Линейная алгебра на ПМИ

2017 год

Содержание

Лекция 22

V – векторное пространство над $\mathbb{R}$
$Q : V \mapsto \mathbb{R}$ – квадратичная форма
Q положительно определена $\Leftrightarrow Q(x) > 0 \forall\ x \neq 0$
Q отрицательно определена $\Leftrightarrow Q(x) < 0 \forall\ x \neq 0$
Q неотрицательно определена $\Leftrightarrow Q(x) \geq 0 \forall\ x \neq 0$
Q неположительно определена $\Leftrightarrow Q(x) \leq 0 \forall\ x \neq 0$
Q неопределена $\Leftrightarrow \exists\ x : Q(x) > 0$ и $\exists\ x : Q(x) < 0$

Примечание:

$f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$

$x_0 \in \mathbb{R}^n$

$y \in R^n$– «малое приращение»

Пусть $f(x_0 + y) = f(x_0) + \underbrace{a_1 y_1 + \ldots + a_n y_n}_{l(y)\text{– линейная форма}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} b_i y_i^2 + \sum_{i,j} 2b_{ij} y_i y_j}_{\text{квадратичная форма}} + \overline{\overline{o}}(|y|^2)$

Лекция 26

Линейные многообразия и аффинные системы координат

СЛУ $Ax = b$, $x \in \mathbb{R}^n$
Пусть система совместна и $x_ч$ – частное решение.
$L \subseteq \mathbb{R}^n$ – множество всех решений.
$\Rightarrow L = x_ч + S$, где $S \subseteq \mathbb{R}^n$ – множество решений однородной СЛУ $Ax = 0(*)$ // Сделать звёздочку активной

Определение 1. *Линейное многообразие в $\mathbb{R}^n$ – это множество решений некоторой совместной СЛУ.*

Примеры:

- $ax + by = c$
  $\begin{pmatrix} \frac{c}{a} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{b}{a} \end{pmatrix}$ — прямая в $\mathbb{R}^2$
- $ax + by + cz = d$ — задаёт плоскость в $\mathbb{R}^3$
- $\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \end{cases}$ — задаёт прямую (пересечение плоскостей) в $\mathbb{R}^3$

Предложение 1. *$L \subseteq \mathbb{R}^n$ – непустое множество $\Rightarrow L$ – линейное многообразие $\Leftrightarrow L = v_0 + S$ для некоторых $v_0 \in L$ и подпространства $S \subseteq \mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Докажем в обе стороны:

[$\Rightarrow$] Прямое следствие из $(*)$.

[$\Leftarrow$] $L = v_0 + S$. Так как S – подпространство, то $\exists$ ОСЛУ $Ax = 0$, такое что S есть её множество решений. Тогда v_0 есть частное решение СЛУ $Ax = Av_0$, следовательно L является множеством решений СЛУ $Ax = Av_0$.

$\square$

Пусть $L_1 = v_1 + S_1$ и $L_2 = v_2 + S_2$ – два линейных многообразия.

Предложение 2. $L_1 = L_2 \Leftrightarrow \begin{cases} S_1 = S_2 \ (= S) \\ v_1 - v_2 \in S \end{cases}$

Доказательство. Докажем в обе стороны:

[$\Leftarrow$] Очевидно, исходя из теоретико-множественных соображений.

[$\Rightarrow$] $v_1 = v_1 + 0 \in v_2 + S_2 \Rightarrow v_1 - v_2 \in S_2$. Аналогично показывается $v_1 - v_2 \in S_2$
$\Rightarrow v_1 - v_2 \in S_1 \cap S_2$.
$v \in S_1 \Rightarrow v_1 + v \in v_2 S_2 \Rightarrow v \in (v_2 - v_1) + S_2 \subseteq S_2 \Rightarrow S_1 \subseteq S_2$. Аналогично доказывается $S_2 \subseteq S_1$
$\Rightarrow S_1 = S_2 \ (= S)$ и $v_1 - v_2 \in S$.

$\square$

Следствие. *Если $L = v_0 + S$ – линейное многообразие, то подпространство S определено однозначно.*

Определение 2. *S называется направляющим подпространством линейного многообразия L.*

Определение 3. *Размерностью линейного многообразия L называется размерность направляющего подпространства.*

Пусть n – размерность, тогда линейное мнообразие размерности

- 0 – это точка
- 1 – прямая
- 2 – плоскость
- k – k-мерная плоскость
- $n-1$ – гиперплоскость

L – линейное многообразие с направляющим подпространством S, $k = \dim L = \dim S$.

Определение 4. *Набор $(v_0, e_1, \dots, e_k)$, где $v_0 \in L$ и $(e_1, \dots, e_k)$ – базис в S, называется репéром.*

Всякий репер задаёт аффинную систему координат на L.
$L = v_0 + S \Rightarrow \forall\ v \in L$ однозначно представим в виде $v = v_0 + \alpha_1 e_1 + \dots \alpha_k e_k$. Числа $\alpha_1, \dots \alpha_k$ называются координатами точки v в данной аффинной системе координат(или по отношению к данному реперу).

Теорема 1. *a) Через любые $k+1$ точки в $\mathbb{R}^n$ проходит плоскость размерности $\leq k$.*

б) *Если $k+1$ точек не лежат в плоскости размерности, то через них проходит ровно одна плоскость размерности k.*

Доказательство. а) Пусть $v_0, v_1, \ldots, v_k$ – наши точки. Тогда они все лежат в плоскости $P = v_0 + \langle v_1 - v_0, v_2 - v_0, \ldots, v_k - v_0 \rangle \Rightarrow \dim P = \dim S \leq k$.

б) В этом случае $\dim P = k \Rightarrow \dim S = k \Rightarrow v_1 - v_0, \ldots v_k - v_0$ – линейно независимы. $v_1 - v_0, \ldots v_k - v_0$ лежат в направляющем подпространстве любой плоскости, проходящий через $v_0, v_1, \ldots, v_k$. $\Rightarrow P$ – единственная плоскость размерности k с требуемым свойством. (Более строгое доказательство единственности можно построить, предположив, что существует другая плоскость, проходящая через те же точки и далее прийти к противоречию с помощью предложения 2).

□

Следствие 1. *Через любые 2 различные точки проходит ровно 1 прямая.*

Следствие 2. *Через любые 3 точки, нележащие на одной прямой прямой, проходит ровно 1 плоскость.*

Взаимное расположение двух линейных многообразий

Замечание. *L_1, L_2 – линейное многообразие и $L_1 \cap L_2 \neq \varnothing$, то $L_1 \cap L_2$ – линейное многообразие.*

$L_1 \cap L_2 \neq \varnothing$	$L_1 \cap L_2 = \varnothing$
1) $L_1 = L_2$ совпадают ($L_1 = L_2 \Leftrightarrow S_1 = S_2$)	1) L_1 параллельно $L_2 \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} S_1 \subseteq S_2$ или $S_2 \subseteq S_1$
2) $L_1 \subseteq L_2 \Leftrightarrow S_1 \subseteq S_2$	2) L_1 и L_2 скрещиваются $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} S_1 \cap S_2 = \{0\}$
3) Остальное	3) Остальное

Линейные многообразия в $\mathbb{R}^2$

Нетривиальный случай $\dim = 1$(прямая)
Способы задания:

1. Уравнение в координатах:
$$Ax + By + C = 0, \ (A, B) \neq (0, 0)$$

2. Векторное уравнение через вектор нормали:
$$(n, v - v_0) = 0$$

3. Параметрическое уравнение в векторном виде:
$$v = v_0 + at$$
где $a = (a_1, a_2)$ – напрявляющий вектор, $v_0 = (x_0, y_0)$ – фикисированная точка на прямой.
То же уравнение в скалярном виде:
$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \end{cases}$$

4. Матричная форма:
$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix} = 0$$

Линейные многобразия в $\mathbb{R}^3$

1. $\dim = 1$(прямые в $\mathbb{R}^3$)
   Способы задания:

   1.1) Система линейных уравнений:

   $$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

   Причем, $rk \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2$

   1.2) Векторное уравнение:

   $$[v - v_0, a] = 0$$

   где a – направляющий вектор.

   1.3) Параметрическое уравнение в векторном виде:

   $$v = v_0 + at$$

   где $a = (a_1, a_2, a_3)$ – напрявляющие векторы, $v_0 = (x_0, y_0, z_0)$ – фиксированная точка на плоскости.
   То же уравнение в скалярном виде:

   $$\begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \\ z = z_0 + a_3t \end{cases}$$

   1.4) Каноническое уравнение:

   $$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

   Если $a_1 = 0$, то вместо $\dfrac{x - x_0}{a_1}$ пишут уравнение $x = x_0$. Аналогично для a_2 и a_3.

   1.5) Прямая, проходящая через две различных точки $(x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1)$.

   $$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

2. $\dim = 2$(плоскость)
   Способы задания:

   2.1) Уравнение в координатах:

   $$Ax + By + Cz + D = 0, \ (A, B, C) \neq (0, 0, 0)$$

   2.2) Векторное уравнение через вектор нормали:

   $$(n, v - v_0) = 0$$

2.3) Параметрическое уравнение в векторном виде:

$$v = v_0 + at + bu$$

где $a = (a_1, a_2, a_3), b = (b_1, b_2, b_3)$ – напрявляющие векторы, $v_0 = (x_0, y_0, z_0)$ – фиксированная точка на плоскости.
То же уравнение в скалярном виде:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t + b_1 u \\ y = y_0 + a_2 t + b_2 u \\ z = z_0 + a_3 t + b_3 u \end{cases}$$

2.4) Матричная форма:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0$$