PRÁCTICA 7:

(1) Trivial.

(2)

(A) φ NO es universalmente válida $\rightarrow \nvDash \varphi$.
(NO ES UNA TAUTOLOGÍA).

$\Rightarrow$ Existe un modelo $\mathcal{M}$ que hace falsa a φ.
Para $\mathcal{M}$, se tiene que $\Delta \cup \{\varphi\}$ es falso, Por lo tanto, el sist. resultante NO es correcto.

(B) Sea φ una fórmula universalmente válida.

$\Rightarrow \Delta \models \varphi \equiv \models \varphi$

$\Delta = \emptyset$
φ U.V.

No es demostrable en SQ.

(C) Consultar.

(3) SQ8: $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((xRy \wedge yRz \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge x \neq y) \rightarrow xRz)$

(A) Decimos que SQ^T es correcta con respecto a la clase de los modelos transitivos si:
$\forall \varphi$, φ $\mathcal{L}$-fórmula, $SQ^T \vdash \varphi \Rightarrow \mathcal{M}_T \models \varphi$
con $\mathcal{M}_T$: clase de modelos transitivos.

Supongamos $\vdash_{SQ^T} \varphi$.
Por definición de $\vdash_{SQ^T}$, esto significa que $SQ8 \underset{\vdash_{SQ}}{\vdash} \varphi$

Por correctitud de SQ, $SQ8 \models \varphi$.
Entonces, SQ8 es válido en $\mathcal{M}_T$

$\Rightarrow \mathcal{M}_T \models SQ8$.

$\Rightarrow \boxed{\mathcal{M}_T \models \varphi}$

x def. de consec. semántica.

(B) Decimos que SQ^T es completo con respecto a C si: $\forall$ $\mathcal{L}$-fórmula φ, $C \models \varphi \Rightarrow SQ^T \vdash \varphi$.

¿C es la clase de todos los modelos?

Sea φ: $C \models \varphi$

Como las estructuras que satisface SQ pueden pertenecer a cualquier modelo $\Rightarrow SQ \models \varphi$

Por completitud de SQ, $\underline{SQ \vdash \varphi}$.

$\therefore$ sigue valiendo para $SQ \cup \{SQ8\}$:

$SQ \cup \{SQ8\} \vdash \varphi \rightsquigarrow \boxed{SQ^T \vdash \varphi.}$

(C) ¿$\mathcal{M}_T$ es la clase de modelos transitivos?

Sea φ: $\mathcal{M}_T \models \varphi$

Como cualq. estructura que satisface $\{SQ8\}$ es transitiva, y como cualquier estr. transitiva satisface a φ

$\Rightarrow SQ8 \models \varphi$

$\Rightarrow SQ8 \vdash \varphi \rightsquigarrow \boxed{SQ^T \vdash \varphi}$

COMPLETITUD FUERTE DE SQ.

(D) Supongamos SQ^T correcta.

$\Rightarrow \vdash_{SQ^T} SQ8$

$\Rightarrow$ SQ8 es verdadera en toda $\mathcal{L}$-estructura.

¡Absurdo! (No todas las $\mathcal{L}$-estr. son transitivas).

(4) SQ8: r no tiene padres, nadie es hijo de sí mismo.
SQ9: Si y y z son padres de x, entonces son el mismo nodo.
SQ10: Si x no tiene padres, es la raíz.

(B) Decimos que SQ^T es completa con respecto a C si: $\forall$ $\mathcal{L}$-fórmula φ, $C \models \varphi \Rightarrow SQ^T \vdash \varphi$.

¿C es la clase de todos los modelos?

$\hookrightarrow$ Sea φ : $C \models \varphi$

Como las estructuras que satisface SQ pueden pertenecer a cualquier modelo $\Rightarrow$ $SQ \models \varphi$

Por completitud de SQ, $\underline{SQ \vdash \varphi}$.

$\therefore$ sigue valiendo para $SQ \cup \{SQ8\}$:

$SQ \cup \{SQ8\} \vdash \varphi \iff \boxed{SQ^T \vdash \varphi}$

(C) ¿$\mathcal{M}_T$ es la clase de modelos transitivos?

Sea φ : $\mathcal{M}_T \models \varphi$

Como cualq. estructura que satisface $\{SQ8\}$ es transitiva, y como cualquier estr. transitiva satisface a φ

$\Rightarrow SQ8 \models \varphi$

$\Rightarrow SQ8 \vdash \varphi \iff \boxed{SQ^T \vdash \varphi}$

COMPLETITUD FUERTE DE SQ.

(D) Supongamos SQ^T correcta.

$\Rightarrow \vdash_{SQ^T} SQ8$

$\Rightarrow$ SQ8 es verdadera en toda $\mathcal{L}$-estructura.

¡ABSURDO! (No todas las $\mathcal{L}$-estr. son transitivas).

(4) SQ8: $\neg$ no tiene padres, nadie es hijo de sí mismo.
SQ9: Si y y z son padres de x, entonces son el mismo nodo.
SQ10: Si x no tiene padres, es la raíz.

(A) SQ8: $(\forall x)(\neg P(x,r) \wedge \neg P(x,x))$

En la clase C, todo elemento es irreflexivo. Para un a cualquiera: $(a,a) \notin P^{\mathcal{M}}$.

A su vez, r, la raíz, no puede tener padre.

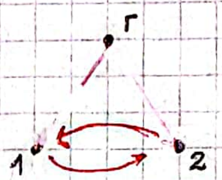
$\Rightarrow (a,r) \notin P^{\mathcal{M}}$.

$\Rightarrow$ SQ8 es válido en C.

$\rightarrow$ Es = para SQ9 y SQ10, lo hicimos en clase.

(B)

$\mathcal{M} =$



(C) Correctitud respecto a C:

Sea $\varphi \mid \vdash_{SQ_{Tree}} \varphi$.

$\Longleftrightarrow \{SQ8, SQ9, SQ10\} \vdash \varphi$.

Por correctitud fuerte de SQ: $\{SQ8, SQ9, SQ10\} \models \varphi$.

Sabemos que $\{SQ8, SQ9, SQ10\}$ es válido en C

$\Rightarrow C \models \{SQ8, SQ9, SQ10\} \Rightarrow C \models \varphi$. $\blacksquare$

Completitud respecto a C:

Sup. SQ_{Tree} completa con respecto a C.

Entonces vale: $SQ_{Tree} \vdash \varphi$, con $\varphi: (\forall x)(\forall y)(P(x,y) \rightarrow \neg P(y,x))$.

Sabemos que $C \models \varphi$. (todo árbol es antisimétrico).

$\Rightarrow SQ_{Tree} \models \varphi$. ¡ABSURDO!

(5) (A) SQ8 $(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \rightarrow T(x,y))$

Por def. de C, $P^+_{\mathcal{M}} = T_{\mathcal{M}}$ y $P_{\mathcal{M}} \subseteq P^+_{\mathcal{M}}$

$\Rightarrow P_{\mathcal{M}} \subseteq T_{\mathcal{M}}$.

Entonces, SQ8 es válido en C.

SQ9 $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((T(x,y) \wedge P(y,z)) \to T(x,z))$

En C, $P_M^+ = T_M$, con P_M^+ mínima relación transitiva tal que $P_M \subseteq P_M^+$.

$\Rightarrow$ P_M pertenece siempre a una relación transitiva.

// no sé como seguir aclarando. Es medio obvio.

$\Rightarrow$ SQ9 es válido en C.

SQ10 $(\forall x)(\forall y)((T(x,y) \wedge \neg P(x,y)) \to (\exists z)(T(x,z) \wedge P(z,y)))$

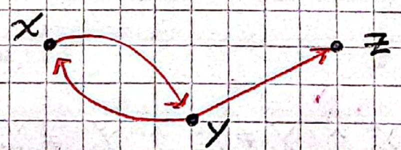
// nos dice que si una relación NO está en P pero sí en
// T, es xq. x e y tienen una "relación transitiva".

Sea (a,b) | $P_M(a,b)$ se cumple. Y sea c tq. $P_M(a,c)$ y $P_M(c,b)$ NO valen.

En P_M^+, la mínima relación transitiva, $P_M^+(a,c)$ y $P_M^+(c,b)$ se cumplen $\Rightarrow$ Se cumple también SQ9. (y SQ8)

$\Rightarrow$ SQ10 es válido en C.

B) M|



, $(x,y) \in P$
$(y,z), (y,x) \in T$

c) Sup. que $C \models \varphi$.

Supongamos que SQ^+ es completo.

$\Rightarrow SQ^+ \vdash \varphi \Rightarrow SQ^+ \models \varphi$

CORRECTITUD.

Pero por B), vimos que $SQ^+ \not\models \varphi$. ¡Absurdo!

6) P1: No existe ningún natural : su sucesor sea el 0.
P2: Los números no comparten sucesores.
P3: La suma es asociativa.

Queremos ver que SQ_p no es completo.
Para ello, queremos encontrar un modelo $\mathcal{M}$ que cumpla con SQ_p y una fórmula ψ tq. $\mathcal{M} \not\models \psi$.

Defino: $\mathcal{M} = \{\{1\}, 1, +, =\}$ y
$\psi: (\exists x)(\exists y)(x+1 \neq y+1)$

El modelo de los $\mathbb{N}$ con $+$ satisface a ψ, pues tiene más de un único elemento.
Si valiese que $SQ_p \vdash \psi \implies \{P1, P2, P3\} \vdash \psi$
$\implies \underline{\{P1, P2, P3\} \models \psi}$
CORRECTITUD DE SQ.

Pero esto no es cierto, pues si valiera que $\{P1, P2, P3\} \models \psi$, sucedería que $\mathcal{M} \models \psi$ (lo cual NO es cierto).
Entonces, $SQ_p \not\vdash \psi$.
$\therefore$ SQ_p NO ES COMPLETA RESPECTO AL MODELO DE LOS $\mathbb{N}$ CON $+$. ▨

7

A $\varphi_2: (\exists y_1, \exists y_2)\ y_1 \neq y_2$
$\varphi_3: (\exists y_1 \exists y_2 \exists y_3)(y_1 \neq y_2 \wedge y_1 \neq y_3 \wedge y_2 \neq y_3)$
$\vdots$
φ_N: "Hay al menos N elementos".
$(\exists y_1, \dots, \exists y_N)(y_1 \neq y_2 \wedge \dots \wedge y_1 \neq y_N \wedge y_2 \neq y_3 \wedge \dots \wedge y_{N-1} \neq y_N)$

B Tenemos que $\underline{\Gamma = \{\varphi_i : i \geq 2, i \in \mathbb{N}\}}$
Por compacidad, podríamos determinar que Γ es SATISFACIBLE si todo $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ también lo es.

~~Sea $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito. Mostremos que Γ_0 NO ES SATISFACIBLE.~~

~~Definimos:~~ $\cancel{MAX = max(\{i : \varphi_i \in \Gamma_0\} \cup \{1\})}$

Definimos: $\mathcal{M}$ es el modelo con dominio finito.
$\longrightarrow$ "Hay k elementos $\neq$" (en el dominio de $\mathcal{M}$).

Defino ψ:

ψ es una fórmula satisfacible en $\mathcal{M} \iff$ el dominio de $\mathcal{M}$ es finito.

AHORA $\longrightarrow$ $\boxed{\Gamma' = \Gamma \cup \{\psi\}}$

Queremos ver que Γ' es INSATISFACIBLE.

consultar como aplicar compacidad en este caso.

Sup. que existen $\mathcal{M}, v$ tq. $\mathcal{M}, v \models \Gamma'$.

$\Rightarrow \mathcal{M}, v \models \Gamma$

$\Rightarrow$ Dominio de $\mathcal{M}$ es INFINITO.

Pero también tenemos que: $\mathcal{M} \models \psi$

y habíamos visto que

$\mathcal{M}, v \models \psi \iff$ dominio de $\mathcal{M}$ es FINITO.

¡ABSURDO!

$\Rightarrow$ No existe ninguna fórmula ψ.

8 Para este ejercicio, seguimos el esquema de 5 pasos.

(A) Supongamos que existe una fórmula φ_R que cumple con el enunciado.

(B) Defino ∞ fórmulas $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ para negar incrementalmente a φ_R.

$$\varphi_1(x,y) : (\exists z_1)((z_1 \neq x \wedge z_1 \neq y \wedge R(x,z_1) \wedge R(z_1,y)) \rightarrow R(x,y))$$

$\varphi_2(x,y)$: $(\exists z_1 \exists z_2)((z_1 \neq z_2 \wedge R(x,z_1) \wedge R(z_1,z_2) \wedge R(z_2,y)) \longrightarrow R(x,y))$

$\vdots$

$\varphi_i(x,y)$: $(\exists z_1, \ldots, \exists z_i)((\text{todosDistintos}(z_1,\ldots,z_i) \wedge R(x,z_1) \wedge \ldots \wedge R(z_i,y)) \rightarrow R(x,y))$

(C) Consideramos entonces a $\Gamma = \{\neg\varphi_i : i \geq 1, i \in \mathbb{N}\} \cup \{\varphi_R\}$

(D) 1) Veamos primero que Γ es insatisfacible.

Supongamos que existen $\mathcal{M}, v$ tq. $\mathcal{M}, v \models \Gamma$.

$\Rightarrow \mathcal{M}, v \models \{\neg\varphi_i \mid i \geq 1, i \in \mathbb{N}\}$

$\Rightarrow (x,y)$ no pertenece a la clausura transitiva de $R^{\mathcal{M}}$.

Pero también tenemos que $\mathcal{M}, v \models \psi$ (pues $\mathcal{M}, v \models \Gamma$ y $\psi \in \Gamma$).

¡Absurdo! $\rightarrow$ Γ es insatisfacible.

2) Veamos ahora que Γ es satisfacible.

Queremos usar compacidad.

Tomo $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito. Qvq. Γ_0 es satisfacible.

Defino: $MAX = \max(\{i \geq 1 \mid \neg\varphi_i \in \Gamma_0\} \cup \{1\})$.

Tiene que haber $MAX + 1$ elementos que no hacen transitivo a (x,y). Definamos un modelo que cumpla:

$\mathcal{M}$: $R^{\mathcal{M}} = \{(x,1), (1,2), (2,3), \ldots, (MAX, MAX+1)\}$

$(x,y) \notin R^{\mathcal{M}} \Rightarrow \Gamma_0$ satisfacible. (considero $\psi \notin \Gamma_0$).

Consultar.

9 Ⓐ Supongamos que existe una fórmula ψ de PO que cumple con el enunciado.

Ⓑ Defino ahora las ∞ fórmulas $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$:

$\cancel{\varphi_0 : (\forall x)(\forall y) \neg R(x,y)}$

// Asumo que $R(x,y)$ nos dice $x \longleftrightarrow y$.

$\varphi_1(x,y) : \neg(\exists z_1)(R(x,z_1) \wedge R(z_1,y))$

⋮

$\varphi_i(x,y) : \neg(\exists z_1 \dots \exists z_i)(\text{todosDistintos}(z_1,\dots,z_i) \wedge R(x,z_1)$
$\quad \wedge R(z_1,z_2) \wedge \dots \wedge R(z_i,y))$

Ⓒ Consideremos ahora $\Gamma = \{\varphi_i \mid i \geq 0, i \in \mathbb{N}\} \cup \{\psi\}$

Ⓓ

1) Vemos Γ insatisfacible.

Supongamos que existen $\mathcal{M}, v \models \Gamma$

$\Longrightarrow \mathcal{M}, v \models \{\varphi_i \mid i \geq 0, i \in \mathbb{N}\}$ y $\mathcal{M}, v \models \psi$

$\rightarrow$ Estamos diciendo que el grafo de $\mathcal{M}$ es conexo y disconexo a la vez. ¡ABSURDO!

$\Longrightarrow$ Γ ES INSATISFACIBLE.

2) Vemos Γ satisfacible.

Queremos usar compacidad.

Sea $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$. Definimos $MAX + \max(\{i \geq 0 \mid \varphi_i \in \Gamma_0\} \cup \{\emptyset\})$

Nos queda encontrar un $\mathcal{M}, v \mid \mathcal{M}, v \models \Gamma_0$.

Si $\mathcal{M}$ es un grafo en donde x e y están separados por $MAX+1$ aristas, estamos satisfaciendo a todo $\varphi_i \in \Gamma_0$ (XQ HAY + DE MAX ARISTAS PARA QUE EL GRAFO SEA CONEXO), y también satisfacemos a ψ (si $\psi \in \Gamma_0$) ya que $\mathcal{M}$ es un grafo conexo.

$\Longrightarrow$ Γ ES SATISFACIBLE

(≡) Estamos concluyendo que Γ es y NO es satisfacible. ¡Absurdo! Entonces ψ no es expresable.

(10) Vamos a seguir con el esquema de inexpresabilidad. (Quise decir "para demostrar inexpresabilidad").

Supongamos que existe una fórmula ρ que cumple con lo que pide el enunciado.

Sea el sig. conjunto de fórmulas $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.

- φ_1 : $\neg(\exists x)\ f(x)=x$
- φ_2 : $\neg(\exists x)\ f^2(x)=x$

$\vdots$

- φ_i : $\neg(\exists x)\ f^i(x)=x$

Definimos entonces el conj. de fórmulas Γ:

$$\Gamma=\{\varphi_i \mid i\geq 1,\ i\in\mathbb{N}\}\cup\{\rho\}$$

Considerando este conjunto, queremos llegar a una contradicción.

→ Veamos Γ insatisfacible.

Supongamos que existe un modelo $\mathcal{M}$ y valuación v tal que: $\mathcal{M}, v\models\Gamma$.

$\Longrightarrow$ $\mathcal{M}, v\models\{\varphi_i \mid i\geq 1,\ i\in\mathbb{N}\}$ $\Longleftrightarrow$ "JAMÁS SUCEDE QUE $f^N(e)=e$ $\forall e,\ e\in \mathrm{Dom}\ \mathcal{M}$".

Pero a su vez tenemos que:

$\mathcal{M}, v\models\rho$ $\Longleftrightarrow$ "PARA TODO EL DOMINIO, EXISTE UN m: $f^m(e)=e$".

CONTRADICCIÓN.

$\Longrightarrow$ Γ ES INSATISFACIBLE.

→ Veamos Γ satisfacible.

Como siempre, queremos usar compacidad.

Sea $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, queremos ver que Γ_0 es satisfacible.

Defino $MAX = \max(\{i \geq 1 \mid \varphi_i \in \Gamma_0\} \cup \{1\})$.

Queremos encontrar un modelo $\mathcal{M}$: $\mathcal{M} \models \Gamma_0$.

→ En particular, si en $\mathcal{M}$ NINGÚN número del dominio cumple la condición hasta aplicar f MAX + 1 veces, estamos hechos.

→ Sea $\mathcal{M} \mid \forall x \in Dom\,\mathcal{M}: f^i(x) = x \iff i = MAX + 1$

$\Rightarrow \mathcal{M} \models \Gamma_0$ (TAMBIÉN VALE QUE $\mathcal{M} \models \rho$ SI $\rho \in \Gamma_0$).

$\Rightarrow \Gamma$ ES SATISFACIBLE.

Pero antes habíamos dicho que Γ era insatisfacible.

¡ABSURDO! Entonces, ρ es inexpresable.

11

A Si $\mathcal{M}$ es modelo de $SQ^+_{\mathbb{R}} \Rightarrow \mathcal{M} \models SQ^+_{\mathbb{R}}$

Como $SQ_{\mathbb{R}} \subseteq SQ^+_{\mathbb{R}} \Rightarrow \mathcal{M} \models SQ_{\mathbb{R}}$.

B Quiero usar la sugerencia (compacidad).

Sea $\Delta \subseteq SQ^+_{\mathbb{R}}$. Qvq. Δ es satisfacible.

Tan solo tenemos que plantear un modelo que "encaje".

1 $\Delta \subset SQ_{\mathbb{R}}$.

→ $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, S_{\mathbb{R}}, 28)$. Tenemos que $\mathcal{M} \models \Delta$.

2 $\Delta \not\subset SQ_{\mathbb{R}}$

Acá tenemos que tener en cuenta los 2 axiomas nuevos de $SQ^+_{\mathbb{R}}$. Otra vez, buscamos un modelo $\mathcal{M}$ que satisfaga a Δ.

→ $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, S_{\mathbb{R}}, \frac{1}{k+1})$, con $k = N$ tq. N MINIMIZA MENOR$_N$.

$\Rightarrow \mathcal{M} \models \Delta$.

$\Rightarrow SQ^+_{\mathbb{R}}$ SATISFACIBLE.

(12) $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, 0, suc)$

(A) $Dom(\mathcal{N}) = \mathbb{N} \Rightarrow 0$ es el elemento + chico de $\mathcal{N}$.

Luego, $suc(0) = 1 \Rightarrow$ S1 es verdadero.

$suc(x) = x+1 \Rightarrow$ Para ningún x, sucede que $suc(x) = x$.

A su vez, $suc^{(i)}(x) = x + i \neq x$ (Pues $i \geq 1$).

$\Rightarrow$ S4 es verdadero.

(B) Consultar.

(C) Osea, si $\Gamma = \{S2, S4\}$.

Si tomamos $\mathcal{M} = (\mathbb{Z}; 0; suc) \to \mathcal{M} \models \Gamma$ pero $\mathcal{M} \not\models SQ_N$.

Consultar bien la demo formal.

(D) "SQ_N correcta y completa con respecto a $\mathcal{N}$."

$\Leftrightarrow$ $SQ_N \vdash \varphi \Rightarrow \mathcal{N} \models \varphi$ (CORRECTA).

$\mathcal{N} \models \varphi \Rightarrow SQ_N \vdash \varphi$ (COMPLETA).

Hipótesis: $\mathcal{N} \models \varphi \Rightarrow SQ_N \vdash \varphi$

$\Rightarrow \forall \varphi \quad \mathcal{N} \models \varphi \underset{\odot}{\Rightarrow} \Sigma_0 \vdash \varphi \Rightarrow \Sigma_0 \models \varphi$

¡ABSURDO! (Por el ítem ©)

$\odot$ $\exists \Gamma$ finito, correcto y completo con respecto a SQ_N.

$\exists \underbrace{\Sigma_0}_{\text{FINITO}} \subseteq \underbrace{\Sigma}_{SQ_N}$. Σ_0 y SQ_N son la misma teoría.