PRÁCTICA 4:

1. A) $v \models \alpha$

   B) No puedo. Depende de $v(p_5)$.

   C) $v \models \alpha$.

   D) No puedo.

   E) No puedo.

② • $\alpha_1 = (\neg P_1 \rightarrow (P_3 \vee P_4))$

Ⓐ $v(P_1) = 1$, $v(P_3) = 1$, $v(P_4) = 1$

$v(P_1) = 1$, $v(P_3) = 0$, $v(P_4) = 1$

$\vdots$

$v(P_1) = 0$, $v(P_3) = v(P_4) = 1$

Ⓑ $Var(\alpha)$ = sus elementos son las variables prop. de α.

$v(P_1) = v(P_3) = v(P_4) = 1$

• $\alpha_2 = \neg(P_2 \rightarrow (P_3 \wedge P_1))$

Ⓐ Queremos $v \models \alpha_2 \implies v \not\models \neg\alpha_2$

$v(P_1) = v(P_2) = 1$, $v(P_3) = 0$

$v(P_3) = v(P_2) = 1$, $v(P_1) = 0$

TAMBIÉN EL CASO DONDE $v(P_1) = v(P_3) = 0$, $v(P_2) = 1$.

Ⓑ No hay NINGUNO. $v(P_1)$, $v(P_3)$ tienen que ser 0 si o sí (ALGUNO DE LOS 2, O AMBOS).

③

Ⓐ $\Rightarrow$) α es tautología $(\models \alpha)$.

$\implies \neg\alpha$ es una contradicción

$\iff v \not\models \neg\alpha$ para toda v valuación.

$\implies \neg\alpha$ NO es satisfacible, pues NO existe una valuación v : $v \models \neg\alpha$.

$\Leftarrow$) $\neg\alpha$ no es satisfacible.

Por def. de NO SATISFACIBLE, NO existe ningún v tq. $v \models \neg\alpha$

$\implies v \not\models \neg\alpha \; \forall v \implies \neg\alpha$ contradicción.

$\implies \alpha$ TAUTOLOGÍA.

$\square$

(B) $\Rightarrow$) $(\alpha \wedge \beta)$ tautología.

$v \models (\alpha \wedge \beta) \quad \forall v$

$\Rightarrow \quad v \models \alpha \quad$ y $\quad v \models \beta \quad \forall v \Rightarrow \alpha, \beta$ tautologías.

$\Leftarrow$) α, β tautologías.

$v \models \alpha \quad \forall v \quad , \quad w \models \beta \quad \forall w, \quad v, w$ valuaciones.

(osea, $w \models \alpha$ y $v \models \beta$).

$\Rightarrow \quad v \models (\alpha \wedge \beta)$ (es medio lo mismo... no?)

(D) $\Rightarrow$) $(\alpha \to \beta)$ es contradicción.

$\Leftrightarrow \quad v \not\models (\alpha \to \beta) \quad \forall v$ valuación.

$v \not\models (\alpha \to \beta) \Leftrightarrow v \models \alpha$ y $v \not\models \beta$ (x def. de $\to$).

Como vale para toda valuación:

$\Rightarrow v \models \alpha$ y $v \not\models \beta \quad \forall v \Rightarrow \alpha$ TAUTOLOGÍA, β CONTRADICCIÓN.

$\Leftarrow$) α es tautología y β contradicción.

$\Leftrightarrow \quad v \models \alpha$ y $v \not\models \beta \quad \forall v$, v valuación.

$\Rightarrow \quad v \not\models (\alpha \to \beta) \quad \forall v \Rightarrow (\alpha \to \beta)$ contradicción.

(4)

(A) $\alpha \wedge \beta$ contingencia $\Rightarrow \exists v_1, v_2$ valuaciones tq:

$v_1 \models (\alpha \wedge \beta)$ pero $v_2 \not\models (\alpha \wedge \beta)$.

- $v_1 \models (\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow v_1 \models \alpha$ y $v_1 \models \beta$.
- $v_2 \not\models (\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow v_2 \models \alpha$ y $v_2 \not\models \beta$ o

  $v_2 \not\models \alpha$ y $v_2 \models \beta$ o

  $v_2 \not\models \alpha$ y $v_2 \not\models \beta$

Si analizamos c/ caso, concluímos que α es contingencia, o β es contingencia, o ambos lo son.

(B) $\Rightarrow$) $v \models \alpha$

TRIVIAL, NO?

Vale que $v(P_i) = v'(P_i) \quad \forall P_i \in Var(\alpha) \Rightarrow v' \models \alpha$

$\Leftarrow$) Análogo.

(C) $\Rightarrow \neg(\alpha \to \beta)$ es tautología

$(\alpha \to \beta)$ taut $\Longleftrightarrow v \models (\alpha \to \beta) \quad \forall v$, v valuación

$\Longleftrightarrow v \not\models \alpha \quad \forall v$ ó $v \models \beta \quad \forall v$

$\uparrow$
(x def. de $\to$)
y xQ $Var(\alpha) \cap Var(\beta) = \emptyset$

$\Longleftrightarrow \alpha$ contradicción ó β tautología.

(D) $Var(\alpha) \cap Var(\beta) = \emptyset$.

$\exists v_1, w_1, v_2, w_2 \in FORM \mid v_1 \models \alpha$ Pero $w_1 \not\models \alpha$ y

$v_2 \models \beta$ pero $w_2 \not\models \alpha$

$\rightsquigarrow \alpha, \beta$ contingencias.

Sea $v \in FORM$.

$v \models (\alpha \wedge \beta) \Longleftrightarrow v \models v$ y $v \models \beta$

Consultar.

(5) (A) Ni loco.

(B) • $\{\neg, \wedge\}$

Alcanza con escribir el conector $\vee$, Pues $\{\neg, \wedge\} \subseteq \{\neg, \wedge, \vee\}$

que sabemos que es adecuado.

$$\underline{\varphi \vee \psi = \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)}$$

• $\{\neg, \vee\}$

Lo mismo que antes. Escribo $\wedge$.

$$\underline{\varphi \wedge \psi = \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)}$$

• $\{\neg, \to\}$. Escribo $\vee$ y $\wedge$.

$$\underline{\varphi \vee \psi = \neg\varphi \to \psi}, \quad \underline{\varphi \wedge \psi = \neg(\varphi \to \neg\psi)}$$

Papel de fibra de caña de azúcar.

ⓒ $\cdot\{\neg\}$

Tenemos que encontrar una función que no podamos escribir únicamente con $\neg$.

Sea $f_\alpha(x)$: $f_\alpha(x) = \neg x$

$\Longrightarrow$ $f_\alpha(0) = 1$ y $f_\alpha(1) = 0$.

No podemos escribir la función : $f_\alpha(1) = 1$
$f_\alpha(0) = 0$

$\cdot\{\vee, \wedge\}$ CONSULTAR BIEN.

⑥ Ⓐ $\alpha | \beta$ ($\Longleftrightarrow$ $\neg\alpha \vee \neg\beta$). $\alpha \downarrow \beta$ ($\Longleftrightarrow$ $(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$)

α	β	$\neg\alpha$	$\neg\beta$	$\neg\alpha \vee \neg\beta$
1	1	0	0	0
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	1	1

α	β	$\neg\alpha$	$\neg\beta$	$\neg\alpha \wedge \neg\beta$
1	1	0	0	0
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

Ⓑ

$\cdot\{|\}$ Tengo que escribir a $\neg$ y $\wedge, \vee$ o $\rightarrow$ con $|$.

- $\neg\varphi \equiv \varphi | \varphi$
- $\varphi \vee \psi \equiv (\varphi | \varphi) | (\psi | \psi)$

$\cdot\{\downarrow\}$ Escribo $\neg$ y $\wedge$ en términos de $\downarrow$.

- $\neg\varphi \equiv \varphi \downarrow \varphi$
- $\varphi \wedge \psi \equiv (\varphi \downarrow \varphi) \downarrow (\psi \downarrow \psi)$

entonces, $\{|\}$ y $\{\downarrow\}$ son adecuados.

Escaneado con CamScanner

(c) $*$ binario y adecuado $\Rightarrow \{*\}$ adecuado.

$\cdot * \cdot$ (2 "parámetros").

$\{\vee\}, \{\wedge\}, \{\rightarrow\}$ no son adecuados. $\Rightarrow \boxed{* \text{ es } \mid \text{ ó } \downarrow}$

(7)

(A) $\{\rightarrow, \perp\}$, con $v \not\models \perp$.

Escribo $\neg$: $\neg\varphi \equiv \varphi \rightarrow \perp$

Entonces, $\{\rightarrow, \perp\}$ es adecuado.

(B) $\{\rightarrow, T\}$, con $v \models T$. Probar no adecuado.

No podemos escribir la función $f: \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$ tq:

$\underline{f(x) = 1 - x}$ $(\Leftrightarrow f(1) = 0,\ f(0) = 1)$.

Lo veo por inducción: ($f(1)$ solo puede valer 1).

Caso base:

Sea $P \in PROP$. $P = 1 \Rightarrow \exists v$ val. tq. $v \models P$.

$\therefore f(1) = 1$

Paso inductivo: HI: $\varphi \in FORM$: $f_\varphi(1) = 1$

- $\alpha = \varphi \rightarrow \varphi$. $f_\alpha(1) = 1 \Longleftrightarrow f_\varphi(1) = 1$, cierto por HI.
- $\alpha = \varphi \rightarrow T$. $f_\alpha(1) = 1 \Longleftrightarrow f_\varphi(1) = 1 \wedge f_T(1) = 1$ ó

  $f_\varphi(1) = 0 \wedge f_T(1) = 1$

  $f_T(1) = 1$, pues $v \models T\ \forall v$. Luego, $f_\varphi(1) = 1$ por HI.

- $\alpha = T \rightarrow \varphi$. $f_\alpha(1) = 1 \Longleftrightarrow f_T(1) = 1 \wedge f_\varphi(1) = 1$ ó ...

  $f_T(1) = 1$, pues $v \models T\ \forall v$. Luego, $f_\varphi(1) = 1$ por HI.

$\Rightarrow f_\alpha(1) = 1\ \forall \alpha \in FORM$.

No podemos inducir $\underline{f(x) = 1 - x}$.

Creo que debería considerar los casos: $\alpha = T$, $\alpha = \varphi \rightarrow \varphi$.

8

A Consultar.

9 α^* ⟿ en α: $\wedge \mapsto \vee$, $\vee \mapsto \wedge$. y $P_i \mapsto \neg P_i$ $\forall i$

$v \models \alpha^* \leftrightarrow v \not\models \alpha$ (lo que quiero ver).

Quiero probarlo sobre toda valuación. Planteo una inducción sobre la estructura de una fórmula.

Caso Base

Sea $P \in PROP$, y sea v valuación tq:

$v \models \neg P \iff v \not\models P$. $\square$

Paso Inductivo:

HI: $\varphi, \psi \in FORM$ tal que para toda v valuación cumplen que

$v \models \varphi^* \iff v \not\models \varphi$ y $v \models \psi^* \iff v \not\models \psi$.

- $\neg \varphi^*$:

$v \models \neg \varphi^* \iff v \not\models \varphi^* \overset{HI}{\iff} v \models \varphi \iff v \not\models \neg \varphi$

- $\varphi^* \vee \psi^*$.

$v \models \varphi^* \vee \psi^* \iff v \models \varphi^*$ o $v \models \psi^* \overset{HI}{\iff} v \not\models \varphi$ o $v \not\models \psi$

$\overset{def}{\iff} v \not\models \varphi \vee \psi$

- $\varphi^* \wedge \psi$.

$v \models \varphi^* \wedge \psi^* \iff v \models \varphi^*$ y $v \models \psi^* \overset{HI}{\iff} v \not\models \varphi$ y $v \not\models \psi$

$\iff v \not\models \varphi \wedge \psi$

$\square$

10 Inducción estructural.

Caso Base

$P, q \in PROP$ tq $v(P) = v(q)$. (para un v).

$v \models P \iff v \models q$, pues $v(P) = v(q)$.

$\square$

Creo que acá debería haber usado p' y q' para ψ y p y q para φ.

PASO INDUCTIVO

HI: $\varphi, \psi \in FORM$: Para una v y $p, q \in PROP$: $v(p) = v(q)$ se cumple que $v \models \varphi \iff v \models \varphi[p \mapsto q]$ y $v \models \psi \iff v \models \psi[p \mapsto q]$.

- $\alpha = \neg\varphi$. Qvq. $v \models \alpha \iff v \models \alpha[p \mapsto q]$

$v \models \alpha \iff v \models \neg\varphi \iff v \not\models \varphi \overset{HI}{\iff} v \not\models \varphi[p \mapsto q]$

$\iff v \models \neg\varphi[p \mapsto q] \iff \underline{v \models \alpha[p \mapsto q]}$

- $\alpha = \varphi \vee \psi$. Qvq. $v \models \alpha \iff v \models \alpha[p \mapsto q]$.

$v \models \alpha \iff v \models \varphi \vee \psi \iff v \models \varphi$ ó $v \models \psi$

$\overset{HI}{\iff} v \models \varphi[p \mapsto q]$ o $v \models \psi[p \mapsto q]$

$\iff \underline{v \models (\varphi \vee \psi)[p \mapsto q]}$.

- $\alpha = \varphi \wedge \psi$

$v \models \alpha \iff v \models \varphi \wedge \psi \iff v \models \varphi$ y $v \models \psi$

$\iff v \models \varphi[p \mapsto \psi]$ y $v \models \psi[p \mapsto q]$.

$\iff \underline{v \models (\varphi \wedge \psi)[p \mapsto q]}$.

$\boxtimes$

11 A) $\Gamma \subseteq Con(\Gamma)$. $(Con(\Gamma) = \{\varphi \mid \Gamma \models \varphi\})$.

Sea v : $v \models \psi \quad \forall \psi \in \Gamma$ y $v \models \varphi \quad \forall \varphi \in Con(\Gamma)$.

$\Rightarrow v \models \Gamma \Rightarrow \Gamma \subseteq Con(\Gamma)$.

(sale xq $v \models \Gamma$, y en particular $v \models \psi \quad \forall \psi \in \Gamma \Rightarrow \psi \in Con(\Gamma)$.

Por lo que $\Gamma \subseteq Con(\Gamma)$).

B) Si $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \Rightarrow Con(\Gamma_1) \subseteq Con(\Gamma_2)$.

Sea $\varphi \in \Gamma_1$ y v valuación tq. $v \models \Gamma_2$.

$\Rightarrow \varphi \in Con(\Gamma_1)$ (Por el ítem anterior).

Como $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \Rightarrow \varphi \in \Gamma_2 \Rightarrow v \models \varphi \Rightarrow \varphi \in Con(\Gamma_2)$.

(C) si $\Gamma_1 \subseteq Con(\Gamma_2)$ y $\Gamma_2 \subseteq Con(\Gamma_3) \Longrightarrow \Gamma_1 \subseteq Con(\Gamma_3)$.

$\Longrightarrow \Gamma_2 \models \varphi \quad \forall \varphi \in \Gamma_1$ y $\Gamma_3 \models \psi \quad \forall \psi \in \Gamma_2$.

Para v val. tq $v \models \Gamma_3 \Longrightarrow v \models \psi. \Longrightarrow v \models \Gamma_2$.

$\Longrightarrow \underline{v \models \varphi,} \quad \forall \varphi \in \Gamma_1 \Longrightarrow v \models \Gamma_1 \Longrightarrow \Gamma_1 \subseteq Con(\Gamma_3)$.

$\hookrightarrow$ de acá se puede ver que $\varphi \in Con(\Gamma_3) \ \forall \varphi \in \Gamma_1$

$\Longrightarrow \Gamma_1 \subseteq Con(\Gamma_3)$.

(D) $Con(Con(\Gamma)) = Con(\Gamma)$.

Hay que hacer una doble inclusión.

$\subseteq$) Sea v val. tq. $v \models Con(\Gamma)$ $\forall \varphi \in Con(\Gamma)$

$\Longrightarrow v \models \varphi \quad \forall \varphi \in Con(\Gamma)$

$\Longrightarrow v \models \Gamma \Longrightarrow Con(Con(\Gamma)) \subseteq Con(\Gamma)$.

$\Gamma \subseteq Con(\Gamma)$

$\supseteq$) Como $\Gamma \subseteq Con(\Gamma) \Longrightarrow Con(\Gamma) \subseteq Con(Con(\Gamma))$.

12 A $Con(\{\beta\}) \subseteq Con(\{\alpha\}) \iff \alpha \to \beta$ ES TAUTOLOGÍA.

$\alpha, \beta \in FORM$.

$\Rightarrow)$ $Con(\{\beta\}) \subseteq Con(\{\alpha\})$

Sea v valuación tq: $v \models \{\alpha\} \Rightarrow v \models \{\beta\}$ (Pues sabemos que $Con(\{\beta\}) \subseteq Con(\{\alpha\})$).

$\Rightarrow \beta \in Con(\{\alpha\})$ y $\alpha \in Con(\{\alpha\})$.

$\Rightarrow v \models \alpha$ y $v \models \beta \Rightarrow \underline{\underline{v \models \alpha \to \beta}}$

$\Leftarrow)$ $\alpha \to \beta$ TAUT

$\Leftrightarrow \forall v$ valuación, $v \models \alpha \to \beta$

Por contrarrecíproco: $(\neg p \Rightarrow \neg q)$

$\neg p$: $Con(\{\beta\}) \not\subseteq Con(\{\alpha\})$

$\neg q$: $\alpha \to \beta$ CONTRADICCIÓN.

Sea v valuación tq: $v \models \{\alpha\} \Rightarrow v \not\models \{\beta\}$ y, en particular, $\underline{v \not\models \beta}$.

$\Rightarrow v \not\models \alpha \to \beta$ Pues $v \models \alpha$ Pero $v \not\models \beta$.

12 B

1) Quiero intentar usar el ítem A.

$\subseteq$) $v \models \{\alpha \wedge \beta\} \implies Con(\{\alpha \wedge \beta\}) = \{\varphi \mid v \models \varphi\}$

También, $v \models (\alpha \wedge \beta)$, Pues $(\alpha \wedge \beta) \in Con(\{\alpha \wedge \beta\})$.

$\implies \underline{\underline{v \models \alpha}}$ y $\underline{\underline{v \models \beta}}$. $\odot$ $\implies \alpha, \beta \in Con(\{\alpha \wedge \beta\})$.

Sea $\psi \in FORM$ tal que $\psi \in Con(\{\alpha \wedge \beta\})$.

$\implies \underline{v \models \psi}$

$\implies \psi \in Con(\{\alpha\})$ y $\psi \in Con(\{\beta\})$.

Por el $\odot$

$\therefore \quad \psi \in Con(\{\alpha\}) \cap Con(\{\beta\}) \quad \forall \psi \in Con(\{\alpha \wedge \beta\})$.

$\supseteq$) Si $\alpha = P$ y $\beta = \neg P \implies Con(\{\alpha\}) \cap Con(\{\beta\}) = \emptyset$

$\implies Con(\emptyset) \subseteq Con(\{\alpha \wedge \beta\}) = TAUT$. Falso.

Entonces no vale esta inclusión.

2) $Con(\{\alpha \vee \beta\}) = Con(\{\alpha\}) \cup Con(\{\beta\})$.

~~$Con(\{\alpha\}) \cup Con(\{\beta\}) = \{\varphi \mid \alpha \models \varphi$ o $\beta \models \varphi\}$~~

~~$\implies$ Sean v, v' valuaciones tq $v \models \{\alpha\}$ y $v' \models \{\beta\}$.~~

~~$\implies v \models \varphi$ o $v' \models \varphi$.~~

$\subseteq$) $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$ es una tautología.

Luego, $Con(\{\alpha \vee \beta\}) \subseteq Con(\{\alpha\})$ y $Con(\{\alpha\}) \subseteq Con(\{\alpha\}) \cup Con(\{\beta\})$

$\therefore \quad Con(\{\alpha \vee \beta\}) \subseteq Con(\{\alpha\}) \cup Con(\{\beta\})$

$\supseteq$) Consultar.

3) $Con(\{\alpha \to \beta\}) \subseteq Con(\{\beta\})$.

$\beta \to (\alpha \to \beta)$ es tautología. Vale la inclusión.

13

A Γ satisfacible $\Longrightarrow$ Hay alguna valuación v que $v \models \Gamma$.

$\Longleftrightarrow$ $v \models \varphi$, $\forall \varphi \in \Gamma$.

Entonces, para cualquier subconjunto Γ' : $\Gamma' \subseteq \Gamma$, Γ' tiene elementos de Γ $\Longrightarrow$ Γ' satisfacible.

Recíproco:

$\Gamma' = \{P_1\}$ satisfacible, y $\Gamma' \subseteq \Gamma = \{P_1, \neg P_1\}$

$\to$ Γ insatisfacible.

B

$\Longrightarrow$) Γ satisfacible.

Hay una v: $v \models \varphi$ $\forall \varphi \in \Gamma$.

A su vez, $Con(\Gamma) = \{\varphi \mid \Gamma \models \varphi\}$

$\Gamma \models \varphi \Longleftrightarrow$ Para toda v tq $v \models \Gamma$, también $v \models \varphi$.

$\therefore$ $v \models \varphi$ $\forall \varphi \in Con(\Gamma) \Longrightarrow Con(\Gamma)$ satisfacible.

$\Longleftarrow$) $Con(\Gamma)$ satisfacible.

Hay una v: $v \models \varphi$ $\forall \varphi \in Con(\Gamma)$.

Sabemos que $\Gamma \subseteq Con(\Gamma) \Longrightarrow v \models \Gamma \Longrightarrow \Gamma$ satisfacible.

C Si $\Gamma = \emptyset$

$\Longrightarrow$ Para cualq. $\alpha \in FORM$ $\emptyset \models \alpha \Longleftrightarrow \alpha$ tautología.

Si la afirmación del enunciado fuera cierta, se tendría para el conjunto que para toda fórmula α, α o $\neg\alpha$ es una tautología.

14 A $\Longrightarrow$ B.

$\neg(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n) \in Con(\emptyset) \Longleftrightarrow \neg(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n)$ TAUT.

$\Longrightarrow (\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_N)$ contradicción.

$\Longrightarrow \alpha_1, \dots, \alpha_N$ no son simultáneamente válidos nunca.

B $\Longrightarrow$ C

Consultar... RARO.