PRÁCTICA 6

1. A. No. El dominio son los naturales y, por ejemplo, $\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$.

B. Apropiada.

C. g es binaria pero depende únicamente de N. RARO.

(2)

(A) Dice que si x es + chico que y, existe un número racional que se encuentra entre ellos. VERDADERO.

(B) Dice que todos los días nace, al menos, un hombre libre. NO SÉ

(C) Dice que, para todo par de números pares, su suma es impar. FALSO.

(3)

(A) Existen al menos 2 elementos.

$$\exists x \exists y \ (\neg(x=y))$$

(B) Existen exactamente 2 elementos.

$$\exists x \exists y \ ((x \neq y) \wedge \forall z (x=z \vee y=z))$$

(C) Existen a lo sumo 2 elementos.

$$\underbrace{\neg \exists x \ (x=x)}_{\text{NO EXISTE NINGUNO}} \vee \underbrace{\exists x \forall z \ (x=z)}_{\text{EXISTE UNO}} \vee \underbrace{\exists x \exists y \ (x \neq y \wedge \forall z \ (z=x \vee z=y))}_{\text{EXISTEN 2.}}$$

(D) Existen a lo sumo 2 elementos, y al menos 1 que cumplen la propiedad P.

$$\underbrace{\varphi_c}_{\to \text{ EL ENUNCIADO DEL ÍTEM (C)}} \wedge \exists t \ (P(t))$$

(E) Si existe un elemento que cumple la propiedad P, es único.

$$\exists x \ (P(x) \rightarrow \forall z \ (x=z))$$

(F) Existe un elemento que cumple P y es único.

$$\exists x \ (P(x) \wedge \forall z \ (x=z))$$

(4) INYECTIVA: Cada elemento del dominio devuelve un resultado $\neq$.

SOBREYECTIVA: Toda la imagen de la función es cubierta.

$\varphi: \quad \forall x \forall y \, (x \neq y \rightarrow f(x) \neq f(y)) \wedge \exists z \forall x \, (f(x) \neq z)$

φ no es satisfacible por un modelo finito, pues para ser inyectiva, también debería ser biyectiva.

(5) • $\forall x \forall y \; f(x,y) = x$

1) f es la identidad. Solo mira el primer parámetro.
2) $f(x,y) = x+y$

• $\exists x \forall y \; f(x,y) = y$

1) $f(x,y) = x+y$
2) $f(x,y) = x-y$

• $\exists x \, (P(x) \wedge \forall y (P(f(x,y))))$

1) $P(x)$: x es impar, $f(x,y) = x$
2) $P(x)$: x es " , $f(x,y) = x+y$.

(6) Sea el universo de los $\mathbb{N}$.

$\varphi_0(x): \quad \neg \exists x_1 \, (x_1 < x)$

$\varphi_1(x): \quad \exists x_1 \, (x_1 < x \wedge \forall x_2 \, (x_1 = x_2 \vee x_2 = x))$

$\vdots$ "INDUCCIÓN"

$\varphi_N(x): \exists x_1, \ldots, x_N \, (x_1 < x \wedge \ldots \wedge x_N < x \wedge \neg \exists y \, (y < x \wedge (y \neq x_1 \vee y \neq x_2 \vee \ldots \vee y \neq x_N)))$

(7) • $I_1 = (\mathbb{N}, +)$

$\varphi_1(x): \quad \forall y \, (\neg \exists z \, (y \leq z \wedge z \leq x+y))$

No sé si puedo usar el $<$.

• $\mathcal{I}_2 = (\mathbb{N}, \cdot)$

$\varphi_2(x): \quad \forall y\,(y \cdot x = y)$

(8)

(A) $\varphi_1: \quad \neg \exists y\,(y \leq x \wedge x \neq y)$

$\varphi_2: \quad \exists y\,(y \leq x \wedge \varphi_1(y)) \wedge \exists y \exists w \exists z\,(x \neq y \wedge x \neq w \wedge$
$x \neq z \wedge w \neq y \wedge y \neq z \wedge z \neq w \wedge x \leq y \wedge x \leq w \wedge x \leq z)$

$\varphi_3: \quad \exists y\,(y \leq x \wedge \varphi_1(y)) \wedge \exists y, \exists z\,(y \neq z \wedge y \neq x \wedge z \neq x$
$\wedge \forall w\,(x \leq w \rightarrow (w = x \vee w = y \vee w = z)$

$\cancel{\varphi_4: \quad \forall y\,(y \leq x \rightarrow (x = y \vee \varphi_1(y) \vee \varphi_2(y)) \wedge \exists y \forall w\,(x \leq y \wedge y = w)}$

$\cancel{\varphi_5: \quad \forall y\,(y \leq x \rightarrow (x = y \vee \varphi_1(y) \vee \varphi_2(}$

$\varphi_4: \quad \exists \ \forall w\,(x \leq z \rightarrow z = w) \wedge \exists y \exists z\,(x \neq y \wedge x \neq z \wedge$
$z \neq w \wedge \forall w\,(w \leq x \rightarrow (w = x \vee w = y \vee w = z))$

φ_5: Como el φ_4, pero con un $\exists$ +.

$\varphi_6: \quad \neg \exists y\,(x \leq y \wedge x \neq y)$

LOVE ME FOR LIFE!

(B)

$\varphi_1: \quad \neg \exists y\,(y \leq x \wedge x \neq y)$

$\varphi_2: \quad \forall y\,(y \leq x \rightarrow \varphi_1(y)) \wedge \exists y, w, z\,(y \neq w \wedge w \neq z \wedge$
$y \neq z \wedge x \neq y \wedge x \neq w \wedge x \neq z \wedge \forall v\,(x \leq v \rightarrow$
$\rightarrow (v = x \vee v = y \vee v = w \vee v = z)))$

φ_3: Me da fiaca.

$\varphi_4: \quad \forall y\,(y \leq x \rightarrow (\varphi_1(y) \vee \varphi_2(y) \vee \varphi_3(y)) \wedge \neg \exists y\,($
$x \leq y \wedge x \neq y))$

$\varphi_5: \neg\exists y\, (x \leq y \wedge x \neq y) \wedge \forall z\, (z < x \rightarrow (z = x \vee \varphi_1(z) \vee \varphi_2(z)))$

(9) Sean $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ las fórmulas que distinguen los elementos $1, \dots, N$ del universo, respectivamente.

Podemos distinguir el elemento $N+1$ negando todos los anteriores.

$$\boxed{\varphi_{N+1}: \neg(\varphi_1(x) \vee \varphi_2(x) \vee \dots \vee \varphi_N(x))}$$

(10)

(A) $R_1 = \{(N, M) : N \text{ DIVIDE A } M\}$

$\varphi_{r_1}: \exists z\, (N * z = M)$

$\varphi_{P_1}: \neg\exists y\, (\varphi_{r_1}(y, x))$

(B) Hecho en la práctica.

(C) $R_3 = \{(a,b) : a \text{ es sublista de } b\}$

$\varphi_{r_3}: \exists x_1, \dots, x_N\, (a \circ \langle x_1, \dots, x_N \rangle = b)$

consultar concepto de sublista.

(11) (A)

(B)

(C) $\varphi_c: \forall x\, (P(x,x) \wedge \forall w \forall y ((P(x,y) \wedge P(y,w) \wedge x \neq w) \rightarrow P(x,w)))$

(D) $\varphi_d: \forall x \exists y\, (f(x) = g(y)) \wedge \exists y \forall x\, (g(y) \neq f(x))$