Материалы для подготовки к коллоквиуму по дискретной математике
Теоремы

ПМИ 2016
Орлов Никита, Рубачев Иван, Ткачев Андрей, Евсеев Борис

11 декабря 2016 г.

2. Бином Ньютона. Формула для биномиальных коэффициентов

Число сочетаний из n по k равно:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Доказательство. На первое место можно поставить любой из n элементов, на второе любой из $n-1$ оставшихся, $\ldots$, на k-е любой из $n-k+1$. Тогда по правилу произведения существует $n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$ упорядоченных наборов. Но порядок нам не важен, поэтому существует $\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ неупорядоченных наборов. $\square$

Формула бинома Ньютона имеет вид:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k$$

Доказательство. Раскрытие скобок даст все возможные комбинации a и b длины n. Так как умножение коммутативно, то элементы с одинаковым количеством b можно сгрупировать. Тогда перед $a^{n-k}b^k$ будет стоять коэффициент c. Количество слогаемых, в которых b встречается ровно k раз равно $\binom{n}{k}$. Тогда $c = \binom{n}{k}$, а значит:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k$$

$\square$

6. Формулы для суммы степеней вершин в неориентированном и в ориентированном графе

Определение. *Сумма степеней всех вершин в неориентированном графе равна удвоенному числу ребер.* $\sum\limits_{v\in V(G)} \deg(v) = 2 \cdot |E(G)|$

Доказательство. Пусть в графе степень каждой вершины равна 0 (в графе нет ребер). При добавлении ребра, связывающего любые две вершины, сумма всех степеней увеличивается на 2 единицы. Таким образом, сумма всех степеней вершин четна и равна удвоенному числу ребер. □

Определение. *Число исходящих степеней вершин равно числу входящих, равно числу ребер.*

Доказательство. Первая часть утверждения очевидна. Каждое ребро выходит из одной вершины и входит в другую, поэтому каждое ребро дает одинаковый вклад в суммы исходящих и входящих степеней вершин. Для доказательства второй части утверждения докажем что число ребер равно числу исходящих степеней вершин. Исходящая степень вершины равна числу ребер, которые из нее выходят. Ребро не может выходить более чем из одной вершины, поэтому сумма исходящих степеней вершин равна числу ребер. По транзитивности отношения «=» число ребер равно также и сумме исходящих вершин. □

10. Деревья – это в точности минимально связные графы

Доказательство.
[⇒] Докажем индукцией по числу вершин. База: для $n = 2$ существует лишь одно дерево, для которого утверждение очевидно. Предположим это для некоторого дерева G_n на n вершинах, в котором $n - 1$ ребро. Шаг для $n + 1$: добавляя одну вершину u, нужно связать её с графом G_n, то есть соединить с некоторыми вершинами. Если бы мы соединили её с двумя вершинами v_1 и v_2, то у нас в графе G_{n+1} получился бы цикл, так как в G_n уже существовал путь $v_1, a_1, a_2, \ldots, a_k, v_2$, а значит в G_{n+1} существует цикл $v_1, a_1, a_2, \ldots, a_k, v_2, u, v_1$, а значит G_{n+1} – не дерево. Значит, при добавлении вершины мы можем добавить не более одного ребра (а для сохранения связности ещё и более 0), значит G_{n+1} должен содержать $n - 1 + 1 = n$ рёбер, что означает, что предположение индукции выполнено и для $n + 1$.
[⇐] Для начала докажем что в связном графе не может меньше чем $n - 1$ ребро по индукции. База: для $n = 2$ граф на 2-ух вершинах, все очевидно. Шаг для $n + 1$: если для n вершин утверждение верно, то для $n + 1$ вершины оно тоже будет верно, так как нужно связать добавленную вершину как минимум с одним ребром (то есть ребер станет не менее чем $n - 1 + 1 = n$). Пусть у нас есть связный граф на n вершинах, с $n - 1$ ребрами и в этом графе есть циклы. Из некоторого цикла удалим ребро соединявшее вершины u и v, при этом граф останется связным, но в нем будет уже $n - 2$ ребра – получили противоречие. Значит в таком минимально связном графе нет циклов, то есть этот граф – дерево. □

18. Признаки делимости на 3, 9 и 11

Число x делистся на 3 (на 9) тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3 (на 9)

Доказательство. Пусть $x = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0} = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \ldots + 10a_1 + a_0$. Так как $10 \equiv 1 \pmod 3$, то:

$$x \equiv \sum_{i=0}^{n} a_i \pmod 3$$

Для делимости на 9 доказательство аналогично. □

Число x делится на 11, тогда и только тогда, когда:

$$11 \Big| \left(\sum_{2|i}^{n} a_i - \sum_{2\nmid i}^{n} a_i \right)$$

Доказательство. $10 \equiv -1 \pmod{11}$, значит $10^n \equiv (-1)^n \pmod{11}$. Тогда:

$$x \equiv (-1)^n a_n + (-1)^{n-1} a_{n-1} + \ldots + (-1) a_1 + a_0 \equiv \sum_{2|i}^{n} a_i - \sum_{2\nmid i}^{n} a_i \pmod{11}$$

□