Métodos Numéricos

1er Cuatrimestre 2023

Recuperatorio 1er Parcial

(10/07/2023)

DEPARTAMENTO DE COMPUTACIÓN

Nombre y Apellido: PUGLIESE MARTÍN

Libreta Universitaria: 1409/21

Total de hojas entregadas (sin enunciado): 6

Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	Ej. 4	Nota
3	20	19	21	63

☐ El examen se aprueba con 60 puntos. ☐ Resolver los ejercicios en hojas separadas. ☐ Completar nombre en las hojas. ☐ Completar LU y nombre en el enunciado.	**Justificar <u>todas</u> las respuestas** Puede hacerlo citando resultados de la teórica o la práctica. Para ejercicios de la guía, consulte.

Ejercicio 1 (27 puntos).

a) (10 puntos) Sean $J, K, L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tales que $J = KL$ y K inversible. Probar que $rg(J) = rg(L)$.

b) Sean $A \in \mathbb{R}^{r\times r}$ inversible, $B \in \mathbb{R}^{r\times n-r}$, $C \in \mathbb{R}^{n-r\times r}$ y $D \in \mathbb{R}^{n-r\times n-r}$ y sea $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$

i) (7 puntos) Probar que $rg(M) \geqslant r$.

ii) (10 puntos) Verificar que:

$$M = \begin{bmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}$$

y probar que $rg(M) = r$ si y sólo si $D = CA^{-1}B$.

Ejercicio 2 (25 puntos). Considere una descomposición LU de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ donde L tiene unos en la diagonal, y sean $\{a_1^t, \dots, a_n^t\}$ las filas de A y $\{u_1^t, \dots, u_n^t\}$ las filas de U. Si $|l_{ij}| \leqslant 1 \quad \forall 1 \leqslant i, j \leqslant n$:

a) (10 puntos) Probar que $u_i^t = a_i^t - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} u_j^t \quad \forall 1 \leqslant i \leqslant n$.

b) (10 puntos) Probar por inducción que $||u_i||_1 \leqslant 2^{i-1}||A||_\infty \quad \forall 1 \leqslant i \leqslant n$.

c) (5 puntos) Probar que $||U||_\infty \leqslant 2^{n-1}||A||_\infty$.

Ejercicio 3 (21 puntos).

Sea A una matriz simétrica definida positiva de $\mathbb{R}^{n\times n}$. Probar que:

a) (5 puntos) $a_{ii} > 0$ para $1 \leqslant i \leqslant n$. ¿Es A es no singular?

b) (8 puntos) Todas las submatrices principales de A son definidas positivas.

c) (8 puntos) $a_{ij}^2 \leqslant a_{ii}a_{jj}$ para todo $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Ejercicio 4 (27 puntos). Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $A + I$ es inversible y sea f la siguiente operación sobre estas matrices tal que $f(A) = (I - A)(I + A)^{-1}$. Sabiendo que $f(f(A)) = A$ y que $f(A) + I$ es inversible:

a) (7 puntos) Demostrar que si A es antisimétrica entonces $f(A)$ es ortogonal (**Sugerencia:** Probar que $I - A$ e $I + A$ conmutan). Concluir que si A es ortogonal, entonces $f(A)$ es antisimétrica, por lo que f asocia matrices antisimétricas con ortogonales donde ambas cumplen que $A + I$ es inversible.

b) (10 puntos) Sea H de Householder. Probar que no hay matriz antisimétrica A tal que $f(A) = H$.

c) (10 puntos) Considere las dos matrices de Givens que rotan sobre un ángulo recto en $\mathbb{R}^{2\times 2}$ e, interpretándolas como matrices ortogonales, indique cuáles son sus matrices antisimétricas asociadas en el sentido del item (a). ¿Ve alguna relación entre ellas?

PUGLIESE MARTÍN | HOJA 1
LU: 1409/21

1) A) $J, K, L \in \mathbb{R}^{N\times N}$. $J = K \cdot L$, CON K INVERSIBLE.

PROBAR QUE $rg(J) = rg(L)$.

$rg(J) = dim(Im(J)) \xrightarrow[\text{Teo. de la dimensión}]{} \underline{dim(Im(J)) = N - dim(Nu(J))}$ ✓

Como $J = KL$ y K es inversible, $\boxed{J = 0 \iff \exists x \neq 0 : Lx=}$ X ¿?

Por lo tanto, $\underline{Nu(J) = Nu(L)}$

Como sus núcleos coinciden, NO SE DEDUCE también lo hacen sus dimensiones (redundante).

- $dim(Im(J)) = N - dim(Nu(J))$
- $dim(Im(L)) = N - \underbrace{dim(Nu(L))}_{\text{MISMAS DIMENSIONES}}$

$\rightarrow \boxed{rg(J)} = N - dim(Nu(J)) = N - dim(Nu(L)) = \boxed{rg(L)}$.

LO QUE QUERÍAMOS PROBAR.

M

B) $A \in \mathbb{R}^{r\times r}$ INVERSIBLE. $B \in \mathbb{R}^{r\times(N-r)}$, $C \in \mathbb{R}^{(N-r)\times r}$, $D \in \mathbb{R}^{(N-r)\times(N-r)}$

$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$. PROBAR $rg(M) \geq r$.

$M = \begin{bmatrix} \overset{r\times r}{A} & \overset{r\times(N-r)}{B} \\ \underset{N-r\times r}{C} & \underset{N-r\times N-r}{D} \end{bmatrix}$, $M \in \mathbb{R}^{N\times N}$

$A \in \mathbb{R}^{r\times r}$ inversible $\longrightarrow$ $rg\underline{(A) = r}$. (COLUMNAS L.I.) ✓

Para ver que el $rg(M) \geq r$, quiero ver si las columnas de $\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}$ son L.I. OK

$A = \begin{bmatrix} | & & | \\ a_1 & \cdots & a_r \\ | & & | \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} | & & | \\ c_1 & \cdots & c_r \\ | & & | \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & & a_r \\ c_1 & \cdots & c_r \\ | & & | \end{bmatrix}$$

Sea $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{i=1}^{N} (ac_i) \cdot \alpha_i = 0 \overset{?}{\Longrightarrow} \alpha_1 = \dots = \alpha_N = 0$$

$$\Updownarrow$$

r_i es producto cartesiano, no suma

$$\sum_{i=1}^{N} \tilde{a}_i \cdot \alpha_i + \tilde{c}_i \cdot \alpha_i = \sum_{i=1}^{N} \tilde{a}_i \cdot \alpha_i = 0 \Longleftrightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall i = 1 \dots N.$$

r_i COL. DE C L. (O NO, NOS DA LO MISMO)

$$\tilde{a}_i = \begin{bmatrix} col_i(A) \\ 0 \\ | \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\tilde{a}_i \in \mathbb{R}^{N-r}$

$\tilde{c}_i$ es $=$.

Esto viene de saber que las col. de A son L.I.

CON ESTO, SABEMOS QUE EL RANGO DE M ES AL MENOS r.

(ii) $M = \begin{bmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}$

PROBAR $rg(M) = r \Longleftrightarrow D = CA^{-1}B$

~~$\Rightarrow$) Por el ítem (B), sabemos que las primeras r columnas son L.I.~~

~~Entonces, M tiene que tener la forma:~~

$\cancel{M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & \alpha \end{bmatrix}}$

$\cancel{M = \begin{bmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B + D - CA^{-1}B \end{bmatrix}}$

PUGLIESE MARTÍN | HOJA 2

LU: 1409/21

$\Longrightarrow)$

$$M = \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & I \end{bmatrix}}_{K} \underbrace{\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}}_{L}$$

K es inversible, ya que es triangular inferior y $\det(K) = 1$. ✓

Por el ítem A, sabemos que $rg(M) = rg(L)$. OK

$$L = \begin{bmatrix} \boxed{A \quad B} \\ 0 \quad D - CA^{-1}B \end{bmatrix} \longrightarrow r \text{ columnas.}$$

Como queremos que el rango de L sea r

$\Longrightarrow \underline{D = CA^{-1}B}$. ¡es lo que hay que probar!

NO DEMUESTRA

$\Longleftarrow)$

$$M = \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & I \end{bmatrix}}_{K} \underbrace{\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{L}$$

Otra vez, por el ítem A, $rg(M) = rg(L)$.

Como sabemos que el rango de L es r, deducimos: $\underline{rg(M) = r}$.

¿de dónde lo sabemos?

NO DEMUESTRA

Escaneado con CamScanner

Pugliese Martín
LU: 1409/21

Hoja 3

(2) $A = LU$, $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$. L con unos en la diagonal. $|l_{ij}| \leq 1 \ \forall i,j$.
$\{a_1^t, \dots, a_N^t\}$ filas de A. $\{u_1^t, \dots, u_N^t\}$ filas de U.

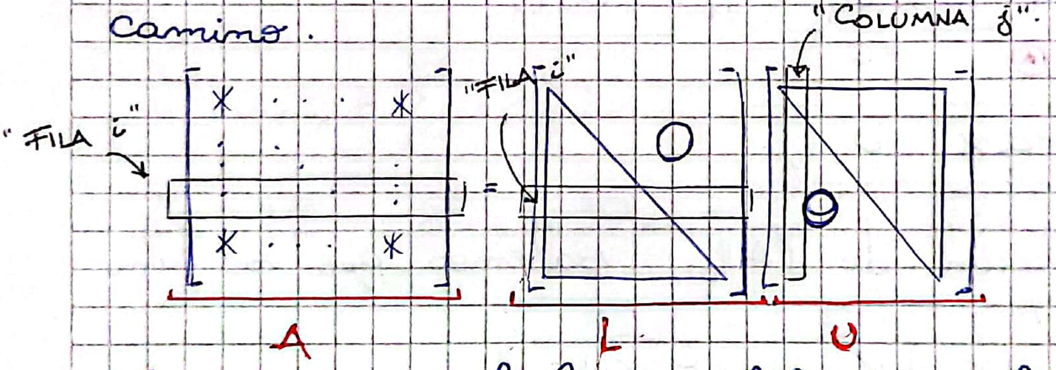
(A) Probar que $u_i^t = a_i^t - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} u_j^t$

Cada posición de una fila de A es el producto entre ese mismo número de fila de L y la columna de U que se corresponda a esa posición.

→ Con números:

$a_{ij} = fila_i(L)^t \cdot col_j(U)$

La idea del ejercicio es operar con filas. Voy por ese camino.



Observo que al hacer $fila_i(L) \cdot col_j(U) \ \forall j = 1 \dots N$, los mismos elementos de L multiplican siempre a las mismas filas de U.

$$a_{i1} = l_{i1} \cdot u_{11} + \dots + l_{iN} \cdot u_{N1}$$

$$\vdots$$

$$a_{ij} = l_{i1} \cdot u_{1j} + \dots + l_{iN} \cdot u_{Nj}$$

$$\vdots$$

$$a_{iN} = l_{i1} \cdot \underbrace{u_{1N}}_{\text{misma fila}} + \dots + l_{iN} \cdot \underbrace{u_{NN}}_{\text{misma fila}}$$

→ $a_i^t = \sum_{j=1}^{N} l_{ij} \, u_j^t$

L CON UNOS EN LA DIAGONAL.

$$a_i^t = \sum_{i=1}^{N} l_{ij} \cdot u_j^t \underset{\text{L Δ. INFERIOR}}{=} \sum_{j=1}^{i} l_{ij} \cdot u_j^t = \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} \cdot u_j^t + u_i^t$$

Tenemos: $a_i^t = u_i^t + \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} \cdot u_j^t$

$\iff \underline{a_i^t - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} \cdot u_j^t = u_i^t}$

LO QUE QUERÍAMOS PROBAR. !!

(B) PROBAR POR INDUCCIÓN QUE $\|u_i\|_1 \leq 2^{i-1} \cdot \|A\|_\infty, \ \forall i = 1 \ldots N.$

- $\|A\|_\infty = \max_i \|a_i\|_1$ Esto es prop
- $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{N} |x_i|$ Esto es def

LAS ANOTO PARA TENERLAS A MANO.

NO USO ESTA.

ok

Planteo una inducción sobre las filas de U.

CASO BASE: $(i = 1)$

- $\|u_1\|_1 \underset{\text{ITEM (A)}}{=} \|a_1 - \underbrace{\sum_{j=1}^{0} l_{1j} u_j^t}_{=0}\|_1 = \boxed{\|a_1\|_1}$

- $2^0 \cdot \|A\|_\infty = \boxed{\max_i \|a_i\|_1}$

Por la definición de $\|A\|_\infty$, sabemos que se cumple que Prop $\longrightarrow \|a_1\|_1 \leq \|A\|_\infty = \max_i \|a_i\|_1$

la = se cumple sii a_1 es la fila de A de MÁXIMA norma 1.

SE CUMPLE EL CASO BASE.

PASO INDUCTIVO:

H.I.: Vale la propiedad para $i = 1, \ldots, k-1$. $(\|u_i\|_1 \leq 2^{i-1} \|A\|_\infty)$

Qvq. se cumple para $i = k$.

- $\|u_k\|_1 \underset{\text{ITEM (A)}}{=} \|a_k - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj} \cdot u_j^t\|_1 \underset{\text{PROP. DE NORMAS}}{\leq} \|a_k\|_1 + \|\sum_{j=1}^{k-1} l_{kj} \cdot u_j^t\|_1$

Hoja 4

PUGLIESE MARTÍN
LU: 1409/21

SIGUE EN ⊙

$$= \|a_k\| + \|\sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}\cdot u_j^t\|_1 \leq \sum_{j=1}^{k-1} \|l_{kj}\cdot u_j^t\|_1 = \boxed{\sum_{j=1}^{k-1} |l_{kj}|\cdot \|u_j^t\|_1}$$

DESIGUALDAD TRIANGULAR.

↓ ANALIZO ESTA NORMA.

$$\cancel{\|\sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}\, u_j^t\|_1 = \sum_{i=1}^{N} \left|\left(\sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}\, u_j^t\right)_i\right| \leq \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{k-1} |l_{kj}\, u_j^t|\right)_i}$$

DESIGUALDAD TRIANGULAR

$$\cancel{= \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{k-1} |l_{kj}|\, u_j^t\right)_i}$$

$\leq 1 \ \forall k,j$ (POR HIPÓTESIS)

$$\cancel{\leq \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{k-1} u_j^t\right)_i}$$

~~Retomo el ejercicio~~

$$\cancel{= \|a_k\|_1 + \|\sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}\, u_j^t\|_1 \leq \|a_k\| + \|\sum_{j=1}^{k-1} u_j^t\|_1}$$

$|l_{ij}| \leq 1$
$\forall i,j = 1 \ldots N$

⊙
$$\leq \|a_k\|_1 + \sum_{j=1}^{k-1} \|u_j^t\|_1$$

Por H.I ⟶ $\leq \|a_k\|_1 + \sum_{j=1}^{k-1} 2^{j-1}\cdot \|A\|_\infty$

$$= \|a_k\|_1 + \|A\|_\infty \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{k-1} 2^{j-1}}_{\text{GEOMÉTRICA}}$$

$$= \|a_k\|_1 + \|A\|_\infty \frac{2^k - 1}{2-1} = \|a_k\|_1 + \|A\|_\infty\cdot(2^k - 1)$$

$$= \|a_k\|_1 + 2^k\cdot\|A\|_\infty - \|A\|_\infty \underset{\|a_k\|_1 \leq \|A\|_\infty}{\leq} \boxed{2^k\cdot\|A\|_\infty}$$

LO QUE QUERÍA VER.

Entonces, $\|u_i\|_1 \leq 2^{j-1}\|A\|_\infty$, $\forall i = 1 \ldots N$

(c) PROBAR QUE $\|U\|_\infty \leq 2^{N-1}\|A\|_\infty$.

$$\|U\|_\infty = \underline{\max_i \|u_i\|_1}$$

Por el ítem (B), vimos que $\|u_i\|_1 \leq 2^{i-1}\|A\|_\infty \ \forall i$

Entonces sabemos que, en particular, también se cumple con el máximo.

Sea $u_k \mid \|u_k\|_1 = \max_i \|u_i\|_1$

Por el ítem B $\longrightarrow$ $\underbrace{\|u_k\|} \leq 2^{k-1} \|A\|_\infty \leq \underbrace{2^{N-1} \|A\|_\infty}$

19/21

Pugliese, Martín
LU: 1409/21

Hoja 5

③ A SDP. Probar:

Respondido al final del ejercicio 3.

Ⓐ $a_{ii} > 0 \quad \forall i = 1 \dots N$. ¿Es A no singular?

Como A es SDP $\longrightarrow x^t A x > 0 \quad \forall x \neq 0$.
Como vale para todo x, también vale para los canónicos.

$$\longrightarrow e_i^t A e_i = a_{ii} \overset{A \text{ SDP}}{>} 0 \quad \forall i = 1, \dots, N \quad ✓$$

Ⓑ Todas las submatrices principales de A son DP.

Sea $x \in \mathbb{R}^N$: $x^t = (\underbrace{* \cdots *}_{k \text{ posiciones}} 0 \cdots 0)$

$$\longrightarrow x^t A x = [\underbrace{* \cdots *}_{x^k} 0 \cdots 0] \underbrace{\begin{bmatrix} * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{x^k}$$

la cuenta $x^t A x$ es lo mismo que hacer:

$x^t A x = x^{k^t} A_k x^k$, con A_k la k-ésima submatriz principal de A.

$x^t A x > 0$, pues A es SDP.

$$\Longrightarrow \underline{x^{k^t} A_k x > 0} \quad ✓$$

Por lo tanto, todas sus submatrices principales son definidas-positivas.

Ⓒ $a_{ij}^2 \leq a_{ii} \cdot a_{jj} \quad \forall i,j : 1 \leq i,j \leq N$

Voy a hacer uso de la propiedad vista en la práctica $\longrightarrow$ $\underline{x, y \text{ L.I. y } A \text{ SDP} \Longrightarrow |x^t A y| < \sqrt{x^t A x}\sqrt{y^t A y}}$

Queremos analizar a_{ij}. Para ello, tomo los canónicos e_i, e_j, con $1 \leq i,j \leq N$.

$$\longrightarrow a_{ij} = e_i^t A e_j < \sqrt{e_i^t A e_i} \cdot \sqrt{e_j^t A e_j}$$

$$a_{ij} < \underbrace{\sqrt{a_{ii}}}_{>0} \cdot \underbrace{\sqrt{a_{jj}}}_{>0} =$$

$$= a_{ij}^2 < \left(\sqrt{a_{ii}}\sqrt{a_{jj}}\right)^2 = \boxed{a_{ij}^2 < a_{ii} \cdot a_{jj}}$$

LO QUE QUERÍA PROBAR.

ME FALTÓ RESPONDER SI A ES INVERSIBLE.

Supongamos A no inversible. $\Longrightarrow \exists x \neq 0 : Ax = 0$

$\longrightarrow x^t \underbrace{Ax}_{=0} = 0$, pero A es SDP. ¡ABSURDO!

La contradicción surge de suponer A no inv.

Entonces, A es no singular.

PUGLIESE MARTÍN
LU: 1409/21

HOJA 6

4) $I+A$ INVERSIBLE.

$f(A) = (I-A)(I+A)^{-1}$, $f(f(A)) = A$

$f(A)+I$ INVERSIBLE.

A) PROBAR SI A ANTISIMÉTRICA $\Rightarrow$ $f(A)$ ORTOGONAL.

Quiero probar que $f(A) \cdot f(A)^t = I$

Primero: PRUEBO LA SUGERENCIA.

- $(I-A)(I+A) = I - A^2$
- $(I+A)(I-A) = I - A^2$

$\Rightarrow (I-A)(I+A) = (I+A)(I-A)$

$$(I-A)(I+A)^{-1} \cdot ((I-A)(I+A)^{-1})^t =$$
$$= (I-A)(I+A)^{-1} \cdot ((I+A)^{-1})^t \cdot (I-A)^t =$$

$A^t = -A \rightarrow$
$$= (I-A)(I+A)^{-1} \cdot (I-A)^{-1} \cdot (I+A) =$$
$$= (I-A)((I-A)(I+A))^{-1} \cdot (I+A) =$$

SUGERENCIA
$$= (I-A)((I+A)(I-A))^{-1} \cdot (I+A) =$$
$$= \underbrace{(I-A) \cdot (I-A)^{-1}}_{I} \cdot \underbrace{(I+A)^{-1} \cdot (I+A)}_{I} = I \cdot I = \boxed{I}$$

$f(A)$ es ortogonal con A antisimétrica.

B) H DE HOUSEHOLDER. PROBAR QUE NO HAY MATRIZ ANTISIMÉTRICA A TQ $f(A) = H$.

$H = I - 2uu^t$.

Quiero buscar su matriz antisimétrica asociada. (suponiendo que existe)

Para ello, planteo:

$$\boxed{f(H) = A}$$

ojo
No es la consigna

Por qué?

c

$$f(H) = (I - H)(I + H)^{-1} = (I - (I - 2uu^t))(I + I - 2uu^t)^{-1}$$
$$= 2uu^t \cdot (2I - 2uu^t)^{-1} = 2uu^t \cdot (2(I - uu^t))^{-1}$$
$$= \cancel{2}uu^t \cdot \cancel{\tfrac{1}{2}} \cdot (I - uu^t)^{-1} = \boxed{uu^t (I - uu^t)^{-1} = A}$$

Ahora que tenemos A, queremos ver si $A^t = -A$.

$\rightarrow A^t = (uu^t \cdot (I - uu^t)^{-1})^t = ((I - uu^t)^{-1})^t (uu^t)^t$
$= ((I - uu^t)^t)^{-1} \cdot uu^t = \boxed{(I - uu^t)^{-1} \cdot uu^t}$

$\rightarrow \boxed{A^t \neq -A} \rightarrow$ ¡ABSURDO! ¿COMO SABÉS QUE SON DISTINTAS?

La contradicción surge de suponer que H tiene una matriz antisimétrica asociada. INC

ENTONCES, NO EXISTE A ANTISIMÉTRICA TQ $f(A) = H$. X.

ⓒ CONSIDERAR LAS 2 MATRICES DE GIVENS QUE ROTAN EN UN ÁNGULO RECTO. HALLAR SUS MATRICES ANTISIMÉTRICAS ASOCIADAS.

Planteo las 2 matrices de Givens de 2×2.

• $G_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, • $G_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\rightarrow f(G_1) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right)^{-1} =$

$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\rightarrow f(G_2) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)^{-1} =$

$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

La antisimétrica asociada a G_1 es G_2 y la antisimétrica asociada a G_2 es G_1.