

**Métodos Numéricos**  
1er Cuatrimestre 2023  
**Práctica 7**  
Métodos Iterativos



**DEPARTAMENTO  
DE COMPUTACION**  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

1. En los siguientes casos, calcular las primeras dos iteraciones de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel correspondientes al sistema de ecuaciones lineales  $Ax = b$ , comenzando con  $x^{(0)} = (0, 0, 0)^t$ .

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 9 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (b) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,375 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 10 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

2. Se define el *radio espectral*  $\rho(A)$  de  $A$  por  $\rho(A) := \max\{|\lambda|; \lambda \text{ es autovalor de } A\}$ . Demostrar que  $\rho(A) \leq \|A\|$  para cualquier norma consistente.
3. Analizar la convergencia de los métodos iterativos de Jacobi y Gauss-Seidel para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$$

donde  $|\rho| < 1$ , comenzando con  $x^{(0)} \neq (0, 0)^t$ .

4. Probar que el método de Jacobi converge para sistemas de ecuaciones lineales de  $2 \times 2$  cuya matriz es simétrica definida positiva.
5. Sea  $A$  una matriz de  $n \times n$  tal que  $A$  se expresa en la forma  $A := M - N$ , donde  $M, N$  son matrices de  $n \times n$  y  $M$  es no singular. Sea  $R := M^{-1}N$ . A fin de resolver el sistema de ecuaciones lineales  $Ax = b$ , dado un vector  $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$  arbitrario consideramos la sucesión  $\{x^{(k)}\}_{k \geq 0} \subset \mathbb{R}^n$  definida por  $x^{(k+1)} := Rx^{(k)} + c$ , donde  $c = M^{-1}b$ .
- a) Demostrar que si  $\|R\| < 1$  para alguna norma subordinada, entonces  $x^{(k)}$  converge a una solución del sistema  $Ax = b$ .
- b) Demostrar que si  $A$  es singular entonces  $\rho(R) \geq 1$ .
6. Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Escribimos  $A = D - L - U$ , donde  $D, L, U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $D$  es diagonal,  $L$  es triangular inferior con ceros en la diagonal y  $U$  es triangular superior con ceros en la diagonal. Demostrar que si  $A$  es estrictamente diagonal dominante por filas, entonces  $\|D^{-1}(L + U)\|_\infty < 1$ .
7. Se desea usar el método iterativo de Jacobi para la siguiente matriz compuesta, donde  $I$  y  $S$  son matrices de  $n \times n$ :

$$A = \begin{pmatrix} I & S \\ S^t & I \end{pmatrix},$$

- a) Plantear la iteración de Jacobi, tomando el vector  $x^{(i)}$  en bloques  $x_1^{(i)}$  y  $x_2^{(i)}$  de  $n$  coordenadas cada bloque:

$$x^{(i)} = \begin{pmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \end{pmatrix}$$

- b) Calcular la expresión del error  $e^{(i)} = x^{(i)} - x^*$ , donde  $x^*$  es la solución buscada, expresada en bloques como en el ítem anterior.
- c) Demostrar que la iteración de Jacobi converge si  $\rho(SS^t) < 1$  (*Sugerencia*: Expresar  $e^{(i)}$  en función de  $e^{(i-2)}$ ).

8. Sean las matrices abajo indicadas  $A_1$  y  $A_2$ , y sean  $J_1$  y  $J_2$  las matrices de iteración del método de Jacobi asociadas a  $A_1$  y  $A_2$  respectivamente.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 \\ -9/10 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Probar que  $\rho(J_1) > \rho(J_2)$
- b) Ejecutar el método de Jacobi para resolver el sistema  $A_1x = b$  y  $A_2x = b$  (para algún  $b$ ) y comparar la cantidad de iteraciones realizadas.
- c) Concluir que una mayor dominancia diagonal<sup>1</sup> no necesariamente implica una convergencia más rápida del método de Jacobi.
9. El sistema de ecuaciones lineales  $\begin{pmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{pmatrix} x = b$  donde  $a \in \mathbb{R}$ , puede resolverse bajo ciertas condiciones mediante el siguiente método iterativo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\omega a & 1 \end{pmatrix} x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 1 - \omega & \omega a \\ 0 & 1 - \omega \end{pmatrix} x^{(k)} + \omega b \quad \text{para } k = 0, \dots$$

- a) ¿Para qué valores de  $a$  converge el método cuando  $\omega = 1$ ?
- b) Para  $a = 0, 5$ , encontrar el valor de  $\omega \in \{0, 8; 0, 9; 1, 0; 1, 1; 1, 2; 1, 3\}$  que minimiza el radio espectral de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\omega a & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 - \omega & \omega a \\ 0 & 1 - \omega \end{pmatrix}.$$

10. Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz simétrica, con  $\lambda_i$  autovalores de  $A$  tal que  $1 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$  y sea  $\omega$  una constante positiva. Se define el siguiente algoritmo iterativo, para  $i = 1, \dots, n$ :

$$x_i^{(k+1)} = \omega b_i + (1 - \omega a_{ii})x_i^{(k)} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \omega a_{ij} x_j^{(k)}$$

- a) Hallar el esquema de iteración de forma matricial y verificar que si el sistema iterativo converge, entonces lo hace a una solución del sistema  $Ax = b$ .

---

<sup>1</sup>Definimos *dominancia diagonal por filas* de una matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  como  $dd_f(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{|a_{ii}|}{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|}$ . De manera similar se define la dominancia diagonal por columnas.

- b) Demostrar que el esquema iterativo planteado converge para cualquier  $x^{(0)}$  inicial si y solo si  $\omega < 2/\lambda_n$ .

(Sugerencia: usar que si  $\lambda$  es autovalor de  $A$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , entonces los autovalores de  $\alpha I + \beta A$  son  $\alpha + \beta\lambda$ ).

11. Sean  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  con columnas linealmente independientes,  $b \in \mathbb{R}^m$  y  $\omega \in \mathbb{R}$  una constante no nula. Se desea resolver el sistema  $A^t A x = A^t b$  mediante un esquema iterativo. Dado un  $x^{(0)}$  inicial, se propone el siguiente algoritmo:

```

 $x := x^{(0)}$ 
 $r := b - Ax^{(0)}$ 
while  $x$  no converja a la solución do
     $d := \omega A^t r$ 
     $x := x + d$ 
     $r := r - Ad$ 
end

```

- a) Probar que si el esquema iterativo converge, lo hace a una solución del sistema planteado. ¿Cuál es la matriz que gobierna la iteración del esquema? (Sugerencia: Probar que en cada iteración  $r = b - Ax$ ).
- b) Demostrar que el esquema converge si y sólo si  $0 < \omega < 2/\lambda_{max}$  con  $\lambda_{max}$  el mayor autovalor de la matriz  $A^t A$ .
12. Sea  $A = QR$  la factorización  $QR$  de la matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , con  $1 < r_{11} \leq r_{22} \leq \dots \leq r_{nn}$  y  $b \in \mathbb{R}^n$ . Se desea hallar la solución del sistema

$$(I - Q^t A)x = b \quad (1)$$

- a) Para resolver el sistema (1), se propone el siguiente sistema iterativo, con  $\omega$  una constante no nula:

$$x^{(k+1)} = ((1 - \omega)I + \omega R)x^{(k)} + \omega b, \quad k = 0, 1, \dots$$

- i) Demostrar que, si el sistema iterativo converge, entonces lo hace a una solución de (1).
- ii) Hallar los valores de  $\omega$  para los cuales se puede asegurar la convergencia del método.
- b) Demostrar que Jacobi y Gauss-Seidel convergen en a lo sumo  $n$  pasos a la solución del sistema (1).

13. Se desea resolver el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ \alpha I & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

donde  $A$  y  $C$  son matrices cuadradas y triangulares superiores. Se propone el siguiente algoritmo iterativo dado un  $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})^t$  inicial:

- Paso 1: Realizar una iteración de Jacobi para mejorar el valor de  $x_1$  para el sistema  $Ax_1 = b_1 - Bx_2$
- Paso 2: Realizar una iteración de Gauss-Seidel para mejorar el valor de  $x_2$  para el sistema  $Cx_2 = b_2 - \alpha x_1$ , utilizando el valor de  $x_1$  obtenido en el Paso 1.

- Volver al Paso 1 utilizando el  $x_2$  hallado en el Paso 2.
- a) Escribir, para cada Paso por separado, la iteración matricial que actualiza  $x_1$  en el Paso 1 y  $x_2$  en el Paso 2.
- b) Escribir la iteración en forma matricial para obtener  $\mathbf{x}^{(k)}$  en función de  $\mathbf{x}^{(k-1)}$ , siendo  $\mathbf{x}^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{pmatrix}^t$ , y mostrar cuál es la matriz que gobierna la iteración.

## Resolver en computadora

- i Resolver usando Jacobi y Gauss–Seidel, y comparar los resultados obtenidos (comenzando con  $x^{(0)} = (0, 0, 0)^t$ )

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## Funciones útiles

- En Matlab no existen funciones predefinidas para Jacobi ni Gauss–Seidel, pero las siguientes funciones son útiles para construirlos:

```
d = diag(A); %retorna la diagonal de la matriz A en un vector d
B = diag(d); %retorna la matriz B conteniendo en su diagonal el vector d
B = tril(A); %parte triangular inferior de la matriz A
B = triu(A); %parte triangular superior de la matriz A
```

En ambos casos, **tril** y **triu** permiten un segundo parámetro para incluir más (o menos) diagonales además de la principal, dependiendo si este parámetro es positivo (o negativo). Usando estas funciones, se pueden generar las matrices  $D$ ,  $L$  y  $U$  de la separación  $A = D - L - U$  con las siguientes sentencias:

```
D = diag(diag(A));
L = tril(-A, -1);
U = triu(-A, 1);
```

- En Python, existen rutinas similares de indexación con Numpy<sup>2</sup>.

## Referencias

- [1] R.L. Burden and J.D. Faires. *Numerical Analysis*. Brooks/Cole, Cengage Learning, 2005.
- [2] D.R. Kincaid and E.W. Cheney. *Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing*. Pure and applied undergraduate texts. American Mathematical Society, 2002.
- [3] D.S. Watkins. *Fundamentals of Matrix Computations*. Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts. Wiley, 2010.

---

<sup>2</sup><http://docs.scipy.org/doc/numpy/reference/routines.indexing.html>