Métodos Numéricos

1er Cuatrimestre 2023

2do Parcial (14/06/2023)

DEPARTAMENTO DE COMPUTACION

Nombre y Apellido: MARTÍN PUGLIESE

Libreta Universitaria: 1409/21

Total de hojas entregadas (sin enunciado): 6

Ej. 1 17	Ej. 2 18	Ej. 3 28	Ej. 4 21	Nota 84
☐ El examen se aprueba con 60 puntos. ☐ Resolver los ejercicios en hojas separadas. ☐ Completar nombre en las hojas. ☐ Completar LU y nombre en el enunciado.		**Justificar <u>todas</u> las respuestas** Puede hacerlo citando resultados de la teórica o la práctica. Para ejercicios de la guía, consulte.		

Ejercicio 1 (27 puntos). Sean A, B, C matrices tales que $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ y $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Considere la siguiente matriz expresada en bloques y demuestre que:

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

a) (6 puntos) Si v es autovector de A con autovalor λ, entonces existe un $w \in \mathbb{R}^n$ tal que $\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$ es un autovector de M con autovalor λ.

b) (12 puntos) Si w es autovector de C con autovalor λ y λ no es autovalor de A, entonces existe un único $v \in \mathbb{R}^m$ tal que $\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$ es un autovector de M con autovalor λ.

c) (9 puntos) Si $\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$ es autovector de M con autovalor λ, entonces o bien w es autovector de C con autovalor λ, o bien v es autovector de A con autovalor λ.
(Sugerencia: Separar en los casos donde $w \neq 0$ y $w = 0$).

Concluya que $\lambda \in \mathbb{R}$ es autovalor de M *si y solo si* lo es de A ó C.

Ejercicio 2 (21 puntos). Sea $A \in^{m\times n}$ y $\sigma_1, \dots, \sigma_{\min(m,n)}$ sus valores singulares. Demostrar que:

a) (7 puntos) $\|A\|_2 = \sigma_1$.

b) (7 puntos) $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}$.

c) (7 puntos) $\max_i |a_{ii}| \leqslant \sigma_1$.

Recordamos las definiciones de las normas utilizadas:

- $\|A\|_2 = \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$ la norma 2 matricial inducida por la vectorial;
- $\|A\|_F = \sqrt{tr(A^tA)}$ la norma Frobenius de la matriz A.

Ejercicio 3 (28 puntos). Sean $A, B, C, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrices, donde A y D son inversibles, y x_1, x_2, b_1, $b_2 \in \mathbb{R}^n$. Considere la matriz M y el sistema de ecuaciones siguientes:

$$M = \begin{bmatrix} A & -B \\ -C & D \end{bmatrix} \qquad M\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Se proponen dos esquemas iterativos interdependientes para resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = A^{-1}Bx_2^{(k)} + A^{-1}b_1 \\ x_2^{(k+1)} = D^{-1}Cx_1^{(k)} + D^{-1}b_2 \end{cases} \tag{1}$$

a) (6 puntos) Reescribir (1) a un esquema $x^{(k+1)} = Rx^{(k)} + c$ con $x^{(k)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix}$, $c = \begin{bmatrix} A^{-1}b_1 \\ D^{-1}b_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$.

b) (6 puntos) Pruebe que si (1) converge, entonces lo hacen a una solución del sistema.

c) (12 puntos) Demuestre que (1) converge a pesar de que $\rho(A^{-1}B)$, $\rho(D^{-1}C) \geqslant 1$ en el siguiente caso:

$$A = \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

d) (4 puntos) ¿Es posible plantear Jacobi o Gauss-Seidel para la matriz M del enunciado si se la define con los bloques del item anterior?

Ejercicio 4 (24 puntos). La llama olímpica únicamente puede ser encendida por medio de rayos solares, y para eso se utiliza un paraboloide circular que concentra la luz solar. Se requiere hacer un modelo 3D del mismo para tenerlo digitalizado e imprimirlo en caso de necesidad, por lo que se tomaron medidas de una sección triangular de uno roto, y otros puntos se extrapolaron intuitivamente. Como esta porción iba del borde al centro, se apoyó el borde sobre unos ejes de coordenadas (es decir, boca abajo en términos del paraboloide) y midieron la altura en pies (ft). Los datos quedaron así:

x	0	2	0	1.7	1
y	0	0	2	0.9	1
f	0.76	0	0	0.1	0.6

Como estas mediciones son aproximadas, al querer obtener los parámetros α y β de la función del paraboloide $f(x, y) = \alpha x^2 + \alpha y^2 + \beta$ aparecieron inconsistencias.

a) (12 puntos) Plantear el sistema clásico y luego sus ecuaciones normales. ¿Cuántas soluciones hay?

b) (4 puntos) Demuestre que la solución al problema en el sentido de CM es $\alpha = -0.2$ y $\beta = 0.84$.

c) (4 puntos) Calcular el error cometido en el sentido de cuadrados mínimos.

d) (2 puntos) Se sabe que, si bien los primeros tres puntos se midieron con mucha precisión por ser cercanos a los bordes o deducciones geométricas de éstos, en los demás se cometieron errores inevitables que esperan ser corregidos. ¿Pudo el método efectivamente hacer la corrección esperada?

e) (2 puntos) Considerando las expectativas, ¿recomendaría usar el resultado obtenido?

17/27

① $A \in \mathbb{R}^{M\times M}$, $C \in \mathbb{R}^{N\times N}$.

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

Ⓐ v AUTOVECTOR DE A CON AUTOVALOR $\lambda \Longrightarrow$ EXISTE $w \in \mathbb{R}^N$ TQ. $\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$ AUTOVECTOR DE M CON AUTOVALOR λ.

Tenemos que $Av = \lambda v$

Qvq $M \cdot \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Av + Bw \\ Cw \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} \lambda v + Bw \\ Cw \end{bmatrix}}$$

$Nu(C - \lambda I)$

$$\begin{bmatrix} \lambda v + Bw \\ Cw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda v \\ \lambda w \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \boxed{w = 0} \text{ o } \boxed{w \in Nu(B) \text{ y } w \in Nu(C)}$$

w Puede ser el vector nulo, Pues no es un autovector y además vale que $\begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix} \neq 0$, ya que Por enunciado sabemos que $v \neq 0$ Por ser un autovector. ✓

Ⓑ w AUTOVECTOR DE C CON AUTOVALOR λ. λ NO ES AUTOVALOR DE A. PROBAR QUE EXISTE UN ÚNICO $v \in \mathbb{R}^M$ TQ $\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$ ES AUTOVECTOR DE M CON AUTOVALOR λ.

Tenemos que $\underline{Cw = \lambda w}$

Qvq $M \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Av + Bw \\ Cw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Av + Bw \\ \lambda w \end{bmatrix}$$

w es un autovector, Por lo tanto, sabemos que $w \neq 0$.

Queremos encontrar un v : $\begin{bmatrix} Av+Bw \\ \lambda w \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda v \\ \lambda w \end{bmatrix}$

λ no es autovalor de $A \Longrightarrow Av \neq \lambda v$.

Qvq $\underline{Av + Bw = \lambda v}$

Estamos buscando una solución única (de v).

$\therefore$ $\lambda \neq 0$ ~~sino~~ OBS ¿Por que $\lambda \neq 0$? Ej: $\left[\begin{array}{c|c} I & \\ \hline & 0 \end{array}\right]$ autovalor $\lambda = 0$

$\longrightarrow$ Para llegar a la igualdad pedida, podría decirse que $\underline{B = 0 \text{ ó } w \in Nu(B)}$. Por que? que pasa Ej $B = $ ~~...~~, $[w!]$

En ese caso $w \notin Nu(B)$ y $B \neq 0$

$\Downarrow$

$Av + Bw = \lambda v =$

$\boxed{= Av = \lambda v}\ ! \longrightarrow$ Pero λ NO ES AUTOVALOR DE A!

La única forma de llegar a la igualdad es con $\underline{v = 0}$.

v no puede ser distinto al vector nulo porque sino no valdría $\underline{Av = \lambda v}$. Arrastra error. Demo anda solo si $w \in Nu(B)$

Si $v \in Nu(A) \overset{v \neq 0}{\Longrightarrow} Av = \lambda v$

$\boxed{0 = \lambda v} \longrightarrow$ FALSO, pues $v \neq 0$ y $\lambda \neq 0$.

$\therefore$ con $v = 0 \longrightarrow M \begin{bmatrix} 0 \\ w \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ w \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$ AUTOVECTOR DE M, ENTONCES o w AUTOVECTOR DE C o v AUTOVECTOR DE A.

Siguiendo la sugerencia, separo en casos.

- $\underline{w = 0}$: w no es autovector xq es el vector nulo.

$$M \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Av \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda v \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \lambda \text{ AUTOVALOR DE } A \text{ CON AUTOVECTOR } v.$$

✓

- $\underline{w \neq 0}$:

$$M \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Av + Bw \\ Cw \end{bmatrix} = \longrightarrow$$ SIGO EN OTRA HOJA.

$$\begin{bmatrix} Av+Bw \\ Cw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda v \\ \lambda w \end{bmatrix} \iff w \text{ autovector de } C \text{ con autovalor } \lambda$$

y $v=0$.

Esto es lo que se pedía

En todo caso: El b) asume λ no autovalor de A → ÍTEM B.

Como $v=0$, se cumple que no es un autovector pues es el vector nulo.

El ejercicio usa un "o" inclusivo, pueden darse ambas cosas. Ej $\left[\begin{array}{c|c} I & \\ & I \end{array}\right] = M$. No era necesario (ni se pedía) demostrar que no iba a ser autovector de A

Falta la conclusión del final

2) $A \in \mathbb{R}^{M\times N}$. $\sigma_1, \dots, \sigma_{MIN(M,N)}$ VALORES SINGULARES.

A) PROBAR $\|A\|_2 = \sigma_1$.

Sea $A = U\Sigma V^t$ la descomposición SVD de A.

$\|A\|_2 = \|U\Sigma V^t\|_2$

U, V matrices ortogonales. Sabemos que NO cambian la norma

$\rightarrow \|U\Sigma V^t\|_2 = \|\Sigma\|_2 = \max_{x:\|x\|_2=1} \|\Sigma x\|_2$

Para V hay que decir algo más...

$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ 0 & \ddots & \sigma_{MIN(M,N)} \\ & 0 & \end{pmatrix}$, CON $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_{MIN(M,N)} \geq 0$

Como σ_1 es el máximo elemento de $\Sigma \Rightarrow \max_{x:\|x\|_2=1} \|\Sigma x\|_2 = \boxed{\sigma_1}$

LO QUE QUERÍAMOS ☺

Además, en clases teóricas vimos que $\|A\|_2 = \sqrt{\max\{|\lambda| : \lambda \text{ AUTOVALOR DE } A\}}$

$\sqrt{\lambda_i} = \sigma_i$. Sea λ_1 el autovalor de mayor módulo $\rightarrow \underline{\sqrt{\lambda_1} = \sigma_1 = \|A\|_2}$

B) PROBAR $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{MIN(M,N)} \sigma_i^2}$

$\|A\|_F = \sqrt{tr(A^tA)} = \sqrt{tr(V\Sigma^t \underbrace{U^tU}_{= I} \Sigma V^t)} =$, XQ U ES ORTOGONAL.

$= \sqrt{tr(V\Sigma^t\Sigma V^t)} =$

PROPIEDAD DE TRAZAS $\longrightarrow tr(BC) = tr(CB)$

$= \sqrt{tr(\Sigma^t V\Sigma V^t)} = \sqrt{tr(\Sigma^t\Sigma \underbrace{VV^t}_{= I})} = \sqrt{tr(\Sigma^t\Sigma)}$ XQ V ES ORTOGONAL.

$\Sigma^t\Sigma \in \mathbb{R}^{N\times N} \longrightarrow \begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \sigma_{MIN} & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \sigma_{MIN} & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \sigma_{MIN}^2 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$

$\cancel{\|A\|_F} = \sqrt{tr(\Sigma^t\Sigma)} = \boxed{\sqrt{\sum_{i=1}^{MIN(M,N)} \sigma_i^2}}$

LO QUE QUERÍAMOS ☺.

ⓒ PROBAR $\max_i |a_{ii}| \leq \sigma_1$.

$$\max_i |a_{ii}| = \max_i |e_i^t A e_i| = \max_i |e_i^t U \Sigma V^t e_i| = \underbrace{\max_i |u_i^t \Sigma v_i|}_{(*)}$$

CON u_i^t = i-ésima fila de U.

v_i = i-ésima columna de V.

(*) $\max_i |u_i^t \Sigma v_i| = \max_i |u_i^t \cdot \sigma_i v_i| \leq \max_i |\sigma_i| = \boxed{\sigma_1}$

u_i, v_i SON VECTORES ORTOGONALES.

$\therefore \|u_i\| = \|v_i\| = 1$

$\Longrightarrow$ ELEMENTOS ACOTADOS POR 1

3) A, D INVERSIBLES.

$$M = \begin{bmatrix} A & -B \\ -C & D \end{bmatrix}, \quad M \in \mathbb{R}^{2N \times 2N} \qquad M \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

2 ESQUEMAS ITERATIVOS:

$$(1) \begin{cases} x_1^{k+1} = A^{-1} B x_2^k + A^{-1} b_1 \\ x_2^{k+1} = D^{-1} C x_1^k + D^{-1} b_2 \end{cases}$$

A) REESCRIBIR (1) A UN ESQUEMA $x^{k+1} = R x^k + C$

CON $x^k = \begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \end{bmatrix}$ Y $C = \begin{bmatrix} A^{-1} b_1 \\ D^{-1} b_2 \end{bmatrix}$

$$x^{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & A^{-1}B \\ D^{-1}C & 0 \end{bmatrix} x^k + \begin{bmatrix} A^{-1} b_1 \\ D^{-1} b_2 \end{bmatrix} \iff \underline{x^{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & A^{-1}B \\ D^{-1}C & 0 \end{bmatrix}}_{\text{"}R\text{"}} \begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A^{-1} b_1 \\ D^{-1} b_2 \end{bmatrix}}$$

ok B)

B) PROBAR QUE SI CONVERGE, LO HACE A UNA SOLUCIÓN DEL SISTEMA.

Sea x^*: $\{x^k\} \xrightarrow{k \to \infty} x^*$.

Tomo límite sobre la reescritura hecha en el ítem A)

$$x^{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & A^{-1}B \\ D^{-1}C & 0 \end{bmatrix} x^k + \begin{bmatrix} A^{-1} b_1 \\ D^{-1} b_2 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow k \to \infty$$

$$x^* = \begin{bmatrix} 0 & A^{-1}B \\ D^{-1}C & 0 \end{bmatrix} x^* + \begin{bmatrix} A^{-1} b_1 \\ D^{-1} b_2 \end{bmatrix}$$

¿por qué?

$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{para } x \neq 1 \\ 2 & \text{para } x = 1 \end{cases}$

$x_k \to 1 \Rightarrow f(x_k) \not\to f(1)$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} x^* = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & A^{-1}B \\ D^{-1}C & 0 \end{bmatrix} x^* + \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} b_1 \\ D^{-1} b_2 \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} x^* = \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{bmatrix} x^* + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} x^* - \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{bmatrix} x^* = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \iff \left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \right) x^* = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A & -B \\ -C & D \end{bmatrix}}_{M} x^* = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \underline{M \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}}$$

LO QUE QUERÍA VER. B⁻

(c) PROBAR QUE CONVERGE A PESAR DE QUE $\rho(A^{-1}B), \rho(D^{-1}C) \geq 1$.

$$M = \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 & -3 & -2 \\ 4/5 & 3/5 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(A = bloque superior izquierdo, $-B$ = bloque superior derecho, $-C$ = bloque inferior izquierdo, D = bloque inferior derecho)

Usamos el esquema iterativo de (A). Sabemos que los sistemas convergen si $\rho(R) < 1$.

Usando $\longrightarrow R = \begin{bmatrix} 0 & A^{-1}B \\ D^{-1}C & 0 \end{bmatrix}$, analizamos su radio espectral.

• $A^{-1} = \left[\begin{array}{cc|cc} 3/5 & -4/5 & 1 & 0 \\ 4/5 & 3/5 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -4/3 & 5/3 & 0 \\ 4/3 & 1 & 0 & 5/3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -4/3 & 5/3 & 0 \\ 0 & 25/12 & -5/3 & 5/4 \end{array}\right]$

$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 25/16 & 0 & 15/16 & 5/4 \\ 0 & 25/12 & -5/3 & 5/4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3/5 & 4/5 \\ 0 & 1 & -4/5 & 3/5 \end{array}\right]$ NO LA VEÍA ¡¡

$\longrightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{bmatrix} \longrightarrow \boxed{A^{-1}B} = \begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 5 & 18/5 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix}}$ ✓

• $D^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \boxed{D^{-1}C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$ ✓

Queremos ver entonces $\rho(R)$, con $R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & 18/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ✓

Buscamos los autovalores de R

(HOJA SIGUIENTE).

Pugliese, Martín LU: 1409/21 Hoja 5

x la primera columna.

$$\det(R-\lambda I) = \det \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 5 & 18/5 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1/5 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda \cdot \left(-\lambda^3 - \left(-\frac{\lambda}{5}\right)\right) = \boxed{\lambda^4 - \frac{\lambda^2}{5} = 0}$$

$$= \boxed{\lambda^2\left(\lambda^2 - \frac{1}{5}\right) = 0} \quad ✓$$

De estas ecuaciones, sale que:

- $\lambda_1 = 0$
- $\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ $\Longrightarrow$ $\rho(R) = \frac{1}{\sqrt{5}} < 1$ ✓
- $\lambda_3 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\therefore$ El sistema converge para cualquier x_0 inicial.

B+

D) ¿Es posible plantear Jacobi o GS para la M anterior?

No es posible aplicar ninguno de los 2 métodos, pues M tiene ceros en su diagonal, y uno de los requisitos de Jacobi y Gauss-Seidel es que la matriz no tenga 0 en la diagonal. ¿por qué? ¡JUSTIFICACIONES!

B-

Pugliese, Martín LU:1409/21 Hoja 6

4) A) Plantear el sistema y sus ec. normales.

$f(x,y)$ $\quad x \quad y$

- $0,76 = \alpha \cdot 0^2 + \alpha 0^2 + \beta$
- $0 = \alpha \cdot 2^2 + \alpha \cdot 0 + \beta$
- $0 = \alpha \cdot 0^2 + \alpha \cdot 2^2 + \beta$
- $0,1 = \alpha \cdot (1,7)^2 + \alpha \cdot (0,9)^2 + \beta$
- $0,6 = \alpha \cdot 1^2 + \alpha \cdot 1^2 + \beta$

$$\boxed{f(x,y) = \alpha(x^2+y^2) + \beta} \xrightarrow{Ax=b} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \\ 4 & 1 \\ 3,7 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0,76 \\ 0 \\ 0 \\ 0,1 \\ 0,6 \end{bmatrix}}_{b}$$

Planteo las ecuaciones normales:

$\longrightarrow \underline{A^tA = A^tb}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 & 3,7 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A^t} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \\ 4 & 1 \\ 3,7 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 & 3,7 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A^t} \underbrace{\begin{bmatrix} 0,76 \\ 0 \\ 0 \\ 0,1 \\ 0,6 \end{bmatrix}}_{b} =$$

$$= \begin{bmatrix} 49,69 & 13,7 \\ 13,7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,57 \\ 1,46 \end{bmatrix} = \begin{cases} 49,69\alpha + 13,7\beta = 1,57 \\ 13,7\alpha + 5\beta = 1,46 \end{cases}$$

Despejo las ecuaciones:

- $13,7\alpha + 5\beta = 1,46 \longrightarrow \boxed{\beta = \frac{1,46 - 13,7\alpha}{5}}$
- $49,69\alpha + 13,7\beta = 1,57 \longrightarrow 49,69\alpha + 13,7 \cdot \left(\frac{1,46 - 13,7\alpha}{5}\right) = 1,57 =$

$= 49,69\alpha + 4,0004 - 37,538 = 1,57 =$

$= 12,152\alpha = -2,4304 \longrightarrow \boxed{\alpha = -0,2}$

Asamblea

Escaneado con CamScanner

$$\beta = \frac{1,46 - 13,7 \cdot \alpha}{5} \xrightarrow{\alpha=-0,2} \boxed{\beta = 0,84}$$

En CM sabemos que hay una única solución sii $N_u(A)=\{0\}$.
En este caso, las columnas de A son L.I. $\rightsquigarrow$ CM tiene solución única.

(B) Probado en el ítem anterior.

(C) Calcular el error.

$$E^2 = \|Ax-b\|_2^2 = (0,84 \cdot (-0,2) - 0,76)^2 + (4,84(-0,2) - 0)^2 + (4,84(-0,2)-0)^2 +$$

Error mal calculado

$$+ ((4,54)(-0,2) - 0,1)^2 + (2,84(-0,2) - 0,6)^2$$

$$= 0,861184 + 0,937024 + 0,937024 + 1,016064 + 1,364224$$

$$\boxed{E^2 = 5,11552}$$

$$\boxed{E \approx 2,26}$$

(D) El método termina dejando un error relativamente pequeño. Considerando que hay errores de cálculo, la solución de CM es bastante aproximada. Si bien no realiza una corrección acertada, el método se las arregla.

(E) Sí. Como expliqué antes, el error (a mí parecer) no es tan grave, es por eso que sí utilizaría el resultado obtenido.

$\hookrightarrow$ En el peor de los casos, la llama olímpica no se enciende... Y bueh!