Лекции по предмету
Линейная алгебра и геометрия

2017 год

Содержание

Лекция 21

V – векторное пространство над $\mathbb{F}$ (в котором $1 + 1 \neq 0$)
$\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ – базис
$Q : V \to \mathbb{F}$ – квадратичная форма

Определение. *Q имеет в базисе $\mathbb{e}$ канонический вид, если в этом базисе*

$$Q(x) = b_1 x_1^2 + \ldots + b_n x_n^2,\ b_i \in \mathbb{F}$$

(то есть матрица квадратичной формы Q в этом базисе диагональна)

Метод Якоби

$\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ Рассмотрим набор векторов
$\mathbb{e}' = ({e'}_1, \dots, {e'}_n)$ такой что

$$\begin{aligned} & e'_1 = e_1 \\ & e'_2 \in e_2 + \langle e_1 \rangle \\ & e'_3 \in e_3 + \langle e_1, e_2 \rangle \\ & \vdots \\ & e'_n \in e_n + \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle \end{aligned} \tag{$\star$}$$

Для любого $k \in (1, \dots, n)$ имеем $(e'_1, \dots, e'_k) = (e_1, \dots, e_k) \cdot C_k$, где

$$C_k = \begin{pmatrix} 1 & \star & \star & \star & \cdots & \star \\ 0 & 1 & \star & \star & \cdots & \star \\ 0 & 0 & 1 & \star & \cdots & \star \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_k(\mathbb{F})$$

$\det C_k = 1 \neq 0 \ \Rightarrow (e'_1, \dots, e'_k)$ линейно независимы $\Rightarrow \langle e_1, \dots, e_k \rangle = \langle e'_1, \dots, e'_k \rangle$. В частности $\mathbb{e}'$ – базис пространства V.

Пусть Q – квадратичная форма
$B = B(Q, \mathbb{e})$
$B_k = B(Q, \mathbb{e})$ – левый верхний $k \times k$ блок в B
$\sigma_k = \sigma_k(Q, \mathbb{e}) = \det B_k$ – k-ый угловой минор матрицы B.

Пусть $\mathbb{e}'$ – базис V удовлетворяющий условию ($\star$)
$B' = B(Q, \mathbb{e}')$
$B'_k = B_k(Q, \mathbb{e}')$
$\sigma'_k = \sigma_k(Q, \mathbb{e}')$

Лемма. *Для любого $k \in (1, \dots, n)$, $\sigma_k = \sigma'_k$*

Доказательство. При любом k имеем $B'_k = C_k^T \cdot B_k \cdot C_k \Rightarrow$ определитель $\sigma'_k = \det C_k^T \cdot B \cdot C_k = \det B_k = \sigma_k$и □

Теорема. *(Метод Якоби приведения квадратичной формы к каноническому виду) Предположим, что* $\sigma_k \neq 0 \forall k$, *тогда существует единственный базис* $\mathbb{e}' = ({e'}_1, \ldots, {e'}_n)$ *в* V, *такой что*

1. $\mathbb{e}'$ *имеет вид* ($\star$)

2. *в этом базисе* Q *имеет канонический вид*

$$Q(x) = \sigma_k x_1'^2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} x_2'^2 + \ldots + \frac{\sigma_n}{\sigma_{n-1}} x_n'^2$$

то есть $B(Q, \mathbb{e}') = \operatorname{diag}(\sigma_1, \frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \ldots, \frac{\sigma_n}{\sigma_{n-1}})$

Доказательство. Индукция по n:
$n = 1$ – верно
Пусть доказано для $n-1$ докажем для n
Пусть векторы $e_1', \ldots, e_{n-1}'$ уже построены

$$B(Q, (e_1' \ldots, e_{n-1}', e_n)) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \star \\ 0 & \frac{\sigma_2}{\sigma_1} & \cdots & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_{n-2}} & \star \\ \star & \star & \star & \cdots & \star & \star \end{pmatrix}$$

Ищем e_n' в виде $e_n + \langle e_1, \ldots, e_{n-1} \rangle = e_n + \langle e_1', \ldots, e_{n-1}' \rangle$ то есть в виде $e_n' = e_n + \lambda_1 e_1' + \cdots + \lambda_{n-1} e_{n-1}'$.
Пусть $\beta : V \times V \to \mathbb{F}$ – симметрическая билинейная форма, соответствующая Q.

$$\beta(e_k', e_n') = \beta(e_k', e_n) + \lambda_1 \beta(e_k', e_1') + \cdots + \lambda_{k-1} \beta(e_k', e_{k-1}')$$

так как $\beta(e_i', e_j') = 0$ при $1 \leqslant i, j \leqslant n-1, i \neq j$

$$\beta(e_k', e_n') = \beta(e_k', e_n) + \lambda_k (e_k', e_k')$$

Тогда $\beta(e_k', e_n') = 0 \; \forall k = 1, \ldots, n-1$ тогда и только тогда, когда $\lambda_k = -\dfrac{\beta(e_k', e_n)}{\beta(e_k', e_k')} = -\beta(e_k', e_n) \cdot \dfrac{\sigma_{k-1}}{\sigma_k}$.

В итоге построен базис $\mathbb{e}' = ({e'}_1, \ldots, {e'}_n)$ такой что

$$B(Q, \mathbb{e}') = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_2}{\sigma_1} & \cdots & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_{n-2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & ? \end{pmatrix}$$

В силу леммы $\sigma_n = \sigma_n' = \sigma_1 \cdot \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot \dfrac{\sigma_{n-1}}{\sigma_{n-2}} \cdot ? = \sigma_{n-1} \cdot ? \Rightarrow ? = \dfrac{\sigma_n}{\sigma_{n-1}}$. □

Замечание. *Единственность следует из явных формул на каждом шаге.*

Нормальный вид квадратичной формы над полем $\mathbb{R}$

Определение. *Квадратичная форма Q имеет в базисе $\mathbb{e}$ нормальный вид, если в этом базисе $Q(x) = b_1x_1^2 + \ldots + b_nx_n^2$, где $b_i \in \{-1, 0, 1\}$.*

Предложение. *Для любой квадратичной формы Q над полем $\mathbb{R}$ существует базис, в котором Q принимает нормальный вид.*

Доказательство. Существует базис, в котором Q имеет канонический вид

$$Q(x) = b_1x_1^2 + \ldots + b_nx_n^2$$

Делаем невырожденную замену

$$x_i = \begin{cases} \frac{x_i'}{\sqrt{|b_i|}}, & b_i \neq 0 \\ x_i', & b_i = 0 \end{cases}$$

Тогда в новых координатах Q имеет вид $Q(x) = \varepsilon_1 x_1'^2 + \ldots + \varepsilon_n x_n'^2$, где $\varepsilon_i = \operatorname{sgn}(b_i)$. □

Замечание. *Если $F = \mathbb{C}$, то такое же рассуждение позволяет привести любую квадратичную форму над полем $\mathbb{C}$ к виду $x_1^2 + \ldots + x_k^2$, где $k = \operatorname{rk} Q$*

Закон инерции

Пусть Q – квадратичная форма над $\mathbb{R}$. Нормальный вид: $Q(x) = x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_{s+t}^2$. s – число «+» в нормальном виде, t – число «−» в нормальном виде.

Определение. *Число $i_+ = s$ – положительный индекс инерции квадратичной формы Q.*

Определение. *Число $i_- = t$ – отрицательный индекс инерции квадратичной формы Q.*

Теорема. *Числа i_+ и i_- не зависят от базиса в котором Q принимает нормальный вид.*

Доказательство. Имеем $i_+ + i_- = \operatorname{rk} Q$ – инвариантная величина $\Rightarrow$ достаточно доказать инвариантность числа i_+.

Пусть базис $\mathbb{e}$ таков, что в нем $Q(x) = x_1 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_{s+t}^2$ и пусть $\mathbb{e}'$ – другой базис такой что в нем $Q(x) = x_1^2 + \ldots + x_{s'}^2 - x_{s'+1}^2 - \ldots - x_{s'+t'}^2$.

Предположим, что $s \neq s'$, тогда без ограничения общности $s > s'$. Рассмотрим в V подпространства $L = \langle e_1, \ldots, e_s \rangle$ и $L' = \langle e'_{s'+1}, \ldots, e'_n \rangle$. $\dim L = s$ и $\dim L' = n - s'$. $L + L'$ – подпространство в $V \Rightarrow \dim(L + L') \leqslant \dim V = n$. Тогда $\dim(L \cap L') = \dim L + \dim L' - \dim(L + L') \geqslant s + n - s' - n = s - s' > 0$. Тогда существует $v \in L \cap L', v \neq 0$. Так как $v \in L$, то $Q(v) > 0$, но так как $v \in L'$, то $Q(v) \leqslant 0$ – противоречие. □

Определение. *Квадратичная функция Q над полем $\mathbb{R}$ называется*

Термин	*Обозначение*	*Условие*
положительно определенной	$Q > 0$	$Q(x) > 0\ \forall x \neq 0$
отрицательно определенной	$Q < 0$	$Q(x) < 0\ \forall x \neq 0$
неотрицательно определенной	$Q \geqslant 0$	$Q(x) \geqslant 0\ \forall x$
неположительно определенной	$Q \leqslant 0$	$Q(x) \leqslant 0\ \forall x$
неопределенной	$-$	$\exists x, y\colon Q(x) > 0,\ Q(y) < 0$

Термин	*Нормальный вид*	*Индексы инерции*
положительно определенной	$x_1^2 + \ldots + x_n^2$	$i_+ = n,\ i_- = 0$
отрицательно определенной	$-x_1^2 - \ldots - x_n^2$	$i_+ = 0,\ i_- = n$
неотрицательно определенной	$x_1^2 + \ldots + x_k^2,\ k \leqslant n$	$i_+ = k,\ i_- = 0$
неположительно определенной	$-x_1^2 - \ldots - x_k^2,\ k \leqslant n$	$i_+ = 0, i_- = k$
неопределенной	$x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_{s+t}^2,\ s,t \geqslant 1$	$i_+ = s,\ i_- = t$

Пример. $V = \mathbb{R}^2$.

1. $Q(x, y) = x^2 + y^2$, $Q > 0$;
2. $Q(x, y) = -x^2 - y^2$, $Q < 0$;
3. $Q(x, y) = x^2 - y^2$;
4. $Q(x, y) = x^2$, $Q \geqslant 0$;
5. $Q(x, y) = -x^2$, $Q \leqslant 0$.

Лекция 25

$\mathbb{E}$ – евклидово пространство. $\mathbb{e}, \mathbb{e}'$ – два базиса. $\mathbb{e}' = \mathbb{e}C$, $\mathbb{e}$ и $\mathbb{e}'$ одинаково ориентированы, если $\det C > 0$. Одинаковая ориентированность – отношение эквивалентности на множестве всех базисов в $\mathbb{E}$.

Фиксируем $\mathbb{e}$:

- все $\mathbb{e}'$ для которых $\det C > 0$ – один класс
- все $\mathbb{e}'$ для которых $\det C < 0$ – второй класс

Значит всего два класса эквивалентности.

Определение. *Говорят, что в $\mathbb{E}$ зафиксирована ориентация, если все базисы одного класса объявлены положительно ориентированными, а все базисы второго класса трицательно ориентированными.*

Пример. *В $\mathbb{R}^3$ есть стандартный выбор ориентации:*

- *положительная ориентация – «правые» базисы*
- *отрицательная ориентация – «левые» базисы*

Ориентированный объём

Фиксруем ориентацию в $\mathbb{E}$, $\dim \mathbb{E} = n$

$$\begin{aligned}
&a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{E} \text{ – набор векторов}\\
&\mathrm{Vol}\ \mathrm{P}(a_1, \ldots, a_n) \text{ – объём}\\
&(e_1, \ldots, e_n) \text{ – положительно ориентированный ортонормированный базис}\\
&(a_1, \ldots, a_n) = (e_1, \ldots, e_n)A\\
&\mathrm{Vol}\ \mathrm{P}(a_1, \ldots, a_n) = |\det A|
\end{aligned}$$

Определение. *Ориентированным объёмом параллелипипеда* $\mathrm{P}(a_1, \ldots, a_n)$ *называется величина* $\mathrm{Vol}(a_1, \ldots, a_n) = \det A$.

Свойства.

1. $|\mathrm{Vol}(a_1, \ldots, a_n)| = \mathrm{Vol}\ \mathrm{P}(a_1, \ldots, a_n)$
2. $\mathrm{Vol}(a_1, \ldots, a_n) > 0 \iff (a_1, \ldots, a_n)$ *– положительно ориентированный базис*
3. *Линейность по каждому аргументу*
4. *Кососимметричность – меняет знак при перестановке любых двух аргументов*

Трёхмерное евклидово пространство

$\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$ – евклидово пространство со стандартным скалярным произведением. Фиксируем ориентацию (как в примере положительная ориентация $\sim$ «правые базисы»), $a, b, c \in \mathbb{R}^3$.

Определение. *Смешанным произведением векторов a, b, c называется величина $(a, b, c) := \mathrm{Vol}(a, b, c)$.*

Свойства.

1. *Линейна по каждому аргументу*

2. *Кососимметрична*

Если (e_1, e_2, e_3) – правый ортонормированный базис и:

$$a = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$$
$$b = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$$
$$c = c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3$$

То

$$(a, b, c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Критерий комплонарности (линейной зависимости трёх векторов): $(a, b, c) = 0 \iff a, b, c$комплонарны.

Определение. *Векторным произведением векторов $a, b \in \mathbb{E}$ называется вектор c, такой что*

1. $c \perp \langle a, b \rangle$

2. $|c| = \mathrm{Vol}\ \mathrm{P}(a, b)$

3. $(a, b, c) \geqslant 0$

Обозначение. $[a, b]$ *или* $a \times b$.

Замечание. *Векторное произведение условиями* $1) - 3)$ *определено однозначно*

1. *a, b линейно зависимы. Тогда из 2) получаем, что $|c| = 0 \Rightarrow c = 0$, при этом 1) и 3) выполнены.*

2. *a, b линейно независимы. В данном случае $(a, b, c) > 0 \iff$ тройка a, b, c является правой (+ нужна картинка)*

Критерий коллинеарности (линейной зависимости двух векторов): $[a, b] = 0 \iff a, b$ коллинеарны.

Пример. (e_1, e_2, e_3) *– правый ортонормированный базис*

$[e_i, e_j]$	e_1	e_2	e_3
e_1	0	e_3	$-e_2$
e_2	$-e_3$	0	e_1
e_3	e_2	$-e_1$	0

Теорема. $\forall\ a,b,c \in \mathbb{R}^3 (a,[b,c]) = (a,b,c)$.

Доказательство.

1. Пусть b,c пропорциональны, тогда $[b,c]=0 \Rightarrow (a,[b,c])=0)$, но (a,b,c) тоже равна нулю
2. b,c не пропорциональны, тогда положим $d=[b,c]$. $(a,[b,c]) = (a,d) = (\mathrm{pr}_{\langle d\rangle} a, d) = (\mathrm{ort}_{\langle b,c\rangle} a, d) = \begin{cases} |\mathrm{ort}_{\langle b,c\rangle} a| \cdot |d|, & \text{если } (a,b,c)>0 \\ -|\mathrm{ort}_{\langle b,c\rangle} a| \cdot |d|, & \text{если } (a,b,c)<0 \end{cases} = \mathrm{Vol}(a,b,c) = (a,b,c)$.

□

Предложение.

1. *$[a,b] = -[b,a]\ \forall\ a,b$.*
2. *$[\cdot,\cdot]$ линейно по каждому аргументу.*

Доказательство.

1. Ясно из определения
2. Для каждого x: $(x,[\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2, b] = (x,\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2, b) = \lambda_1(x,a_1,b)+\lambda_2(x,a_2,b) = \lambda_1(x,[a_1,b])+\lambda_2(x,[a_2,b]) = (x,\lambda_1[a_1,b]+\lambda_2[a_2,b])$. Так всякий вектор $y=(e_1,y)e_1+(e_2,y)e_2+(e_3,y)e_3$, для (e_1,e_2,e_3) ортонормированного базиса, то $[\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2, b] = \lambda_1[a_1,b]+\lambda_2[a_2,b]$. Линейность по второму аргументу аналогично.

□

Двойное векторное произведение

Предложение. $[a,[b,c]] = (a,c)b-(a,b)c$ *($= b(a,c)-c(a,b)$ «БАЦ - ЦАБ»)*

Доказательство.

1. b,c пропорциональны, тогда $c=\lambda b$, $[a,[b,c]]=0$, а правая часть равна $(a,\lambda b)b-(a,b)\lambda b = 0$
2. b,c не пропорциональны. Выберем правый ортонормированный базис e_1,e_2,e_3 так, чтобы:
   (a) b был пропорционален e_1
   (b) $\langle b,c\rangle = \langle e_1,e_2\rangle$

   Тогда $b=\beta e_1$, $c=\gamma_1 e_1+\gamma_2 e_2$, $a=\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\alpha_3 e_3$. $[b,c] = [\beta e_1, \gamma_1 e_1+\gamma_2 e_2] = \beta\gamma_2 e_3$. Тогда $[a,[b,c]] = [\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\alpha_3 e_3, \beta\gamma_2 e_3] = -\alpha_1\beta\gamma_2 e_2+\alpha_2\beta\gamma_2 e_1$. Правая часть равна $(\alpha\gamma_2+\alpha_2\gamma_2)\beta e_1 - \alpha_1\beta(\gamma_1 e_1+\gamma_2 e_2) = -\alpha_1\beta\gamma_2 e_2+\alpha_2\beta\gamma_2 e_1 =$ левая часть.

□

Следствие. *(Тождество Якоби)* $[a,[b,c]]+[b,[c,a]]+[c,[a,b]] = 0\ \forall\ a,b,c \in \mathbb{R}^3$.

Пусть (e_1,e_2,e_3) – правый ортонормированный базис.

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$$
$$b = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$$

Предложение. *Векторное произведение можно найти следующим образом:*

$$[a,b] = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)e_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)e_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)e_3$$

Доказательство. Доказывается прямой проверкой с использованием билинейности и значений $[e_i, e_j]$. □

Лекция 27

Взаимное расположение двух плоскостей в $\mathbb{R}^3$

1. Совпадают
2. Параллельны
3. Пересекаются по прямой $[n_1, n_2] = 0$

Взаимное расположение двух прямых в $\mathbb{R}^3$

1. Совпадают
2. Параллельны
3. Пересекаются
4. Скрещиваются (не лежат в одной плоскости)

Взаимное расположение прямой и плоскости в $\mathbb{R}^3$

1. $l \subseteq P$
2. $l||P$
3. l и P пересекаются в точке

Взаимное расположение трёх различных плоскостей

1. Среди P_1, P_2, P_3 есть две параллельных
   (a) $P_1 \parallel P_2 \parallel P_3$
   (b) Две параллельны, третья их
2. Никакие две не параллельны
   (a) Все три пересекаются по одной прямой
   (b) Прямые пересечения параллельны
   (c) P_1, P_2, P_3 пересекаются в одной точке

Метрические задачи в $\mathbb{R}^3$

Расстояние от точки до прямой

$$\rho(v, l) = |\mathrm{ort}_{\langle a \rangle}(v - v_0)| = \frac{|[v - v_0, a]|}{|a|}$$

Расстояние от точки до плоскости

$S = \langle n \rangle^\perp$ – направляющее подпространство.

$$\rho(v, P) = |\mathrm{ort}_S(v - v_0)| = |\mathrm{pr}_{\langle n \rangle}(v - v_0)| = \frac{|(v - v_0, n)|}{(n, n)} \cdot n$$

Расстояние между скрещивающимися прямыми

$P_1 = v_1 + \langle a_1, a_2 \rangle \supseteq l_1$, $P_2 = v_2 + \langle a_1, a_2 \rangle \supseteq l_2$

$$\rho(l_1, l_2) = \rho(P_1, P_2) = \frac{|(a_1, a_2, v_2 - v_1)|}{|[a_1, a_2]|}$$

Угол между двумя прямыми

$$\angle(l_1, l_2) = \min(\angle(a_1, a_2), \angle(a_1, -a_2))$$

Угол между плоскостью и прямой

$$\angle(l, P) = \frac{\pi}{2} - \angle(\langle a \rangle, \langle n \rangle)$$

Угол между двумя плоскостями

$$\angle(P_1, P_2) = \angle(\langle n_1 \rangle, \langle n_2 \rangle)$$

Линейные операторы

Пусть V — конечномерное векторное пространство.

Определение. *Линейным оператором (или линейным преобразованием) называется всякое линейное отображение* $\varphi \colon V \to V$, *то есть из* V *в себя. Обозначение:* $L(V) = \mathrm{Hom}(V, V)$, $A(\varphi, \mathbb{e})$ *– матрица линейного оператора* φ *в базисе* $\mathbb{e}$.

Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис в V и $\varphi \in L(V)$. Тогда:

$$(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) = (e_1, \ldots, e_n)\, A,$$

где A — матрица линейного оператора в базисе $\mathbb{e}$. В столбце $A^{(j)}$ стоят координаты $\varphi(e_j)$ в базисе $\mathbb{e}$. Матрица A — квадратная.

Пример.

1. *Скалярный оператор* $\lambda \mathrm{id}(v) = \lambda V$ *— матрица* λE *в любом базисе.*
2. $\forall v \in V : \varphi(v) = 0$ *— нулевая матрица.*
3. *Тождественный оператор:* $\forall v \in V : \mathrm{id}(v) = v$ *— единичная матрица.*
4. $V = \mathbb{R}^2$, φ *– поворот на угол* α
5. $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$, $\varphi : f \mapsto f'$

Следствие (Следствия из общих фактов о линейных отображениях)**.**

1. *Всякий линейный оператор однозначно определяется своей матрицей в любом фиксированном базисе.*

2. *Для всякого базиса* $\mathbb{e}$ *и всякой квадратной матрицы* A *существует, причем единственный, линейный оператор* φ *такой, что матрица* φ *в базисе* $\mathbb{e}$ *есть* A*.*

3. *Пусть* $\varphi \in L(V)$*,* A *— матрица* φ *в базисе* $\mathbb{e}$*. Тогда:*
$$v = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$$
$$\varphi(v) = y_1e_1 + \ldots + y_ne_n$$
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

4. *Пусть* $\mathbb{e}' = (e_1', \ldots, e_n')$ *– другой базис,* $\mathbb{e}' = \mathbb{e} \cdot C$*,* $A' = A(\varphi, \mathbb{e}')$*, тогда* $A' = C^{-1}AC$

Следствие.

1. *Величина* $\det A$ *не зависит от выбора базиса. Обозначение:* $\det \varphi$*.*

2. *Величина* $\mathrm{tr}A$ *не зависит от выбора базиса*

Доказательство. Пусть A' — матрица φ в другом базисе. Тогда получается, что:

1. $$\det A' = \det\left(C^{-1}AC\right) = \det C^{-1} \det A \det C = \det A \det C \frac{1}{\det C} = \det A.$$

2. $$\mathrm{tr}A' = \mathrm{tr}(C^{-1}AC) = \mathrm{tr}(ACC^{-1}) = \mathrm{tr}A$$

□

Определение. *Две матрицы* $A', A \in M_n(F)$ *называются подобными, если существует такая матрица* $C \in M_n(F), \det C \neq 0$*, что* $A' = C^{-1}AC$*.*

Замечание. *Отношение подобия на* M_n *является отношением эквивалентности.*

Предложение. *Пусть* $\varphi \in L(V)$*. Тогда эти условия эквивалентны:*

1. $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{0\}$*;*

2. $\mathrm{Im}\,\varphi = V$*;*

3. φ *обратим (то есть это биекция, изоморфизм);*

4. $\det \varphi \neq 0$*.*

Доказательство.

1. $\Leftrightarrow$ 2 — следует из формулы $\dim V = \dim \mathrm{Ker}\,\varphi + \dim \mathrm{Im}\,\varphi$.

2. $\Leftrightarrow$ 3 — уже было.

3. $\Leftrightarrow$ 4 — уже было.

□

Определение. *Линейный оператор* φ *называется вырожденным, если* $\det \varphi = 0$*, и невырожденным, если* $\det \varphi \neq 0$*.*