Материалы для подготовки к коллоквиуму по дискретной математике
Определения

ПМИ 2016
Орлов Никита, Рубачев Иван, Ткачев Андрей, Евсеев Борис

11 декабря 2016 г.

Принцип математической индукции

Принципом математической индукции называют метод доказательства бесконечной цепочки утверждений, пронумерованных натуральными числами. Тогда для их доказательства достаточно справедливости следующих фактов:

1. Верно утверждение $A(0)$, называемое *базой индукции*.

2. Для любого натурального n верно, что из $A(n)$ следует $A(n+1)$. Этот переход называется *шагом индукции*.

В качетсве примера может служить доказательство формул арифметической, геометрической прогрессий, коды Грея.

Правила суммы, произведения, дополнения

Пусть есть непересекающиеся множества A, B. Тогда

$$|A \cup B| = |A| + |B|,$$

$$|A \times B| = |A| \times |B|$$

называются правилами суммы и произведения множеств соответственно.

Дополнением $\overline{A}$ множества A называется множество, состоящее из не удовлетворяющих произвольному условию элементов. Тогда

$$|\overline{A}| = U - A,$$

где U - пространство, в котором решается задача.

Алфавит, конечные слова, формулы комбинаторики

Алфавитом называется произвольное конечное множество, элементы которого называются символами или буквами.

Словом называется произвольная упорядоченная последовательность букв.

Числом перестановок $n!$ слова называется количество слов длины n, отличающихся друг от друга порядком следования букв.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

Упорядоченным выбором с возвращением из n по k называется слово длины k, состоящее из букв слова длины n, с повторяющимися буквами. Число таких слов будет равняться

$$n^k$$

Упорядоченным выбором без возвращения из n по k называется слово длины k, состоящее из букв слова длины n, без повторяющихся букв. Число таких слов будет равняться

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Неупорядоченным выбором без возвращения из n по k называется слово длины k, состоящее из букв слова длины n, без повторяющихся букв, причем слова, отличающиеся только порядком следования букв будем считать одинаковыми. Тогда число таких слов будет равняться

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\ (n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Неупорядоченным выбором с возвращением ....

$$\binom{k-1}{n+k-1} = \binom{n-1}{n+k-1}$$

Двоичными словами называются слова, составленные из двух букв, называемых *нулем* и *единицей*:

$$a \in \{0; 1\}$$

Число подмножеств множества считается по формуле

$$2^{|A|}$$

Формула включений-исключений

Формулой включений-исключений называется формула, по которой можно посчитать мощность объединения счетного количества множеств:

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} -1^{(k+1)} \cdot (\sum_{m_1 < \ldots < m_k \leq n} |A_{m_1} \cap \ldots \cap A_{m_k}|)$$

Биноминальные коэффициенты, основные свойства. Бином Ньютона

Биноминальными коэффициентами называются коэффициенты в разложении бинома Ньютона $(1+x)^n$ по степеням x. При k степени x – $\binom{n}{k}$.

Бином Ньютона - формула разложения степени двучлена в сумму:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^n b^k$$

Свойства биноминальных коэффициентов:

1. $\binom{n}{k} = \binom{n-k}{k}$.
2. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.
3. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

Треугольник Паскаля. Реккурентное соотношение

Реккурентным соотношением называется формула, где каждый следующий член определен через предыдущие числа. Пример: числа Фибонначи.

Треугольник Паскаля - треугольник биномиальных коэффициентов, где каждый следующий элемент определяется суммой двух элементов над ним:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

Графы

Пусть у нас есть множество элементов V - множество *вершин*. *Граф* - математический объект, являющийся совокупностью *вершин* и *ребер*, то есть:

$$G := (V, E),\ E \subseteq V \times V$$

Ребром графа называется пара вершин.

Неориентированный гарф - такой граф, где ребрам не задано направление.

Ориентированный гарф - такой граф, где у каждого ребра есть направление, иными словами, у каждого ребра есть начальная и конечная вершины.

Матрица смежности - квадратная матрица размера $V \times V$, строки и столбцы одинаково пронумерованы, элемент a_{ij} показывает наличие ребра или его вес:

	1	2	3	4
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}

Изоморфные графы - такие графы G и G', что можно построить биекцию между их вершинами и соответствующими ребрами, или их вершины можно перенумеровать так, что их матрицы смежности совпадут

Степень вершины - число ребер, исходящих из нее, причем сумма степеней вершин равна удвоенному числу ребер.

Пути и циклы в графах, основные свойства
