Лекции по предмету
Линейная алгебра и геометрия

2017 год

Содержание

Лекция 19

Двойственное (сопряжённое) векторное пространство

V — векторное пространство. Линейная функция на V — это линейное отображение $\alpha : V \to \mathbb{F}$.

Определение. $\mathrm{Hom}(V, \mathbb{F})$ — *двойственное (сопряженное) к V пространство.*

Обозначение. $\mathrm{Hom}(V, \mathbb{F}) = V^*$ — *множество всех линейных функций.*

Из общей теории линейных отображений

1. $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{F}) \Rightarrow V^*$ — векторное пространство;
2. Если $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ базис V, то имеется изоморфизм $V^* \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mat}_{1\times n}(\mathbb{F})$. Умножение строки на столбец — реализация вычисления функции на векторе.

$\alpha \in V^*, \alpha \mapsto (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где $\alpha_i = \alpha(e_i)$ — коэффициенты линейной функции α в базисе $\mathbb{e}$.

Следствие (В конечномерном случае)**.** $\dim V^* = n = \dim V \Rightarrow V \simeq V^*$.

При $i = 1, \ldots, n$ рассмотрим функцию $\varepsilon_i \in V^*$ соответствующую строке $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathrm{Mat}_{1\times n}$. Тогда:

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, \text{ иначе} \end{cases} = \delta_{ij}$$

$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ — базис в V^*.

Определение. *Базис $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ называется базисом двойственным к базису $\mathbb{e}$. Он однозначно определяется условием (*).*

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} (e_1, \ldots, e_n) = E$$

Предложение. *Всякий базис $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ пространства V^* двойственен к некоторому базису пространства V.*

Доказательство. Возьмём произвольный базис $\mathbb{e}'$ пространства V. Пусть $\varepsilon' = (\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_n)$ — двойственный к $\mathbb{e}'$ базис в V^*. Тогда:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \vdots \\ \varepsilon'_n \end{pmatrix}$$

для некоторой невырожденной матрицы $C \in M_n$ (координаты в матрице записаны по строкам). Положим $\mathbb{e} = (e'_1, \ldots, e'_n)C^{-1}$ — некий базис в V. Имеем:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} (e_1, \ldots, e_n) = C \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \vdots \\ \varepsilon'_n \end{pmatrix} (e'_1, \ldots, e'_n)C^{-1} = CEC^{-1} = E$$

□

Утверждение. *$V = \mathbb{F}^n$. Множество решений некоторой ОСЛУ является подрпространством в $\mathbb{F}^n$.*

Теорема. *Всякое подпространство в $\mathbb{F}^n$ есть множество решений некоторой ОСЛУ.*

Доказательство. Пусть дано подпространство U в $\mathbb{F}^n$. Выберем в нём базис $(v_1, \ldots, v_k)$. Рассмотрим в $(\mathbb{F}^n)^*$ подмножество $S := \{\alpha \in (\mathbb{F}^n)^* \mid \alpha(v_1) = 0, \ldots, \alpha(v_k) = 0\}$. S — подпространство в $(\mathbb{F}^n)^*$, S — множество решений ОСЛУ:

$$\begin{cases} \alpha(v_1) = 0 \\ \vdots \\ \alpha(v_k) = 0 \end{cases}$$

на коэффициенты α.

Так как $v_1, \ldots, v_k$ линейно независимы, то ранг матрицы коэффициентов равен $k \Rightarrow \dim S = n - k$. Выберем в S базис $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-k}$ и рассмотрим ОСЛУ:

$$\begin{cases} \alpha_1(x) = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{n-k}(x) = 0 \end{cases}$$

относительно неизвестного вектора $x \in \mathbb{F}^n$.

Пусть $U' \subseteq F^n$ — подпространство решений этой ОСЛУ. Ранг матрицы коэффициентов равен $n - k \Rightarrow \dim U' = n - n + k = k$, но $U \subseteq U'$ по построению. Так как $\dim U = \dim U' = k$, то $U = U'$. $\square$

Билинейные функции (формы) на векторном пространстве

Определение. *Билинейная форма (функция) на V — это отображение $\beta : V \times V \to \mathbb{F}$, линейное по каждому аргументу.*

1. $\beta(x_1 + x_2, y) = \beta(x_1, y) + \beta(x_2, y)$
2. $\beta(\alpha x, y) = \alpha\beta(x, y)$
3. $\beta(x, y_1 + y_2) = \beta(x, y_1) + \beta(x, y_2)$
4. $\beta(x, \alpha y) = \alpha\beta(x, y)$

Пример.

1. $V = \mathbb{R}^n$, $\beta(x, y) = \langle x, y\rangle$ — *скалярное произведение.*
2. $V = \mathbb{R}^2$, $\beta(x, y) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$.
3. $V = C[a, b]$, $\beta(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$.

Определение. *Матрицей билинейной функции в базисе $\mathbb{e}$ называется матрица $B = (b_{ij})$, где $b_{ij} = \beta(e_i, e_j)$. Обозначение: $B(\beta, \mathbb{e})$.*

Пусть $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n \in V$ и $y = y_1e_1 + \ldots + y_ne_n \in V$. Тогда:

$$\beta(x, y) = \beta\left(\sum_{i=1}^{n} x_ie_i, \sum_{j=1}^{n} y_je_j\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i\beta\left(e_i, \sum_{j=1}^{n} y_je_j\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j\beta(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_ib_{ij}y_j =$$
$$= (x_1, \ldots, x_n)B\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Предложение.

1. *Всякая билинейная функция однозначно определяется своей матрицей в базисе $\mathbb{e}$ (и, следовательно, в любом другом базисе).*
2. *Для любой матрицы $B \in M_n(F)$ существует единственная билинейная функция β такая, что $B = B(\beta, \mathbb{e})$.*

Доказательство.

1. Уже доказано, это следует из формулы $(*)$.
2. Определим β по формуле $(*)$. Тогда β — это билинейная функция на V и ее матрица есть в точности B. Единственность следует из все той же формулы.

□

Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ и $\mathbb{e}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ — два базиса V, β — билинейная функция на V. Пусть также $\mathbb{e}' = \mathbb{e}C$, где C — матрица перехода, также $B(\beta, \mathbb{e}) = B$ и $B(\beta, \mathbb{e}') = B'$.

Предложение. *$B' = C^TBC$.*

Доказательство. Рассмотрим представление вектора $x \in V$ в обоих базисах.

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1e_1 + \ldots + x_ne_n = (e_1, \ldots, e_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ x &= x'_1e'_1 + \ldots + x'_ne'_n = (e'_1, \ldots, e'_n)\begin{pmatrix} {x'}_1 \\ \vdots \\ {x'}_n \end{pmatrix} \end{aligned}\right. \implies \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} {x'}_1 \\ \vdots \\ {x'}_n \end{pmatrix}$$

Аналогично для $y \in V$:

$$\left.\begin{aligned} y &= (e_1, \ldots, e_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ y &= (e'_1, \ldots, e'_n)\begin{pmatrix} {y'}_1 \\ \vdots \\ {y'}_n \end{pmatrix} \end{aligned}\right. \implies \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} {y'}_1 \\ \vdots \\ {y'}_n \end{pmatrix}.$$

Тогда, если мы транспонируем формулу для x, получаем:

$$\beta(x,y) = (x_1, \dots, x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = ({x'}_1, \dots, {x'}_n) C^T B C \begin{pmatrix} {y'}_1 \\ \vdots \\ {y'}_n \end{pmatrix}.$$

Одновременно с этим:

$$\beta(x,y) = ({x'}_1, \dots, {x'}_n) B' \begin{pmatrix} {y'}_1 \\ \vdots \\ {y'}_n \end{pmatrix}.$$

Сравнивая эти две формулы, получаем, что $B' = C^T B C$. $\square$

Лекция 21

V – векторное пространство над $\mathbb{F}$ (в котором $1+1\neq 0$)
$\mathbb{e}=(e_1,\ldots,e_n)$ – базис
$Q:V\to\mathbb{F}$ – квадратичная форма

Определение. *Q имеет в базисе $\mathbb{e}$ канонический вид, если в этом базисе*

$$Q(x)=b_1x_1^2+\ldots+b_nx_n^2,\ b_i\in\mathbb{F}$$

(то есть матрица квадратичной формы Q в этом базисе диагональна)

Метод Якоби

$\mathbb{e}=(e_1,\ldots,e_n)$ Рассмотрим набор векторов
$\mathbb{e}'=({e'}_1,\ldots,{e'}_n)$ такой что

$$\begin{aligned}
&e_1'=e_1\\
&e_2'\in e_2+\langle e_1\rangle\\
&e_3'\in e_3+\langle e_1,e_2\rangle\\
&\vdots\\
&e_n'\in e_n+\langle e_1,\ldots,e_{n-1}\rangle
\end{aligned}\tag{$\star$}$$

Для любого $k\in(1,\ldots,n)$ имеем $(e_1',\ldots,e_k')=(e_1,\ldots,e_k)\cdot C_k$, где

$$C_k=\begin{pmatrix}1&\star&\star&\star&\cdots&\star\\0&1&\star&\star&\cdots&\star\\0&0&1&\star&\cdots&\star\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}\in\mathrm{M}_k(\mathbb{F})$$

$\det C_k=1\neq 0\ \Rightarrow(e_1',\ldots,e_k')$ линейно независимы $\Rightarrow\langle e_1,\ldots,e_k\rangle=\langle e_1',\ldots,e_k'\rangle$. В частности $\mathbb{e}'$ – базис пространства V.

Пусть Q – квадратичная форма
$B=B(Q,\mathbb{e})$
$B_k=B(Q,\mathbb{e})$ – левый верхний $k\times k$ блок в B
$\sigma_k=\sigma_k(Q,\mathbb{e})=\det B_k$ – k-ый угловой минор матрицы B.

Пусть $\mathbb{e}'$ – базис V удовлетворяющий условию ($\star$)
$B'=B(Q,\mathbb{e}')$
$B_k'=B_k(Q,\mathbb{e}')$
$\sigma_k'=\sigma_k(Q,\mathbb{e}')$

Лемма. *Для любого $k\in(1,\ldots,n)$, $\sigma_k=\sigma_k'$*

Доказательство. При любом k имеем $B_k'=C_k^T\cdot B_k\cdot C_k\Rightarrow$ определитель $\sigma_k'=\det C_k^T\cdot B\cdot C_k=\det B_k=\sigma_k$и □

Теорема. *(Метод Якоби приведения квадратичной формы к каноническому виду) Предположим, что $\sigma_k \neq 0 \forall k$, тогда существует единственный базис $\mathbb{e}' = ({e'}_1, \ldots, {e'}_n)$ в V, такой что*

1. *$\mathbb{e}'$ имеет вид ($\star$)*
2. *в этом базисе Q имеет канонический вид*

$Q(x) = \sigma_k x_1'^2 + \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1} x_2'^2 + \ldots + \dfrac{\sigma_n}{\sigma_{n-1}} x_n'^2$

то есть $B(Q, \mathbb{e}') = \operatorname{diag}(\sigma_1, \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}, \ldots, \dfrac{\sigma_n}{\sigma_{n-1}})$

Доказательство. Индукция по n:
$n = 1$ – верно
Пусть доказано для $n - 1$ докажем для n
Пусть векторы $e'_1, \ldots, e'_{n-1}$ уже построены

$$B(Q, (e'_1 \ldots, e'_{n-1}, e_n)) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \star \\ 0 & \frac{\sigma_2}{\sigma_1} & \cdots & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_{n-2}} & \star \\ \star & \star & \star & \cdots & \star & \star \end{pmatrix}$$

Ищем e'_n в виде $e_n + \langle e_1, \ldots, e_{n-1} \rangle = e_n + \langle e'_1, \ldots, e'_{n-1} \rangle$ то есть в виде $e'_n = e_n + \lambda_1 e'_1 + \cdots + \lambda_{n-1} e'_{n-1}$.
Пусть $\beta : V \times V \to \mathbb{F}$ – симметрическая билинейная форма, соответствующая Q.

$$\beta(e'_k, e'_n) = \beta(e'_k, e_n) + \lambda_1 \beta(e'_k, e'_1) + \cdots + \lambda_{k-1} \beta(e'_k, e'_{k-1})$$

так как $\beta(e'_i, e'_j) = 0$ при $1 \leqslant i, j \leqslant n - 1, i \neq j$

$$\beta(e'_k, e'_n) = \beta(e'_k, e_n) + \lambda_k (e'_k, e'_k)$$

Тогда $\beta(e'_k, e'_n) = 0 \; \forall k = 1, \ldots, n-1$ тогда и только тогда, когда $\lambda_k = -\dfrac{\beta(e'_k, e_n)}{\beta(e'_k, e'_k)} = -\beta(e'_k, e_n) \cdot \dfrac{\sigma_{k-1}}{\sigma_k}$.

В итоге построен базис $\mathbb{e}' = ({e'}_1, \ldots, {e'}_n)$ такой что

$$B(Q, \mathbb{e}') = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_2}{\sigma_1} & \cdots & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_{n-2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & ? \end{pmatrix}$$

В силу леммы $\sigma_n = \sigma'_n = \sigma_1 \cdot \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot \dfrac{\sigma_{n-1}}{\sigma_{n-2}} \cdot ? = \sigma_{n-1} \cdot ? \Rightarrow ? = \dfrac{\sigma_n}{\sigma_{n-1}}$. □

Замечание. *Единственность следует из явных формул на каждом шаге.*

Нормальный вид квадратичной формы над полем $\mathbb{R}$

Определение. *Квадратичная форма Q имеет в базисе $\mathbb{e}$ нормальный вид, если в этом базисе $Q(x) = b_1x_1^2 + \ldots + b_nx_n^2$, где $b_i \in \{-1, 0, 1\}$.*

Предложение. *Для любой квадратичной формы Q над полем $\mathbb{R}$ существует базис, в котором Q принимает нормальный вид.*

Доказательство. Существует базис, в котором Q имеет канонический вид

$$Q(x) = b_1x_1^2 + \ldots + b_nx_n^2$$

Делаем невырожденную замену

$$x_i = \begin{cases} \frac{x_i'}{\sqrt{|b_i|}}, & b_i \neq 0 \\ x_i', & b_i = 0 \end{cases}$$

Тогда в новых координатах Q имеет вид $Q(x) = \varepsilon_1 x_1'^2 + \ldots + \varepsilon_n x_n'^2$, где $\varepsilon_i = \operatorname{sgn}(b_i)$. □

Замечание. *Если $F = \mathbb{C}$, то такое же рассуждение позволяет привести любую квадратичную форму над полем $\mathbb{C}$ к виду $x_1^2 + \ldots + x_k^2$, где $k = \operatorname{rk} Q$*

Закон инерции

Пусть Q – квадратичная форма над $\mathbb{R}$. Нормальный вид: $Q(x) = x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_{s+t}^2$. s – число «+» в нормальном виде, t – число «−» в нормальном виде.

Определение. *Число $i_+ = s$ – положительный индекс инерции квадратичной формы Q.*

Определение. *Число $i_- = t$ – отрицательный индекс инерции квадратичной формы Q.*

Теорема. *Числа i_+ и i_- не зависят от базиса в котором Q принимает нормальный вид.*

Доказательство. Имеем $i_+ + i_- = \operatorname{rk} Q$ – инвариантная величина $\Rightarrow$ достаточно доказать инвариантность числа i_+.

Пусть базис $\mathbb{e}$ таков, что в нем $Q(x) = x_1 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_{s+t}^2$ и пусть $\mathbb{e}'$ – другой базис такой что в нем $Q(x) = x_1^2 + \ldots + x_{s'}^2 - x_{s'+1}^2 - \ldots - x_{s'+t'}^2$.

Предположим, что $s \neq s'$, тогда без ограничения общности $s > s'$. Рассмотрим в V подпространства $L = \langle e_1, \ldots, e_s \rangle$ и $L' = \langle e'_{s'+1}, \ldots, e'_n \rangle$. $\dim L = s$ и $\dim L' = n - s'$. $L + L'$ – подпространство в $V \Rightarrow \dim(L + L') \leqslant \dim V = n$. Тогда $\dim(L \cap L') = \dim L + \dim L' - \dim(L + L') \geqslant s + n - s' - n = s - s' > 0$. Тогда существует $v \in L \cap L', v \neq 0$. Так как $v \in L$, то $Q(v) > 0$, но так как $v \in L'$, то $Q(v) \leqslant 0$ – противоречие. □

Определение. *Квадратичная функция Q над полем $\mathbb{R}$ называется*

Термин	*Обозначение*	*Условие*
положительно определенной	$Q > 0$	$Q(x) > 0\ \forall x \neq 0$
отрицательно определенной	$Q < 0$	$Q(x) < 0\ \forall x \neq 0$
неотрицательно определенной	$Q \geqslant 0$	$Q(x) \geqslant 0\ \forall x$
неположительно определенной	$Q \leqslant 0$	$Q(x) \leqslant 0\ \forall x$
неопределенной	−	$\exists x, y\colon Q(x) > 0,\ Q(y) < 0$

Термин	*Нормальный вид*	*Индексы инерции*
положительно определенной	$x_1^2 + \ldots + x_n^2$	$i_+ = n,\ i_- = 0$
отрицательно определенной	$-x_1^2 - \ldots - x_n^2$	$i_+ = 0,\ i_- = n$
неотрицательно определенной	$x_1^2 + \ldots + x_k^2,\ k \leqslant n$	$i_+ = k,\ i_- = 0$
неположительно определенной	$-x_1^2 - \ldots - x_k^2,\ k \leqslant n$	$i_+ = 0, i_- = k$
неопределенной	$x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_{s+t}^2,\ s,t \geqslant 1$	$i_+ = s,\ i_- = t$

Пример. $V = \mathbb{R}^2$.

1. $Q(x, y) = x^2 + y^2$, $Q > 0$;
2. $Q(x, y) = -x^2 - y^2$, $Q < 0$;
3. $Q(x, y) = x^2 - y^2$;
4. $Q(x, y) = x^2$, $Q \geqslant 0$;
5. $Q(x, y) = -x^2$, $Q \leqslant 0$.

Лекция 23

Явная формула для ортогональной проекции вектора на подпространство

$\mathbb{E}$ – Евклидово пространство, $S \subseteq \mathbb{E}$ – подпространство, $S^{\perp} = \{x \in \mathbb{E} \mid (x, y) = 0 \ \forall y \in S\}$.

Замечание.

1. $v \in S \iff \mathrm{pr}_S v = v \iff \mathrm{ort}_s v = 0$
2. $v \in S^{\perp} \iff \mathrm{ort}_s v = v \iff \mathrm{pr}_s v = 0$

Пусть $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением, $S \in \mathbb{R}^n$ – подпространство, $(a_1, \ldots, a_k)$ – базис в S. Образуем матрицу $A \in \mathrm{Mat}_{n\times k}(\mathbb{R})$, где $A^{(i)} = a_i$.

Предложение. *Для всякого $v \in \mathbb{E}$ $\mathrm{pr}_S v = A(A^T A)^{-1} A^T v$.*

Доказательство. Корректность $A^T A$, заметим, что $A^T A = ((a_i, a_j)) = G(a_1, \ldots, a_k)$ – невырожденная, так как $(a_1, \ldots, a_k)$ линейно независимы.

$v \in \mathbb{E}$,

$$x = \mathrm{pr}_S v \Rightarrow x \in S \Rightarrow x = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k = A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$$

$$y = \mathrm{ort}_S v \Rightarrow A^T y = 0 \text{ так как } y \in S^{\perp} \text{ и все скалярные произведения} = 0$$

$$A(A^T A)^{-1} A^T v = A(A^T A)^{-1} A^T (x + y) = A(A^T A)^{-1} A^T A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} + A(A^T A)^{-1} A^T y = A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = x$$

□

Ортогональные и ортонормированные системы векторов

$\mathbb{E}$ – евклидово пространство

Определение. *Система ненулевых векторов $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{E}$ называется ортогональной, если $(v_i, v_j) = 0 \forall i \neq j$ ($\iff G(v_1, \ldots, v_n)$ диагональна + невырождена).*

Определение. *Система ненулевых векторов $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{E}$ называется ортонормированной, если $(v_i, v_j) = 0 \forall i \neq j$ и $(v_i, v_i) = |v_i|^2 = 1 \forall i$ ($\iff G(v_1, \ldots, v_n) = E$).*

Замечание. *Всякая ортогональная (в частности ортонормированная) система векторов линейно независима.*

Определение. *Базис $(e_1, \ldots, e_n)$ в $\mathbb{E}$ называется ортогональным (ортонормированным), если $e_1, \ldots, e_n$ ортогональная (ортонормированная) система.*

Пример. $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ *со стандартным скалярным произведением* $(x, y) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$. *Стандартный базис:*

$$\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

является ортонормированным.

Теорема. *Во всяком конечномерном евклидовом пространстве существует ортогональный (ортонормированный базис).*

Доказательство. Уже знаем, что так как квадратичная форма (v, v) положительно определена, то существует базис, в котором она принимает нормальный вид. Этот базис и есть ортонормированный. $\square$

Следствие. *Всякую ортогональную (ортонормированную) систему векторов можно дополнить до ортогонального (ортонормированного) базиса.*

Доказательство. Если $(e_1, \ldots, e_k)$ такая система, то искомым дополнением будет ортогональный (соответственно ортонормированный) базис $\{e_1, \ldots, e_k\}^\perp$. $\square$

Замечание. *Если* $(e_1, \ldots, e_n)$ *— ортогональный базис, то* $\left(\dfrac{e_1}{|e_1|}, \ldots, \dfrac{e_n}{|e_n|}\right)$ *— ортонормированный базис.*

$\mathbb{e}' = (e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n)C$ — какой-то другой базис.

Предложение. $(e'_1, \ldots, e'_n)$ *ортонормирован* $\iff C^T \cdot C = E$.

Доказательство. $\mathbb{e}'$ ортонормирован $\iff G(e'_1, \ldots, e'_n) = E$, с другой стороны $G(\mathbb{e}') = C^TG(\mathbb{e})C = C^TEC = E$, а значит $C^TC = E$. $\square$

Определение. *Матрица* $C \in M_n(\mathbb{R})$ *называется ортогональной, если* $C^TC = E$.

Замечание. $C^TC = E \iff C^{-1} = C^T \iff CC^T = E$.

Свойства.

1. *Столбцы образуют ортонормированную систему* $(C^{(i)}, C^{(j)}) = \delta_{ij}$.
2. *Строки образуют ортонормированную систему* $(C_{(i)}, C_{(j)}) = \delta_{ij}$. *В частности* $|c_{ij}| \leqslant 1 \forall i, j$.
3. $\det C = \pm 1$

Пример. $n = 2$

$$\det C = 1, C = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$$

$$\det C = -1, C = \begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ \sin\varphi & -\cos\varphi\end{pmatrix}$$

$S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство и $(e_1, \ldots, e_k)$ — ортогональный базис в S.

Предложение. $\forall v \in \mathbb{E}, \mathrm{pr}_S v = \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{(v,e_i)}{(e_i,e_i)} \cdot e_i$. *В частности если* $(e_1, \ldots, e_k)$ *ортонормирован, то* $\mathrm{pr}_S v = \sum\limits_{i=1}^{k} (v, e_i) \cdot e_i$

Доказательство. $\mathrm{pr}_S v = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i e_i$ применим $(\cdot, e_j)$:

$$(\mathrm{pr}_S v, e_j) = (v, e_j) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \delta_{ij} = \lambda_j (e_j, e_j)$$

Первое равенство верно потому что $v = \mathrm{pr}_S v + \mathrm{ort}_S v$, $(v, e_j) = (\mathrm{pr}_S v, e_j) + (\mathrm{ort}_S v, e_j) = (\mathrm{pr}_S v, e_j)$. □

Как строить ортогональный базис?

$(e_1, \ldots, e_k)$ — линейно независимая система векторов.

Метод Якоби

$\det G(e_1, \ldots, e_k) > 0$. i-ый угловой минор — это определитель $\det G(e_1, \ldots, e_i) > 0$. Следовательно метод Якоби применим, результат — ортогональный базис $(f_1, \ldots, f_k)$.

$$\begin{aligned} &f_1 = e_1 \\ &f_2 \in e_2 + \langle e_1 \rangle \\ &f_3 \in e_3 + \langle e_1, e_2 \rangle \\ &\vdots \\ &f_n \in e_n + \langle e_1, \ldots, e_{n-1} \rangle \end{aligned} \tag{$\star$}$$

Предложение. $\forall\ i = 1, \ldots, k$

1. $f_i = \mathrm{ort}_{\langle e_1, \ldots, e_{i-1} \rangle} e_i$;
2. $f_i = e_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1} \frac{(e_i,f_j)}{(f_j,f_j)} \cdot f_j$ $(\star\star)$;
3. $\det G(f_1, \ldots, f_i) = \det G(e_1, \ldots, e_i)$.

Доказательство. Помним, что при $(\star)$ $\langle e_1, \ldots, e_i \rangle = \langle f_1, \ldots, f_i \rangle \forall i$.

1. Имеем $f_i \in e_i + \langle e_1, \ldots, e_{i-1} \rangle = e_i + \langle f_1, \ldots, f_{i-1} \rangle$, тогда $f_i = e_i + h_i$, где $h_i \in \langle f_1, \ldots f_{i-1} \rangle \Rightarrow e_i = f_i - h_i$, так как $f_i \in \langle f_1, \ldots, f_{i-1} \rangle^{\perp}$, то $f_i = \mathrm{ort}_{\langle f_1, \ldots, f_{i-1} \rangle} e_i = \mathrm{ort}_{\langle e_1, \ldots, e_{i-1} \rangle} e_i$
2. $f_i = \mathrm{ort}_{\langle f_1, \ldots, f_{i-1} \rangle} e_i = e_i - \mathrm{pr}_{\langle f_1, \ldots, f_{i-1} \rangle} e_i$, что по пред. предложению равно $e_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1} \frac{(e_i,f_j)}{(f_j,f_j)} f_j$
3. Следует из того, что $G(f_1, \ldots, f_i) = C^T G(e_1, \ldots, e_i) C$, где C — верхнетреугольная с единицами на диагонали $\Rightarrow \det C = \det C^T = 1$.

□

Построение ортогонального базиса $f_1, \ldots, f_k$ по формулам $(\star\star)$ называется методом (процессом) ортогонализации Грамма-Шмидта.

Предложение (Теорема Пифагора)**.** *$x, y \in \mathbb{E}, x \perp y$ $(x, y) = 0$, тогда $|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2$.*

Доказательство. $|x+y|^2 = (x+y, x+y) = (x, x) + (x, y) + (x, y) + (y, y) = |x|^2 + |y|^2$. $\square$

Лекция 25

$\mathbb{E}$ – евклидово пространство. $\mathbb{e}, \mathbb{e}'$ – два базиса. $\mathbb{e}' = \mathbb{e}C$, $\mathbb{e}$ и $\mathbb{e}'$ одинаково ориентированы, если $\det C > 0$. Одинаковая ориентированность – отношение эквивалентности на множестве всех базисов в $\mathbb{E}$.

Фиксируем $\mathbb{e}$:

- все $\mathbb{e}'$ для которых $\det C > 0$ – один класс
- все $\mathbb{e}'$ для которых $\det C < 0$ – второй класс

Значит всего два класса эквивалентности.

Определение. *Говорят, что в $\mathbb{E}$ зафиксирована ориентация, если все базисы одного класса объявлены положительно ориентированными, а все базисы второго класса трицательно ориентированными.*

Пример. *В $\mathbb{R}^3$ есть стандартный выбор ориентации:*

- *положительная ориентация – «правые» базисы*
- *отрицательная ориентация – «левые» базисы*

Ориентированный объём

Фиксруем ориентацию в $\mathbb{E}$, $\dim \mathbb{E} = n$

$a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{E}$ – набор векторов
$\mathrm{Vol}\ \mathrm{P}(a_1, \ldots, a_n)$ – объём
$(e_1, \ldots, e_n)$ – положительно ориентированный ортонормированный базис
$(a_1, \ldots, a_n) = (e_1, \ldots, e_n)A$
$\mathrm{Vol}\ \mathrm{P}(a_1, \ldots, a_n) = |\det A|$

Определение. *Ориентированным объёмом параллелипипеда* $\mathrm{P}(a_1, \ldots, a_n)$ *называется величина* $\mathrm{Vol}(a_1, \ldots, a_n) = \det A$.

Свойства.

1. $|\mathrm{Vol}(a_1, \ldots, a_n)| = \mathrm{Vol}\ \mathrm{P}(a_1, \ldots, a_n)$
2. $\mathrm{Vol}(a_1, \ldots, a_n) > 0 \iff (a_1, \ldots, a_n)$ – *положительно ориентированный базис*
3. *Линейность по каждому аргументу*
4. *Кососимметричность – меняет знак при перестановке любых двух аргументов*

Трёхмерное евклидово пространство

$\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$ – евклидово пространство со стандартным скалярным произведением. Фиксируем ориентацию (как в примере положительная ориентация $\sim$ «правые базисы»), $a, b, c \in \mathbb{R}^3$.

Определение. *Смешанным произведением векторов a, b, c называется величина $(a, b, c) := \mathrm{Vol}(a, b, c)$.*

Свойства.

1. *Линейна по каждому аргументу*
2. *Кососимметрична*

Если (e_1, e_2, e_3) – правый ортонормированный базис и:

$$\begin{aligned} a &= a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 \\ b &= b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 \\ c &= c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3 \end{aligned}$$

То

$$(a, b, c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Критерий компланарности (линейной зависимости трёх векторов): $(a, b, c) = 0 \iff a, b, c$компланарны.

Определение. *Векторным произведением векторов $a, b \in \mathbb{E}$ называется вектор c, такой что*

1. $c \perp \langle a, b \rangle$
2. $|c| = \mathrm{Vol}\ \mathrm{P}(a, b)$
3. $(a, b, c) \geqslant 0$

Обозначение. $[a, b]$ *или* $a \times b$.

Замечание. *Векторное произведение условиями* $1) - 3)$ *определено однозначно*

1. *a, b линейно зависимы. Тогда из 2) получаем, что $|c| = 0 \Rightarrow c = 0$, при этом 1) и 3) выполнены.*
2. *a, b линейно независимы. В данном случае $(a, b, c) > 0 \iff$ тройка a, b, c является правой (+ нужна картинка)*

Критерий коллинеарности (линейной зависимости двух векторов): $[a, b] = 0 \iff a, b$ коллинеарны.

Пример. (e_1, e_2, e_3) *– правый ортонормированный базис*

$[e_i, e_j]$	e_1	e_2	e_3
e_1	0	e_3	$-e_2$
e_2	$-e_3$	0	e_1
e_3	e_2	$-e_1$	0

Теорема. $\forall\ a, b, c \in \mathbb{R}^3 (a, [b, c]) = (a, b, c)$.

Доказательство.

1. Пусть b, c пропорциональны, тогда $[b, c] = 0 \Rightarrow (a, [b, c]) = 0)$, но (a, b, c) тоже равна нулю

2. b, c не пропорциональны, тогда положим $d = [b, c]$. $(a, [b, c]) = (a, d) = (\mathrm{pr}_{\langle d\rangle} a, d) = (\mathrm{ort}_{\langle b,c\rangle} a, d) = \begin{cases} |\mathrm{ort}_{\langle b,c\rangle} a| \cdot |d|, & \text{если } (a, b, c) > 0 \\ -|\mathrm{ort}_{\langle b,c\rangle} a| \cdot |d|, & \text{если } (a, b, c) < 0 \end{cases} = \mathrm{Vol}(a, b, c) = (a, b, c)$.

□

Предложение.

1. $[a, b] = -[b, a]\ \forall\ a, b$.

2. $[\cdot, \cdot]$ *линейно по каждому аргументу.*

Доказательство.

1. Ясно из определения

2. Для каждого x: $(x, [\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, b] = (x, \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, b) = \lambda_1 (x, a_1, b) + \lambda_2 (x, a_2, b) = \lambda_1 (x, [a_1, b]) + \lambda_2 (x, [a_2, b]) = (x, \lambda_1 [a_1, b] + \lambda_2 [a_2, b])$. Так всякий вектор $y = (e_1, y)e_1 + (e_2, y)e_2 + (e_3, y)e_3$, для (e_1, e_2, e_3) ортонормированного базиса, то $[\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, b] = \lambda_1 [a_1, b] + \lambda_2 [a_2, b]$. Линейность по второму аргументу аналогично.

□

Двойное векторное произведение

Предложение. $[a, [b, c]] = (a, c)b - (a, b)c$ *(*$= b(a, c) - c(a, b)$ *«БАЦ - ЦАБ»)*

Доказательство.

1. b, c пропорциональны, тогда $c = \lambda b$, $[a, [b, c]] = 0$, а правая часть равна $(a, \lambda b)b - (a, b)\lambda b = 0$

2. b, c не пропорциональны. Выберем правый ортонормированный базис e_1, e_2, e_3 так, чтобы:

   (a) b был пропорционален e_1

   (b) $\langle b, c\rangle = \langle e_1, e_2\rangle$

   Тогда $b = \beta e_1$, $c = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2$, $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$. $[b, c] = [\beta e_1, \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2] = \beta\gamma_2 e_3$. Тогда $[a, [b, c]] = [\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, \beta\gamma_2 e_3] = -\alpha_1 \beta\gamma_2 e_2 + \alpha_2 \beta\gamma_2 e_1$. Правая часть равна $(\alpha\gamma_2 + \alpha_2\gamma_2)\beta e_1 - \alpha_1 \beta(\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2) = -\alpha_1 \beta\gamma_2 e_2 + \alpha_2 \beta\gamma_2 e_1 =$ левая часть.

□

Следствие. *(Тождество Якоби)* $[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0\ \forall\ a, b, c \in \mathbb{R}^3$.

Пусть (e_1, e_2, e_3) – правый ортонормированный базис.

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$$
$$b = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$$

Предложение. *Векторное произведение можно найти следующим образом:*

$$[a,b] = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)e_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)e_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)e_3$$

Доказательство. Доказывается прямой проверкой с использованием билинейности и значений $[e_i, e_j]$. $\square$

Лекция 27

Взаимное расположение двух плоскостей в $\mathbb{R}^3$

1. Совпадают
2. Параллельны
3. Пересекаются по прямой $[n_1, n_2] = 0$

Взаимное расположение двух прямых в $\mathbb{R}^3$

1. Совпадают
2. Параллельны
3. Пересекаются
4. Скрещиваются (не лежат в одной плоскости)

Взаимное расположение прямой и плоскости в $\mathbb{R}^3$

1. $l \subseteq P$
2. $l || P$
3. l и P пересекаются в точке

Взаимное расположение трёх различных плоскостей

1. Среди P_1, P_2, P_3 есть две параллельных
   (a) $P_1 \parallel P_2 \parallel P_3$
   (b) Две параллельны, третья их
2. Никакие две не параллельны
   (a) Все три пересекаются по одной прямой
   (b) Прямые пересечения параллельны
   (c) P_1, P_2, P_3 пересекаются в одной точке

Метрические задачи в $\mathbb{R}^3$

Расстояние от точки до прямой

$$\rho(v, l) = |\mathrm{ort}_{\langle a \rangle}(v - v_0)| = \frac{|[v - v_0, a]|}{|a|}$$

Расстояние от точки до плоскости

$S = \langle n \rangle^{\perp}$ – направляющее подпространство.

$$\rho(v, P) = |\mathrm{ort}_S(v - v_0)| = |\mathrm{pr}_{\langle n \rangle}(v - v_0)| = \frac{|(v - v_0, n)|}{(n, n)} \cdot n$$

Расстояние между скрещивающимися прямыми

$P_1 = v_1 + \langle a_1, a_2 \rangle \supseteq l_1$, $P_2 = v_2 + \langle a_1, a_2 \rangle \supseteq l_2$

$$\rho(l_1, l_2) = \rho(P_1, P_2) = \frac{|(a_1, a_2, v_2 - v_1)|}{|[a_1, a_2]|}$$

Угол между двумя прямыми

$$\angle(l_1, l_2) = \min(\angle(a_1, a_2), \angle(a_1, -a_2))$$

Угол между плоскостью и прямой

$$\angle(l, P) = \frac{\pi}{2} - \angle(\langle a \rangle, \langle n \rangle)$$

Угол между двумя плоскостями

$$\angle(P_1, P_2) = \angle(\langle n_1 \rangle, \langle n_2 \rangle)$$

Линейные операторы

Пусть V — конечномерное векторное пространство.

Определение. *Линейным оператором (или линейным преобразованием) называется всякое линейное отображение* $\varphi \colon V \to V$, *то есть из* V *в себя. Обозначение:* $L(V) = \mathrm{Hom}(V, V)$, $A(\varphi, \mathbb{e})$ *– матрица линейного оператора* φ *в базисе* $\mathbb{e}$.

Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис в V и $\varphi \in L(V)$. Тогда:

$$(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) = (e_1, \ldots, e_n)\, A,$$

где A — матрица линейного оператора в базисе $\mathbb{e}$. В столбце $A^{(j)}$ стоят координаты $\varphi(e_j)$ в базисе $\mathbb{e}$. Матрица A — квадратная.

Пример.

1. *Скалярный оператор* $\lambda \mathrm{id}(v) = \lambda V$ *— матрица* λE *в любом базисе.*
2. $\forall v \in V : \varphi(v) = 0$ *— нулевая матрица.*
3. *Тождественный оператор:* $\forall v \in V : \mathrm{id}(v) = v$ *— единичная матрица.*
4. $V = \mathbb{R}^2$, φ *– поворот на угол* α
5. $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$, $\varphi : f \mapsto f'$

Следствие (Следствия из общих фактов о линейных отображениях)**.**

1. *Всякий линейный оператор однозначно определяется своей матрицей в любом фиксированном базисе.*

2. *Для всякого базиса* $\mathbb{e}$ *и всякой квадратной матрицы* A *существует, причем единственный, линейный оператор* φ *такой, что матрица* φ *в базисе* $\mathbb{e}$ *есть* A*.*

3. *Пусть* $\varphi \in L(V)$*,* A *— матрица* φ *в базисе* $\mathbb{e}$*. Тогда:*

$$v = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$$
$$\varphi(v) = y_1e_1 + \ldots + y_ne_n$$
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

4. *Пусть* $\mathbb{e}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ *– другой базис,* $\mathbb{e}' = \mathbb{e} \cdot C$*,* $A' = A(\varphi, \mathbb{e}')$*, тогда* $A' = C^{-1}AC$

Следствие.

1. *Величина* $\det A$ *не зависит от выбора базиса. Обозначение:* $\det \varphi$*.*

2. *Величина* $\mathrm{tr} A$ *не зависит от выбора базиса*

Доказательство. Пусть A' — матрица φ в другом базисе. Тогда получается, что:

1.
$$\det A' = \det \left(C^{-1}AC\right) = \det C^{-1} \det A \det C = \det A \det C \frac{1}{\det C} = \det A.$$

2.
$$\mathrm{tr} A' = \mathrm{tr}(C^{-1}AC) = \mathrm{tr}(ACC^{-1}) = \mathrm{tr} A$$

□

Определение. *Две матрицы* $A', A \in M_n(F)$ *называются подобными, если существует такая матрица* $C \in M_n(F), \det C \neq 0$*, что* $A' = C^{-1}AC$*.*

Замечание. *Отношение подобия на* M_n *является отношением эквивалентности.*

Предложение. *Пусть* $\varphi \in L(V)$*. Тогда эти условия эквивалентны:*

1. $\mathrm{Ker}\, \varphi = \{0\}$*;*

2. $\mathrm{Im}\, \varphi = V$*;*

3. φ *обратим (то есть это биекция, изоморфизм);*

4. $\det \varphi \neq 0$.

Доказательство.

1. $\Leftrightarrow 2$ — следует из формулы $\dim V = \dim \mathrm{Ker}\, \varphi + \dim \mathrm{Im}\, \varphi$.

2. $\Leftrightarrow 3$ — уже было.

3. $2 \Leftrightarrow 4$ — $\mathrm{Im}\, \varphi = V \iff \mathrm{rk}\, \varphi = \dim V \iff \det \varphi \neq 0$.

□

Определение. *Линейный оператор* φ *называется вырожденным, если* $\det \varphi = 0$*, и невырожденным, если* $\det \varphi \neq 0$*.*

Лекция 29

V – векторное пространство над $\mathbb{F}$ $n = \dim V$. Пусть $\lambda \in \mathrm{Spec}\varphi$, m_λ — кратность λ как корня характеристического многочлена: $\chi_\varphi(t) \vdots (t-\lambda)^{m_\lambda}$, но $\chi_\varphi(t) \not\vdots (t-\lambda)^{m_\lambda+1}$.

Алгебраическая и геометрическая кратности

Определение. *Число m_λ называется алгебраической кратностью собственного значения λ.*

$\lambda \in \mathrm{Spec}\varphi$, $V_\lambda(\varphi) \subseteq V$ — собственное подпространство.

Определение. *Число $\dim V_\lambda(\varphi)$ называется геометрической кратностью собственного значения λ.*

Предложение. *Геометрическая кратность не больше алгебраической кратности.*

Доказательство. Зафиксируем базис $u_1, \ldots, u_p$ в пространстве V_λ, где $p = \dim V_\lambda$. Дополним базис $u_1, \ldots, u_p$ до базиса $u_1, \ldots, u_p, u_{p+1}, \ldots, u_n$ пространства V. Тогда матрица линейного оператора φ в этом базисе будет выглядеть следующим образом:

$$A_\varphi = \left(\begin{array}{c|c} \lambda E & A \\ \hline 0 & B \end{array}\right), \quad \lambda E \in M_p,\ A \in M_{n-p}$$

Тогда характеристический многочлен будет следующим:

$$\chi_\varphi(t) = (-1)^n \det(A_\varphi - tE) = \left|\begin{array}{ccc|c} \lambda - t & & 0 & \\ & \ddots & & A \\ 0 & & \lambda - t & \\ \hline & 0 & & B - tE \end{array}\right| = (-1)^n (\lambda - t)^p \det(B - tE)$$

Как видим, $\chi_\varphi(t)$ имеет корень кратности хотя бы p, следовательно, геометрическая кратность, которая равна p по условию, точно не превосходит алгебраическую. □

Пусть $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\} \subseteq \mathrm{Spec}\varphi$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$.

Предложение. *Подпространства $V_{\lambda_1}(\varphi), \ldots, V_{\lambda_s}(\varphi)$ линейно независимы.*

Доказательство. Индукция по s. Для $s = 1$ очевидно. Пусть доказано для меньших s, докажем для s. Пусть $v_1 \in V_{\lambda_1}, \ldots, v_s \in V_{\lambda_s}$ и

$$v_1 + \ldots + v_s = 0 \qquad (\star)$$

Тогда применив линейный оператор к обоим частям равенства получим

$$\varphi(v_1) + \ldots + \varphi(v_s) = 0 \Rightarrow \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_s v_s = 0$$

Вычтем отсюда ($\star$) умноженное на λ_s:

$$(\lambda_1 - \lambda_s)v_1 + \ldots + (\lambda_{s-1} - \lambda_s)v_{s-1} = 0$$

Так как $\lambda_i \neq \lambda_s$ при $i \neq s$, то по предположению индукции получаем $v_1 = \ldots = v_{s-1} = 0$. Тогда ($\star$) влечёт $v_s = 0$. □

Следствие. *Если характеристический многочлен имеет ровно n попарно различных корней, где $n = \dim V$, то φ диагонализируем.*

Доказательство. Пусть $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\} = \mathrm{Spec}\varphi, \lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. В каждом $V_{\lambda_i}(\varphi)$ возьмём ненулевой вектор v_i. Тогда по предыдущему предложению, векторы $v_1, \ldots, v_n$ линейно независимы $\Rightarrow (v_1, \ldots, v_n)$ — базис из собственных векторов $\Rightarrow \varphi$ диагонализуем. □

Критерий диагонализуемости линейного оператора

Теорема (Критерий диагонализируемости - 2)**.** *Линейный оператор φ диагонализируем тогда и только тогда, когда*

1. *$\chi_\varphi(t)$ разлагается на линейные множители;*
2. *Для любого собственного значения $\lambda \in \operatorname{Spec}(\varphi)$ равны его геометрическая и алгебраическая кратности.*

Доказательство.

- $\Rightarrow$ Так как φ — диагонализируем, то существует базис $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ такой, что:

$$A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n).$$

Тогда:

$$\chi_\varphi(t) = (-1)^n \begin{vmatrix} \mu_1 - t & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n - t \end{vmatrix} = (-1)^n(\mu_1 - t)\ldots(\mu_n - t) = (t - \mu_1)\ldots(t - \mu_n).$$

Итого, первое условие выполняется.

Теперь перепишем характеристический многочлен в виде $\chi_\varphi(t) = (t-\lambda_1)^{k_1}\ldots(t-\lambda_s)^{k_s}$, где $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$ и $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\} = \{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$. Тогда $V_{\lambda_i} \supseteq \langle e_j \mid \mu_j = \lambda_i \rangle$, следовательно, $\dim V_{\lambda_i}(\varphi) \geqslant k_i$. Но мы знаем, что $\dim V_{\lambda_i} \leqslant k_i$! Значит, $\dim V_{\lambda_i}(\varphi) = k_i$.

- $\Leftarrow$ Так как $V_{\lambda_1}(\varphi) + \ldots + V_{\lambda_s}(\varphi)$ — прямая, то $\dim(V_{\lambda_1}(\varphi) + \ldots + V_{\lambda_s}(\varphi)) = k_1 + \ldots + k_s = n$.

Пусть $\mathbb{e}_i$ — базис в V_{λ_i}. Тогда $\mathbb{e}_1 \cup \ldots \cup \mathbb{e}_s$ — базис в V. То есть мы нашли базис из собственных векторов, следовательно, φ диагонализируем.

□

Замечание. *Если выполнено только первое условие, то линейный оператор φ можно привести к Жордановой нормальной форме. Существует базис $\mathbb{e}$, такой что*

$$A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1}^{n_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2}^{n_2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & J_{\lambda_s}^{n_s} \end{pmatrix}$$

Где $J_{\lambda_i}^{n_i}$ — Жорданова клетка

$$J_{\lambda_i}^{n_i} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix} \in M_n(F).$$

В частности всякий линейный оператор над $\mathbb{C}$ можно привести к Жордановой нормальной форме.

Пример.

1. $\varphi = \lambda Id$

$$\chi_\varphi(t) = (-1)^n \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

   $\mathrm{Spec}\varphi = \{\lambda\}$, *алгебраическая и геометрическая кратности равны* n.

2. $V = \mathbb{R}^2, \varphi$ — *ортогональная проекция на прямую* l. $e_1 \in l, e_2 \in l^\perp\ \{0\}$, *тогда* (e_1, e_2) — *базис из собственных векторов.*

$$A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \chi_\varphi(t) = (t-1)t$$

$$\mathrm{Spec}\ \varphi = \{0,1\} \Rightarrow \begin{cases} \text{если } 0, \text{то алгебраическая кратность} = \text{геометрическая кратность} = 1 \\ \text{если } 1, \text{то алгебраическая кратность} = \text{геометрическая кратность} = 1 \end{cases}$$

3. $V = \mathbb{R}^2, \varphi$ — *поворот на угол* $\alpha \neq \pi k$. *Если* (e_1, e_2) — *правый ортонормированный базис, то*

$$A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\chi_\varphi(t) = (-1)^2 \begin{vmatrix} \cos\alpha - t & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - t \end{vmatrix} = t^2 - 2\cos\alpha t + 1$$

   В данном случае $D < 0$, *значит над* $\mathbb{R}$ *нет корней* $\Rightarrow$ *оператор не диагонализуем над* $\mathbb{R}$. *Над* $\mathbb{C}$ $\chi_\varphi(t)$ *имеет два различных корня, следовательно оператор диагонализуем над* $\mathbb{C}$.

4. $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant n}, \varphi$ — *дифферинцирование.* $\mathbb{e} = (1, \frac{x}{1!}, \frac{x^2}{2!}, \dots, \frac{x^n}{n!})$ — *базис в* V.

$$A(\varphi, \mathbb{e}) = J_0^{n+1} \Rightarrow \chi_\varphi(t) = t^{n+1}$$

   Собственное значение $\lambda = 0$, *геометрическая кратность* $= 1$, *алгебраическая кратность* $= n+1$.

Теорема. *Если* $F = \mathbb{R}$, *то для всякого линейного оператора* $\varphi \in L(V)$ *существует либо одномерное, либо двумерное* φ*-инвариантное подпространство.*

Доказательство. $\chi_\varphi(t)$ имеет действительные корни $\Rightarrow$ есть собственный вектор $\Rightarrow$ есть одномерное φ-инварантное подпространство. Если $\chi_\varphi(t)$ не имеет действительных корней, пусть $\lambda + i\mu$ — комплексный корень, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \mu \neq 0$. Выберем базис в $\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ в V, пусть $A = A(\varphi, \mathbb{e})$. Над $\mathbb{C}$ у φ есть собственный вектор, следовательно $\exists u \in \mathbb{R}^n$ и $v \in \mathbb{R}^n$, такие что $A(u + iv) = (\lambda + i\mu)(u + iv) = (\lambda u - \mu v) + i(\mu u + \lambda v) = Au + iAv$. Отделяя действительную и мнимую части получаем

$$\begin{cases} Au = \lambda u - \mu v \\ Av = \mu u + \lambda v \end{cases}$$

Пусть $x \in V$ – вектор с координатами u, $y \in V$ – вектор с координатами v, тогда

$$\begin{cases} \varphi(x) = \lambda x - \mu y \\ \varphi(y) = \mu x + \lambda y \end{cases} \Rightarrow U = \langle x, y \rangle \text{— } \varphi\text{-инвариантное подпространство}$$

$\dim U \leqslant 2$. □