Práctica 5.

No vale que $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \models \varphi$ ni tampoco $\Gamma \vdash \varphi \Leftarrow \Gamma \models \varphi$.

1) A) $\{\alpha \to \beta,\ \beta \to \gamma\} \vdash \alpha \to \gamma$

1. $\beta \to \gamma$
2. $(\beta \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma))$
3. $\alpha \to (\beta \to \gamma)$ MP 1,2
4. $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$ SP2
5. $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta)$ MP 3,4
6. $\alpha \to \beta$
7. $\alpha \to \gamma$ MP 5,6

B) $\vdash (\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \alpha)$

Es SP3.

2) A) Hago una tabla de verdad.

α	β	$\neg\alpha$	$\neg\beta$	$\neg\alpha \to \neg\beta$	$\beta \to \alpha$	$(\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \alpha)$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1

TAUT.

B) Regla MP $\longrightarrow$

$$\frac{\begin{matrix}\varphi \to \psi \\ \varphi\end{matrix}}{\psi}$$

Sea v valuación tq. $v \not\models \psi$.

Como las premisas de MP son TAUT, vale que $v \models \varphi$ y $v \models \varphi \to \psi$.

Luego, $v \models (\varphi \to \psi) \iff v \not\models \varphi$ o $v \models \psi$.

Como $v \not\models \psi$, tiene que valer $v \not\models \varphi$. ¡ABSURDO!

Entonces, el resultado de MP es una tautología.

ⓒ Ver teórica.

③ $\Rightarrow$) Γ inconsistente.

Existe $\varphi \in FORM$ tal que $\Gamma \vdash \varphi$ y $\Gamma \vdash \neg\varphi$.

consultar "ida".

$\Leftarrow$) $\Gamma \vdash \alpha$ para todo α.

Como $\Gamma \vdash \alpha$ $\forall \alpha \in FORM$. Si $\alpha_1 = \varphi$ y $\alpha_2 = \neg\varphi$, sucede que $\Gamma \vdash \varphi$ y $\Gamma \vdash \neg\varphi$. $\Rightarrow$ Γ INCONSISTENTE.

④

Ⓐ $\Rightarrow$) $\Gamma \vdash \alpha$

Γ es m.c. $\Rightarrow$ $\Gamma \nvdash \neg\alpha$, entonces $\alpha \in \Gamma$. (No sé, está en la teo).

$\Leftarrow$) $\alpha \in \Gamma$.

Por def, $\alpha \in \Gamma \Rightarrow \Gamma \vdash \alpha$.

Ⓑ $\Rightarrow$) Γ m.c.

1) Es lo que vimos en la teórica: Punto Ⓐ.

- $\Gamma \cup \{\alpha\}$ inconsistente $\Rightarrow$ $\Gamma \vdash \neg\alpha \iff \neg\alpha \in \Gamma$
- $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ " $\Rightarrow$ $\Gamma \vdash \alpha \iff \alpha \in \Gamma$

No sucede que $\Gamma \cup \{\alpha\}$ (o $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$) sea consistente porque Γ es m.c.

2) SP es consistente.

Γ es m.c. $\Rightarrow$ Γ contiene a SP.

3) Supongamos que $\neg\beta \in \Gamma$.
$(\alpha \to \beta) \in \Gamma \iff \neg\alpha \in \Gamma$, pues $\beta \notin \Gamma$ (xq. Γ es consistente).
Pero $\alpha \in \Gamma \implies \Gamma$ inconsistente. ¡Absurdo!
Entonces, Γ está cerrado por MP.

$\Leftarrow$) Valen ①, ② y ③
Por ①, Γ es maximal.
Por ② y ③ es consistente.

c) $(\neg\alpha \to \beta) \in \Gamma \iff \Gamma \vdash \alpha$ o $\Gamma \vdash \beta$. AM

5) Es la demostración del teo de Lindembaum.

6) A $\implies$ B
Si $\Gamma \models \alpha$, existe un $\Gamma' \subseteq \Gamma$ tal que $\Gamma' \models \alpha$.
$\to$ $\varphi \in \Gamma$. Hay un $\Gamma' \subseteq \Gamma$: $\varphi \in \Gamma'$. Luego, hay una valuación v
tal que $v \models \varphi \implies$ Γ satisfacible.

B $\implies$ C
Γ insatisfacible.
Supongamos que para todo $\Gamma' \subseteq \Gamma$, Γ' satisfacible.
$\implies$ Γ satisfacible. ¡Absurdo!
C $\implies$ A // consultar.

7) Como α NO es TAUT, existe una valuación v : $v \not\models \alpha$.

$\Longrightarrow$ $v(P_i) = 0$ y $v(P_j) = 1$ $P_i, P_j \in Var(\alpha)$.

(recuerdo que $\alpha \in \Gamma$).

Defino a $\neg\alpha$ como la fórmula a la que P_i : $v(P_i) = 0$ es reemplazado por una tautología, y a P_j : $v(P_j) = 1$ lo reemplazamos por una contradicción.

(Lo hacemos para todo $P_i, P_j \in Var(\alpha)$ que cumplan).

$\Longrightarrow$ $\alpha, \neg\alpha \in \Gamma$ $\Longrightarrow$ Γ INCONSISTENTE.

8) Como $\Gamma \nvdash \beta$ y $\Gamma \nvdash \neg\beta$, Γ NO es maximal.

Por Lema de Lindenbaum, existe Γ_1 m.c. tq: $\Gamma \subseteq \Gamma_1$.

Sea Γ_1 tq. $\Gamma_1 \vdash \beta \Longrightarrow \Gamma_1 \nvdash \neg\beta$.

$\Longrightarrow$ Existe Γ_2 m.c. tq $\underbrace{\Gamma \subseteq \Gamma_2}_{\text{LINDENBAUM}}$ y $\Gamma_2 \vdash \neg\beta$.

- $Con(\Gamma) = \{\varphi : \Gamma \models \varphi\}$

$\varphi \in Con(\Gamma) \Longleftrightarrow \Gamma \models \varphi \Longleftrightarrow \Gamma \vdash \varphi$.

PROPIEDAD: (VISTA EN LA 1ERA TEÓRICA DE LP).

$\boxed{\text{si } \Gamma \subseteq \Delta \text{ y } \Gamma \vdash \varphi, \text{ entonces } \Delta \vdash \varphi}$

$\Longrightarrow$ $\forall \varphi \in Con(\Gamma)$, $\Gamma_1 \vdash \varphi$ y $\Gamma_2 \vdash \varphi$

$\Longrightarrow$ $\varphi \in Con(\Gamma_1)$, $\varphi \in Con(\Gamma_2)$

9) c) Trivial. Visto en la práctica 4.

d) $Con(\Gamma) = \{\varphi \mid \Gamma \models \varphi\}$

$\therefore$ $\varphi \in Con(\Gamma) \Longleftrightarrow \Gamma \models \varphi \Longleftrightarrow \Gamma \vdash \varphi \Longleftrightarrow \varphi \in \Gamma$

Entonces, $Con(\Gamma) = \Gamma$.

Escaneado con CamScanner

(10) Consultar.

(11) Teorema de Compacidad: Si todo subconjunto finito de Γ es satisfacible $\Longrightarrow$ Γ satisfacible.

Γ_1 y Γ_2 son satisfacibles, pero $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ no.

$\Longrightarrow$ Existe un $\varphi \in FORM$ tq. $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \varphi$ y $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \neg\varphi$.

Sea $\alpha \in Con(\Gamma_1)$ y $\beta = \neg\alpha \in Con(\Gamma_2)$

$\alpha \to \neg(\neg\alpha)$ tautología.

(12) Γ conj. de contingencias

$\Longrightarrow$ $\forall \varphi \in \Gamma$, existen v, v' valuaciones tq. $v(\varphi)=1$, $v'(\varphi)=0$.

Definición: Γ satisfacible $\Longleftrightarrow$ $\forall \varphi \in \Gamma$, existe v: $v \models \varphi$.

($\Longleftrightarrow$ $v \models \Gamma$).

Consultar. MI IDEA ES PROPONER UNA VALUACIÓN QUE SATISFAGA A CADA $\alpha \in \Gamma$, ANALIZANDO $Var(\alpha)$.

(13) Queremos encontrar ese conj. finito de fórmulas.

// + o -, si agarro Γ alcanzo. Voy a intentar probarlo

// como en la práctica.

→ Sea $\Delta = \{\neg\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$

Como c/ valuación v, v satisface algún α $\Longrightarrow$ Δ es insatisfacible.

$\Longrightarrow$ $\forall w$ valuación, $\underline{w \not\models \neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \neg\alpha_3 \wedge \dots \wedge \neg\alpha_N}$

Por def. $\Longrightarrow$ $w \models \neg(\neg\alpha_1 \wedge \dots \wedge \neg\alpha_N)$

$\Longleftrightarrow$ $\boxed{w \models \alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_N}$ $\Longleftrightarrow$ TAUT.

(14)

$\Gamma \models \gamma \Longleftrightarrow \Gamma \vdash \gamma \Longleftrightarrow \gamma \in \Gamma$

Por prop. de Γ, existe un $\delta \in \Gamma$ tq:

- $\delta \to \gamma$ TAUT, o
- $\gamma \to \delta$ TAUT.

Entonces, para toda valuación v tq. $v \models \delta$, sucede que $v \models \gamma$, pues $\delta \to \gamma$ (también vale en $\gamma \to \delta$).

$\Longleftrightarrow$ $\{\delta\} \models \gamma$.

(15) $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ INSATISFACIBLE

$\Longleftrightarrow$ $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ INCONSISTENTE $\Longleftrightarrow$ $\exists \alpha \in$ FORM : $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \alpha$

$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \neg\alpha$

$\Longleftrightarrow$ $\alpha, \neg\alpha \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Como Γ_1 y Γ_2 son satisfacibles, podemos deducir que

NO VALE $\Gamma_1 \vdash \alpha$ y $\Gamma_2 \vdash \alpha$

$\Gamma_1 \vdash \neg\alpha$ $\Gamma_2 \vdash \neg\alpha$

$\Longrightarrow$ $\alpha \in \Gamma_1$ y $\neg\alpha \in \Gamma_2$ (o al revés).

Escaneado con CamScanner

16 VERDADERO.

① Muy básico. Si demuestran una contradicción, entonces $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ es inconsistente.

② Sino, por Lindenbaum, existe Δ m.c. tal que $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq \Delta$.

$\longrightarrow \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \subseteq \Delta$.

Escaneado con CamScanner