Лекции по предмету
Линейная алгебра и геометрия

2017 год

Содержание

Лекция 21

V – векторное пространство над $\mathbb{F}$ (в котором $1 + 1 \neq 0$)
$\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ – базис
$Q : V \to \mathbb{F}$ – квадратичная форма

Определение. *Q имеет в базисе $\mathbb{e}$ канонический вид, если в этом базисе*

$$Q(x) = b_1 x_1^2 + \ldots + b_n x_n^2,\ b_i \in \mathbb{F}$$

(то есть матрица квадратичной формы Q в этом базисе диагональна)

Метод Якоби

$\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ Рассмотрим набор векторов
$\mathbb{e}' = ({e'}_1, \ldots, {e'}_n)$ такой что

$$\begin{aligned} &e'_1 = e_1 \\ &e'_2 \in e_2 + \langle e_1 \rangle \\ &e'_3 \in e_3 + \langle e_1, e_2 \rangle \\ &\vdots \\ &e'_n \in e_n + \langle e_1, \ldots, e_{n-1} \rangle \end{aligned} \tag{$\star$}$$

Для любого $k \in (1, \ldots, n)$ имеем $(e'_1, \ldots, e'_k) = (e_1, \ldots, e_k) \cdot C_k$, где

$$C_k = \begin{pmatrix} 1 & \star & \star & \star & \cdots & \star \\ 0 & 1 & \star & \star & \cdots & \star \\ 0 & 0 & 1 & \star & \cdots & \star \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_k(\mathbb{F})$$

$\det C_k = 1 \neq 0 \ \Rightarrow (e'_1, \ldots, e'_k)$ линейно независимы $\Rightarrow \langle e_1, \ldots, e_k \rangle = \langle e'_1, \ldots, e'_k \rangle$. В частности $\mathbb{e}'$ – базис пространства V.

Пусть Q – квадратичная форма
$B = B(Q, \mathbb{e})$
$B_k = B(Q, \mathbb{e})$ – левый верхний $k \times k$ блок в B
$\sigma_k = \sigma_k(Q, \mathbb{e}) = \det B_k$ – k-ый угловой минор матрицы B.

Пусть $\mathbb{e}'$ – базис V удовлетворяющий условию ($\star$)
$B' = B(Q, \mathbb{e}')$
$B'_k = B_k(Q, \mathbb{e}')$
$\sigma'_k = \sigma_k(Q, \mathbb{e}')$

Лемма. *Для любого $k \in (1, \ldots, n)$, $\sigma_k = \sigma'_k$*

Доказательство. При любом k имеем $B'_k = C_k^T \cdot B_k \cdot C_k \Rightarrow$ определитель $\sigma'_k = \det C_k^T \cdot B \cdot C_k = \det B_k = \sigma_k$и □

Теорема. *(Метод Якоби приведения квадратичной формы к каноническому виду) Предположим, что* $\sigma_k \neq 0 \forall k$, *тогда существует единственный базис* $\mathbb{e}' = ({e'}_1, \dots, {e'}_n)$ *в* V, *такой что*

1. $\mathbb{e}'$ *имеет вид* $(\star)$
2. *в этом базисе* Q *имеет канонический вид*

$$Q(x) = \sigma_k x_1'^2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} x_2'^2 + \ldots + \frac{\sigma_n}{\sigma_{n-1}} x_n'^2$$

то есть $B(Q, \mathbb{e}') = \mathrm{diag}(\sigma_1, \frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \dots, \frac{\sigma_n}{\sigma_{n-1}})$

Доказательство. Индукция по n:
$n = 1$ – верно
Пусть доказано для $n - 1$ докажем для n
Пусть векторы $e'_1, \dots, e'_{n-1}$ уже построены

$$B(Q, (e'_1 \dots, e'_{n-1}, e_n)) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \star \\ 0 & \frac{\sigma_2}{\sigma_1} & \cdots & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_{n-2}} & \star \\ \star & \star & \star & \cdots & \star & \star \end{pmatrix}$$

Ищем e'_n в виде $e_n + \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle = e_n + \langle e'_1, \dots, e'_{n-1} \rangle$ то есть в виде $e'_n = e_n + \lambda_1 e'_1 + \dots + \lambda_{n-1} e'_{n-1}$.
Пусть $\beta : V \times V \to \mathbb{F}$ – симметрическая билинейная форма, соответствующая Q.

$$\beta(e'_k, e'_n) = \beta(e'_k, e_n) + \lambda_1 \beta(e'_k, e'_1) + \dots + \lambda_{k-1} \beta(e'_k, e'_{k-1})$$

так как $\beta(e'_i, e'_j) = 0$ при $1 \leqslant i, j \leqslant n - 1, i \neq j$

$$\beta(e'_k, e'_n) = \beta(e'_k, e_n) + \lambda_k (e'_k, e'_k)$$

Тогда $\beta(e'_k, e'_n) = 0 \; \forall k = 1, \dots, n-1$ тогда и только тогда, когда $\lambda_k = -\dfrac{\beta(e'_k, e_n)}{\beta(e'_k, e'_k)} = -\beta(e'_k, e_n) \cdot \dfrac{\sigma_{k-1}}{\sigma_k}$.

В итоге построен базис $\mathbb{e}' = ({e'}_1, \dots, {e'}_n)$ такой что

$$B(Q, \mathbb{e}') = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_2}{\sigma_1} & \cdots & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_{n-2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & ? \end{pmatrix}$$

В силу леммы $\sigma_n = \sigma'_n = \sigma_1 \cdot \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot \dfrac{\sigma_{n-1}}{\sigma_{n-2}} \cdot ? = \sigma_{n-1} \cdot ? \Rightarrow ? = \dfrac{\sigma_n}{\sigma_{n-1}}$. □

Замечание. *Единственность следует из явных формул на каждом шаге.*

Нормальный вид квадратичной формы над полем $\mathbb{R}$

Определение. *Квадратичная форма Q имеет в базисе $\mathbb{e}$ нормальный вид, если в этом базисе $Q(x) = b_1x_1^2 + \ldots + b_nx_n^2$, где $b_i \in \{-1, 0, 1\}$.*

Предложение. *Для любой квадратичной формы Q над полем $\mathbb{R}$ существует базис, в котором Q принимает нормальный вид.*

Доказательство. Существует базис, в котором Q имеет канонический вид

$$Q(x) = b_1x_1^2 + \ldots + b_nx_n^2$$

Делаем невырожденную замену

$$x_i = \begin{cases} \frac{x_i'}{\sqrt{|b_i|}}, & b_i \neq 0 \\ x_i', & b_i = 0 \end{cases}$$

Тогда в новых координатах Q имеет вид $Q(x) = \varepsilon_1 x_1'^2 + \ldots + \varepsilon_n x_n'^2$, где $\varepsilon_i = \operatorname{sgn}(b_i)$. $\square$

Замечание. *Если $F = \mathbb{C}$, то такое же рассуждение позволяет привести любую квадратичную форму над полем $\mathbb{C}$ к виду $x_1^2 + \ldots + x_k^2$, где $k = \operatorname{rk} Q$*

Закон инерции

Пусть Q – квадратичная форма над $\mathbb{R}$. Нормальный вид: $Q(x) = x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_{s+t}^2$. s – число «+» в нормальном виде, t – число «−» в нормальном виде.

Определение. *Число $i_+ = s$ – положительный индекс инерции квадратичной формы Q.*

Определение. *Число $i_- = t$ – отрицательный индекс инерции квадратичной формы Q.*

Теорема. *Числа i_+ и i_- не зависят от базиса в котором Q принимает нормальный вид.*

Доказательство. Имеем $i_+ + i_- = \operatorname{rk} Q$ – инвариантная величина $\Rightarrow$ достаточно доказать инвариантность числа i_+.

Пусть базис $\mathbb{e}$ таков, что в нем $Q(x) = x_1 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_{s+t}^2$ и пусть $\mathbb{e}'$ – другой базис такой что в нем $Q(x) = x_1^2 + \ldots + x_{s'}^2 - x_{s'+1}^2 - \ldots - x_{s'+t'}^2$.

Предположим, что $s \neq s'$, тогда без ограничения общности $s > s'$. Рассмотрим в V подпространства $L = \langle e_1, \ldots, e_s\rangle$ и $L' = \langle e'_{s'+1}, \ldots, e'_n\rangle$. $\dim L = s$ и $\dim L' = n - s'$. $L + L'$ – подпространство в $V \Rightarrow \dim(L + L') \leqslant \dim V = n$. Тогда $\dim(L \cap L') = \dim L + \dim L' - \dim(L + L') \geqslant s + n - s' - n = s - s' > 0$. Тогда существует $v \in L \cap L', v \neq 0$. Так как $v \in L$, то $Q(v) > 0$, но так как $v \in L'$, то $Q(v) \leqslant 0$ – противоречие. $\square$

Определение. *Квадратичная функция Q над полем $\mathbb{R}$ называется*

Термин	*Обозначение*	*Условие*
положительно определенной	$Q > 0$	$Q(x) > 0\ \forall x \neq 0$
отрицательно определенной	$Q < 0$	$Q(x) < 0\ \forall x \neq 0$
неотрицательно определенной	$Q \geqslant 0$	$Q(x) \geqslant 0\ \forall x$
неположительно определенной	$Q \leqslant 0$	$Q(x) \leqslant 0\ \forall x$
неопределенной	−	$\exists x, y \colon Q(x) > 0,\ Q(y) < 0$

Термин	*Нормальный вид*	*Индексы инерции*
положительно определенной	$x_1^2 + \ldots + x_n^2$	$i_+ = n,\ i_- = 0$
отрицательно определенной	$-x_1^2 - \ldots - x_n^2$	$i_+ = 0,\ i_- = n$
неотрицательно определенной	$x_1^2 + \ldots + x_k^2,\ k \leqslant n$	$i_+ = k,\ i_- = 0$
неположительно определенной	$-x_1^2 - \ldots - x_k^2,\ k \leqslant n$	$i_+ = 0, i_- = k$
неопределенной	$x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_{s+t}^2,\ s,t \geqslant 1$	$i_+ = s,\ i_- = t$

Пример. $V = \mathbb{R}^2$.

1. $Q(x, y) = x^2 + y^2$, $Q > 0$;
2. $Q(x, y) = -x^2 - y^2$, $Q < 0$;
3. $Q(x, y) = x^2 - y^2$;
4. $Q(x, y) = x^2$, $Q \geqslant 0$;
5. $Q(x, y) = -x^2$, $Q \leqslant 0$.

Лекция 25

$\mathbb{E}$ – евклидово пространство. $\mathbb{e}, \mathbb{e}'$ – два базиса. $\mathbb{e}' = \mathbb{e}C$, $\mathbb{e}$ и $\mathbb{e}'$ одинаково ориентированы, если $\det C > 0$. Одинаковая ориентированность – отношение эквивалентности на множестве всех базисов в $\mathbb{E}$.

Фиксируем $\mathbb{e}$:

- все $\mathbb{e}'$ для которых $\det C > 0$ – один класс
- все $\mathbb{e}'$ для которых $\det C < 0$ – второй класс

Значит всего два класса эквивалентности.

Определение. *Говорят, что в $\mathbb{E}$ зафиксирована ориентация, если все базисы одного класса объявлены положительно ориентированными, а все базисы второго класса трицательно ориентированными.*

Пример. *В $\mathbb{R}^3$ есть стандартный выбор ориентации:*

- *положительная ориентация – «правые» базисы*
- *отрицательная ориентация – «левые» базисы*

Ориентированный объём

Фиксруем ориентацию в $\mathbb{E}$, $\dim \mathbb{E} = n$

$$
\begin{aligned}
&a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{E} \text{ – набор векторов}\\
&\mathrm{Vol}\ \mathrm{P}(a_1, \ldots, a_n) \text{ – объём}\\
&(e_1, \ldots, e_n) \text{ – положительно ориентированный ортонормированный базис}\\
&(a_1, \ldots, a_n) = (e_1, \ldots, e_n)A\\
&\mathrm{Vol}\ \mathrm{P}(a_1, \ldots, a_n) = |\det A|
\end{aligned}
$$

Определение. *Ориентированным объёмом параллелипипеда* $\mathrm{P}(a_1, \ldots, a_n)$ *называется величина* $\mathrm{Vol}(a_1, \ldots, a_n) = \det A$.

Свойства.

1. $|\mathrm{Vol}(a_1, \ldots, a_n)| = \mathrm{Vol}\ \mathrm{P}(a_1, \ldots, a_n)$
2. $\mathrm{Vol}(a_1, \ldots, a_n) > 0 \iff (a_1, \ldots, a_n)$ *– положительно ориентированный базис*
3. *Линейность по каждому аргументу*
4. *Кососимметричность – меняет знак при перестановке любых двух аргументов*

Трёхмерное евклидово пространство

$\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$ – евклидово пространство со стандартным скалярным произведением. Фиксируем ориентацию (как в примере положительная ориентация $\sim$ «правые базисы»), $a, b, c \in \mathbb{R}^3$.

Определение. *Смешанным произведением векторов a, b, c называется величина* $(a, b, c) := \mathrm{Vol}(a, b, c)$.

Свойства.

1. *Линейна по каждому аргументу*

2. *Кососимметрична*

Если (e_1, e_2, e_3) – правый ортонормированный базис и:

$$\begin{aligned} a &= a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 \\ b &= b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 \\ c &= c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3 \end{aligned}$$

То

$$(a, b, c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Критерий комплонарности (линейной зависимости трёх векторов): $(a, b, c) = 0 \iff a, b, c$комплонарны.

Определение. *Векторным произведением векторов $a, b \in \mathbb{E}$ называется вектор c, такой что*

1. $c \perp \langle a, b \rangle$

2. $|c| = \mathrm{Vol}\ \mathrm{P}(a, b)$

3. $(a, b, c) \geqslant 0$

Обозначение. $[a, b]$ *или* $a \times b$.

Замечание. *Векторное произведение условиями* $1) - 3)$ *определено однозначно*

1. *a, b линейно зависимы. Тогда из 2) получаем, что $|c| = 0 \Rightarrow c = 0$, при этом 1) и 3) выполнены.*

2. *a, b линейно независимы. В данном случае $(a, b, c) > 0 \iff$ тройка a, b, c является правой (+ нужна картинка)*

Критерий коллинеарности (линейной зависимости двух векторов): $[a, b] = 0 \iff a, b$ коллинеарны.

Пример. (e_1, e_2, e_3) – *правый ортонормированный базис*

$[e_i, e_j]$	e_1	e_2	e_3
e_1	0	e_3	$-e_2$
e_2	$-e_3$	0	e_1
e_3	e_2	$-e_1$	0

Теорема. $\forall\ a, b, c \in \mathbb{R}^3 (a, [b, c]) = (a, b, c)$.

Доказательство.

1. Пусть b, c пропорциональны, тогда $[b, c] = 0 \Rightarrow (a, [b, c]) = 0)$, но (a, b, c) тоже равна нулю
2. b, c не пропорциональны, тогда положим $d = [b, c]$. $(a, [b, c]) = (a, d) = (\mathrm{pr}_{\langle d\rangle} a, d) = (\mathrm{ort}_{\langle b,c\rangle} a, d) = \begin{cases} |\mathrm{ort}_{\langle b,c\rangle} a| \cdot |d|, & \text{если } (a, b, c) > 0 \\ -|\mathrm{ort}_{\langle b,c\rangle} a| \cdot |d|, & \text{если } (a, b, c) < 0 \end{cases} = \mathrm{Vol}(a, b, c) = (a, b, c)$.

□

Предложение.

1. *$[a, b] = -[b, a]\ \forall\ a, b$.*
2. *$[\cdot, \cdot]$ линейно по каждому аргументу.*

Доказательство.

1. Ясно из определения
2. Для каждого x: $(x, [\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, b] = (x, \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, b) = \lambda_1 (x, a_1, b) + \lambda_2 (x, a_2, b) = \lambda_1 (x, [a_1, b]) + \lambda_2 (x, [a_2, b]) = (x, \lambda_1 [a_1, b] + \lambda_2 [a_2, b])$. Так всякий вектор $y = (e_1, y)e_1 + (e_2, y)e_2 + (e_3, y)e_3$, для (e_1, e_2, e_3) ортонормированного базиса, то $[\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, b] = \lambda_1 [a_1, b] + \lambda_2 [a_2, b]$. Линейность по второму аргументу аналогично.

□

Двойное векторное произведение

Предложение. $[a, [b, c]] = (a, c)b - (a, b)c$ *($= b(a, c) - c(a, b)$ «БАЦ - ЦАБ»)*

Доказательство.

1. b, c пропорциональны, тогда $c = \lambda b$, $[a, [b, c]] = 0$, а правая часть равна $(a, \lambda b)b - (a, b)\lambda b = 0$
2. b, c не пропорциональны. Выберем правый ортонормированный базис e_1, e_2, e_3 так, чтобы:
   (a) b был пропорционален e_1
   (b) $\langle b, c\rangle = \langle e_1, e_2\rangle$

   Тогда $b = \beta e_1$, $c = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2$, $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$. $[b, c] = [\beta e_1, \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2] = \beta\gamma_2 e_3$. Тогда $[a, [b, c]] = [\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, \beta\gamma_2 e_3] = -\alpha_1 \beta\gamma_2 e_2 + \alpha_2 \beta\gamma_2 e_1$. Правая часть равна $(\alpha\gamma_2 + \alpha_2\gamma_2)\beta e_1 - \alpha_1 \beta(\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2) = -\alpha_1 \beta\gamma_2 e_2 + \alpha_2 \beta\gamma_2 e_1 =$ левая часть.

□

Следствие. *(Тождество Якоби)* $[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0\ \forall\ a, b, c \in \mathbb{R}^3$.

Пусть (e_1, e_2, e_3) – правый ортонормированный базис.

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$$
$$b = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$$

Предложение. *Векторное произведение можно найти следующим образом:*

$$[a,b] = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)e_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)e_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)e_3$$

Доказательство. Доказывается прямой проверкой с использованием билинейности и значений $[e_i, e_j]$. □

Лекция 26

Линейные многобразия и аффинные системы координат

СЛУ $Ax = b$, $x \in \mathbb{R}^n$
Пусть система совместна и $x_ч$ – частное решение.
$L \subseteq \mathbb{R}^n$ – множество всех решений.
$\Rightarrow L = x_ч + S$, где $S \subseteq \mathbb{R}^n$ – множество решений однородной СЛУ $Ax = 0(*)$ // Сделать звёздочку активной

Определение. *Линейное многообразие в $\mathbb{R}^n$ – это множество решений некоторой совместной СЛУ.*

Примеры:

- $ax + by = c$
  $\begin{pmatrix} \frac{c}{a} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{b}{a} \end{pmatrix}$ — прямая в $\mathbb{R}^2$
- $ax + by + cz = d$ — задаёт плоскость в $\mathbb{R}^3$
- $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$ — задаёт прямую (пересечение плоскостей) в $\mathbb{R}^3$

Предложение. $L \subseteq \mathbb{R}^n$ *– непустое множество* $\Rightarrow L$ *– линейное многообразие* $\Leftrightarrow L = v_0 + S$ *для некоторых* $v_0 \in L$ *и подпространства* $S \subseteq \mathbb{R}^n$*.*

Доказательство. Докажем в обе стороны:

[$\Rightarrow$] Прямое следствие из $(*)$.

[$\Leftarrow$] $L = v_0 + S$. Так как S – подпространство, то $\exists$ ОСЛУ $Ax = 0$, такое что S есть её множество решений. Тогда v_0 есть частное решение СЛУ $Ax = Av_0$, следовательно L является множеством решений СЛУ $Ax = Av_0$.

□

Пусть $L_1 = v_1 + S_1$ и $L_2 = v_2 + S_2$ – два линейных многообразия.

Предложение. $L_1 = L_2 \Leftrightarrow \begin{cases} S_1 = S_2 \ (= S) \\ v_1 - v_2 \in S \end{cases}$

Доказательство. Докажем в обе стороны:

[$\Leftarrow$] Очевидно, исходя из теоретико-множественных соображений.

[$\Rightarrow$] $v_1 = v_1 + 0 \in v_2 + S_2 \Rightarrow v_1 - v_2 \in S_2$. Аналогично показывается $v_1 - v_2 \in S_2$
$\Rightarrow v_1 - v_2 \in S_1 \cap S_2$.
$v \in S_1 \Rightarrow v_1 + v \in v_2 S_2 \Rightarrow v \in (v_2 - v_1) + S_2 \subseteq S_2 \Rightarrow S_1 \subseteq S_2$. Аналогично доказывается $S_2 \subseteq S_1$
$\Rightarrow S_1 = S_2 \ (= S)$ и $v_1 - v_2 \in S$.

□

Следствие. *Если $L = v_0 + S$ – линейное многообразие, то подпространство S определено однозначно.*

Определение. *S называется направляющим подпространством линейного многообразия L.*

Определение. *Размерностью линейного многообразия L называется размерность направляющего подпространства.*

Пусть n – размерность, тогда линейное мнообразие размерности

- 0 – точка
- 1 – прямая
- 2 – плоскость
- k – k-мерная плоскость
- $n-1$ – гиперплоскость

L – линейное многообразие с направляющим подпространством S, $k = \dim L = \dim S$.

Определение. *Набор $(v_0, e_1, \ldots, e_k)$, где $v_0 \in L$ и $(e_1, \ldots, e_k)$ – базис в S, называется репéром.*

Всякий репер задаёт аффинную систему координат на L.
$L = v_0 + S \Rightarrow \forall\ v \in L$ однозначно представим в виде $v = v_0 + \alpha_1 e_1 + \ldots \alpha_k e_k$. Числа $\alpha_1, \ldots \alpha_k$ называются координатами точки v в данной аффинной системе координат(или по отношению к данному реперу).

Теорема 1. *а) Через любые $k+1$ точки в $\mathbb{R}^n$ проходит плоскость размерности $\leq k$.*

б) Если $k+1$ точек не лежат в плоскости размерности, то через них проходит ровно одна плоскость размерности k.

Доказательство. а) Пусть $v_0, v_1, \ldots, v_k$ – наши точки. Тогда они все лежат в плоскости $P = v_0 + \langle v_1 - v_0, v_2 - v_0, \ldots, v_k - v_0\rangle \Rightarrow \dim P = \dim S \leq k$.

б) В этом случае $\dim P = k \Rightarrow \dim S = k \Rightarrow v_1 - v_0, \ldots v_k - v_0$ – линейно независимы. $v_1 - v_0, \ldots v_k - v_0$ лежат в направляющем подпространстве любой плоскости, проходящий через $v_0, v_1, \ldots, v_k$. $\Rightarrow P$ – единственная плоскость размерности k с требуемым свойством. (Более строгое доказательство единственности можно построить, предположив, что существует другая плоскость, проходящая через те же точки и далее прийти к противоречию с помощью предложения 2).

□

Следствие 1. *Через любые 2 различные точки проходит ровно 1 прямая.*

Следствие 2. *Через любые 3 точки, нележащие на одной прямой прямой, проходит ровно 1 плоскость.*

Взаимное расположение двух линейных многообразий

Замечание. *L_1, L_2 – линейное многообразие и $L_1 \cap L_2 \neq \varnothing$, то $L_1 \cap L_2$ – линейное многообразие.*

$L_1 \cap L_2 \neq \varnothing$	$L_1 \cap L_2 = \varnothing$
1) $L_1 = L_2$ совпадают ($L_1 = L_2 \Leftrightarrow S_1 = S_2$)	1) L_1 параллельно $L_2 \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} S_1 \subseteq S_2$ или $S_2 \subseteq S_1$
2) $L_1 \subseteq L_2 \Leftrightarrow S_1 \subseteq S_2$	2) L_1 и L_2 скрещиваются $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} S_1 \cap S_2 = \{0\}$
3) Остальное	3) Остальное

Линейные многообразия в $\mathbb{R}^2$

Нетривиальный случай $\dim = 1$(прямая)
Способы задания:

1. Уравнение в координатах:
$$Ax + By + C = 0,\ (A, B) \neq (0, 0)$$

2. Векторное уравнение через вектор нормали:
$$(n, v - v_0) = 0$$

3. Параметрическое уравнение в векторном виде:
$$v = v_0 + at$$
где $a = (a_1, a_2)$ – напрявляющий вектор, $v_0 = (x_0, y_0)$ – фикисированная точка на прямой.
То же уравнение в скалярном виде:
$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \end{cases}$$

4. Матричная форма:
$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix} = 0$$

Линейные многообразия в $\mathbb{R}^3$

1. $\dim = 1$(прямые в $\mathbb{R}^3$)
Способы задания:

1.1) Система линейных уравнений:
$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Причем, $rk \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2$

1.2) Векторное уравнение:

$$[v - v_0, a] = 0$$

где a – направляющий вектор.

1.3) Параметрическое уравнение в векторном виде:

$$v = v_0 + at$$

где $a = (a_1, a_2, a_3)$ – напрявляющие векторы, $v_0 = (x_0, y_0, z_0)$ – фиксированная точка на плоскости.
То же уравнение в скалярном виде:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$$

1.4) Каноническое уравнение:

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

Если $a_1 = 0$, то вместо $\dfrac{x - x_0}{a_1}$ пишут уравнение $x = x_0$. Аналогично для a_2 и a_3.

1.5) Прямая, проходящая через две различных точки $(x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1)$.

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

2. $\dim = 2$(плоскость)
Способы задания:

2.1) Уравнение в координатах:

$$Ax + By + Cz + D = 0,\ (A, B, C) \neq (0, 0, 0)$$

2.2) Векторное уравнение через вектор нормали:

$$(n, v - v_0) = 0$$

2.3) Параметрическое уравнение в векторном виде:

$$v = v_0 + at + bu$$

где $a = (a_1, a_2, a_3), b = (b_1, b_2, b_3)$ – напрявляющие векторы, $v_0 = (x_0, y_0, z_0)$ – фиксированная точка на плоскости.
То же уравнение в скалярном виде:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t + b_1 u \\ y = y_0 + a_2 t + b_2 u \\ z = z_0 + a_3 t + b_3 u \end{cases}$$

2.4) Матричная форма:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

Лекция 27