

Métodos Numéricos
1er Cuatrimestre 2023
Práctica 6
Descomposición en Valores Singulares



**DEPARTAMENTO
DE COMPUTACION**
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

1. Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz de rango r y $A = U\Sigma V^t$ una descomposición en valores singulares (SVD), con $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$, siendo $\Sigma = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0\}$ y $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$. Llamamos a σ_i el i -ésimo valor singular. Sean v_1, \dots, v_n las columnas de V y u_1, \dots, u_m las columnas de U . Demostrar:
 - a) v_1, \dots, v_n son autovectores de $A^t A$.
 - b) u_1, \dots, u_m son autovectores de AA^t .
 - c) $\lambda_i = \sigma_i^2$ son los autovalores de $A^t A$ asociados al autovector v_i .
2. Hallar una descomposición en valores singulares de las siguientes matrices.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Sea $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Llamamos $d = \det(A)^2$ y $f = \|A\|_F^2$. Demostrar que los valores singulares de A son $\sqrt{\frac{f \pm \sqrt{f^2 - 4d}}{2}}$.
4. Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $A = U\Sigma V^t$ una descomposición SVD de A .
 - a) Expresar en función de U , Σ y V a las siguientes matrices:
 - i) $A^t A$
 - ii) AA^t
 - iii) $(A^t A)^{-1} A^t$ (asumiendo A con columnas linealmente independientes)
 - b) Hallar una descomposición SVD de las siguientes matrices (notamos $\mathbf{0}_n$ a la matriz de ceros de $n \times n$):
 - i) A^t
 - ii) A^{-1} (suponiendo $m = n$ y A inversible)
 - iii) $\begin{pmatrix} A \\ \mathbf{0}_n \end{pmatrix}$
 - iv) $\begin{pmatrix} A & \mathbf{0}_m \end{pmatrix}$
 - c) Dado $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$, hallar los valores singulares de la matriz $(A^t A + \alpha I)^{-1} A^t$ y expresarlos en función de α y los valores singulares de A .
5. Sean dos matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

$^\dagger \|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}$ es la norma Frobenius de la matriz A .

- a) Demostrar que todos los valores singulares de A son iguales si y solo si A es múltiplo de una matriz ortogonal.
- b) Demostrar que A y B tienen los mismos valores singulares si y solo si existen P y Q matrices ortogonales tal que $A = PBQ$.
- c) Demostrar que si $AA^t = BB^t$ entonces existe una matriz ortogonal Q tal que $AQ = B$.
6. Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, demostrar que los valores singulares de la matriz $\begin{pmatrix} I_n \\ A \end{pmatrix}$ son $\sqrt{1 + \sigma_i^2}$, donde I_n es la matriz identidad de $\mathbb{R}^{n \times n}$ y σ_i es el i -ésimo valor singular de A .
7. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, con A una matriz simétrica definida positiva. Demostrar que los autovalores de A coinciden con sus valores singulares.
8. Supongamos que $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tiene columnas ortogonales w_1, w_2, \dots, w_n donde $\|w_i\|_2 = \alpha_i > 0$. Calcular $A^t A$ y hallar las matrices U , Σ y V de una descomposición en valores singulares de A .
9. Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, con $A = Q \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$ descomposición QR de A (con $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$). Hallar una descomposición SVD de A asumiendo que $R = U\Sigma V^t$ es una descomposición SVD de R .
10. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\sigma > 0$. Demostrar que σ es valor singular de A si y sólo si la matriz $\begin{pmatrix} A & -\sigma I \\ -\sigma I & A^t \end{pmatrix}$ es singular.
11. Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz de rango 1. Llamamos rango de A a la dimensión del espacio generado por la imagen $Im(A) = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}$. Sea u un vector unitario en $Im(A)$.
- a) Demostrar que todas las columnas de A son múltiplos de u .
- b) Mostrar que A se puede escribir de la forma $A = \sigma uv^t$, con $v \in \mathbb{R}^n$ unitario y $\sigma > 0$.
- c) Mostrar que existe una matriz ortogonal $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ cuya primer columna es u y una matriz ortogonal $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ cuya primer columna es v . ¿Cómo podría construir dichas matrices?
- d) Deducir que toda matriz A de rango 1 tiene descomposición SVD. ¿Quién es Σ ?
12. Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz de rango r y sea $A = U\Sigma V^t$ una descomposición SVD de A , con $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ y $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonales y $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ diagonal. Llamamos v_1, \dots, v_n a las columnas de V y u_1, \dots, u_m a las columnas de U . Probar que:
- a) $Nu(A) = \langle v_{r+1}, \dots, v_n \rangle$
- b) $Im(A) = \langle u_1, \dots, u_r \rangle$
- (Sugerencia: en cada caso, considerar sólomente una inclusión y luego evaluar dimensiones, recordando que $\dim(\mathbb{R}^n) = \dim(Nu(A)) + \dim(Im(A))$.)
13. Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $A = U\Sigma V^t$ una descomposición SVD. Demostrar:
- a) $\|Ax\|_2/\|x\|_2$ se maximiza para $x = v_1$, con v_1 la primer columna de V .
- b) $\|A\|_2 = \sigma_1$. Deducir que $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^t A)}^{\dagger\dagger}$.

^{††}Dada una matriz $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se define el *radio espectral* de B como $\rho(B) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ autovalor de } B\}$.

c) $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}$.

d) Si $m = n$ y A es inversible, entonces $\kappa_2(A) = \sigma_1/\sigma_n$.

e) $\max_i |a_{ii}| \leq \sigma_1$.

14. Sea $z \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, y sea la matriz $B = \begin{pmatrix} A \\ z^t \end{pmatrix}$. Llamamos $\sigma_1(C)$ al primer valor singular de cualquier matriz C . Demostrar: $\sigma_1(A) \leq \sigma_1(B) \leq \sqrt{\sigma_1(A)^2 + \|z\|_2^2}$.

Resolver en computadora

i Sea $A \in \mathbb{R}^{5 \times 3}$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Si $A = U\Sigma V^t$ es su descomposición en valores singulares con U y V ortogonales, Σ diagonal con elementos en la diagonal en orden decreciente, u_i las columnas de U , v_i las columnas de V y σ_i los valores singulares, verificar que:

- $\|Av_1\|_2 = \sigma_1$
- $\|A\|_2 = \sigma_1$
- $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^t A)}$
- Si $rg(A) = r$, entonces $A = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^t$

Funciones útiles

Tanto Matlab¹ como Numpy² proveen funciones para calcular la descomposición SVD de una matriz.

- En Matlab:

```
A = [8 2; 2 4; 5 3]
[U,S,V] = svd(A)
```

- En Python, usando Numpy:

```
from numpy import *
from numpy.linalg import *

A = matrix([[8,2],[2,4],[5,3]], float)
U, s, V = svd(A)
```

En los dos casos, un segundo parámetro permite generar la descomposición en su forma ‘corta’.

¹<http://www.mathworks.com/help/matlab/ref/svd.html>

²<http://docs.scipy.org/doc/numpy/reference/generated/numpy.linalg.svd.html>

Referencias

- [1] J. Demmel. *Applied Numerical Linear Algebra*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 1997.
- [2] G.H. Golub and C.F. Van Loan. *Matrix Computations*. Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences. Johns Hopkins University Press, 2012.
- [3] C. Meyer. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.
- [4] D.S. Watkins. *Fundamentals of Matrix Computations*. Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts. Wiley, 2010.