Лекции по предмету
Линейная алгебра и геометрия

2017 год

Содержание

Лекция 21 **2**

Метод Якоби 2

Нормальный вид квадратичной формы над $\mathbb{R}$ 4

Закон инерции 4

Лекция 25 **6**

Ориентированный объём 6

Трёхмерное евклидово пространство 7

Двойное векторное произведение 8

Лекция 21

V – векторное пространство над $\mathbb{F}$ (в котором $1+1 \neq 0$)
$\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ – базис
$Q : V \to \mathbb{F}$ – квадратичная форма

Определение. *Q имеет в базисе $\mathbb{e}$ канонический вид, если в этом базисе*

$$Q(x) = b_1 x_1^2 + \dots + b_n x_n^2,\ b_i \in \mathbb{F}$$

(то есть матрица квадратичной формы Q в этом базисе диагональна)

Метод Якоби

$\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ Рассмотрим набор векторов
$\mathbb{e}' = ({e'}_1, \dots, {e'}_n)$ такой что

$$\begin{aligned} &e'_1 = e_1 \\ &e'_2 \in e_2 + \langle e_1 \rangle \\ &e'_3 \in e_3 + \langle e_1, e_2 \rangle \\ &\vdots \\ &e'_n \in e_n + \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle \end{aligned} \tag{$\star$}$$

Для любого $k \in (1, \dots, n)$ имеем $(e'_1, \dots, e'_k) = (e_1, \dots, e_k) \cdot C_k$, где

$$C_k = \begin{pmatrix} 1 & \star & \star & \star & \cdots & \star \\ 0 & 1 & \star & \star & \cdots & \star \\ 0 & 0 & 1 & \star & \cdots & \star \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_k(\mathbb{F})$$

$\det C_k = 1 \neq 0 \ \Rightarrow (e'_1, \dots, e'_k)$ линейно независимы $\Rightarrow \langle e_1, \dots, e_k \rangle = \langle e'_1, \dots, e'_k \rangle$. В частности $\mathbb{e}'$ – базис пространства V.

Пусть Q – квадратичная форма
$B = B(Q, \mathbb{e})$
$B_k = B(Q, \mathbb{e})$ – левый верхний $k \times k$ блок в B
$\sigma_k = \sigma_k(Q, \mathbb{e}) = \det B_k$ – k-ый угловой минор матрицы B.

Пусть $\mathbb{e}'$ – базис V удовлетворяющий условию ($\star$)
$B' = B(Q, \mathbb{e}')$
$B'_k = B_k(Q, \mathbb{e}')$
$\sigma'_k = \sigma_k(Q, \mathbb{e}')$

Лемма. *Для любого $k \in (1, \dots, n)$, $\sigma_k = \sigma'_k$*

Доказательство. При любом k имеем $B'_k = C_k^T \cdot B_k \cdot C_k \Rightarrow$ определитель $\sigma'_k = \det C_k^T \cdot B \cdot C_k = \det B_k = \sigma_k$и □

Теорема. *(Метод Якоби приведения квадратичной формы к каноническому виду) Предположим, что $\sigma_k \neq 0 \forall k$, тогда существует единственный базис $\mathbb{e}' = ({e'}_1, \dots, {e'}_n)$ в V, такой что*

1. *$\mathbb{e}'$ имеет вид ($\star$)*
2. *в этом базисе Q имеет канонический вид*

$Q(x) = \sigma_k x_1'^2 + \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1} x_2'^2 + \ldots + \dfrac{\sigma_n}{\sigma_{n-1}} x_n'^2$

то есть $B(Q, \mathbb{e}') = \operatorname{diag}(\sigma_1, \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}, \dots, \dfrac{\sigma_n}{\sigma_{n-1}})$

Доказательство. Индукция по n:
$n = 1$ – верно
Пусть доказано для $n-1$ докажем для n
Пусть векторы $e_1', \dots, e_{n-1}'$ уже построены

$$B(Q, (e_1' \dots, e_{n-1}', e_n)) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \star \\ 0 & \frac{\sigma_2}{\sigma_1} & \cdots & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_{n-2}} & \star \\ \star & \star & \star & \cdots & \star & \star \end{pmatrix}$$

Ищем e_n' в виде $e_n + \langle e_1, \dots, e_{n-1}\rangle = e_n + \langle e_1', \dots, e_{n-1}'\rangle$ то есть в виде $e_n' = e_n + \lambda_1 e_1' + \dots + \lambda_{n-1} e_{n-1}'$.
Пусть $\beta : V \times V \to \mathbb{F}$ – симметрическая билинейная форма, соответствующая Q.

$$\beta(e_k', e_n') = \beta(e_k', e_n) + \lambda_1 \beta(e_k', e_1') + \dots + \lambda_{k-1} \beta(e_k', e_{k-1}')$$

так как $\beta(e_i', e_j') = 0$ при $1 \leqslant i, j \leqslant n-1, i \neq j$

$$\beta(e_k', e_n') = \beta(e_k', e_n) + \lambda_k (e_k', e_k')$$

Тогда $\beta(e_k', e_n') = 0 \; \forall k = 1, \dots, n-1$ тогда и только тогда, когда $\lambda_k = -\dfrac{\beta(e_k', e_n)}{\beta(e_k', e_k')} = -\beta(e_k', e_n) \cdot \dfrac{\sigma_{k-1}}{\sigma_k}$.

В итоге построен базис $\mathbb{e}' = ({e'}_1, \dots, {e'}_n)$ такой что

$$B(Q, \mathbb{e}') = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_2}{\sigma_1} & \cdots & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_{n-2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & ? \end{pmatrix}$$

В силу леммы $\sigma_n = \sigma_n' = \sigma_1 \cdot \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot \dfrac{\sigma_{n-1}}{\sigma_{n-2}} \cdot ? = \sigma_{n-1} \cdot ? \Rightarrow ? = \dfrac{\sigma_n}{\sigma_{n-1}}$. □

Замечание. *Единственность следует из явных формул на каждом шаге.*

Нормальный вид квадратичной формы над полем $\mathbb{R}$

Определение. *Квадратичная форма Q имеет в базисе $\mathbb{e}$ нормальный вид, если в этом базисе $Q(x) = b_1x_1^2 + \ldots + b_nx_n^2$, где $b_i \in \{-1, 0, 1\}$.*

Предложение. *Для любой квадратичной формы Q над полем $\mathbb{R}$ существует базис, в котором Q принимает нормальный вид.*

Доказательство. Существует базис, в котором Q имеет канонический вид

$$Q(x) = b_1x_1^2 + \ldots + b_nx_n^2$$

Делаем невырожденную замену

$$x_i = \begin{cases} \frac{x_i'}{\sqrt{|b_i|}}, & b_i \neq 0 \\ x_i', & b_i = 0 \end{cases}$$

Тогда в новых координатах Q имеет вид $Q(x) = \varepsilon_1 x_1'^2 + \ldots + \varepsilon_n x_n'^2$, где $\varepsilon_i = \operatorname{sgn}(b_i)$. □

Замечание. *Если $F = \mathbb{C}$, то такое же рассуждение позволяет привести любую квадратичную форму над полем $\mathbb{C}$ к виду $x_1^2 + \ldots + x_k^2$, где $k = \operatorname{rk} Q$*

Закон инерции

Пусть Q – квадратичная форма над $\mathbb{R}$. Нормальный вид: $Q(x) = x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_{s+t}^2$. s – число «+» в нормальном виде, t – число «−» в нормальном виде.

Определение. *Число $i_+ = s$ – положительный индекс инерции квадратичной формы Q.*

Определение. *Число $i_- = t$ – отрицательный индекс инерции квадратичной формы Q.*

Теорема. *Числа i_+ и i_- не зависят от базиса в котором Q принимает нормальный вид.*

Доказательство. Имеем $i_+ + i_- = \operatorname{rk} Q$ – инвариантная величина $\Rightarrow$ достаточно доказать инвариантность числа i_+.

Пусть базис $\mathbb{e}$ таков, что в нем $Q(x) = x_1 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_{s+t}^2$ и пусть $\mathbb{e}'$ – другой базис такой что в нем $Q(x) = x_1^2 + \ldots + x_{s'}^2 - x_{s'+1}^2 - \ldots - x_{s'+t'}^2$.

Предположим, что $s \neq s'$, тогда без ограничения общности $s > s'$. Рассмотрим в V подпространства $L = \langle e_1, \ldots, e_s\rangle$ и $L' = \langle e'_{s'+1}, \ldots, e'_n\rangle$. $\dim L = s$ и $\dim L' = n - s'$. $L + L'$ – подпространство в $V \Rightarrow \dim(L + L') \leqslant \dim V = n$. Тогда $\dim(L \cap L') = \dim L + \dim L' - \dim(L + L') \geqslant s + n - s' - n = s - s' > 0$. Тогда существует $v \in L \cap L', v \neq 0$. Так как $v \in L$, то $Q(v) > 0$, но так как $v \in L'$, то $Q(v) \leqslant 0$ – противоречие. □

Определение. *Квадратичная функция Q над полем $\mathbb{R}$ называется*

Термин	*Обозначение*	*Условие*
положительно определенной	$Q > 0$	$Q(x) > 0\ \forall x \neq 0$
отрицательно определенной	$Q < 0$	$Q(x) < 0\ \forall x \neq 0$
неотрицательно определенной	$Q \geqslant 0$	$Q(x) \geqslant 0\ \forall x$
неположительно определенной	$Q \leqslant 0$	$Q(x) \leqslant 0\ \forall x$
неопределенной	−	$\exists x, y\colon Q(x) > 0,\ Q(y) < 0$

Термин	*Нормальный вид*	*Индексы инерции*
положительно определенной	$x_1^2 + \ldots + x_n^2$	$i_+ = n,\ i_- = 0$
отрицательно определенной	$-x_1^2 - \ldots - x_n^2$	$i_+ = 0,\ i_- = n$
неотрицательно определенной	$x_1^2 + \ldots + x_k^2,\ k \leqslant n$	$i_+ = k,\ i_- = 0$
неположительно определенной	$-x_1^2 - \ldots - x_k^2,\ k \leqslant n$	$i_+ = 0, i_- = k$
неопределенной	$x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_{s+t}^2,\ s,t \geqslant 1$	$i_+ = s,\ i_- = t$

Пример. $V = \mathbb{R}^2$.

1. $Q(x, y) = x^2 + y^2$, $Q > 0$;
2. $Q(x, y) = -x^2 - y^2$, $Q < 0$;
3. $Q(x, y) = x^2 - y^2$;
4. $Q(x, y) = x^2$, $Q \geqslant 0$;
5. $Q(x, y) = -x^2$, $Q \leqslant 0$.

Лекция 25

$\mathbb{E}$ – евклидово пространство. $\mathbb{e}, \mathbb{e}'$ – два базиса. $\mathbb{e}' = \mathbb{e}C$, $\mathbb{e}$ и $\mathbb{e}'$ одинаково ориентированы, если $\det C > 0$. Одинаковая ориентированность – отношение эквивалентности на множестве всех базисов в $\mathbb{E}$.

Фиксируем $\mathbb{e}$:

- все $\mathbb{e}'$ для которых $\det C > 0$ – один класс
- все $\mathbb{e}'$ для которых $\det C < 0$ – второй класс

Значит всего два класса эквивалентности.

Определение. *Говорят, что в $\mathbb{E}$ зафиксирована ориентация, если все базисы одного класса объявлены положительно ориентированными, а все базисы второго класса трицательно ориентированными.*

Пример. *В $\mathbb{R}^3$ есть стандартный выбор ориентации:*

- *положительная ориентация – «правые» базисы*
- *отрицательная ориентация – «левые» базисы*

Ориентированный объём

Фиксруем ориентацию в $\mathbb{E}$, $\dim \mathbb{E} = n$

$a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{E}$ – набор векторов
$\mathrm{Vol}\ \mathrm{P}(a_1, \ldots, a_n)$ – объём
$(e_1, \ldots, e_n)$ – положительно ориентированный ортонормированный базис
$(a_1, \ldots, a_n) = (e_1, \ldots, e_n)A$
$\mathrm{Vol}\ \mathrm{P}(a_1, \ldots, a_n) = |\det A|$

Определение. *Ориентированным объёмом параллелипипеда* $\mathrm{P}(a_1, \ldots, a_n)$ *называется величина* $\mathrm{Vol}(a_1, \ldots, a_n) = \det A$.

Свойства.

1. $|\mathrm{Vol}(a_1, \ldots, a_n)| = \mathrm{Vol}\ \mathrm{P}(a_1, \ldots, a_n)$
2. $\mathrm{Vol}(a_1, \ldots, a_n) > 0 \iff (a_1, \ldots, a_n)$ – *положительно ориентированный базис*
3. *Линейность по каждому аргументу*
4. *Кососимметричность – меняет знак при перестановке любых двух аргументов*

Трёхмерное евклидово пространство

$\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$ – евклидово пространство со стандартным скалярным произведением. Фиксируем ориентацию (как в примере положительная ориентация $\sim$ «правые базисы»), $a, b, c \in \mathbb{R}^3$.

Определение. *Смешанным произведением векторов a, b, c называется величина $(a, b, c) := \mathrm{Vol}(a, b, c)$.*

Свойства.

1. *Линейна по каждому аргументу*
2. *Кососимметрична*

Если (e_1, e_2, e_3) – правый ортонормированный базис и:

$$\begin{aligned} a &= a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 \\ b &= b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 \\ c &= c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3 \end{aligned}$$

То

$$(a, b, c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Критерий компланарности (линейной зависимости трёх векторов): $(a, b, c) = 0 \iff a, b, c$компланарны.

Определение. *Векторным произведением векторов $a, b \in \mathbb{E}$ называется вектор c, такой что*

1. $c \perp \langle a, b \rangle$
2. $|c| = \mathrm{Vol}\ \mathrm{P}(a, b)$
3. $(a, b, c) \geqslant 0$

Обозначение. $[a, b]$ *или* $a \times b$.

Замечание. *Векторное произведение условиями* $1) - 3)$ *определено однозначно*

1. *a, b линейно зависимы. Тогда из 2) получаем, что $|c| = 0 \Rightarrow c = 0$, при этом 1) и 3) выполнены.*
2. *a, b линейно независимы. В данном случае $(a, b, c) > 0 \iff$ тройка a, b, c является правой (+ нужна картинка)*

Критерий коллинеарности (линейной зависимости двух векторов): $[a, b] = 0 \iff a, b$ коллинеарны.

Пример. (e_1, e_2, e_3) *– правый ортонормированный базис*

$[e_i, e_j]$	e_1	e_2	e_3
e_1	0	e_3	$-e_2$
e_2	$-e_3$	0	e_1
e_3	e_2	$-e_1$	0

Теорема. $\forall\ a, b, c \in \mathbb{R}^3 (a, [b, c]) = (a, b, c)$.

Доказательство.

1. Пусть b, c пропорциональны, тогда $[b, c] = 0 \Rightarrow (a, [b, c]) = 0)$, но (a, b, c) тоже равна нулю
2. b, c не пропорциональны, тогда положим $d = [b, c]$. $(a, [b, c]) = (a, d) = (\mathrm{pr}_{\langle d\rangle} a, d) = (\mathrm{ort}_{\langle b,c\rangle} a, d) = \begin{cases} |\mathrm{ort}_{\langle b,c\rangle} a| \cdot |d|, & \text{если } (a, b, c) > 0 \\ -|\mathrm{ort}_{\langle b,c\rangle} a| \cdot |d|, & \text{если } (a, b, c) < 0 \end{cases} = \mathrm{Vol}(a, b, c) = (a, b, c)$.

□

Предложение.

1. $[a, b] = -[b, a]\ \forall\ a, b$.

2. $[\cdot, \cdot]$ *линейно по каждому аргументу.*

Доказательство.

1. Ясно из определения
2. Для каждого x: $(x, [\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, b] = (x, \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, b) = \lambda_1 (x, a_1, b) + \lambda_2 (x, a_2, b) = \lambda_1 (x, [a_1, b]) + \lambda_2 (x, [a_2, b]) = (x, \lambda_1 [a_1, b] + \lambda_2 [a_2, b])$. Так всякий вектор $y = (e_1, y)e_1 + (e_2, y)e_2 + (e_3, y)e_3$, для (e_1, e_2, e_3) ортонормированного базиса, то $[\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, b] = \lambda_1 [a_1, b] + \lambda_2 [a_2, b]$. Линейность по второму аргументу аналогично.

□

Двойное векторное произведение

Предложение. $[a, [b, c]] = (a, c)b - (a, b)c$ *(*$= b(a, c) - c(a, b)$ *«БАЦ - ЦАБ»)*

Доказательство.

1. b, c пропорциональны, тогда $c = \lambda b$, $[a, [b, c]] = 0$, а правая часть равна $(a, \lambda b)b - (a, b)\lambda b = 0$
2. b, c не пропорциональны. Выберем правый ортонормированный базис e_1, e_2, e_3 так, чтобы:
   (a) b был пропорционален e_1
   (b) $\langle b, c\rangle = \langle e_1, e_2\rangle$

   Тогда $b = \beta e_1$, $c = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2$, $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$. $[b, c] = [\beta e_1, \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2] = \beta\gamma_2 e_3$. Тогда $[a, [b, c]] = [\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, \beta\gamma_2 e_3] = -\alpha_1 \beta\gamma_2 e_2 + \alpha_2 \beta\gamma_2 e_1$. Правая часть равна $(\alpha\gamma_2 + \alpha_2\gamma_2)\beta e_1 - \alpha_1 \beta(\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2) = -\alpha_1 \beta\gamma_2 e_2 + \alpha_2 \beta\gamma_2 e_1 =$ левая часть.

□

Следствие. *(Тождество Якоби)* $[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0\ \forall\ a, b, c \in \mathbb{R}^3$.

Пусть (e_1, e_2, e_3) – правый ортонормированный базис.

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$$
$$b = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$$

Предложение. *Векторное произведение можно найти следующим образом:*

$$[a,b] = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)e_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)e_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)e_3$$

Доказательство. Доказывается прямой проверкой с использованием билинейности и значений $[e_i, e_j]$. □