

Лекции по предмету Линейная алгебра и геометрия

2017 год

Содержание

Лекция 21	2
Метод Якоби	2
Нормальный вид квадратичной формы над \mathbb{R}	4
Закон инерции	4
Лекция 23	6
Явная формула для ортогональной проекции вектора на подпространство . . .	6
Ортогональные и ортонормированные системы векторов	6
Как строить ортогональный базис?	8
Лекция 25	10
Ориентированный объём	10
Трёхмерное евклидово пространство	11
Двойное векторное произведение	12
Лекция 27	14
Взаимное расположение двух плоскостей в \mathbb{R}^3	14
Взаимное расположение двух прямых в \mathbb{R}^3	14
Взаимное расположение прямой и плоскости в \mathbb{R}^3	14
Метрические задачи в \mathbb{R}^3	14
Линейные операторы	15
Лекция 29	17
Алгебраическая и геометрическая кратности	17
Критерий диагонализуемости линейного оператора	18

Лекция 21

V – векторное пространство над \mathbb{F} (в котором $1 + 1 \neq 0$)

$\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$ – базис

$Q : V \rightarrow \mathbb{F}$ – квадратичная форма

Определение. Q имеет в базисе \mathfrak{e} канонический вид, если в этом базисе

$$Q(x) = b_1 x_1^2 + \dots + b_n x_n^2, \quad b_i \in \mathbb{F}$$

(то есть матрица квадратичной формы Q в этом базисе диагональна)

Метод Якоби

$\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$ Рассмотрим набор векторов

$\mathfrak{e}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ такой что

$$\begin{aligned} e'_1 &= e_1 \\ e'_2 &\in e_2 + \langle e_1 \rangle \\ e'_3 &\in e_3 + \langle e_1, e_2 \rangle \\ &\vdots \\ e'_n &\in e_n + \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle \end{aligned} \quad (\star)$$

Для любого $k \in (1, \dots, n)$ имеем $(e'_1, \dots, e'_k) = (e_1, \dots, e_k) \cdot C_k$, где

$$C_k = \begin{pmatrix} 1 & \star & \star & \star & \cdots & \star \\ 0 & 1 & \star & \star & \cdots & \star \\ 0 & 0 & 1 & \star & \cdots & \star \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in M_k(\mathbb{F})$$

$\det C_k = 1 \neq 0 \Rightarrow (e'_1, \dots, e'_k)$ линейно независимы $\Rightarrow \langle e_1, \dots, e_k \rangle = \langle e'_1, \dots, e'_k \rangle$. В частности \mathfrak{e}' – базис пространства V .

Пусть Q – квадратичная форма

$$B = B(Q, \mathfrak{e})$$

$B_k = B_k(Q, \mathfrak{e})$ – левый верхний $k \times k$ блок в B

$\sigma_k = \sigma_k(Q, \mathfrak{e}) = \det B_k$ – k -ый угловой минор матрицы B .

Пусть \mathfrak{e}' – базис V удовлетворяющий условию (\star)

$$B' = B(Q, \mathfrak{e}')$$

$$B'_k = B_k(Q, \mathfrak{e}')$$

$$\sigma'_k = \sigma_k(Q, \mathfrak{e}')$$

Лемма. Для любого $k \in (1, \dots, n)$, $\sigma_k = \sigma'_k$

Доказательство. При любом k имеем $B'_k = C_k^T \cdot B_k \cdot C_k \Rightarrow$ определитель $\sigma'_k = \det C_k^T \cdot B \cdot C_k = \det B_k = \sigma_k$ \square

Теорема. (Метод Якоби приведения квадратичной формы к каноническому виду) Предположим, что $\sigma_k \neq 0 \forall k$, тогда существует единственный базис $\mathfrak{e}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ в V , такой что

1. \mathfrak{e}' имеет вид (\star)

2. в этом базисе Q имеет канонический вид

$$Q(x) = \sigma_k x_1'^2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} x_2'^2 + \dots + \frac{\sigma_n}{\sigma_{n-1}} x_n'^2$$

$$\text{то есть } B(Q, \mathfrak{e}') = \text{diag}(\sigma_1, \frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \dots, \frac{\sigma_n}{\sigma_{n-1}})$$

Доказательство. Индукция по n :

$n = 1$ – верно

Пусть доказано для $n - 1$ докажем для n

Пусть векторы e'_1, \dots, e'_{n-1} уже построены

$$B(Q, (e'_1, \dots, e'_{n-1}, e_n)) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & \star \\ 0 & \frac{\sigma_2}{\sigma_1} & \dots & \dots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_{n-2}} & \star \\ \star & \star & \star & \dots & \star & \star \end{pmatrix}$$

Ищем e'_n в виде $e_n + \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle = e_n + \langle e'_1, \dots, e'_{n-1} \rangle$ то есть в виде $e'_n = e_n + \lambda_1 e'_1 + \dots + \lambda_{n-1} e'_{n-1}$.

Пусть $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{F}$ – симметрическая билинейная форма, соответствующая Q .

$$\beta(e'_k, e'_n) = \beta(e'_k, e_n) + \lambda_1 \beta(e'_k, e'_1) + \dots + \lambda_{k-1} \beta(e'_k, e'_{k-1})$$

так как $\beta(e'_i, e'_j) = 0$ при $1 \leq i, j \leq n-1, i \neq j$

$$\beta(e'_k, e'_n) = \beta(e'_k, e_n) + \lambda_k \beta(e'_k, e'_k)$$

Тогда $\beta(e'_k, e'_n) = 0 \forall k = 1, \dots, n-1$ тогда и только тогда, когда $\lambda_k = -\frac{\beta(e'_k, e_n)}{\beta(e'_k, e'_k)} = -\beta(e'_k, e_n) \cdot \frac{\sigma_{k-1}}{\sigma_k}$.

В итоге построен базис $\mathfrak{e}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ такой что

$$B(Q, \mathfrak{e}') = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_2}{\sigma_1} & \dots & \dots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_{n-2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & ? \end{pmatrix}$$

В силу леммы $\sigma_n = \sigma'_n = \sigma_1 \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \cdot \dots \cdot \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_{n-2}} \cdot ? = \sigma_{n-1} \cdot ? \Rightarrow ? = \frac{\sigma_n}{\sigma_{n-1}}$. □

Замечание. Единственность следует из явных формул на каждом шаге.

Нормальный вид квадратичной формы над полем \mathbb{R}

Определение. Квадратичная форма Q имеет в базисе \mathbf{e} нормальный вид, если в этом базисе $Q(x) = b_1x_1^2 + \dots + b_nx_n^2$, где $b_i \in \{-1, 0, 1\}$.

Предложение. Для любой квадратичной формы Q над полем \mathbb{R} существует базис, в котором Q принимает нормальный вид.

Доказательство. Существует базис, в котором Q имеет канонический вид

$$Q(x) = b_1x_1^2 + \dots + b_nx_n^2$$

Делаем невырожденную замену

$$x_i = \begin{cases} \frac{x'_i}{\sqrt{|b_i|}}, & b_i \neq 0 \\ x'_i, & b_i = 0 \end{cases}$$

Тогда в новых координатах Q имеет вид $Q(x) = \varepsilon_1x_1'^2 + \dots + \varepsilon_nx_n'^2$, где $\varepsilon_i = \text{sgn}(b_i)$. \square

Замечание. Если $F = \mathbb{C}$, то такое же рассуждение позволяет привести любую квадратичную форму над полем \mathbb{C} к виду $x_1^2 + \dots + x_k^2$, где $k = \text{rk } Q$

Закон инерции

Пусть Q – квадратичная форма над \mathbb{R} . Нормальный вид: $Q(x) = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_{s+t}^2$. s – число «+» в нормальном виде, t – число «-» в нормальном виде.

Определение. Число $i_+ = s$ – положительный индекс инерции квадратичной формы Q .

Определение. Число $i_- = t$ – отрицательный индекс инерции квадратичной формы Q .

Теорема. Числа i_+ и i_- не зависят от базиса в котором Q принимает нормальный вид.

Доказательство. Имеем $i_+ + i_- = \text{rk } Q$ – инвариантная величина \Rightarrow достаточно доказать инвариантность числа i_+ .

Пусть базис \mathbf{e} таков, что в нем $Q(x) = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_{s+t}^2$ и пусть \mathbf{e}' – другой базис такой что в нем $Q(x) = x_1^2 + \dots + x_{s'}^2 - x_{s'+1}^2 - \dots - x_{s'+t'}^2$.

Предположим, что $s \neq s'$, тогда без ограничения общности $s > s'$. Рассмотрим в V подпространства $L = \langle e_1, \dots, e_s \rangle$ и $L' = \langle e'_{s'+1}, \dots, e'_n \rangle$. $\dim L = s$ и $\dim L' = n - s'$. $L + L'$ – подпространство в $V \Rightarrow \dim(L + L') \leq \dim V = n$. Тогда $\dim(L \cap L') = \dim L + \dim L' - \dim(L + L') \geq s + n - s' - n = s - s' > 0$. Тогда существует $v \in L \cap L', v \neq 0$. Так как $v \in L$, то $Q(v) > 0$, но так как $v \in L'$, то $Q(v) \leq 0$ – противоречие. \square

Определение. Квадратичная функция Q над полем \mathbb{R} называется

Термин	Обозначение	Условие
положительно определенной	$Q > 0$	$Q(x) > 0 \ \forall x \neq 0$
отрицательно определенной	$Q < 0$	$Q(x) < 0 \ \forall x \neq 0$
неотрицательно определенной	$Q \geq 0$	$Q(x) \geq 0 \ \forall x$
неположительно определенной	$Q \leq 0$	$Q(x) \leq 0 \ \forall x$
неопределенной	–	$\exists x, y: Q(x) > 0, Q(y) < 0$

Термин	Нормальный вид	Индексы инерции
положительно определенной	$x_1^2 + \dots + x_n^2$	$i_+ = n, i_- = 0$
отрицательно определенной	$-x_1^2 - \dots - x_n^2$	$i_+ = 0, i_- = n$
неотрицательно определенной	$x_1^2 + \dots + x_k^2, k \leq n$	$i_+ = k, i_- = 0$
неположительно определенной	$-x_1^2 - \dots - x_k^2, k \leq n$	$i_+ = 0, i_- = k$
неопределенной	$x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_{s+t}^2, s, t \geq 1$	$i_+ = s, i_- = t$

Пример. $V = \mathbb{R}^2$.

1. $Q(x, y) = x^2 + y^2, Q > 0;$

2. $Q(x, y) = -x^2 - y^2, Q < 0;$

3. $Q(x, y) = x^2 - y^2;$

4. $Q(x, y) = x^2, Q \geq 0;$

5. $Q(x, y) = -x^2, Q \leq 0.$

Лекция 23

Явная формула для ортогональной проекции вектора на подпространство

\mathbb{E} – Евклидово пространство, $S \subseteq \mathbb{E}$ – подпространство, $S^\perp = \{x \in \mathbb{E} \mid (x, y) = 0 \ \forall y \in S\}$.

Замечание.

$$1. \ v \in S \iff \text{pr}_S v = v \iff \text{ort}_S v = 0$$

$$2. \ v \in S^\perp \iff \text{ort}_S v = v \iff \text{pr}_S v = 0$$

Пусть $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением, $S \in \mathbb{R}^n$ – подпространство, (a_1, \dots, a_k) – базис в S . Образует матрицу $A \in \text{Mat}_{n \times k}(\mathbb{R})$, где $A^{(i)} = a_i$.

Предложение. Для всякого $v \in \mathbb{E}$ $\text{pr}_S v = A(A^T A)^{-1} A^T v$.

Доказательство. Корректность $A^T A$, заметим, что $A^T A = ((a_i, a_j)) = G(a_1, \dots, a_k)$ – невырожденная, так как (a_1, \dots, a_k) линейно независимы.

$v \in \mathbb{E}$,

$$x = \text{pr}_S v \Rightarrow x \in S \Rightarrow x = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$$

$$y = \text{ort}_S v \Rightarrow A^T y = 0 \text{ так как } y \in S^\perp \text{ и все скалярные произведения } = 0$$

$$A(A^T A)^{-1} A^T v = A(A^T A)^{-1} A^T (x + y) = A(A^T A)^{-1} A^T A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} + A(A^T A)^{-1} A^T y = A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = x$$

□

Ортогональные и ортонормированные системы векторов

\mathbb{E} – евклидово пространство

Определение. Система ненулевых векторов $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{E}$ называется ортогональной, если $(v_i, v_j) = 0 \ \forall i \neq j$ ($\iff G(v_1, \dots, v_n)$ диагональна + невырождена).

Определение. Система ненулевых векторов $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{E}$ называется ортонормированной, если $(v_i, v_j) = 0 \ \forall i \neq j$ и $(v_i, v_i) = |v_i|^2 = 1 \ \forall i$ ($\iff G(v_1, \dots, v_n) = E$).

Замечание. Всякая ортогональная (в частности ортонормированная) система векторов линейно независима.

Определение. Базис (e_1, \dots, e_n) в \mathbb{E} называется ортогональным (ортонормированным), если e_1, \dots, e_n ортогональная (ортонормированная) система.

Пример. $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением $(x, y) = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$. Стандартный базис:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

является ортонормированным.

Теорема. Во всяком конечномерном евклидовом пространстве существует ортогональный (ортонормированный базис).

Доказательство. Уже знаем, что так как квадратичная форма (v, v) положительно определена, то существует базис, в котором она принимает нормальный вид. Этот базис и есть ортонормированный. \square

Следствие. Всякую ортогональную (ортонормированную) систему векторов можно дополнить до ортогонального (ортонормированного) базиса.

Доказательство. Если (e_1, \dots, e_k) такая система, то искомым дополнением будет ортогональный (соответственно ортонормированный) базис $\{e_1, \dots, e_k\}^\perp$. \square

Замечание. Если (e_1, \dots, e_n) — ортогональный базис, то $\left(\frac{e_1}{|e_1|}, \dots, \frac{e_n}{|e_n|}\right)$ — ортонормированный базис.

$e' = (e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n)C$ — какой-то другой базис.

Предложение. (e'_1, \dots, e'_n) ортонормирован $\iff C^T \cdot C = E$.

Доказательство. e' ортонормирован $\iff G(e'_1, \dots, e'_n) = E$, с другой стороны $G(e') = C^T G(e) C = C^T E C = E$, а значит $C^T C = E$. \square

Определение. Матрица $C \in M_n(\mathbb{R})$ называется ортогональной, если $C^T C = E$.

Замечание. $C^T C = E \iff C^{-1} = C^T \iff C C^T = E$.

Свойства.

1. Столбцы образуют ортонормированную систему $(C^{(i)}, C^{(j)}) = \delta_{ij}$.
2. Строки образуют ортонормированную систему $(C_{(i)}, C_{(j)}) = \delta_{ij}$. В частности $|c_{ij}| \leq 1 \forall i, j$.
3. $\det C = \pm 1$

Пример. $n = 2$

$$\det C = 1, C = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\det C = -1, C = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}$$

$S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство и (e_1, \dots, e_k) — ортогональный базис в S .

Предложение. $\forall v \in \mathbb{E}, \text{pr}_S v = \sum_{i=1}^k \frac{(v, e_i)}{(e_i, e_i)} \cdot e_i$. В частности если (e_1, \dots, e_k) ортонормирован, то $\text{pr}_S v = \sum_{i=1}^k (v, e_i) \cdot e_i$

Доказательство. $\text{pr}_S v = \sum_{i=1}^k \lambda_i e_i$ применим (\cdot, e_j) :

$$(\text{pr}_S v, e_j) = (v, e_j) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \delta_{ij} = \lambda_j (e_j, e_j)$$

Первое равенство верно потому что $v = \text{pr}_S v + \text{ort}_S v$, $(v, e_j) = (\text{pr}_S v, e_j) + (\text{ort}_S v, e_j) = (\text{pr}_S v, e_j)$. \square

Как строить ортогональный базис?

(e_1, \dots, e_k) — линейно независимая система векторов.

Метод Якоби

$\det G(e_1, \dots, e_k) > 0$. i -ый угловой минор — это определитель $\det G(e_1, \dots, e_i) > 0$. Следовательно метод Якоби применим, результат — ортогональный базис (f_1, \dots, f_k) .

$$\begin{aligned} f_1 &= e_1 \\ f_2 &\in e_2 + \langle e_1 \rangle \\ f_3 &\in e_3 + \langle e_1, e_2 \rangle \\ &\vdots \\ f_n &\in e_n + \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle \end{aligned} \quad (\star)$$

Предложение. $\forall i = 1, \dots, k$

1. $f_i = \text{ort}_{\langle e_1, \dots, e_{i-1} \rangle} e_i$;
2. $f_i = e_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{(e_i, f_j)}{(f_j, f_j)} \cdot f_j$ ($\star\star$);
3. $\det G(f_1, \dots, f_i) = \det G(e_1, \dots, e_i)$.

Доказательство. Помним, что при (\star) $\langle e_1, \dots, e_i \rangle = \langle f_1, \dots, f_i \rangle \forall i$.

1. Имеем $f_i \in e_i + \langle e_1, \dots, e_{i-1} \rangle = e_i + \langle f_1, \dots, f_{i-1} \rangle$, тогда $f_i = e_i + h_i$, где $h_i \in \langle f_1, \dots, f_{i-1} \rangle \Rightarrow e_i = f_i - h_i$, так как $f_i \in \langle f_1, \dots, f_{i-1} \rangle^\perp$, то $f_i = \text{ort}_{\langle f_1, \dots, f_{i-1} \rangle} e_i = \text{ort}_{\langle e_1, \dots, e_{i-1} \rangle} e_i$
2. $f_i = \text{ort}_{\langle f_1, \dots, f_{i-1} \rangle} e_i = e_i - \text{pr}_{\langle f_1, \dots, f_{i-1} \rangle} e_i$, что по пред. предложению равно $e_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{(e_i, f_j)}{(f_j, f_j)} f_j$
3. Следует из того, что $G(f_1, \dots, f_i) = C^T G(e_1, \dots, e_i) C$, где C — верхнетреугольная с единицами на диагонали $\Rightarrow \det C = \det C^T = 1$.

\square

Построение ортогонального базиса f_1, \dots, f_k по формулам $(\star\star)$ называется методом (процессом) ортогонализации Грамма-Шмидта.

Предложение (Теорема Пифагора). $x, y \in \mathbb{E}, x \perp y$ ($(x, y) = 0$), тогда $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$.

Доказательство. $|x + y|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (x, y) + (y, y) = |x|^2 + |y|^2$. □

Лекция 25

\mathbb{E} – евклидово пространство. e, e' – два базиса. $e' = eC$, e и e' одинаково ориентированы, если $\det C > 0$. Одинаковая ориентированность – отношение эквивалентности на множестве всех базисов в \mathbb{E} .

Фиксируем e :

- все e' для которых $\det C > 0$ – один класс
- все e' для которых $\det C < 0$ – второй класс

Значит всего два класса эквивалентности.

Определение. Говорят, что в \mathbb{E} зафиксирована ориентация, если все базисы одного класса объявлены положительно ориентированными, а все базисы второго класса отрицательно ориентированными.

Пример. В \mathbb{R}^3 есть стандартный выбор ориентации:

- положительная ориентация – «правые» базисы
- отрицательная ориентация – «левые» базисы

Ориентированный объём

Фиксируем ориентацию в \mathbb{E} , $\dim \mathbb{E} = n$

$a_1, \dots, a_n \in \mathbb{E}$ – набор векторов

$\text{Vol } P(a_1, \dots, a_n)$ – объём

(e_1, \dots, e_n) – положительно ориентированный ортонормированный базис

$(a_1, \dots, a_n) = (e_1, \dots, e_n)A$

$\text{Vol } P(a_1, \dots, a_n) = |\det A|$

Определение. Ориентированным объёмом параллелепипеда $P(a_1, \dots, a_n)$ называется величина $\text{Vol}(a_1, \dots, a_n) = \det A$.

Свойства.

1. $|\text{Vol}(a_1, \dots, a_n)| = \text{Vol } P(a_1, \dots, a_n)$
2. $\text{Vol}(a_1, \dots, a_n) > 0 \iff (a_1, \dots, a_n)$ – положительно ориентированный базис
3. Линейность по каждому аргументу
4. Кососимметричность – меняет знак при перестановке любых двух аргументов

Трёхмерное евклидово пространство

$\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$ – евклидово пространство со стандартным скалярным произведением. Фиксируем ориентацию (как в примере положительная ориентация \sim «правые базисы»), $a, b, c \in \mathbb{R}^3$.

Определение. Смешанным произведением векторов a, b, c называется величина $(a, b, c) := \text{Vol}(a, b, c)$.

Свойства.

1. Линейна по каждому аргументу
2. Кососимметрична

Если (e_1, e_2, e_3) – правый ортонормированный базис и:

$$\begin{aligned}a &= a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 \\b &= b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 \\c &= c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3\end{aligned}$$

То

$$(a, b, c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Критерий компланарности (линейной зависимости трёх векторов): $(a, b, c) = 0 \iff a, b, c$ компланарны.

Определение. Векторным произведением векторов $a, b \in \mathbb{E}$ называется вектор c , такой что

1. $c \perp \langle a, b \rangle$
2. $|c| = \text{Vol } P(a, b)$
3. $(a, b, c) \geq 0$

Обозначение. $[a, b]$ или $a \times b$.

Замечание. Векторное произведение условиями 1) – 3) определено однозначно

1. a, b линейно зависимы. Тогда из 2) получаем, что $|c| = 0 \Rightarrow c = 0$, при этом 1) и 3) выполнены.
2. a, b линейно независимы. В данном случае $(a, b, c) > 0 \iff$ тройка a, b, c является правой (+ нужна картинка)

Критерий коллинеарности (линейной зависимости двух векторов): $[a, b] = 0 \iff a, b$ коллинеарны.

Пример. (e_1, e_2, e_3) – правый ортонормированный базис

$[e_i, e_j]$	e_1	e_2	e_3
e_1	0	e_3	$-e_2$
e_2	$-e_3$	0	e_1
e_3	e_2	$-e_1$	0

Теорема. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^3 (a, [b, c]) = (a, b, c)$.

Доказательство.

1. Пусть b, c пропорциональны, тогда $[b, c] = 0 \Rightarrow (a, [b, c]) = 0$, но (a, b, c) тоже равна нулю
2. b, c не пропорциональны, тогда положим $d = [b, c]$. $(a, [b, c]) = (a, d) = (\text{pr}_{\langle d \rangle} a, d) = (\text{ort}_{\langle b, c \rangle} a, d) = \begin{cases} |\text{ort}_{\langle b, c \rangle} a| \cdot |d|, & \text{если } (a, b, c) > 0 \\ -|\text{ort}_{\langle b, c \rangle} a| \cdot |d|, & \text{если } (a, b, c) < 0 \end{cases} = \text{Vol}(a, b, c) = (a, b, c)$.

□

Предложение.

1. $[a, b] = -[b, a] \forall a, b$.
2. $[\cdot, \cdot]$ линейно по каждому аргументу.

Доказательство.

1. Ясно из определения
2. Для каждого x : $(x, [\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, b]) = (x, \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, b) = \lambda_1 (x, a_1, b) + \lambda_2 (x, a_2, b) = \lambda_1 (x, [a_1, b]) + \lambda_2 (x, [a_2, b]) = (x, \lambda_1 [a_1, b] + \lambda_2 [a_2, b])$. Так всякий вектор $y = (e_1, y)e_1 + (e_2, y)e_2 + (e_3, y)e_3$, для (e_1, e_2, e_3) ортонормированного базиса, то $[\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, b] = \lambda_1 [a_1, b] + \lambda_2 [a_2, b]$. Линейность по второму аргументу аналогично.

□

Двойное векторное произведение

Предложение. $[a, [b, c]] = (a, c)b - (a, b)c (= b(a, c) - c(a, b) \text{ «БАЦ - ЦАБ»})$

Доказательство.

1. b, c пропорциональны, тогда $c = \lambda b$, $[a, [b, c]] = 0$, а правая часть равна $(a, \lambda b)b - (a, b)\lambda b = 0$
2. b, c не пропорциональны. Выберем правый ортонормированный базис e_1, e_2, e_3 так, чтобы:

- (а) b был пропорционален e_1
- (б) $\langle b, c \rangle = \langle e_1, e_2 \rangle$

Тогда $b = \beta e_1$, $c = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2$, $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$. $[b, c] = [\beta e_1, \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2] = \beta \gamma_2 e_3$. Тогда $[a, [b, c]] = [\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, \beta \gamma_2 e_3] = -\alpha_1 \beta \gamma_2 e_2 + \alpha_2 \beta \gamma_2 e_1$. Правая часть равна $(\alpha \gamma_2 + \alpha_2 \gamma_2) \beta e_1 - \alpha_1 \beta (\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2) = -\alpha_1 \beta \gamma_2 e_2 + \alpha_2 \beta \gamma_2 e_1 =$ левая часть.

□

Следствие. (Тождество Якоби) $[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0 \forall a, b, c \in \mathbb{R}^3$.

Пусть (e_1, e_2, e_3) – правый ортонормированный базис.

$$\begin{aligned} a &= a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 \\ b &= b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 \end{aligned}$$

Предложение. Векторное произведение можно найти следующим образом:

$$[a, b] = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) e_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) e_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_3$$

Доказательство. Доказывается прямой проверкой с использованием билинейности и значений $[e_i, e_j]$. \square

Лекция 27

Взаимное расположение двух плоскостей в \mathbb{R}^3

1. Совпадают
2. Параллельны
3. Пересекаются по прямой $[n_1, n_2] = 0$

Взаимное расположение двух прямых в \mathbb{R}^3

1. Совпадают
2. Параллельны
3. Пересекаются
4. Скрещиваются (не лежат в одной плоскости)

Взаимное расположение прямой и плоскости в \mathbb{R}^3

1. $l \subseteq P$
2. $l \parallel P$
3. l и P пересекаются в точке

Взаимное расположение трёх различных плоскостей

1. Среди P_1, P_2, P_3 есть две параллельных
 - (a) $P_1 \parallel P_2 \parallel P_3$
 - (b) Две параллельны, третья их
2. Никакие две не параллельны
 - (a) Все три пересекаются по одной прямой
 - (b) Прямые пересечения параллельны
 - (c) P_1, P_2, P_3 пересекаются в одной точке

Метрические задачи в \mathbb{R}^3

Расстояние от точки до прямой

$$\rho(v, l) = |\text{ort}_{(a)}(v - v_0)| = \frac{|[v - v_0, a]|}{|a|}$$

Расстояние от точки до плоскости

$S = \langle n \rangle^\perp$ — направляющее подпространство.

$$\rho(v, P) = |\text{ort}_S(v - v_0)| = |\text{pr}_{\langle n \rangle}(v - v_0)| = \frac{|(v - v_0, n)|}{(n, n)} \cdot n$$

Расстояние между скрещивающимися прямыми

$$P_1 = v_1 + \langle a_1, a_2 \rangle \supseteq l_1, P_2 = v_2 + \langle a_1, a_2 \rangle \supseteq l_2$$

$$\rho(l_1, l_2) = \rho(P_1, P_2) = \frac{|(a_1, a_2, v_2 - v_1)|}{|[a_1, a_2]|}$$

Угол между двумя прямыми

$$\angle(l_1, l_2) = \min(\angle(a_1, a_2), \angle(a_1, -a_2))$$

Угол между плоскостью и прямой

$$\angle(l, P) = \frac{\pi}{2} - \angle(\langle a \rangle, \langle n \rangle)$$

Угол между двумя плоскостями

$$\angle(P_1, P_2) = \angle(\langle n_1 \rangle, \langle n_2 \rangle)$$

Линейные операторы

Пусть V — конечномерное векторное пространство.

Определение. *Линейным оператором (или линейным преобразованием) называется всякое линейное отображение $\varphi: V \rightarrow V$, то есть из V в себя. Обозначение: $L(V) = \text{Hom}(V, V)$, $A(\varphi, \mathfrak{e})$ — матрица линейного оператора φ в базисе \mathfrak{e} .*

Пусть $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис в V и $\varphi \in L(V)$. Тогда:

$$(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = (e_1, \dots, e_n) A,$$

где A — матрица линейного оператора в базисе \mathfrak{e} . В столбце $A^{(j)}$ стоят координаты $\varphi(e_j)$ в базисе \mathfrak{e} . Матрица A — квадратная.

Пример.

1. Скалярный оператор $\text{id}(v) = \lambda v$ — матрица λE в любом базисе.
2. $\forall v \in V : \varphi(v) = 0$ — нулевая матрица.
3. Тожественный оператор: $\forall v \in V : \text{id}(v) = v$ — единичная матрица.
4. $V = \mathbb{R}^2$, φ — поворот на угол α
5. $V = \mathbb{R}[x]_{\leq n}$, $\varphi : f \mapsto f'$

Следствие (Следствия из общих фактов о линейных отображениях).

1. Всякий линейный оператор однозначно определяется своей матрицей в любом фиксированном базисе.
2. Для всякого базиса \mathfrak{e} и всякой квадратной матрицы A существует, причем единственный, линейный оператор φ такой, что матрица φ в базисе \mathfrak{e} есть A .
3. Пусть $\varphi \in L(V)$, A — матрица φ в базисе \mathfrak{e} . Тогда:

$$\begin{aligned} v &= x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \\ \varphi(v) &= y_1 e_1 + \dots + y_n e_n \\ \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. Пусть $\mathfrak{e}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ — другой базис, $\mathfrak{e}' = \mathfrak{e} \cdot C$, $A' = A(\varphi, \mathfrak{e}')$, тогда $A' = C^{-1}AC$

Следствие.

1. Величина $\det A$ не зависит от выбора базиса. Обозначение: $\det \varphi$.
2. Величина $\operatorname{tr} A$ не зависит от выбора базиса

Доказательство. Пусть A' — матрица φ в другом базисе. Тогда получается, что:

1.

$$\det A' = \det (C^{-1}AC) = \det C^{-1} \det A \det C = \det A \det C \frac{1}{\det C} = \det A.$$

2.

$$\operatorname{tr} A' = \operatorname{tr}(C^{-1}AC) = \operatorname{tr}(ACC^{-1}) = \operatorname{tr} A$$

□

Определение. Две матрицы $A', A \in M_n(F)$ называются подобными, если существует такая матрица $C \in M_n(F)$, $\det C \neq 0$, что $A' = C^{-1}AC$.

Замечание. Отношение подобия на M_n является отношением эквивалентности.

Предложение. Пусть $\varphi \in L(V)$. Тогда эти условия эквивалентны:

1. $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$;
2. $\operatorname{Im} \varphi = V$;
3. φ обратим (то есть это биекция, изоморфизм);
4. $\det \varphi \neq 0$.

Доказательство.

1. \Leftrightarrow 2 — следует из формулы $\dim V = \dim \operatorname{Ker} \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi$.
2. \Leftrightarrow 3 — уже было.
3. $2 \Leftrightarrow 4$ — $\operatorname{Im} \varphi = V \iff \operatorname{rk} \varphi = \dim V \iff \det \varphi \neq 0$.

□

Определение. Линейный оператор φ называется вырожденным, если $\det \varphi = 0$, и невырожденным, если $\det \varphi \neq 0$.

Лекция 29

V – векторное пространство над \mathbb{F} $n = \dim V$. Пусть $\lambda \in \text{Spes}\varphi$, m_λ – кратность λ как корня характеристического многочлена: $\chi_\varphi(t) \vdots (t - \lambda)^{m_\lambda}$, но $\chi_\varphi(t) \nmid (t - \lambda)^{m_\lambda+1}$.

Алгебраическая и геометрическая кратности

Определение. Число m_λ называется алгебраической кратностью собственного значения λ .

$\lambda \in \text{Spes}\varphi$, $V_\lambda(\varphi) \subseteq V$ – собственное подпространство.

Определение. Число $\dim V_\lambda(\varphi)$ называется геометрической кратностью собственного значения λ .

Предложение. Геометрическая кратность не больше алгебраической кратности.

Доказательство. Зафиксируем базис u_1, \dots, u_p в пространстве V_λ , где $p = \dim V_\lambda$. Дополним базис u_1, \dots, u_p до базиса $u_1, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_n$ пространства V . Тогда матрица линейного оператора φ в этом базисе будет выглядеть следующим образом:

$$A_\varphi = \left(\begin{array}{c|c} \lambda E & A \\ \hline 0 & B \end{array} \right), \quad \lambda E \in M_p, A \in M_{n-p}$$

Тогда характеристический многочлен будет следующим:

$$\chi_\varphi(t) = (-1)^n \det(A_\varphi - tE) = \left| \begin{array}{ccc|c} \lambda - t & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \lambda - t & \\ \hline & & 0 & \end{array} \right| = (-1)^n (\lambda - t)^p \det(B - tE)$$

Как видим, $\chi_\varphi(t)$ имеет корень кратности хотя бы p , следовательно, геометрическая кратность, которая равна p по условию, точно не превосходит алгебраическую. \square

Пусть $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\} \subseteq \text{Spes}\varphi$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$.

Предложение. Подпространства $V_{\lambda_1}(\varphi), \dots, V_{\lambda_s}(\varphi)$ линейно независимы.

Доказательство. Индукция по s . Для $s = 1$ очевидно. Пусть доказано для меньших s , докажем для s . Пусть $v_1 \in V_{\lambda_1}, \dots, v_s \in V_{\lambda_s}$ и

$$v_1 + \dots + v_s = 0 \tag{*}$$

Тогда применив линейный оператор к обоим частям равенства получим

$$\varphi(v_1) + \dots + \varphi(v_s) = 0 \Rightarrow \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_s v_s = 0$$

Вычтем отсюда (*) умноженное на λ_s :

$$(\lambda_1 - \lambda_s)v_1 + \dots + (\lambda_{s-1} - \lambda_s)v_{s-1} = 0$$

Так как $\lambda_i \neq \lambda_s$ при $i \neq s$, то по предположению индукции получаем $v_1 = \dots = v_{s-1} = 0$. Тогда (*) влечёт $v_s = 0$. \square

Следствие. Если характеристический многочлен имеет ровно n попарно различных корней, где $n = \dim V$, то φ диагонализуем.

Доказательство. Пусть $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\} = \text{Spes}\varphi$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. В каждом $V_{\lambda_i}(\varphi)$ возьмём ненулевой вектор v_i . Тогда по предыдущему предложению, векторы v_1, \dots, v_n линейно независимы $\Rightarrow (v_1, \dots, v_n)$ – базис из собственных векторов $\Rightarrow \varphi$ диагонализуем. \square

Критерий диагонализуемости линейного оператора

Теорема (Критерий диагонализуемости - 2). *Линейный оператор φ диагонализуем тогда и только тогда, когда*

1. $\chi_\varphi(t)$ разлагается на линейные множители;
2. Для любого собственного значения $\lambda \in \text{Spec}(\varphi)$ равны его геометрическая и алгебраическая кратности.

Доказательство.

\Rightarrow Так как φ — диагонализуем, то существует базис $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$ такой, что:

$$A(\varphi, \mathfrak{e}) = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n).$$

Тогда:

$$\chi_\varphi(t) = (-1)^n \begin{vmatrix} \mu_1 - t & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n - t \end{vmatrix} = (-1)^n (\mu_1 - t) \dots (\mu_n - t) = (t - \mu_1) \dots (t - \mu_n).$$

Итого, первое условие выполняется.

Теперь перепишем характеристический многочлен в виде $\chi_\varphi(t) = (t - \lambda_1)^{k_1} \dots (t - \lambda_s)^{k_s}$, где $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$ и $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\} = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$. Тогда $V_{\lambda_i} \supseteq \langle e_j \mid \mu_j = \lambda_i \rangle$, следовательно, $\dim V_{\lambda_i}(\varphi) \geq k_i$. Но мы знаем, что $\dim V_{\lambda_i} \leq k_i$! Значит, $\dim V_{\lambda_i}(\varphi) = k_i$.

\Leftarrow Так как $V_{\lambda_1}(\varphi) + \dots + V_{\lambda_s}(\varphi)$ — прямая, то $\dim(V_{\lambda_1}(\varphi) + \dots + V_{\lambda_s}(\varphi)) = k_1 + \dots + k_s = n$.

Пусть \mathfrak{e}_i — базис в V_{λ_i} . Тогда $\mathfrak{e}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{e}_s$ — базис в V . То есть мы нашли базис из собственных векторов, следовательно, φ диагонализуем.

□

Замечание. Если выполнено только первое условие, то линейный оператор φ можно привести к Жордановой нормальной форме. Существует базис \mathfrak{e} , такой что

$$A(\varphi, \mathfrak{e}) = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1}^{n_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2}^{n_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{\lambda_s}^{n_s} \end{pmatrix}$$

Где $J_{\lambda_i}^{n_i}$ — Жорданова клетка

$$J_{\lambda_i}^{n_i} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix} \in M_n(F).$$

В частности всякий линейный оператор над \mathbb{C} можно привести к Жордановой нормальной форме.

Пример.

1. $\varphi = \lambda Id$

$$\chi_{\varphi}(t) = (-1)^n \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

$\text{Spec } \varphi = \{\lambda\}$, алгебраическая и геометрическая кратности равны n .

2. $V = \mathbb{R}^2$, φ — ортогональная проекция на прямую l . $e_1 \in l, e_2 \in l^{\perp} \setminus \{0\}$, тогда (e_1, e_2) — базис из собственных векторов.

$$A(\varphi, \mathfrak{e}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \chi_{\varphi}(t) = (t - 1)t$$

$$\text{Spec } \varphi = \{0, 1\} \Rightarrow \begin{cases} \text{если } 0, \text{ то алгебраическая кратность} = \text{геометрическая кратность} = 1 \\ \text{если } 1, \text{ то алгебраическая кратность} = \text{геометрическая кратность} = 1 \end{cases}$$

3. $V = \mathbb{R}^2$, φ — поворот на угол $\alpha \neq \pi k$. Если (e_1, e_2) — правый ортонормированный базис, то

$$A(\varphi, \mathfrak{e}) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\chi_{\varphi}(t) = (-1)^2 \begin{vmatrix} \cos \alpha - t & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha - t \end{vmatrix} = t^2 - 2 \cos \alpha t + 1$$

В данном случае $D < 0$, значит над \mathbb{R} нет корней \Rightarrow оператор не диагонализуем над \mathbb{R} . Над \mathbb{C} $\chi_{\varphi}(t)$ имеет два различных корня, следовательно оператор диагонализуем над \mathbb{C} .

4. $V = \mathbb{R}[x]_{\leq n}$, φ — дифференцирование. $\mathfrak{e} = (1, \frac{x}{1!}, \frac{x^2}{2!}, \dots, \frac{x^n}{n!})$ — базис в V .

$$A(\varphi, \mathfrak{e}) = J_0^{n+1} \Rightarrow \chi_{\varphi}(t) = t^{n+1}$$

Собственное значение $\lambda = 0$, геометрическая кратность = 1, алгебраическая кратность = $n + 1$.

Теорема. Если $F = \mathbb{R}$, то для всякого линейного оператора $\varphi \in L(V)$ существует либо одномерное, либо двумерное φ -инвариантное подпространство.

Доказательство. $\chi_{\varphi}(t)$ имеет действительные корни \Rightarrow есть собственный вектор \Rightarrow есть одномерное φ -инвариантное подпространство. Если $\chi_{\varphi}(t)$ не имеет действительных корней, пусть $\lambda + i\mu$ — комплексный корень, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \mu \neq 0$. Выберем базис в $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$ в V , пусть $A = A(\varphi, \mathfrak{e})$. Над \mathbb{C} у φ есть собственный вектор, следовательно $\exists u \in \mathbb{R}^n$ и $v \in \mathbb{R}^n$, такие что $A(u + iv) = (\lambda + i\mu)(u + iv) = (\lambda u - \mu v) + i(\mu u + \lambda v) = Au + iAv$. Отделяя действительную и мнимую части получаем

$$\begin{cases} Au = \lambda u - \mu v \\ Av = \mu u + \lambda v \end{cases}$$

Пусть $x \in V$ — вектор с координатами u , $y \in V$ — вектор с координатами v , тогда

$$\begin{cases} \varphi(x) = \lambda x - \mu y \\ \varphi(y) = \mu x + \lambda y \end{cases} \Rightarrow U = \langle x, y \rangle - \varphi\text{-инвариантное подпространство}$$

$\dim U \leq 2$. □