Лекции по предмету
Линейная алгебра и геометрия

2017 год

Содержание

Лекция 21

V – векторное пространство над $\mathbb{F}$ (в котором $1+1 \neq 0$)
$\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ – базис
$Q : V \to \mathbb{F}$ – квадратичная форма

Определение. *Q имеет в базисе $\mathbb{e}$ канонический вид, если в этом базисе*

$$Q(x) = b_1 x_1^2 + \ldots + b_n x_n^2,\ b_i \in \mathbb{F}$$

(то есть матрица квадратичной формы Q в этом базисе диагональна)

Метод Якоби

$\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ Рассмотрим набор векторов
$\mathbb{e}' = ({e'}_1, \ldots, {e'}_n)$ такой что

$$\begin{aligned} &e'_1 = e_1 \\ &e'_2 \in e_2 + \langle e_1 \rangle \\ &e'_3 \in e_3 + \langle e_1, e_2 \rangle \\ &\vdots \\ &e'_n \in e_n + \langle e_1, \ldots, e_{n-1} \rangle \end{aligned} \qquad (\star)$$

Для любого $k \in (1, \ldots, n)$ имеем $(e'_1, \ldots, e'_k) = (e_1, \ldots, e_k) \cdot C_k$, где

$$C_k = \begin{pmatrix} 1 & \star & \star & \star & \cdots & \star \\ 0 & 1 & \star & \star & \cdots & \star \\ 0 & 0 & 1 & \star & \cdots & \star \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_k(\mathbb{F})$$

$\det C_k = 1 \neq 0 \ \Rightarrow (e'_1, \ldots, e'_k)$ линейно независимы $\Rightarrow \langle e_1, \ldots, e_k \rangle = \langle e'_1, \ldots, e'_k \rangle$. В частности $\mathbb{e}'$ – базис пространства V.

Пусть Q – квадратичная форма
$B = B(Q, \mathbb{e})$
$B_k = B(Q, \mathbb{e})$ – левый верхний $k \times k$ блок в B
$\sigma_k = \sigma_k(Q, \mathbb{e}) = \det B_k$ – k-ый угловой минор матрицы B.

Пусть $\mathbb{e}'$ – базис V удовлетворяющий условию ($\star$)
$B' = B(Q, \mathbb{e}')$
$B'_k = B_k(Q, \mathbb{e}')$
$\sigma'_k = \sigma_k(Q, \mathbb{e}')$

Лемма. *Для любого $k \in (1, \ldots, n)$, $\sigma_k = \sigma'_k$*

Доказательство. При любом k имеем $B'_k = C_k^T \cdot B_k \cdot C_k \Rightarrow$ определитель $\sigma'_k = \det C_k^T \cdot B \cdot C_k = \det B_k = \sigma_k$и □

Теорема. *(Метод Якоби приведения квадратичной формы к каноническому виду) Предположим, что $\sigma_k \neq 0 \forall k$, тогда существует единственный базис $\mathbb{e}' = ({e'}_1, \ldots, {e'}_n)$ в V, такой что*

1. *$\mathbb{e}'$ имеет вид ($\star$)*
2. *в этом базисе Q имеет канонический вид*

$$Q(x) = \sigma_k x_1'^2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} x_2'^2 + \ldots + \frac{\sigma_n}{\sigma_{n-1}} x_n'^2$$

то есть $B(Q, \mathbb{e}') = \operatorname{diag}(\sigma_1, \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}, \ldots, \dfrac{\sigma_n}{\sigma_{n-1}})$

Доказательство. Индукция по n:
$n = 1$ – верно
Пусть доказано для $n-1$ докажем для n
Пусть векторы $e_1', \ldots, e_{n-1}'$ уже построены

$$B(Q, (e_1' \ldots, e_{n-1}', e_n)) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \star \\ 0 & \frac{\sigma_2}{\sigma_1} & \cdots & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_{n-2}} & \star \\ \star & \star & \star & \cdots & \star & \star \end{pmatrix}$$

Ищем e_n' в виде $e_n + \langle e_1, \ldots, e_{n-1} \rangle = e_n + \langle e_1', \ldots, e_{n-1}' \rangle$ то есть в виде $e_n' = e_n + \lambda_1 e_1' + \cdots + \lambda_{n-1} e_{n-1}'$.
Пусть $\beta : V \times V \to \mathbb{F}$ – симметрическая билинейная форма, соответствующая Q.

$$\beta(e_k', e_n') = \beta(e_k', e_n) + \lambda_1 \beta(e_k', e_1') + \cdots + \lambda_{k-1} \beta(e_k', e_{k-1}')$$

так как $\beta(e_i', e_j') = 0$ при $1 \leqslant i, j \leqslant n-1, i \neq j$

$$\beta(e_k', e_n') = \beta(e_k', e_n) + \lambda_k (e_k', e_k')$$

Тогда $\beta(e_k', e_n') = 0 \; \forall k = 1, \ldots, n-1$ тогда и только тогда, когда $\lambda_k = -\dfrac{\beta(e_k', e_n)}{\beta(e_k', e_k')} = -\beta(e_k', e_n) \cdot \dfrac{\sigma_{k-1}}{\sigma_k}$.
В итоге построен базис $\mathbb{e}' = ({e'}_1, \ldots, {e'}_n)$ такой что

$$B(Q, \mathbb{e}') = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_2}{\sigma_1} & \cdots & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_{n-2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & ? \end{pmatrix}$$

В силу леммы $\sigma_n = \sigma_n' = \sigma_1 \cdot \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot \dfrac{\sigma_{n-1}}{\sigma_{n-2}} \cdot ? = \sigma_{n-1} \cdot ? \Rightarrow ? = \dfrac{\sigma_n}{\sigma_{n-1}}$. □

Замечание. *Единственность следует из явных формул на каждом шаге.*

Нормальный вид квадратичной формы над полем $\mathbb{R}$

Определение. *Квадратичная форма Q имеет в базисе $\mathbb{e}$ нормальный вид, если в этом базисе $Q(x) = b_1x_1^2 + \ldots + b_nx_n^2$, где $b_i \in \{-1, 0, 1\}$.*

Предложение. *Для любой квадратичной формы Q над полем $\mathbb{R}$ существует базис, в котором Q принимает нормальный вид.*

Доказательство. Существует базис, в котором Q имеет канонический вид

$$Q(x) = b_1x_1^2 + \ldots + b_nx_n^2$$

Делаем невырожденную замену

$$x_i = \begin{cases} \frac{x_i'}{\sqrt{|b_i|}}, & b_i \neq 0 \\ x_i', & b_i = 0 \end{cases}$$

Тогда в новых координатах Q имеет вид $Q(x) = \varepsilon_1x_1'^2 + \ldots + \varepsilon_nx_n'^2$, где $\varepsilon_i = \operatorname{sgn}(b_i)$. □

Замечание. *Если $F = \mathbb{C}$, то такое же рассуждение позволяет привести любую квадратичную форму над полем $\mathbb{C}$ к виду $x_1^2 + \ldots + x_k^2$, где $k = \operatorname{rk} Q$*

Закон инерции

Пусть Q – квадратичная форма над $\mathbb{R}$. Нормальный вид: $Q(x) = x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_{s+t}^2$. s – число «+» в нормальном виде, t – число «−» в нормальном виде.

Определение. *Число $i_+ = s$ – положительный индекс инерции квадратичной формы Q.*

Определение. *Число $i_- = t$ – отрицательный индекс инерции квадратичной формы Q.*

Теорема. *Числа i_+ и i_- не зависят от базиса в котором Q принимает нормальный вид.*

Доказательство. Имеем $i_+ + i_- = \operatorname{rk} Q$ – инвариантная величина $\Rightarrow$ достаточно доказать инвариантность числа i_+.

Пусть базис $\mathbb{e}$ таков, что в нем $Q(x) = x_1 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_{s+t}^2$ и пусть $\mathbb{e}'$ – другой базис такой что в нем $Q(x) = x_1^2 + \ldots + x_{s'}^2 - x_{s'+1}^2 - \ldots - x_{s'+t'}^2$.

Предположим, что $s \neq s'$, тогда без ограничения общности $s > s'$. Рассмотрим в V подпространства $L = \langle e_1, \ldots, e_s\rangle$ и $L' = \langle e'_{s'+1}, \ldots, e'_n\rangle$. $\dim L = s$ и $\dim L' = n - s'$. $L + L'$ – подпространство в $V \Rightarrow \dim(L + L') \leqslant \dim V = n$. Тогда $\dim(L \cap L') = \dim L + \dim L' - \dim(L + L') \geqslant s + n - s' - n = s - s' > 0$. Тогда существует $v \in L \cap L', v \neq 0$. Так как $v \in L$, то $Q(v) > 0$, но так как $v \in L'$, то $Q(v) \leqslant 0$ – противоречие. □

Определение. *Квадратичная функция Q над полем $\mathbb{R}$ называется*

Термин	*Обозначение*	*Условие*
положительно определенной	$Q > 0$	$Q(x) > 0\ \forall x \neq 0$
отрицательно определенной	$Q < 0$	$Q(x) < 0\ \forall x \neq 0$
неотрицательно определенной	$Q \geqslant 0$	$Q(x) \geqslant 0\ \forall x$
неположительно определенной	$Q \leqslant 0$	$Q(x) \leqslant 0\ \forall x$
неопределенной	$-$	$\exists x, y\colon Q(x) > 0,\ Q(y) < 0$

Термин	*Нормальный вид*	*Индексы инерции*
положительно определенной	$x_1^2 + \ldots + x_n^2$	$i_+ = n,\ i_- = 0$
отрицательно определенной	$-x_1^2 - \ldots - x_n^2$	$i_+ = 0,\ i_- = n$
неотрицательно определенной	$x_1^2 + \ldots + x_k^2,\ k \leqslant n$	$i_+ = k,\ i_- = 0$
неположительно определенной	$-x_1^2 - \ldots - x_k^2,\ k \leqslant n$	$i_+ = 0, i_- = k$
неопределенной	$x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_{s+t}^2,\ s,t \geqslant 1$	$i_+ = s,\ i_- = t$

Пример. $V = \mathbb{R}^2$.

1. $Q(x,y) = x^2 + y^2$, $Q > 0$;
2. $Q(x,y) = -x^2 - y^2$, $Q < 0$;
3. $Q(x,y) = x^2 - y^2$;
4. $Q(x,y) = x^2$, $Q \geqslant 0$;
5. $Q(x,y) = -x^2$, $Q \leqslant 0$.