Лекции по предмету
Линейная алгебра и геометрия

2017 год

Содержание

Лекция 21

V – векторное пространство над $\mathbb{F}$ (в котором $1+1\neq 0$)
$\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ – базис
$Q : V \to \mathbb{F}$ – квадратичная форма

Определение. *Q имеет в базисе $\mathbb{e}$ канонический вид, если в этом базисе*

$$Q(x) = b_1 x_1^2 + \ldots + b_n x_n^2,\ b_i \in \mathbb{F}$$

(то есть матрица квадратичной формы Q в этом базисе диагональна)

Метод Якоби

$\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ Рассмотрим набор векторов
$\mathbb{e}' = ({e'}_1, \ldots, {e'}_n)$ такой что

$$\begin{aligned} &e'_1 = e_1 \\ &e'_2 \in e_2 + \langle e_1 \rangle \\ &e'_3 \in e_3 + \langle e_1, e_2 \rangle \\ &\vdots \\ &e'_n \in e_n + \langle e_1, \ldots, e_{n-1} \rangle \end{aligned} \tag{$\star$}$$

Для любого $k \in (1, \ldots, n)$ имеем $(e'_1, \ldots, e'_k) = (e_1, \ldots, e_k) \cdot C_k$, где

$$C_k = \begin{pmatrix} 1 & \star & \star & \star & \cdots & \star \\ 0 & 1 & \star & \star & \cdots & \star \\ 0 & 0 & 1 & \star & \cdots & \star \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_k(\mathbb{F})$$

$\det C_k = 1 \neq 0 \;\Rightarrow (e'_1, \ldots, e'_k)$ линейно независимы $\Rightarrow \langle e_1, \ldots, e_k \rangle = \langle e'_1, \ldots, e'_k \rangle$. В частности $\mathbb{e}'$ – базис пространства V.

Пусть Q – квадратичная форма
$B = B(Q, \mathbb{e})$
$B_k = B(Q, \mathbb{e})$ – левый верхний $k \times k$ блок в B
$\sigma_k = \sigma_k(Q, \mathbb{e}) = \det B_k$ – k-ый угловой минор матрицы B.

Пусть $\mathbb{e}'$ – базис V удовлетворяющий условию ($\star$)
$B' = B(Q, \mathbb{e}')$
$B'_k = B_k(Q, \mathbb{e}')$
$\sigma'_k = \sigma_k(Q, \mathbb{e}')$

Лемма. *Для любого $k \in (1, \ldots, n)$, $\sigma_k = \sigma'_k$*

Доказательство. При любом k имеем $B'_k = C_k^T \cdot B_k \cdot C_k \Rightarrow$ определитель $\sigma'_k = \det C_k^T \cdot B \cdot C_k = \det B_k = \sigma_k$и □

Теорема. *(Метод Якоби приведения квадратичной формы к каноническому виду) Предположим, что* $\sigma_k \neq 0 \forall k$, *тогда существует единственный базис* $\mathbb{e}' = ({e'}_1, \ldots, {e'}_n)$ *в* V, *такой что*

1. $\mathbb{e}'$ *имеет вид* $(\star)$
2. *в этом базисе* Q *имеет канонический вид*

$Q(x) = \sigma_k x_1'^2 + \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1} x_2'^2 + \ldots + \dfrac{\sigma_n}{\sigma_{n-1}} x_n'^2$

то есть $B(Q, \mathbb{e}') = \mathrm{diag}(\sigma_1, \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}, \ldots, \dfrac{\sigma_n}{\sigma_{n-1}})$

Доказательство. Индукция по n:
$n = 1$ – верно
Пусть доказано для $n - 1$ докажем для n
Пусть векторы $e'_1, \ldots, e'_{n-1}$ уже построены

$$B(Q, (e'_1 \ldots, e'_{n-1}, e_n)) =$$

□