PRÁCTICA 1:

① Hay que realizar k sucesiones sobre la función nula:

$$\boxed{\underbrace{S \circ \cdots \circ S}_{k \text{ VECES.}}(N(x)) = f(x)}$$

③ Ⓐ Hacemos una inducción sobre la estructura de la función.

CASO BASE ⟶ FUNCIONES INICIALES.

- $N(x) = 0 \iff$ se cumple $f(x_1, \ldots, x_n) = k$, con $k = 0$ ✓
- $S(x) = x+1 \iff$ se " $f(x_1, \ldots, x_n) = x+k$, con $k = 1$ ✓
- $\mu_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i \iff$ se " $f(x_1, \ldots, x_n) = x+k$, con $k = 0$ ✓

Paso Inductivo:

Nos queda ver que sucede en el caso de componer funciones.

Supongamos que $f, g_1, \dots, g_M \in C_0$ y cumplen con el enunciado. Qvq $h(x_1, \dots, x_N) = f(g_1(x_1, \dots, x_N), \dots, g_M(x_1, \dots, x_N))$ también cumple.

$\longrightarrow h(x_1, \dots, x_N) = x_i + k$

o

$\longrightarrow h(x_1, \dots, x_N) = k$

$\longrightarrow h(x_1, \dots, x_N) \overset{HI}{=} g_i(x_1, \dots, x_N) + k_0$

además, g_i también cumple con el enunciado.

$\Longrightarrow g_i(x_1, \dots, x_N) = x_i + k$ o $g_i(x_1, \dots, x_N) = k$

$\longrightarrow h(x_1, \dots, x_N) \overset{HI}{=} x_i + \underbrace{k' + k_0}_{= k} = \boxed{x_i + k}$ ✓

en el caso de que:

$f(g_1(x_1, \dots, x_N), \dots, g_M(x_1, \dots, x_N)) = k$

$\longrightarrow \boxed{h(x_1, \dots, x_N) = k}$ ✓

4
- $\leq \longrightarrow x \leq y = \alpha(x \dot{-} y)$
- $= \longrightarrow x = y = (x \leq y) \cdot (x \geq y)$
- $\neq \longrightarrow x \neq y = \alpha(x = y)$
- $< \longrightarrow x < y = (x \leq y) \cdot (x \neq y)$

5

$$h(x_1, \dots, x_N) = f_1(x_1, \dots, x_N) \cdot P_1(x_1, \dots, x_N) + \dots + f_k(x_1, \dots, x_N) P_k(x_1, \dots, x_N) + \\ + g(x_1, \dots, x_N) \cdot \alpha(P_1(x_1, \dots, x_N) + \dots + P_k(x_1, \dots, x_N))$$

6

A $Par(0) = 1$

$Par(x+1) = u^2_1(\alpha Par(x), x)$

→ la idea es ir midiendo PAR- IMPAR- PAR- IMPAR- ...

o

IMPAR- PAR- IMPAR- PAR- ...

hasta llegar al caso base.

B $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$

Esquema:

$div2(0) = 0$

$div2(1) = 0$

$div2(x) = 1 + div2(x \dot{-} 2)$

$div2(0) = 0$

$$div2(x+1) = \begin{cases} div2(x) & \text{si } Par(x) \\ s(div2(x)) & \text{c.c.} \end{cases}$$

Continúo Práctica I:

7

- $\text{cantidad}_p(x_1, \dots, x_N, Y, Z) = |\{t \mid Y \leq t \leq Z \wedge P(x_1, \dots, x_N, t)\}|$

$\text{cantidad}_p(x_1, \dots, x_N, Y, Z) = \sum_{t=0}^{Z} (Y \leq t) \cdot P(x_1, \dots, x_N, t)$

si sucede que $t < Y$, sumamos 0. No nos interesa ese caso.

- $\text{todos}_p(x_1, \dots, x_N, Y, Z) = \begin{cases} 1 & \text{si } (\forall t : Y \leq t \leq Z)\, P(x_1, \dots, x_N, t) \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$

$\text{todos}_p(x_1, \dots, x_m, Y, Z) = (\text{cantidad}_p(x_1, \dots, x_m, Y, Z) = Z - Y + 1)$

- $\text{maximo}_p(x_1, \dots, x_N, Y, Z) = \begin{cases} \max\{t \mid Y \leq t \leq Z \wedge P(x_1, \dots, x_N, t)\} & \text{si } \exists t \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$

Tenemos que utilizar la minimización acotada y agregarle ciertas condiciones a la función.

$\max_p(x_1, \dots, x_m, Y, Z) = \min_{Y \leq t \leq Z} \left(P(x_1, \dots, x_N, t) \wedge \left(\neg (\exists k)_{Y \leq k \leq Z}\, P(x_1, \dots, x_N, k) \wedge k > t\right)\right)$

Por def., la min. acotada devuelve 0 en el caso de no encontrar una solución. Acá, si jamás se cumple el predicado en su totalidad, retornará 0).

- $\text{unico}_p(x_1, \dots, x_N, Y, Z) = \begin{cases} u & \text{si } \{u\} = \{t \mid Y \leq t \leq Z \wedge P(x_1, \dots, x_N, t)\} \\ Z+1 & \text{c.c.} \end{cases}$

$\text{unico}_p(x_1, \dots, x_N, Y, Z) = \min_{Y \leq u \leq Z} (P(x_1, \dots, x_N, u)) \cdot (\text{cantidad}_p(x_1, \dots, x_N, Y, Z) = 1)$

$+ (Z+1) \cdot (\text{cantidad}_p(x_1, \dots, x_N, Y, Z) > 1)$

Dependiendo de "$\text{cantidad}_p()$", vemos la suma que hacemos.

$\rightarrow u + 0 = u$ ✓

$\rightarrow 0 + Z + 1 = Z + 1$ ✓

Como "$\text{cantidad}_p()$" está en PRC, min., sumas y multiplicaciones también $\longrightarrow$ "$\text{unico}_p()$" está en C.

⑧ PROBAR QUE ESTÁN EN TODA CLASE PRC.

- $\text{Cociente}(x,y) = \lfloor x/y \rfloor$

$\text{cociente}(x,y) = \min_{t \leq x} \left((\exists r)_{\leq y} \; x = t \cdot y + r \right)$

- $\text{resto}(x,y) = \min_{t < y} \left(\text{cociente}(x,y) \cdot y + t = x \right)$

- $\text{divide}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ divide a } y \iff x \mid y \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$

$\text{divide}(x,y) = (\text{resto}(x,y) = 0)$

- $\text{raiz}(x,y) = \begin{cases} \lfloor \sqrt[x]{y} \rfloor & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

$\text{raíz}(x,y) = \min_{t \leq y} \left((t+1)^x > y \right) \cdot (x \neq 0)$

// El del NPrimo está en la teórica.

⑨ $\longrightarrow z = 2^x(2y+1) \dot{-} 1$

PROBAR QUE $l(z)$ Y $r(z)$ ESTÁN EN TODA CLASE PRC.

→ $l(z) = x$

$z = 2^x(2y+1) \dot{-} 1 = \boxed{z + 1 = 2^x(2y+1)}$

$\boxed{l(z) = \min_{x \leq z} \quad 2^{x+1} \nmid (2y+1)}$ No Sirve!

→ $r(z) = y$

Ya sabemos que $l(z)$ está en toda clase PRC.

$\boxed{r(z) = \min_{t \leq z} \left(2^{l(z)}(2t+1) \dot{-} 1 = z \right)}$ ← Ver este.

$l()$ ⟷ $\boxed{l(z) = \min_{x \leq z} \left((\exists y)_{\leq z} \; z = \langle x, y \rangle \right)}$ ✓

⑩ El Problema de Fibonacci es que NO se apega al esquema de P.r.

El paso recursivo depende de 2 llamados a funciones previas. Para probar que fib() está en toda clase PRC, queremos cambiar esto.

→ Sea $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que

$h(n) = \langle fib(n), fib(n+1) \rangle$

Queremos definir a fib como: $\boxed{fib(n) = \ell(h(n))}$

Como vimos en 9, $\ell()$ es P.r., entonces basta con probar que h es P.r. para decir que fib es P.r. también.

Veamos el esquema de recursión primitiva de h:

→ $h(0) = \langle 0, 1 \rangle = 2$ ✓

$h(t+1) = \langle fib(t+1), fib(t+2) \rangle$

↓ LA DEFINICIÓN DE fib()

$h(t+1) = \langle fib(t+1), fib(t+1) + fib(t) \rangle$

$= \langle r(h(t)), \ell(h(t)) + r(h(t)) \rangle$

POR DEFINICIÓN DE h.

Recordemos que: $h(t) = \langle fib(t), fib(t+1) \rangle$

→ $\ell(h(t)) = fib(t)$

→ $r(h(t)) = fib(t+1)$

Ajustando h al esquema:

$h(0) = 2$

$h(t+1) = g(h(t), t)$

con $g(h(t), t) = \langle r(h(t)), \ell(h(t)) + r(h(t)) \rangle$

Ya probamos que h es P.r.

$\therefore$ redefiniendo fib → $\boxed{fib(n) = \ell(h(n))}$

PA

Las funciones P.r. se encuentran en toda clase PRC, por lo tanto, fib está en toda clase PRC.

11 Son 2 funciones ≠, cuyos esquemas dependen uno del otro.

Mi idea es similar a la del ejercicio anterior: codificar en una tupla las funciónes h_1 y h_2.

→ Sea $H: \mathbb{N}^{N+1} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que:

$$H(x_1, \ldots, x_N, t) = \langle h_1(x_1, \ldots, x_N, t), h_2(x_1, \ldots, x_N, t) \rangle$$

Veamos el esquema: (escribo $x_1, \ldots, x_N$ como x)

$$\rightarrow H(x, 0) = \langle f_1(x), f_2(x) \rangle$$

$$H(x, t+1) \overset{\text{POR DEF. DE } h_1 \text{ y } h_2}{=} \langle g_1(h_1(x,t), h_2(x,t), x, t), g_2(h_2(x,t), h_1(x,t), x, t) \rangle = *$$

$$* \overset{\text{POR DEF. DE } H}{=} \langle g_1(\ell(H(x,t)), r(H(x,t)), x, t), g_2(r(H(x,t)), \ell(H(x,t)), x, t) \rangle$$

Las obs. de codificaciones de tuplas están en toda clase PRC. → Están en C. También estan en C f_1, f_2, g_1 y g_2. A su vez, pudimos determinar que H es P.r. debido a todo esto.

(Ajustamos el esquema rec. prim. al que queríamos).

→ $h_1(x_1, \ldots, x_N, t) = \ell(H(x_1, \ldots, x_N, t))$

→ $h_2(x_1, \ldots, x_N, t) = r(H(x_1, \ldots, x_N, t))$

SON P.r. xq. H es P.r. y los observadores SON P.r.

Composición de p.r. es p.r.

12

A $C_{i+P} \subseteq C_{ACK}$, con C_{i+P} la clase que contiene las funciones iniciales y la codificación de pares (con sus observadores).

Queremos probar que $C_{ACK} \subseteq PR$, es decir, que está en el conjunto de funciones P.R.

Hago inducción sobre C_{ACK}

Caso Base

Las funciones iniciales y la codificación y los observadores de pares son P.R. ya lo probamos antes.

Paso Inductivo

Tengo que ver que $f \circ \dots \circ f(x)$ es P.R.

Sea $h: \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que:

$$\boxed{h(N, x) = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{N \text{ veces}}(x)} = f^{(N)}(x)$$

Supongamos que se cumple que $h(t, x)$ es P.R. para $t = 1, \dots, N$. Qvq se cumple para $N+1$.

$\longrightarrow$ ¿$h(N+1, x)$ es P.R.?

$$h(N+1, x) = \underbrace{f \circ \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{N \text{ veces}}}_{N+1 \text{ veces}}(x) = f^{(N+1)}(x)$$

Sabemos que:

$$f^{(N+1)}(x) = f(f^{(N)}(x)) = \boxed{f^{(1)}(f^{(N)}(x))}$$

Por HI, sabemos que $f^{(N)}$ es P.R. y $f^{(1)}$ también.

$\longrightarrow$ Composición de P.R. es P.R., entonces podemos decir que $f^{(N+1)}$ es P.R. $\Longleftrightarrow$ lo que queríamos probar.

$\therefore$ $C_{ACK} \subseteq PR$

$\blacksquare$

(B) Fácil de ver. Como puedo componer N funciones, puedo codificar pares dentro de otros pares.

$\Longleftrightarrow \langle 1, \langle 4, \langle 5, 6 \rangle \rangle \rangle$ (ejemplo).

(C) $f, g \in C_{ACK}$.

h se obtiene por recursión primitiva de f y g.

$s(\bar{x}, y) = \langle \bar{x}, y, h(\bar{x}, y) \rangle$

Quiero ver que $s \in C_{ACK}$.

¿$h \in C_{ACK}$? XQ C_{ACK} ESTÁ CERRADO POR COMPOSICIÓN

CONSULTAR.

Mi idea viene por el lado de que h es p.r., y (en el caso de que sea cierto) pertenece a C_{ACK}.

A su vez, la codificación de pares está en C_{ACK} y vimos en (B) que podemos codificar N-tuplas.

→ Composición de funciones de C_{ACK} es C_{ACK}.

(D) CONSULTAR.

(13)

(A) Biyección = Inyectiva + Sobreyectiva.

Los primos tienen una factorización única.

No sé que + fundamentar.

(B) Demostrar que están en toda clase PRC:

- $|\cdot| : \mathbb{N} \to \mathbb{N} = |[a_1, \dots, a_N]| = N$.

$|\cdot| = \min_{t \leq [\dots]} \quad t+1 \nmid [a_1, \dots, a_N]$

osea, si el primo ya no divide, no está en la codificación.

- $\cdot[i] : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ = $[a_1, \ldots, a_N][i] = \begin{cases} a_i & \text{si ESTÁ EN LA LISTA.} \\ 0 & \text{CC} \end{cases}$

$$A[i] = \min_{t \leq A} \left(\mathrm{NPrimo}(i)^{t+1} \nmid A \right)$$

SIGO PRÁCTICA 1:

13 B

- $[\cdot]: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $[x]$ es la lista con único elto. x.

$[x] = 2^x$

- $\cdot \circ \cdot : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $[a_1, \dots, a_N] \circ [b_1, \dots, b_M] = [a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N]$

$A \circ B = A \cdot \prod_{i=|A|+1}^{|B|+|A|} \text{NPrimo}(i)^{B[i]}$

→ Agarro el Nro de A y luego tengo que hacer que los eltos. de B "alarguen" la lista A. Es decir, tiene que codificarse B con los Primos que vienen luego de los N Primeros.

- sub: $\mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $\text{sub}([a_1, \dots, a_N], i, j) = [a_i, \dots, a_j]$

$\text{sub}(A, i, j) = \prod_{k=i}^{j} \text{NPrimo}(k-i+1)^{A[i]}$

C CREO que haciendo que la codificación de una secuencia S sea: $\prod_{i=1}^{N} \text{NPrimo}(i)^{s_i+1}$ alcanza.

14 A Sea $H: \mathbb{N}^{N+1} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que:

$H(x_1, \dots, x_N, t) = [h(x_1, \dots, x_N, 0), \dots, h(x_1, \dots, x_N, t)]$

Sabemos que la codificación de listas es P.r., al igual que sus observadores.

Además, toda función p.r. está en toda clase PRC.

Mi idea es escribir h en términos de H:

$$\underline{h(x_1, \ldots, x_N, t) = H(x_1, \ldots, x_N, t)[t]}$$

Si pruebo que H es p.r., puedo determinar que h también lo es, pues composición de funciones p.r. es p.r.

Veamos que H es p.r.:

~~CONSULTAR~~

$$\rightarrow H(\bar{x}, 0) = [f([\,], \bar{x})]$$

$$H(\bar{x}, t+1) \underset{\text{x def. de } H}{=} [h(\bar{x}, 0), \ldots, h(\bar{x}, t+1)]$$

$$\underset{\text{x def. de } h}{=} [h(\bar{x}, 0), \ldots, f([h(\bar{x}, 0), \ldots, h(\bar{x}, t)], \bar{x})]$$

$$\underset{\text{x def. de } H}{=} [H(\bar{x}, t)[1], \ldots, f(H(\bar{x}, t), \bar{x})]$$

$H(\bar{x}, 0)$ es una función p.r. (es una constante).

$H(\bar{x}, t+1)$ puede expresarse mediante una función p.r. que solo depende de N y su valor anterior $\underline{H(\bar{x}, N)}$.

$\longrightarrow H(\bar{x}, t+1)$ también está compuesta por f, que es una función PRC.

Entonces, H también está en C

$\longrightarrow$ Si escribimos h como: $\boxed{h(\bar{x}, t) = H(\bar{x}, t)[t]}$

h está escrita en términos de una función PRC.

$\Longrightarrow$ $\underline{h \text{ está en C.}}$

$\boxtimes$