

## Métodos Numéricos

1er Cuatrimestre 2023

### Práctica 4

Matrices ortogonales

Factorización QR



DEPARTAMENTO  
DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

1. Sean  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

- a) ¿Qué quiere decir que  $x$  sea ortogonal a  $y$ ?
- b) Probar que  $x \perp y$  ( $x, y$  no nulos)  $\Rightarrow \{x, y\}$  es l.i.
- c) Dar un ejemplo de 2 vectores en  $\mathbb{R}^3$  que sean ortogonales, y 2 que no lo sean.
- d) ¿Es cierto que  $\perp$  define una relación transitiva en  $\mathbb{R}^n$ ?

2. Sea  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Probar que son equivalentes:

- a)  $Q^{-1} = Q^t$
- b) Las columnas de  $Q$  forman un conjunto ortonormal<sup>1</sup>.
- c) Las filas de  $Q$  forman un conjunto ortonormal<sup>1</sup>.
- d)  $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$

Interpretar (d) geoméricamente.

*Sugerencia:* para demostrar la implicación ( $d \Rightarrow b$ ) usar que  $x^t y = \frac{1}{4}(\|x + y\|_2^2 - \|x - y\|_2^2)$ .

3. Sean  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ortogonales. Probar que  $A \cdot B$  es ortogonal.

4. Sea  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ortogonal. Probar que:

- a)  $\det(Q) = 1$  ó  $-1$
- b)  $\kappa_2(Q) = 1$

5. Sea  $u_1, \dots, u_n$  una base ortonormal de vectores de  $\mathbb{R}^n$ . Demostrar que para cualquier vector  $x \in \mathbb{R}^n$ , la coordenada de  $x$  respecto de  $u_k$  es igual a  $u_k^t x$ , para cualquier  $k = 1, \dots, n$ .

6. ¿Cuáles de las siguientes matrices es necesariamente ortogonal?

- a) Permutación
- b) Simétrica definida positiva
- c) No singular
- d) Diagonal

7. Hallar la descomposición  $QR$  de la matriz  $A$  según los métodos de Givens y Householder, siendo

$$A = \begin{bmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{bmatrix}$$

---

<sup>1</sup> $\{v_1, \dots, v_n\}$  con  $v_i \in \mathbb{R}^n$  se dice ortonormal si  $v_i^t v_j = 0$  ( $\forall i \neq j$ ) y  $v_i^t v_i = 1$  ( $\forall i : 1 \leq i \leq n$ ).

8. Verificar que si  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es no singular y tiene descomposición  $QR$ , entonces  $R$  es no singular.
9. a) Sea  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz ortogonal y triangular superior. Demostrar que  $\forall j = 1, \dots, n$ ,  $\text{col}_j(C) = \pm e_j$ , donde  $e_j$  es el  $j$ -ésimo canónico de  $\mathbb{R}^n$ .
- b) Demostrar que si  $A$  es no singular, entonces la factorización  $A = QR$  es única si los elementos de la diagonal de  $R$  son positivos.
10. Sea  $Q \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  una matriz ortogonal tal que:

$$Q \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

¿cuál debería ser el valor de  $\alpha$ ?

11. Sea  $b \neq 0$  y la matriz  $A$  definida de la siguiente manera. Mostrar que si  $A$  es ortogonal, entonces sus elementos se pueden tomar como senos y cosenos de un ángulo  $\theta$ .

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix}$$

12. Dadas dos matrices de Givens de  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $G_1$  y  $G_2$ , con ángulos  $\theta$  y  $\omega$  respectivamente, calcular e interpretar geoméricamente  $G_1^2$ ,  $G_1 G_2$  y  $G_1^t G_1$ . Pista: recordar las relaciones trigonométricas:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$$

Para  $G_1$ , determinar el ángulo  $\theta$  tal que

$$G_1 \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

13. Sea  $G \in \mathbb{R}^n$  una matriz de rotación de Givens con un ángulo asociado  $\theta \in [-\pi, \pi)$ . Demostrar que  $G$  es definida positiva si y sólo si  $|\theta| < \pi/2$ .
14. Considerar la transformación de Householder  $P := I - 2uu^t$  con  $u = e_i$ . Calcular explícitamente  $P$  e interpretar geoméricamente  $Px$  con  $x \in \mathbb{R}^n$ .
15. Sea  $u \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\|u\|_2 = 1$ . Demostrar que la matriz  $Q := I - 2uu^t$  es ortogonal y simétrica.
16. Sean  $x, y$  dos vectores de  $\mathbb{R}^n$  tales que  $\|x\|_2 = \|y\|_2$ . Demostrar que la elección  $v := x - y$  conduce a una transformación de Householder  $H := I - \frac{2vv^t}{\|v\|^2}$  tal que  $Hx = y$  y  $Hy = x$ .
17. Sea  $U = I - 2uu^t$  un reflector ortogonal. Sea  $x$  tal que  $x = v + w$  con  $v$  múltiplo de  $u$  y  $w$  ortogonal a  $u$ . Mostrar que  $Ux = -v + w$ . Interpretar geoméricamente en  $\mathbb{R}^n$ .
18. Sea  $H_v = I - 2(vv^t)/(v^t v)$  la transformación de Householder asociada al vector  $v \in \mathbb{R}^n$ .
- a) Sean dos matrices  $V, W \in \mathbb{R}^{n \times k}$ , y sea  $G = I + VW^t$ . Mostrar que  $H_v G = I + VW^t + vw^t$ , con  $w = \frac{-2(v + WV^t v)}{v^t v}$ .

b) Demostrar que el producto de  $k$  reflectores de Householder puede escribirse como  $I + VW^t$ , con  $V, W \in \mathbb{R}^{n \times k}$ .

19. Demostrar que cualquier matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  puede factorizarse como  $A = QL$ , con  $Q$  ortogonal y  $L$  triangular inferior.

*Sugerencia:* considerar la factorización  $QR$  de la matriz  $A$  con las columnas de  $A$  en orden inverso, es decir, de  $AP$ , con  $P$  una matriz de permutación conveniente.

20. Se desea hallar la factorización  $A = RQ$  de  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , con  $R$  triangular superior y  $Q$  ortogonal. Sea  $\tilde{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz ortogonal y  $\tilde{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz triangular superior tal que  $R = P\tilde{R}^tP$  y  $Q = P\tilde{Q}^t$ , donde  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz de permutación definida como:

$$P_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i + j = n + 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Probar que  $R$  es triangular superior y  $Q$  es ortogonal.

b) Probar que  $A = RQ$  si y sólo si  $(PA)^t = \tilde{Q}\tilde{R}$  es la factorización QR de  $(PA)^t$ .

c) Describir un algoritmo para realizar la factorización RQ asumiendo disponible una función que calcula la factorización QR.

## Resolver en computadora

i Sea el sistema lineal  $Ax = b$ :

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Usando los métodos de Householder y Givens, se pide:

a) Resolver el sistema

b) Calcular explícitamente la factorización  $QR$  de  $A$

c) Calcular la cantidad de operaciones realizadas

ii Para cada una de las siguientes matrices en  $\mathbb{R}^{6 \times 4}$ , calcular el rango de cada matriz y su factorización  $QR$ . Observar la forma de la matriz  $R$  para cada caso.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

## Funciones útiles

Tanto Matlab<sup>1</sup> como Numpy<sup>2</sup> proveen funciones para calcular la descomposición  $QR$  de una matriz.

- En Matlab:

$$[Q,R] = \mathbf{qr}(A)$$

- En Python, usando Numpy:

```
from numpy import *
from numpy.linalg import *
```

```
A = matrix ([[8,2],[2,4],[5,3]], float)
Q, R = qr(A)
```

Notar que si  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  no es cuadrada, como en el ejemplo, la matriz  $R$  retornada es de  $k \times n$  donde  $k = \min(m, n)$ .

## Referencias

- [1] C. Meyer. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.
- [2] D.S. Watkins. *Fundamentals of Matrix Computations*. Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts. Wiley, 2010.

---

<sup>1</sup><http://www.mathworks.com/help/matlab/ref/qr.html>

<sup>2</sup><http://docs.scipy.org/doc/numpy/reference/generated/numpy.linalg.qr.html>