Отчёт

Иван Рубачёв, 161

30 ноября 2018 г.

Содержание

1 Модуль интегрирования

Необходимо реализовать и протестировать модуль интегрирования. Было решено для интегрирования использовать метод трапеций. Реализацию можно найти в файле `integral.py`. Здесь приведен код для тестирования и результаты.

1.1 Сравнение с scipy.integrate.quad

Были выбраны следющие функции:

1. Непрерывная
$$f(x) = \arctan(x+2) + 1 \tag{1}$$
2. Осцилирующая
$$f(x) = \sin(100x) \tag{2}$$
3. Разрывная
$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + 2 & \text{if } x \geqslant 0 \\ x - 1 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{3}$$

Метод трапеций, заключается в замене на каждом элементарном отрезке подынтегральной функции на многочлен первой степени, то есть линейную функцию. Площадь под графиком функции аппроксимируется прямоугольными трапециями.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}(x_{i+1} - x_i) \tag{4}$$

Порядок аппроксимации $p = 3$ для метода трапеций (т.к. ошибка оценивается сверху $O(h^3) = O(1/N^3)$). На Рис. 1 изображены отклонения от значения интеграла, вычисляемого функцией `scipy.integrate.quad`

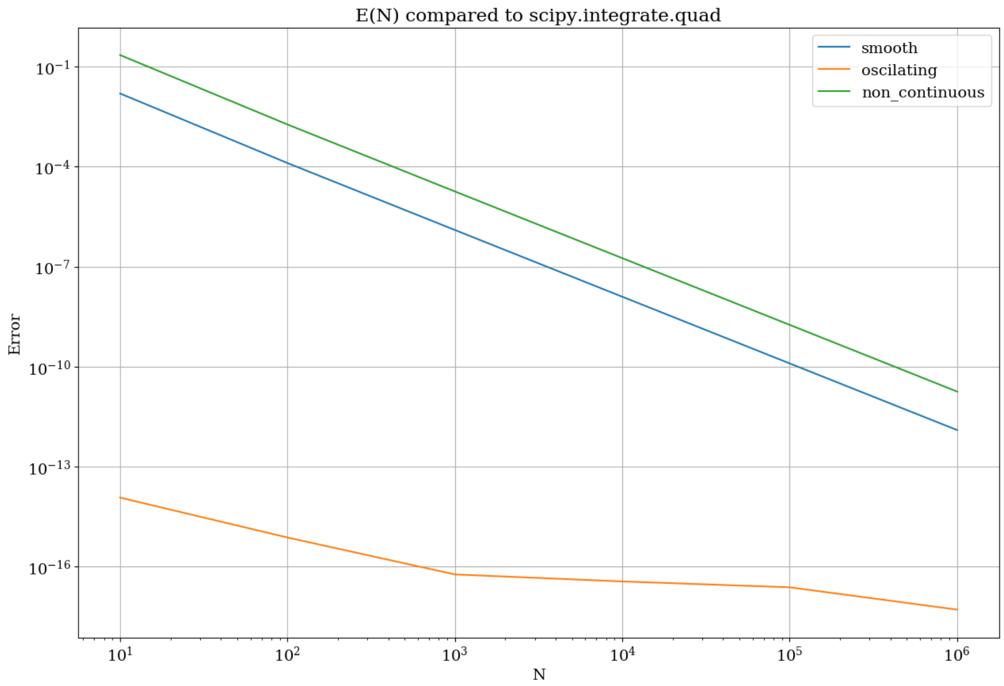

Рис. 1: Графики ошибки в зависимости от числа разбиений сетки

1.2 Оценка с использованием правила Рунге

Оценка на погрешность вычисления интеграла при числе шагов $2n$ можно оценить сверху:

$$\Delta_{2N} \leqslant \frac{|I_{2N} - I_N|}{2^{p-1} - 1} = \frac{|I_{2N} - I_N|}{3} \text{ т.к. для метода трапеций } p = 3 \tag{5}$$

Графики зависимости погрешности (верхней оценки) изображены на Рис. 2

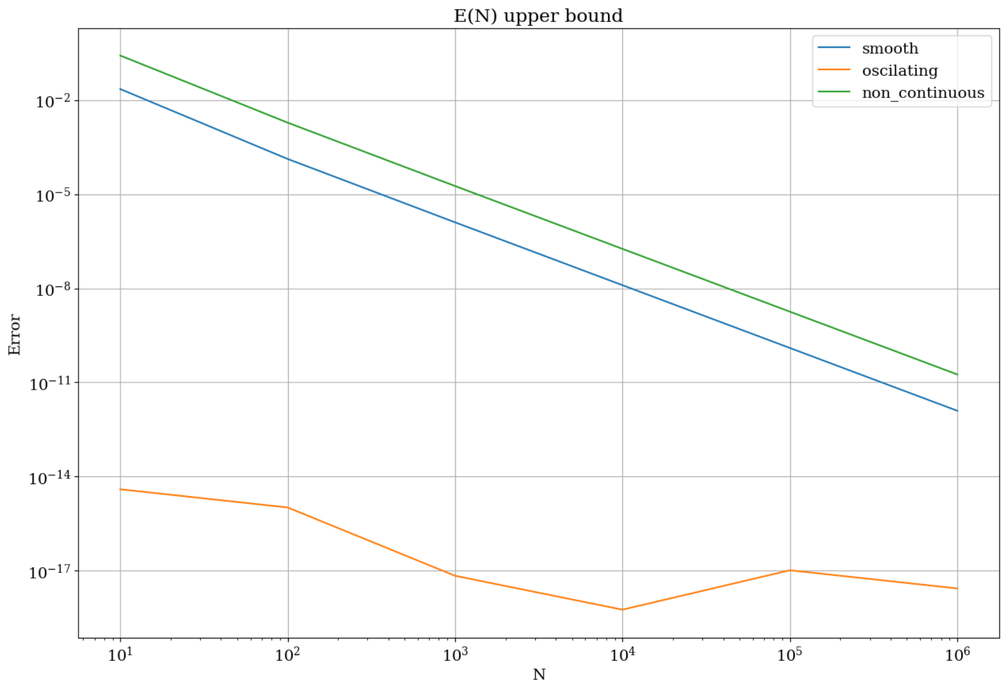

Рис. 2: Оценка на погрешность вычисления интеграла

2 Модуль интерполяции

В данном разд описан метод интерполяции, использующий кубический сплайн дефекта 1 и метод прогонки для вычислени коэффициентов.

2.1 Описание алгоритма

Функция задана на отрезке $[a, b]$, разбитом на части $[x_{i-1}, x_i]$. Кубический сплайн дефекта 1 – функция $S(x)$, которая:

- На каждом подотрезке является многочленом степени $\leqslant 3$
- Имеет непрерывную первую и вторую производные на $[a, b]$
- В точках $S(x_i) = f(x_i)$

На каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ функция $S(x)$ – некоторый многочлен 3

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3 \tag{6}$$

Тогда $S_i(x_i) = a_i, S_i'(x_i) = b_i, S_i''(x_i) = c_i$. Условия непрерывности всех производных до второго порядка включительно записываются следующим образом:

$$\begin{gathered} S_i(x_{i-1}) = S_{i-1}(x_{i-1}) \\ S_i'(x_{i-1}) = S_{i-1}'(x_{i-1}) \\ S_i''(x_{i-1}) = S_{i-1}''(x_{i-1}) \end{gathered}$$

Также запишем условие интерполяции: $S(x_i) = f(x_i)$. Можем выразить неизвестные коэфициенты следующим образом:

$$\begin{aligned} & a_i = f(x_i) \\ & d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{3h_i} \\ & b_i = \frac{a_i - a_{i-1}}{h_i} + \frac{2c_i + c_{i-1}}{3} \cdot h_i \\ & c_{i-1}h_i + 2c_i(h_i + h_{i+1}) + c_{i+1}h_{i+1} = 3\left(\frac{a_{i+1} - a_i}{h_{i+1}} - \frac{a_i - a_{i-1}}{h_i}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1 \end{aligned}$$

Если предположить, что $c_0 = c_N = 0$, то последнюю систему можно решить методом прогонки, а затем вычислить оставчиеся коэффициенты.

2.1.1 Метод прогонки

Пусть дана СЛАУ с трехдиагональной матрицей A:

$$a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = f_i, \quad i = 0, \ldots, n \tag{7}$$

Можно расширеную матрицу системы к следующему виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & P_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & Q_1 \\ 0 & 1 & P_2 & 0 & \cdots & 0 & Q_2 \\ 0 & 0 & 1 & P_3 & \cdots & 0 & Q_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & Q_n \end{pmatrix} \tag{8}$$

Откуда получить решение: $x_i = -P_i x_{i+1} + Q_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$. При этом коэффициенты можно посчитать так:

$$P_i = \frac{c_i}{-b_i - a_i P_{i-1}}, \quad Q_i = \frac{a_i Q_{i-1} - f_i}{-b_i - a_i P_{i-1}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{9}$$

Поиск коэффициентов – прямой ход метода прогонки. Далее находим x_n по формуле, оставшиеся коэфициенты выражаем рекуррентно:

$$x_n = \frac{a_n Q_{n-1} - f_n}{-b_n - a_n P_{n-1}} \tag{10}$$

2.2 Графики

Здесь приведены графики для различных видов функций: гладкой, разрывной и осцилирующей (взяты из предыдущего пункта):