ecuación es:

$$q(t) = V_0 C (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (2)$$

Y al ser $q(t)$ una exponencial creciente se denomina a este fenómeno como la *carga* del capacitor.

Ahora si, utilizando una *llave ideal*, se corta la fuente V a tiempo t_0 la nueva solución del sistema es de la forma:

$$q(t - t_0) = V_0 C (1 - e^{-\frac{t_0}{RC}}) e^{-\frac{t-t_0}{RC}} \quad (3)$$

Entonces se define a $\tau_{RC} = RC$ *tiempo característico* del circuito. Por lo tanto, si $\tau_{RC} < t_0$ se puede observar el efecto de *descarga* del capacitor pues $q(t - t_0)$ es una exponencial decreciente. Para la corriente $I(t) = \frac{dq(t)}{dt}$, las ecuaciones que describen su comportamiento en cada caso son:

$$q(t) = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (4)$$

$$q(t - t_0) = \frac{V_0}{R} (e^{\frac{t_0}{RC}} - 1) e^{-\frac{t-t_0}{RC}} \quad (5)$$

Por otro lado, si en el circuito anterior se reemplaza al capacitor C por una inductancia L , la noción de carga desaparece y queda la de corriente $I(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ en una ecuación diferencial de la forma $V_0 = L \frac{dI(t)}{dt} + R.I(t)$. La solución para el caso de $V = V_0$ es muy similar a la anterior:

$$I(t) = \frac{V_0}{R} (1 - e^{-\frac{Rt}{L}}) \quad (6)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{V_0}{L} e^{-\frac{Rt}{L}} \quad (7)$$

En este caso, el papel del *tiempo característico* lo juega $\tau_{RL} = \frac{L}{R}$. En el caso anterior puede verse que la corriente I aumenta hasta alcanzar su valor ideal (en el caso en el que no existe L).

Cuando se corta la fuente V a tiempo t_0 tenemos el caso en que la corriente I disminuye hasta volverse nula debido a una especie de inercia generada por la inductancia L . En esta situación, la solución del sistema es:

$$I(t - t_0) = \frac{V_0}{R} (1 - e^{-\frac{Rt_0}{L}}) e^{-\frac{R(t-t_0)}{L}} \quad (8)$$

$$\frac{dI(t - t_0)}{dt} = -\frac{V_0}{L} (e^{\frac{Rt_0}{L}} - 1) e^{-\frac{R(t-t_0)}{L}} \quad (9)$$

Un circuito más complicado puede generarse combinando los dos anteriores; una fuente de voltaje constante V_0 , una resistencia R , un capacitor C y una inductancia L . En este caso, la ecuación diferencial que rige la dependencia temporal de la carga $q(t)$ resulta:

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2}L + \frac{dq(t)}{dt}R + \frac{q(t)}{C} = V_0 \quad (10)$$

Cuyo polinomio característico resulta $\lambda^2.L + \lambda.R + \frac{1}{C} = 0$ cuyas raíces son $\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{(\frac{R}{2L})^2 - \frac{1}{LC}}$ donde $\omega_o^2 = \frac{1}{LC} > 0$ de denoma *frecuencia natural* del circuito. Esta frecuencia $\omega_o^2 = \frac{1}{LC}$ es la frecuencia de oscilación del circuito de en el caso en que no existe componente disipativo ($R = 0$). Dependiendo del valor del discriminante $\omega^2 = \beta^2 - \omega_o^2$ donde $\beta = \frac{R}{2L} > 0$ las soluciones del polinomio característico serán reales, real doble o complejas no reales y la función $q(t)$ tendrá un comportamiento sobreamortiguado, subamortiguado o amortiguado, respectivamente.

Para el caso $\beta < \omega_o$ resulta $\omega^2 < 0$ y por lo tanto las raíces del polinomio característico son complejas. Esto conlleva a una solución de la forma:

$$q(t) = a.e^{-\beta t}.cos(|\omega|(t + \phi)) + V_0C \quad (11)$$

donde a y ϕ se obtienen a través de las condiciones iniciales del sistema y $|\omega| = \sqrt{(\omega_o^2 - \beta^2)}$. Este es el caso del *oscilador amortiguado*.

Para el caso $\beta = \omega_o$ resulta $\omega^2 = 0$ y por lo tanto la raíz del polinomio característica es doble y única. Esto conlleva a una solución de la forma:

$$q(t) = e^{-\beta t}(A + B.t) + V_0C \quad (12)$$

donde A y B nuevamente se obtienen a través de las condiciones iniciales del sistema. Este es el caso límite conocido como *oscilador subamortiguado*.

Finalmente, para el caso $\beta > \omega_o$ resulta $\omega^2 > 0$ y por lo tanto las raíces del polinomio característico son reales y distintas. Esto conlleva a una solución exponencial de la forma:

$$q(t) = e^{-\beta t}[C.cosh(\omega t) + D.sinh(\omega t)] \quad (13)$$

donde C y D se obtienen a través de las condiciones iniciales del sistema. Este caso corresponde al *oscilador sobreamortiguado*, dado que al ser una combinación lineal de exponentiales decrecientes ($\beta > \omega > 0$) nunca puede completarse una oscilación.

Si, como en el caso de los circuitos RC y RL, se utiliza una señal cuadrada para simular una *llave ideal*, dado que todos los comportamientos cumplen $q(t \rightarrow \infty) = 0$, los períodos donde $V = 0$ resultan en una solución $q(t) = 0$ pues tanto las condiciones iniciales como la inhomogeneidad de la ecuación diferencial son nulas. Cuando la señal vuelve a adquirir el valor $V = V_0$, se recuperan las soluciones anteriores. Sin embargo, para esto se requiere una frecuencia de la señal cuadrada $\frac{\tau_f}{2} > \beta$ para asegurarse de que la carga $q(t)$ decaiga lo suficiente.

2. Desarrollo experimental

2.1. Circuito RC

La primera parte del trabajo consistió en caracterizar un circuito RC. Para ello se montó un circuito utilizando un generador de funciones ε , una resistencia variable por décadas R y un capacitor $C = (100 \pm 0,2)nF$, conectándose en serie para formar un circuito cerrado de una única malla como se ve en la **Figura 1**.

El objetivo fue medir la carga y descarga del capacitor C y la corriente sobre la resistencia R (que resultan proporcionales a la caída de potencial en cada elemento, respectivamente) para obtener el tiempo característico τ_{RC} del circuito determinado por (**ecuaciones de RC**).

Con el fin de recrear el efecto de la *llave ideal* se programó la fuente para que emitiera una señal cuadrada con un voltaje máximo $\varepsilon = (2,00 \pm 0,02)V$ y un voltaje mínimo nulo cuya frecuencia era variable. Sin embargo, esta frecuencias $f = \frac{\omega_f}{2\pi}$ debió elegirse de forma tal que la carga q llegará a su máximo o mínimo (y por ende la corriente I se anulase) en medio período de la señal $\frac{\tau_f}{2} = \frac{P_f}{\omega_f} > \tau_{RC}$ para poder analizar todo el comportamiento.

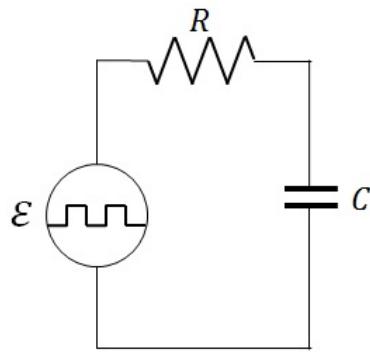


Figura 1: Circuito RC con una fuente de onda cuadrada

Para medir la diferencia de tensión se conectó un osciloscopio en paralelo al elemento que se quería medir, como se puede ver en la **Figura 1** donde muestra el caso de la resistencia. A su vez, el generador de funciones estaba conectado al osciloscopio para poder visualizar la forma funcional de la fuente. Se lo utilizó además como *trigger externo* para poder apreciar que tanto su señal como la caída de potencial en el elemento se encontraban en fase. Y utilizando un software de recopilación de datos se pudo importar a una computadora las mediciones registradas por el osciloscopio para ser analizadas posteriormente. Este proceso se realizó para distintos valores de R , considerándose despreciable la resistencia aportada por C .

2.2. Circuito RL

De manera análoga, la siguiente parte del trabajo consistió en caracterizar un circuito RL. En este caso se reemplazó el capacitor C por una inductancia $L = (1,000 \pm 0,002)H$. La forma del circuito se puede ver en la **Figura 2**.

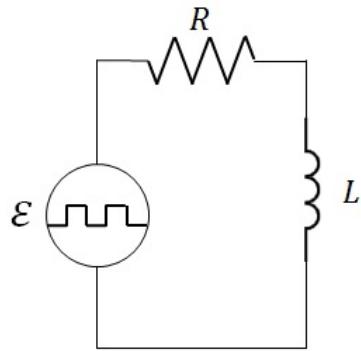


Figura 2: Circuito RL con una fuente de onda cuadrada

El método utilizado para obtener el tiempo característico τ_{RL} , determinado por (**Ecuaciones de RL**), fue el mismo que para el circuito RC exceptuando el voltaje entregado por la fuente cuyo valor fue $\epsilon = (8,00 \pm 0,08)V$ y la resistencia de la inductancia $R_L = (294 \pm 3)\Omega$, que en este caso no pudo ser despreciada, debió sumarse a la resistencia R pues estaba en serie. Se midieron las caídas de potencial en la resistencia R (proporcional a la corriente I) y en la inductancia L (proporcional a $\frac{dI(t)}{dt}$).

Nuevamente, se buscaron frecuencias $f = \frac{\omega_f}{2\pi}$ tal que la corriente se estabilizara (llegara a un máximo o mínimo) en medio período de la señal $\frac{\tau_f}{2} = \frac{\pi}{\omega_f} > \tau_{RL}$ para poder analizar todo el comportamiento.

2.3. Circuito RCL

Por último, se buscó estudiar el comportamiento de un circuito RCL. Para ello se montó un circuito cerrado que tenía en serie la fuente programable ϵ , la resistencia variable por décadas R , una

inductancia variable L y un capacitor C como muestra la **Figura 3**.

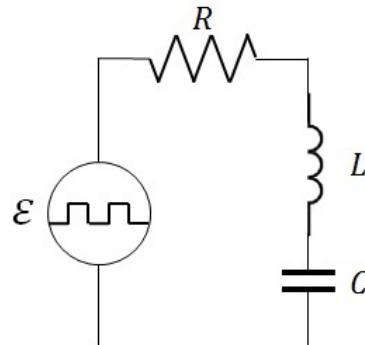


Figura 3: Circuito RCL con una fuente de onda cuadrada

Para caracterizar el circuito, la ecuación (**ecuaciones de RCL**) determina distintos *comportamientos* que dependen de los parámetros que se usen.

Utilizando el método de adquisición de datos ya explicado, se midió la diferencia de potencial sobre la resistencia (que resulta proporcional a la corriente I). Esta diferencia de potencial era generada por una señal cuadrada de $(3,08 \pm 0,04)V$.

Por lo tanto se estudió el circuito para distintos valores de R, C y L con el fin de encontrar cada uno de estos *comportamientos*. Para ello, se fijaban dos parametros y se buscaba que el tercero cumpliese las condiciones (**discriminante del polinomio que sale de la ecuacion diferencial**) que determinan cada *comportamiento*.

Para cada comportamiento, como se dijo en la **Introducción**, se buscó una frecuencia f tal que la corriente I se anulara y, por lo tanto, se descargara el capacitor C ($q = 0$) en un medio período de la señal $\frac{\tau_f}{2} = \frac{pi}{\omega_f} > \beta$.

3. Resultados

3.1. Circuito RC

Para la primer configuracion del circuito RC, se dispuso una resistencia de $3k\Omega$, se midio la caida de potencial sobre la resistencia y mediante el analizador de datos se obtuvo un grafico que ilustra la **Figura 4**

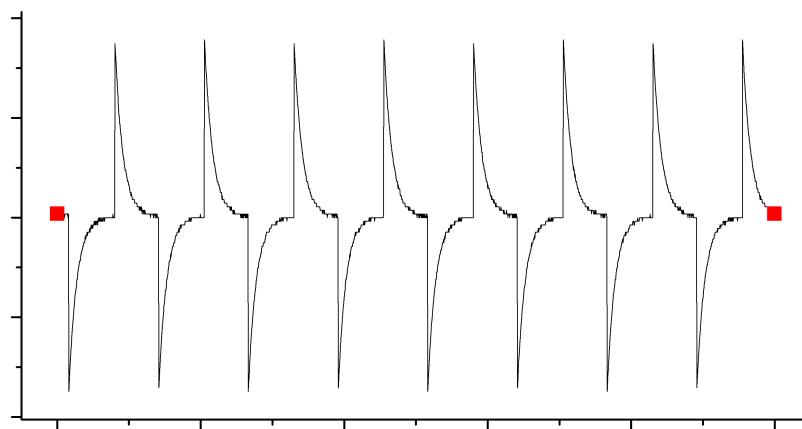


Figura 4: Variacion del Potencial en funcion del tiempo

Sabiendo que la variación en el voltaje medida sobre la resistencia es proporcional a la corriente, se utilizaron las ecuaciones (4) y (5) para realizar ajustes sobre cada uno de los picos que aparecían en el gráfico. Y luego se realizó un intervalo de confianza (**Ver apéndice**) con toda la tira de datos, para obtener un valor representativo del tiempo característico de este circuito. Obteniéndose un valor de $\tau_{RC} = (0,315 \pm 0,004)\text{ms}$

Cuando la medición se realizó sobre el Capacitor se obtuvo el gráfico ilustrado por la **Figura 5**, en el cual se utilizaron las ecuaciones (2) y (3); y realizándose un proceso estadístico similar al realizado con los valores obtenidos anteriormente, se obtuvo un $\tau_{RC} = (0,316 \pm 0,005)\text{ms}$

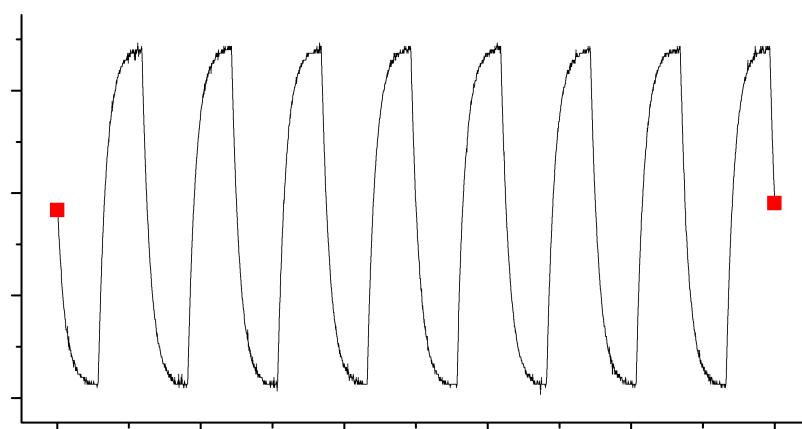


Figura 5: Variacion del Potencial en funcion del tiempo

Se puede ver que los resultados de los obtenidos de las distintas mediciones son indistinguibles, ya que sus intervalos de incertezas se solapan, lo cual tiene sentido ya que el tiempo característico es algo

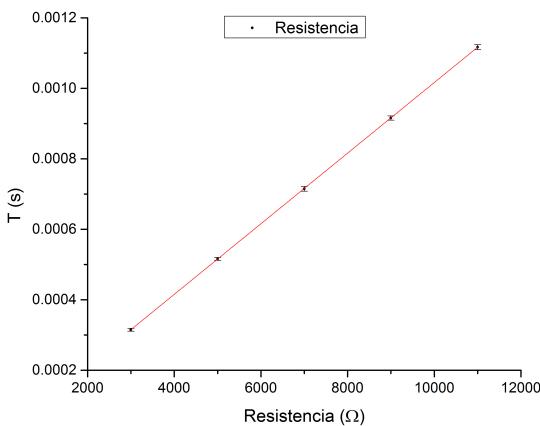
que depende intrinsecamente de la configuración del circuito y no del lugar de la medición.

Posteriormente se realizó el mismo análisis para configuraciones con resistencias de 5, 7, 9 y 11 kΩ, sin variar los demás parámetros y se obtuvieron los valores presentados en la **Tabla 1**, donde se puede observar lo resaltado anteriormente, para cada par de resultados correspondientes a una misma configuración, estos son indistinguibles.

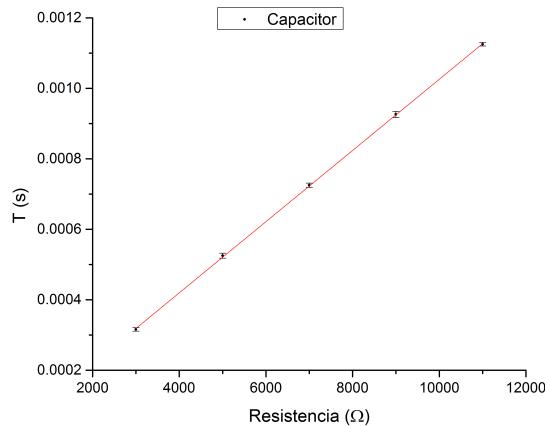
Resistencia (kΩ)	Valor	
	τ_R (ms)	τ_C (ms)
3	$0,315 \pm 0,004$	$0,316 \pm 0,005$
5	$0,516 \pm 0,004$	$0,525 \pm 0,007$
7	$0,715 \pm 0,007$	$0,725 \pm 0,006$
9	$0,916 \pm 0,006$	$0,926 \pm 0,009$
11	$1,117 \pm 0,007$	$1,125 \pm 0,005$

Tabla 1: Valores obtenidos de los tiempos característicos en el circuito RC

Finalmente, teniendo en cuenta que según el modelo propuesto, el tiempo característico de un circuito tiene una correspondencia lineal con la resistencia se construyeron un par de gráficos que relaciona estos valores y se realizó un ajuste sobre los mismos como se puede ver en la **Figura ??**.



(a) Medición sobre la Resistencia



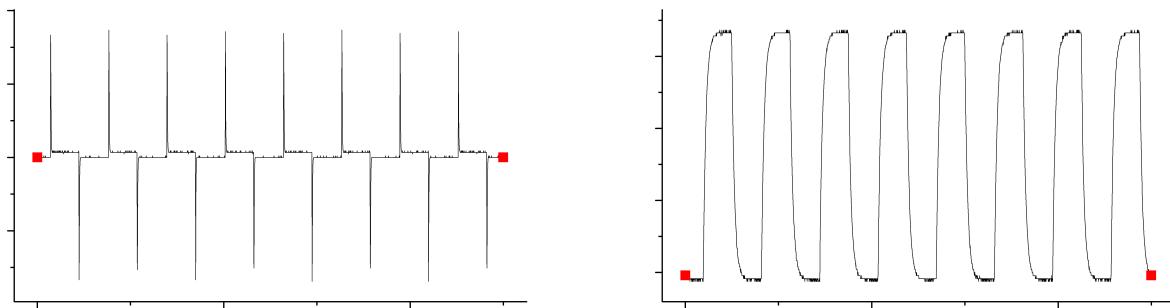
(b) Medición sobre el Capacitor

Figura 6: Variación del tiempo característico en función de la resistencia

El resultado esperado sería que la pendiente de ambos gráficos sea equivalente al valor de la capacitancia $C = (100 \pm 0,2)nF$. Efectivamente para la **Figura 6a** la pendiente arroja un valor $m_R = (100,18 \pm 0,09)nF$ y un $R - Cuadrado = 1$; y para la **Figura 6b**, un $m_C = (101 \pm 0,5)nF$, y un $R - Cuadrado = 0,99991$.

3.2. Circuito RL

El procedimiento realizado con el circuito RL es absolutamente análogo al realizado con el RC. Se realizaron mediciones para distintas configuraciones que relevaban múltiples curvas como muestra la **Figura ??**. En el caso de los gráficos de tipo **7b**, como corresponden a las mediciones sobre la resistencia, se utilizaron las ecuaciones **6** y **8** para realizar los ajustes, ya que la caída de potencial medida en ese lugar es proporcional a la corriente. En cambio, para los gráficos de tipo **7a**, correspondientes a las mediciones sobre la inductancia, se utilizaron las ecuaciones **7** y **9**, ya que, en este caso, es proporcional a la derivada de la corriente.

(a) *Medicion sobre la Inductancia*(b) *Medicion sobre la Resistencia**Figura 7: Caida del potencial en funcion del tiempo*

Posteriormente, con los resultados provistos por los ajustes, se realizo el mismo trabajo estadístico, obteniéndose los resultados explayados en la **Tabla 2**

Valor		
Posicion osciloscopio	Resistencia (kΩ)	τ_{RL} (ms)
Resistencia	0,6	$1,373 \pm 0,006$
	0,8	$1,04 \pm 0,01$
	1	$0,770 \pm 0,003$
	1,2	$0,656 \pm 0,004$
	1,4	$0,570 \pm 0,002$
Inductancia	3	$0,27 \pm 0,03$
	5	$0,157 \pm 0,002$
	7	$0,114 \pm 0,002$
	9	$0,091 \pm 0,005$
	11	$0,071 \pm 0,008$

Tabla 2: Valores obtenidos de los tiempos caracteristicos en el circuito RL

Luego se costruyo el **grafico 8** que relaciona las duplas, se realizo un ajuste esperando que se respete la relacion $\tau_{RL} = L/R$ y que, ademas, se consiga un valor de $L = (1,000 \pm 0,002)H$.

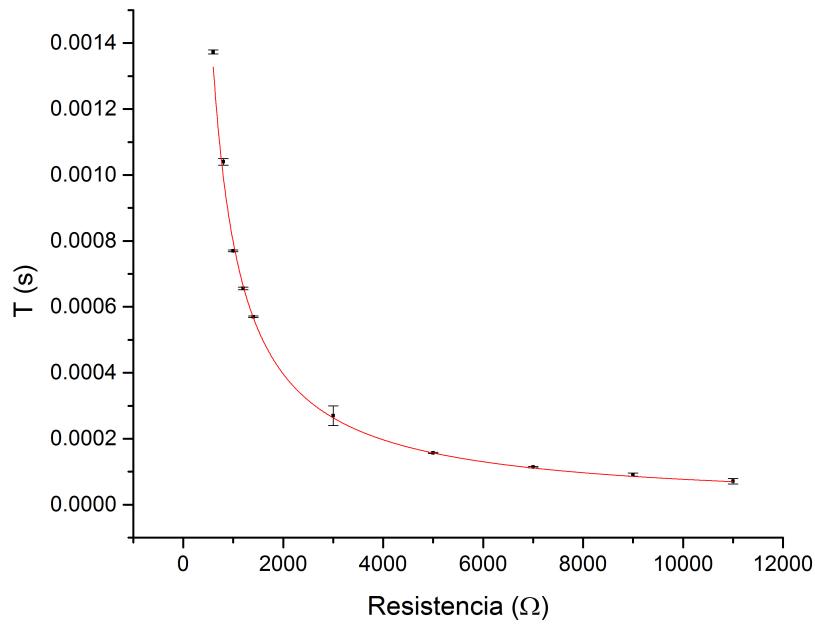


Figura 8: Variacion del tiempo caracteristico en funcion de la resistencia

Efectivamente, una vez realizado ese proceso, se obtiene un $R - cuadrado = 0,99819$ que ratifica la bondad del ajuste pero, el valor de la inductancia calculado por este metodo fue $L = (0,80 \pm 0,01)H$, que es ligeramente inferior. Se desconocen las causas de esa diferencia.

3.3. Circuito RCL

Para realizar la primer medición, se fijó una Resistencia $R = 400 \pm 4\Omega$, una Inductancia $L = 1 \pm 0,001H$ (la cual añadia una resistencia de $R_L = 296 \pm 3\Omega$), y una capacitancia $C = 100 \pm 0,2nF$. Bajo esos parametros se esperaba una respuesta regida por la ecuación 11 y, efectivamente, se puede ver en la figura 9 que el ajuste se adapta de muy buena manera y nos arroja un $R - Cuadrado = 0,99827$. Cabe destacar, que para este tipo de circuito, no hubo intencion de realizar un analisis estadistico analogo al utilizado en los dos casos anteriores, por lo que se se priorizo obtener la maxima resolucion posible con el osciloscopio.

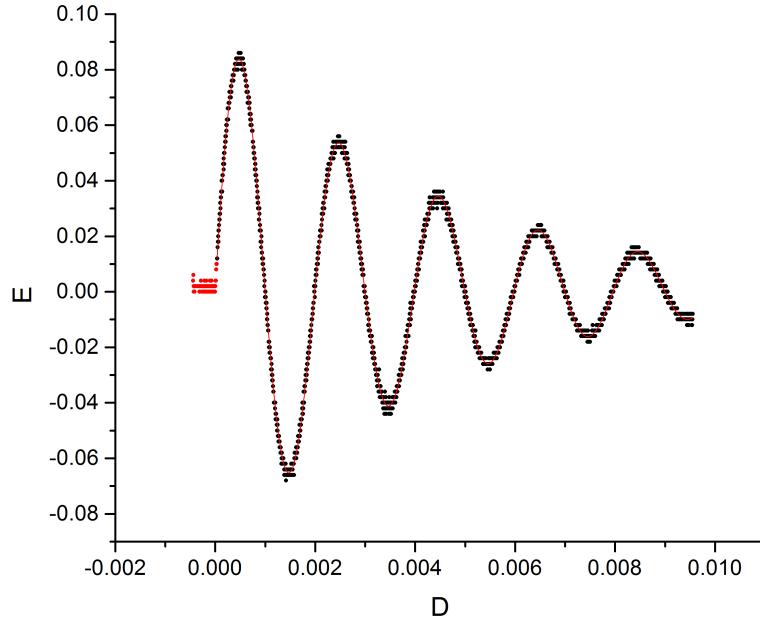


Figura 9: Variacion del potencial en funcion del tiempo en un circuito RLC (Oscilador amortiguado)

Del ajuste se puede extraer el valor de la frecuencia de oscilación $f_A = 501,3 \pm 0,7\text{hz}$ el cual es consistente con la calculada de manera teórica, $f_{teo} = 500,2 \pm 0,6\text{hz}$. De la misma manera, se puede obtener el tiempo característico del circuito, pero en este caso los valores difieren de manera importante, siendo $\tau_A = 2,205 \pm 0,005\text{ms}$ el obtenido a partir del gráfico, y $\tau_{teo} = 1,44 \pm 0,02\text{ms}$ el calculado de manera teórica.

Luego, se propusieron parámetros para lograr una respuesta regida por la ecuación ???. Se dispuso una Resistencia $R = (1110 \pm 11)\Omega$, una Inductancia $L = (30 \pm 0,03)mH$, y una Capacitancia $C = (100 \pm 0,2)nF$. Y luego mediante el osciloscopio se obtuvo la **figura 10**.

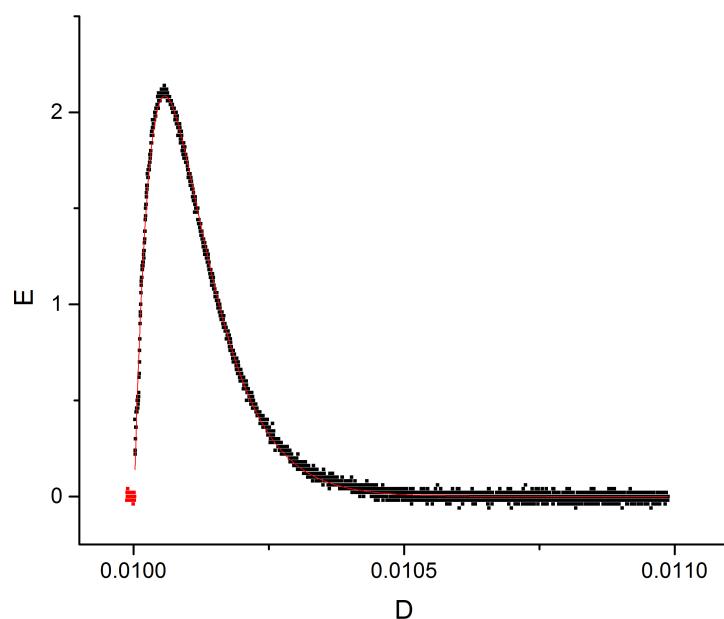


Figura 10: Variacion del potencial en funcion del tiempo en un circuito RLC (Oscilador Sobreamortiguado)

El ajuste realizado sobre la misma nos arroja un $R - Cuadrado = 0,99829$, y nos aporta valores para la frecuencia /textbf{f}_A = (477 \pm 31) hz y para el tiempoco caracteristico $\tau_A = (28,05 \pm 0,02)\mu s$. Si los comparamos con los resultados teoricos, $f_{teo} = (475 \pm 9)$ hz y $\tau_{teo} = (27 \pm 0,3)\mu s$, podemos ver que las frecuencias coinciden, y que, aunque la diferencia es pequeña, los τ no.

4. Conclusiones

5. Apéndice

A la hora de analizar largas tiras de datos, los Intervalos de Confianza son herramientas muy útiles. Matemáticamente, si $X_1,..X_n$ son variables aleatorias identicamente distribuidas tal que su esperanza $E(X_i) = \mu$ y varianza $V(X_i) = \sigma^2 > 0$ es posible construir un intervalo de confianza del promedio $\bar{X}_n = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n}$. Fisicamente, asumiendo las $X_1,..X_n$ como distintas mediciones de una misma magnitud X , es posible considerar $\mu = X$ y construir un intervalo de confianza para este parámetro \bar{X}_n . Sin embargo, es necesario conocer la distribución $F(\theta_1,..,\theta_m)$ tal que $X_i \sim F(\theta_1,..,\theta_m)$.

Se define $(a;b)_\theta$ como un intervalo de confianza de nivel $1 - \alpha$ para un parámetro θ según:

$$P(\theta \in (a;b)_\theta) = 1 - \alpha \quad (14)$$

Según el Teorema Central del Límite, cuando $n \rightarrow \infty$ resulta $\bar{X}_n \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ donde N representa la distribución normal. De esta forma, a la hora de estimar μ es posible, asumiendo n suficientemente grande, utilizar un intervalo de confianza sobre la variable aleatoria \bar{X}_n . En particular, definiendo la variable aleatoria $Z \sim N(0,1)$, vale asintóticamente que $\bar{X}_n = \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z$ de forma tal que $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx = P(Z < x)$. Por otro lado, definiendo z_p tal que $\Phi(z_p) = 1 - p$ y recordando que $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ es posible, a través de (14), definir un intervalo de confianza $(-z_{\frac{\alpha}{2}}; z_{\frac{\alpha}{2}})$:

$$P(|Z| < z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha \quad (15)$$

De esta forma, asumiendo conocida la varianza $V(\bar{X}_n) = \sigma^2$ y utilizando que $Z = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ es posible utilizar (15) para obtener un intervalo de confianza de nivel $1 - \alpha$ para μ . Sin embargo, dado que σ no es un parámetro conocido, es posible simplemente aproximarla por el *desvio estandar muestral* tal que $\sigma^2 \approx \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x}_n)^2}{n-1}$. Definiendo σ de esta forma y $\bar{x}_n = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}$ con x_i el valor obtenido en la i-esima medición., se puede calcular un intervalo de confianza de nivel $1 - \alpha$ de la forma:

$$\mu_\alpha = \bar{x}_n \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx \bar{x}_n \pm \frac{z_{\alpha/2}}{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2} \quad (16)$$

6. Referencias

- [1] Frank S. Crawford, *Berkeley physics course 3: Ondas*, 1994, Editorial Reverte S.A.