수학 발표

Bipartite Matching

10217 남승원

- 이분매칭 -

문제

카페에서 친구들끼리 공부를 했는데 나가려고 하니 가방이 섞였다.
몇 가지의 정보를 알고 있을 때 최대한 가방을 찾아주자!
자기의 가방이라고 생각하는 가방만 최대 하나씩 가져갈 수가 있음.

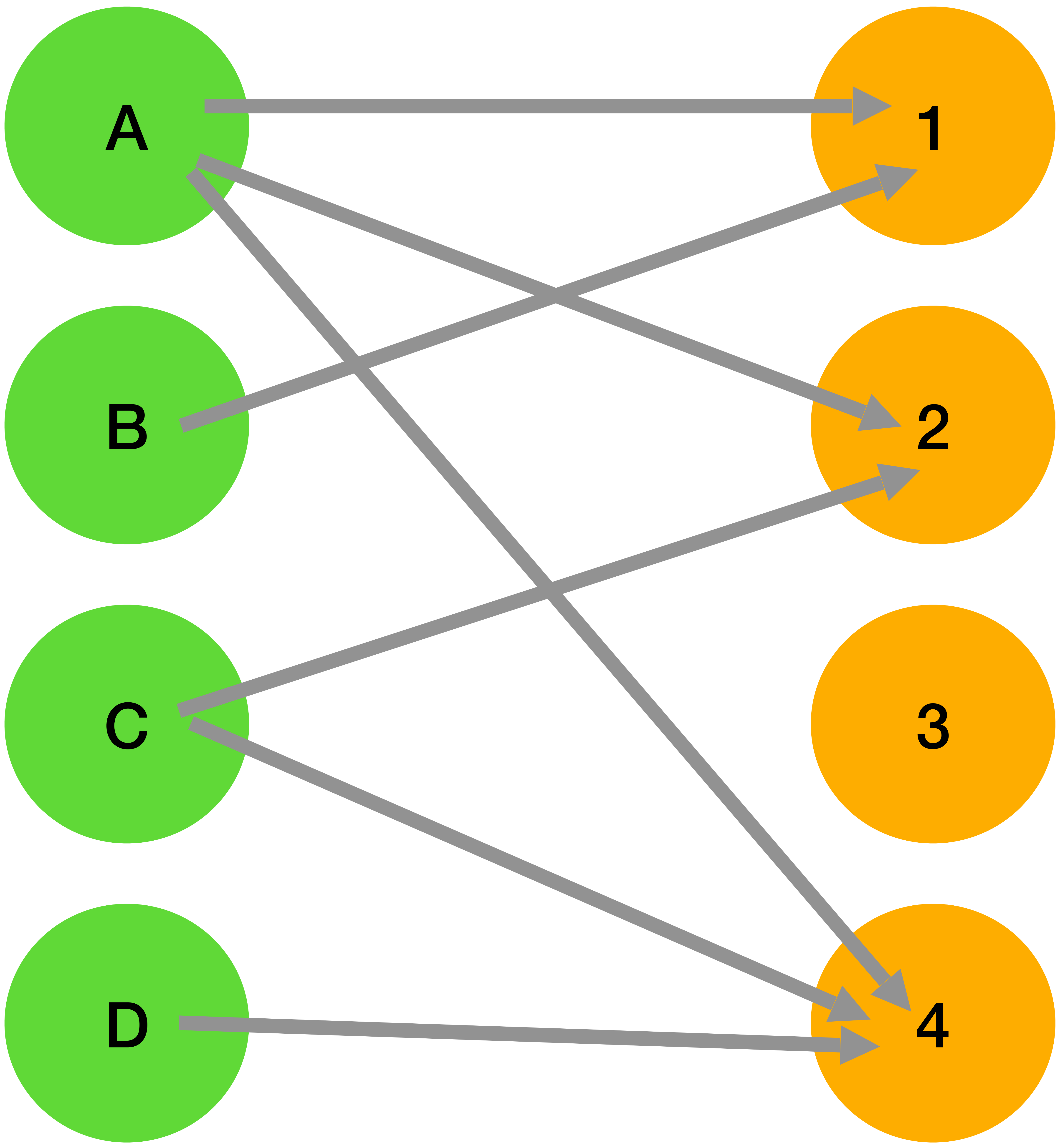
1. 친구 A는 1번, 2번, 4번 가방 중 하나가 자기 것이라고 생각함.
2. 친구 B는 1번 가방을 자기 것이라고 생각함.
3. 친구 C는 2번, 4번 가방 중 하나가 자기 것이라고 생각함.
4. 친구 D는 4번 가방을 자기 것이라고 생각함.

문제

방금 조건을 그래프로 표현해보자!

문제

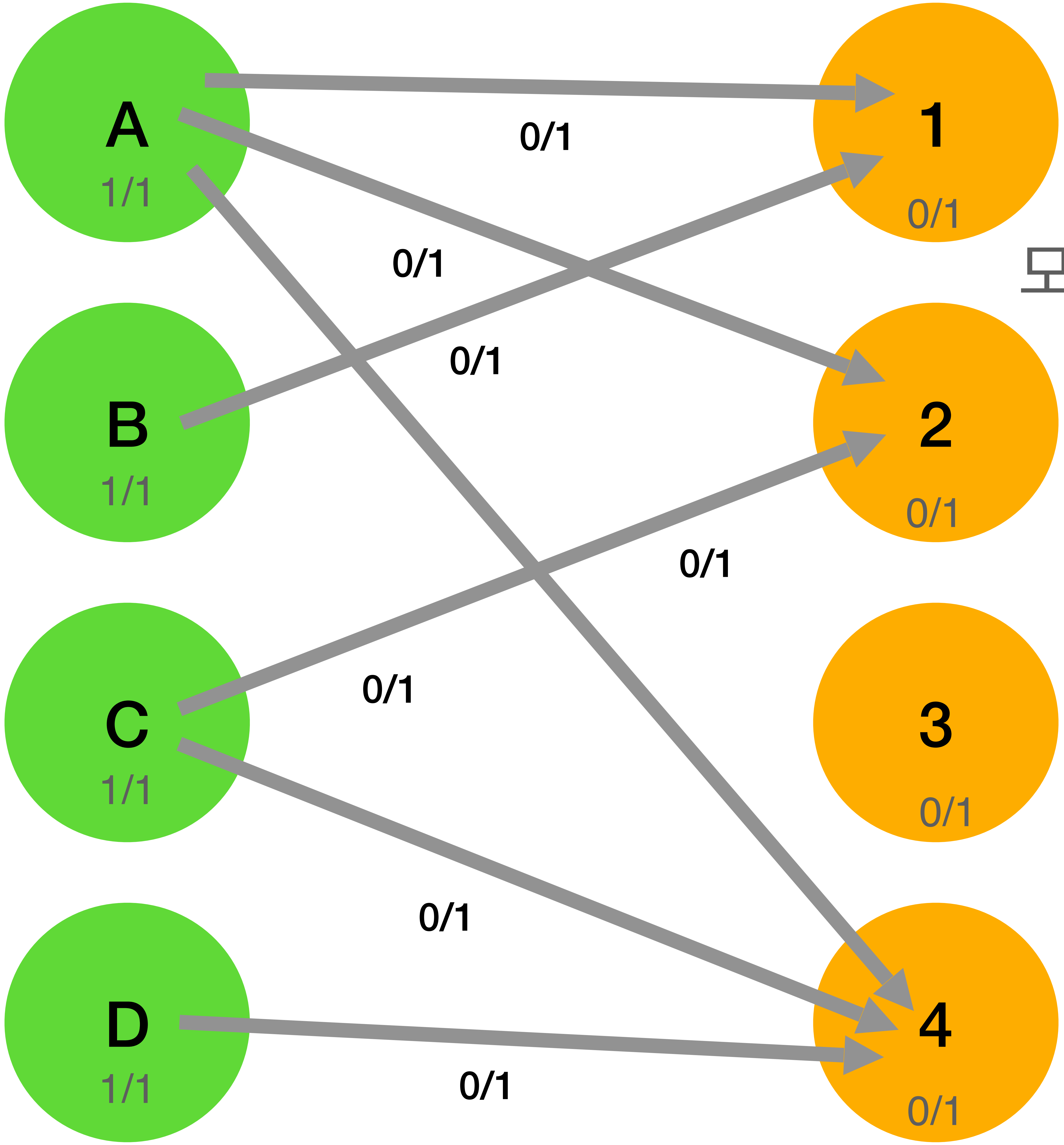
다음과 같은 이분그래프!



문제

Flow?

다음과 같은 이분그래프!



모든 간선의 용량이 1??

최대한 유량을 많이
흘려보내기

문제

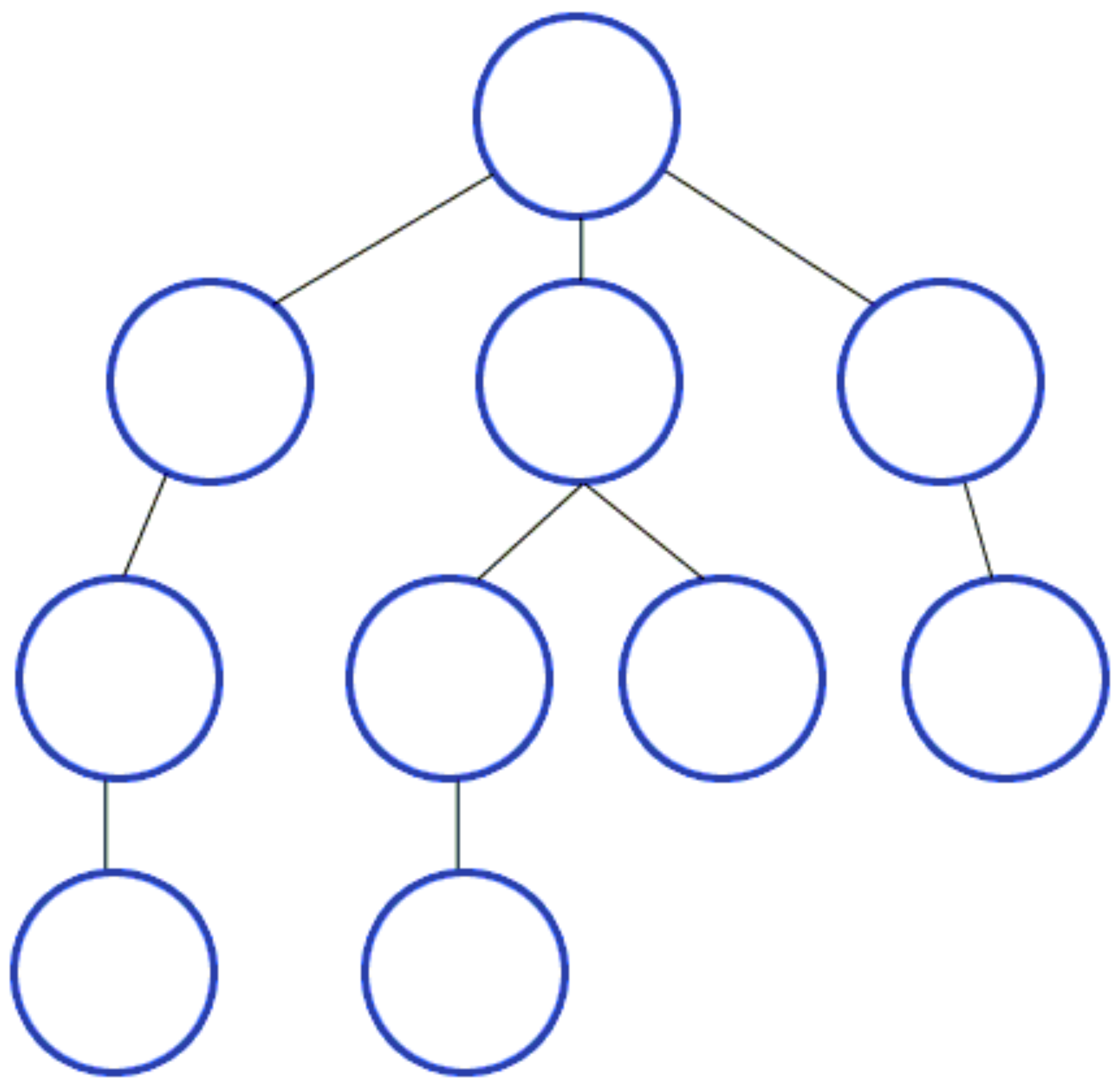
이분매칭 : 이분 그래프에서의 최대 매칭 수.
(용량이 1인 간선에 최대한 유량 흘리기)

이분그래프 : 정점을 두개의 그룹으로 나누었을때, 존재하는 모든 간선의 양 끝점이 서로 다른 그룹에 속하는 그래프.

문제

이분 그래프에서 매칭을 효율적으로 하는 쉽고 간단한 알고리즘.

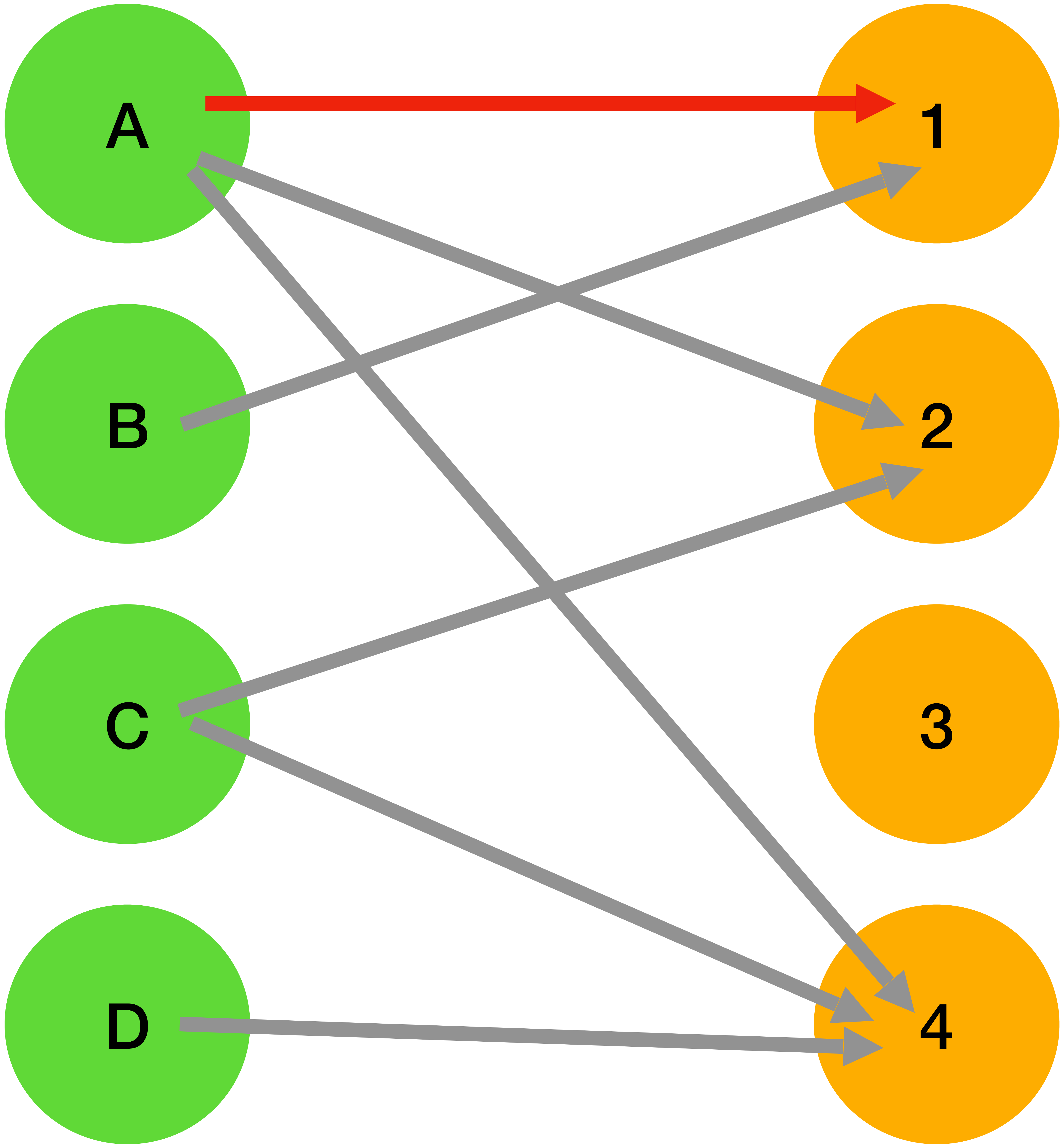
모든 간선의 용량이 1인점, 구현이 간편하다는 점에서
깊이우선탐색(DFS)를 사용하는 알고리즘을 선택
Ford-Fulkerson Algorithm



문제

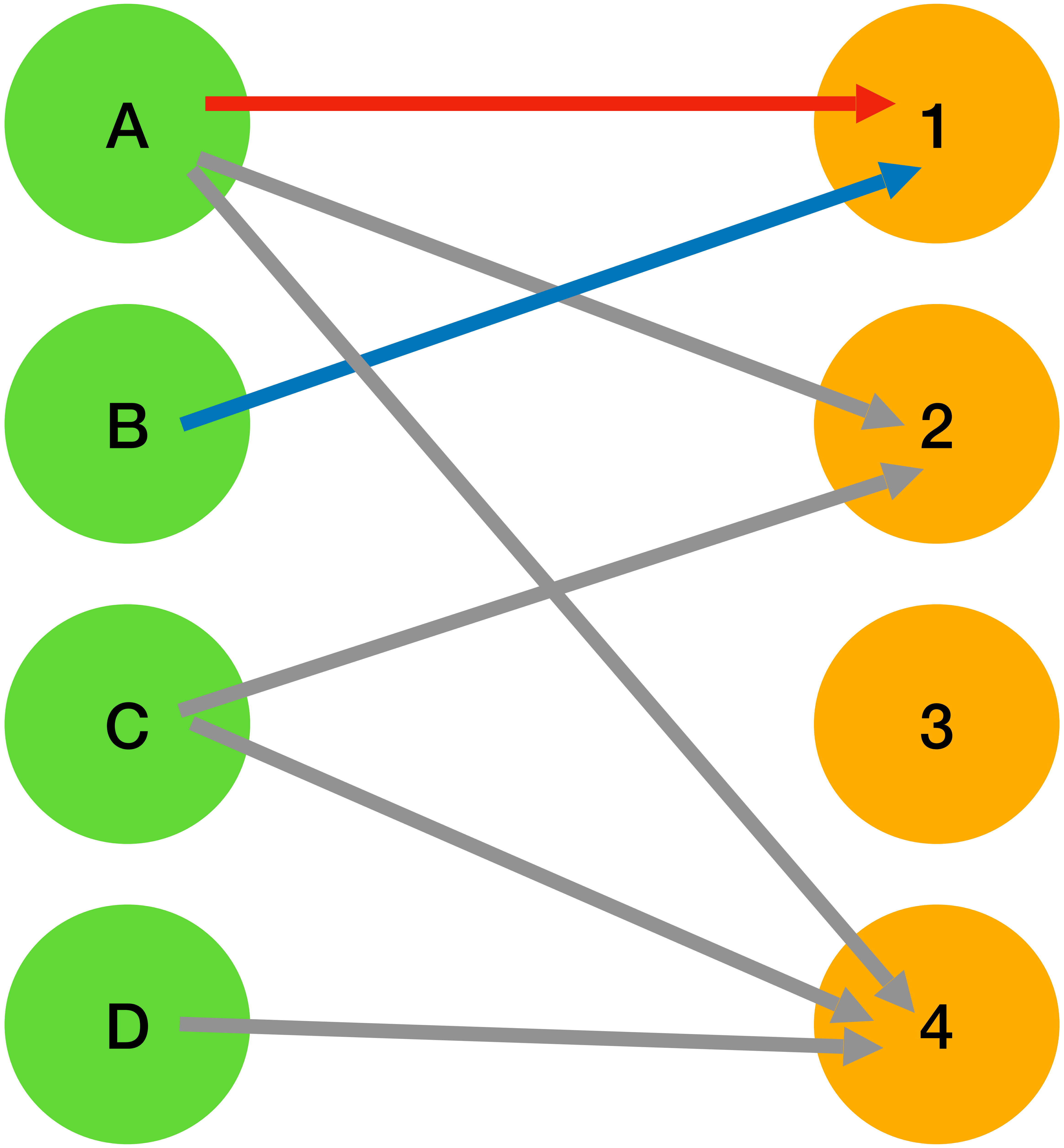
포드풀커슨 알고리즘을 사용해서 해결하고
그 과정을 이해하고 코드로 짜보자!

문제



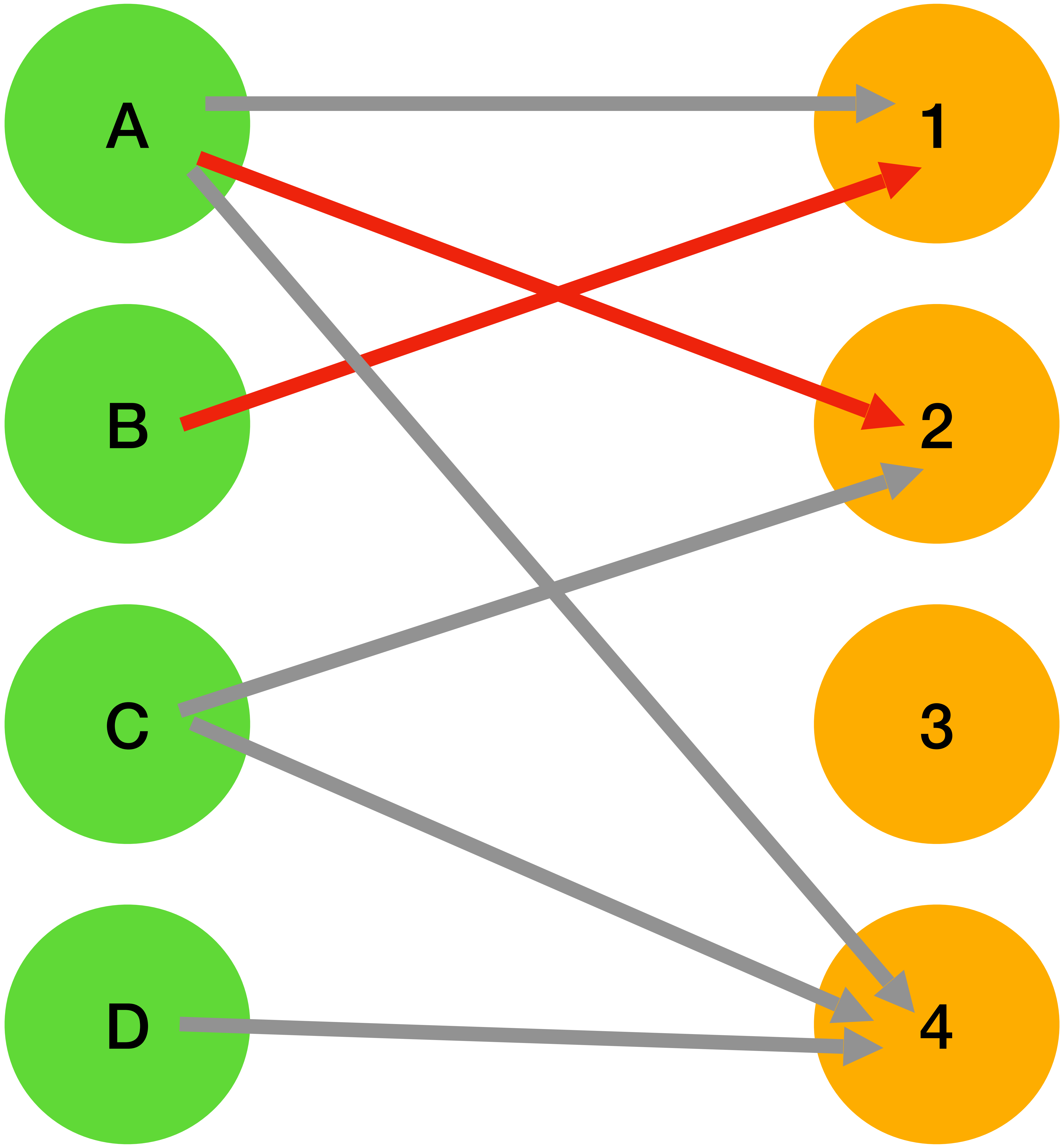
우선 A를 매칭하자
바로 매칭되네?
그럼일단 매칭수 + 1

문제



B를 매칭해보자..
B를 1번에 매칭하려는데..
겹치네?

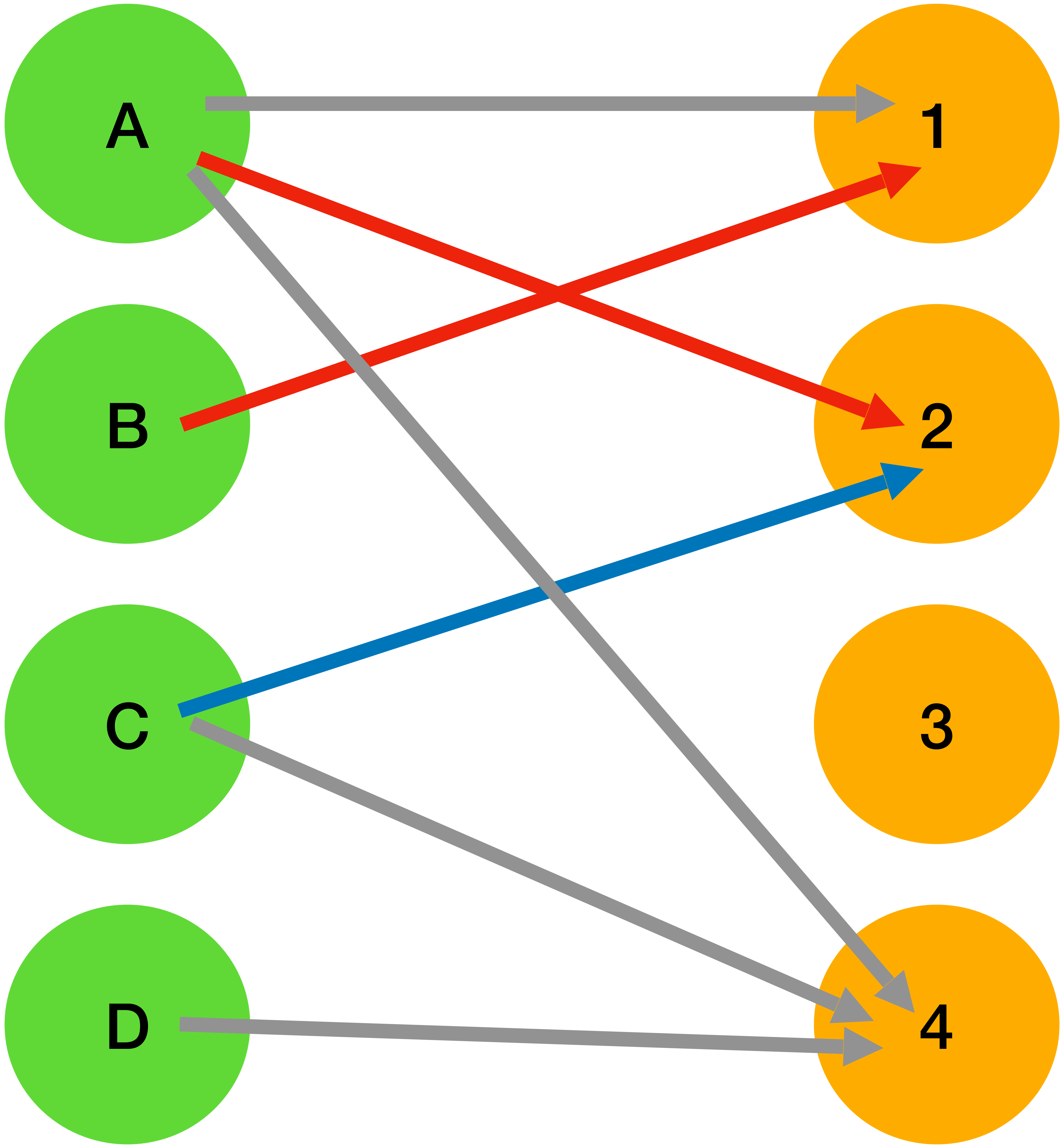
문제



다시 A로가서
다음 간선을 통해
다른 정점과 연결해준다.

A, B 매칭성공

문제

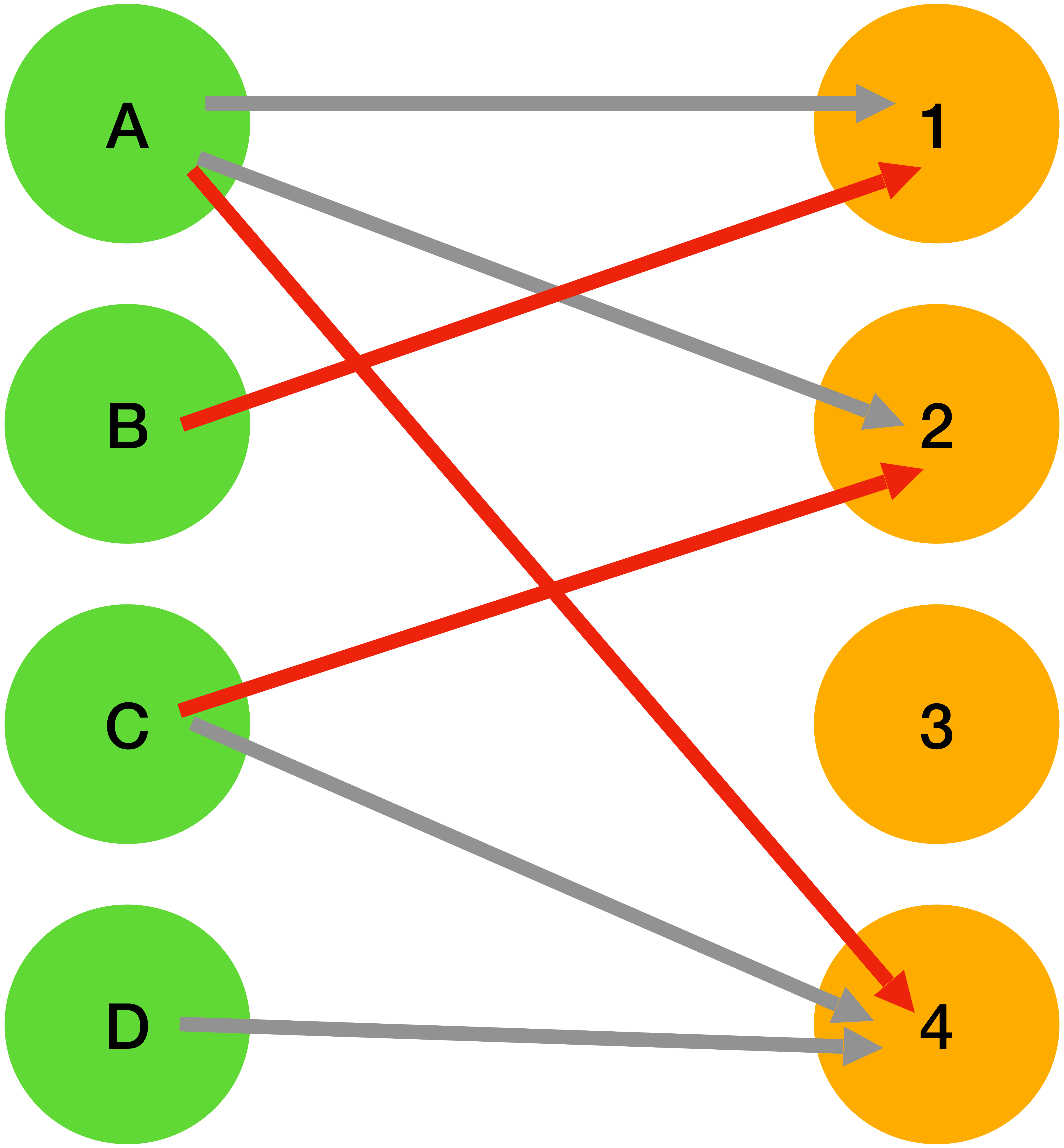


이제 C를 매칭하자.

C를 매칭하려 2번정점과 연결하니.. 이미 매칭했네?

2번과 매칭한 A를 다시 다음 간선을 통해 다른정점과 연결한다.

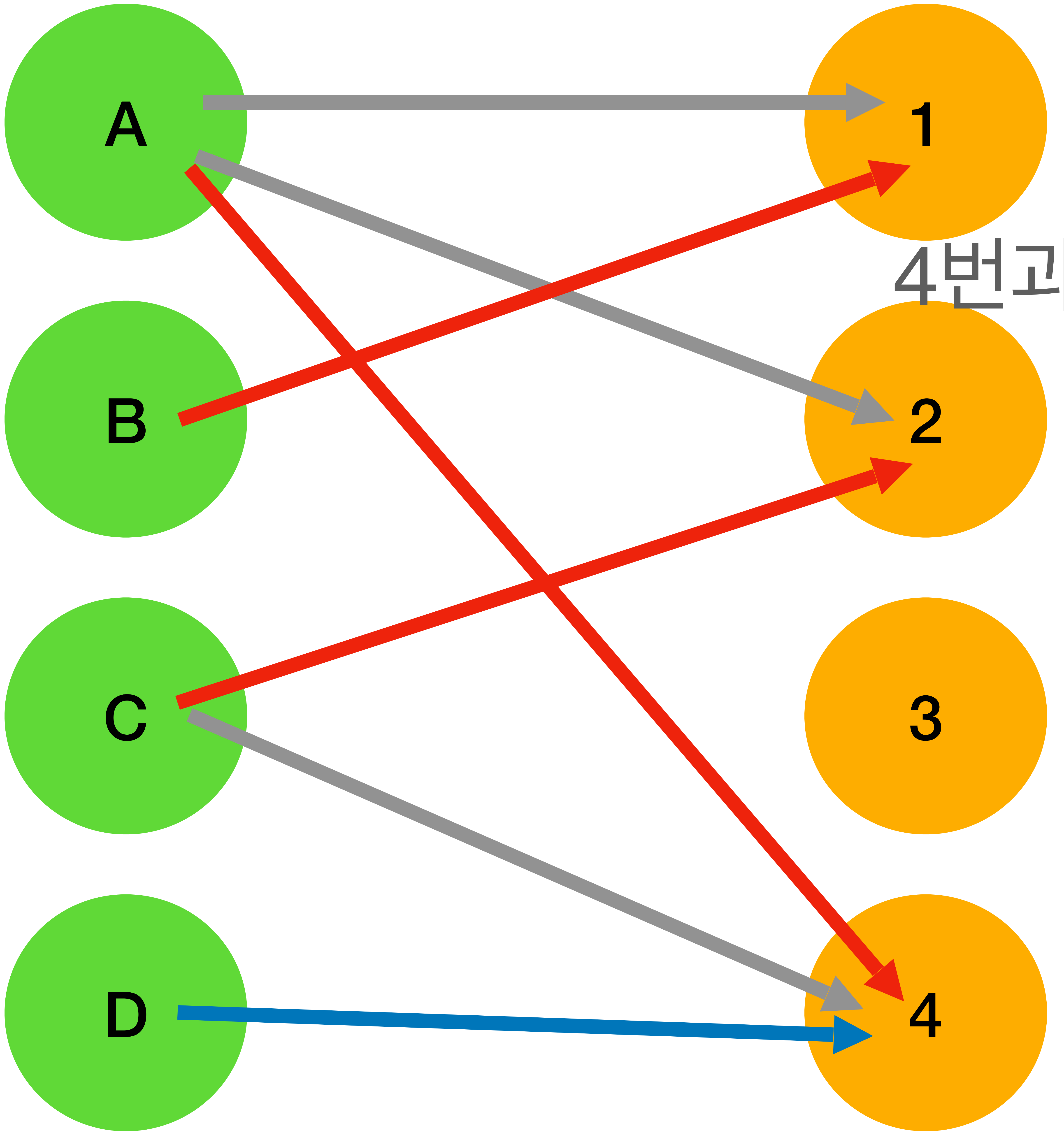
문제



A, B, C를 매칭성공시켰다.

이제 D를 매칭시켜볼까?

문제



D를 4번과 매칭하려고하니..
4번과 연결된 A번을 다른곳에 연결해도
다 안되잖아?

매칭실패.
총 최대매칭수 : 3

코드를 간단하게 보자.

```
bool dfs(int here){
    visit[here] = true;
    for(int next : graph[here]){
        if(match[next] == -1 || (visit[match[next]] == false && dfs(match[next]))){
            match[next] = here;
            return true;
        }
    }
    return false;
}
```

match[x] = y : x번정점과 y번정점이 됫다는것 (match는 -1로 초기화)

visit[x] = x번 정점을 방문했는가?

graph[x] = {…} : 정점 x와 연결되있는 간선 …

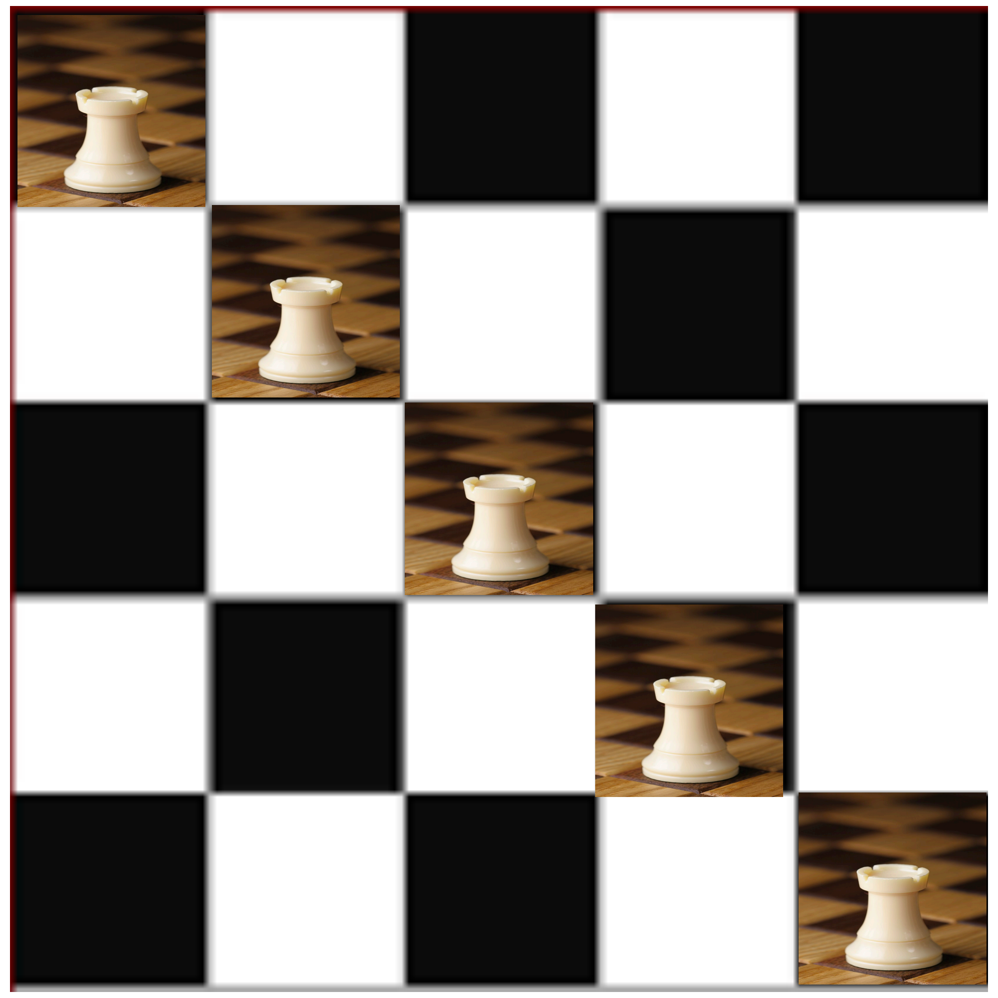
이분매칭 너무 쉬운데???

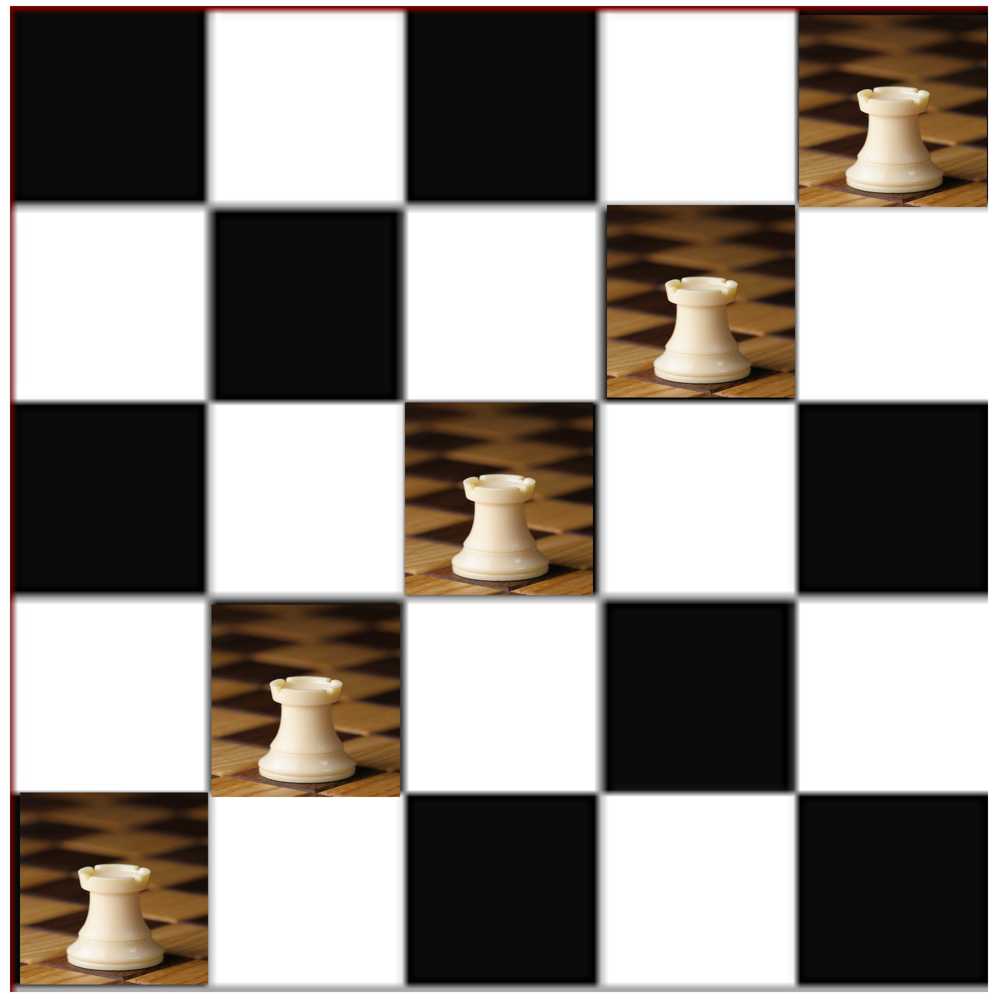
절대아니다.

이분 매칭 문제에서 가장 재밌고 어려운 부분은 그래프 모델링
어떠한 문제가 있을 때 어떻게 이분 그래프로 모델링 하는지가 핵심

응용

특수한 체스판이 있다. 특수한 체스판에 몇개의 룩을 배치할수 있을까?
룩은 행과 열로 이동하며 서로 이동경로가 겹치면 안됨.





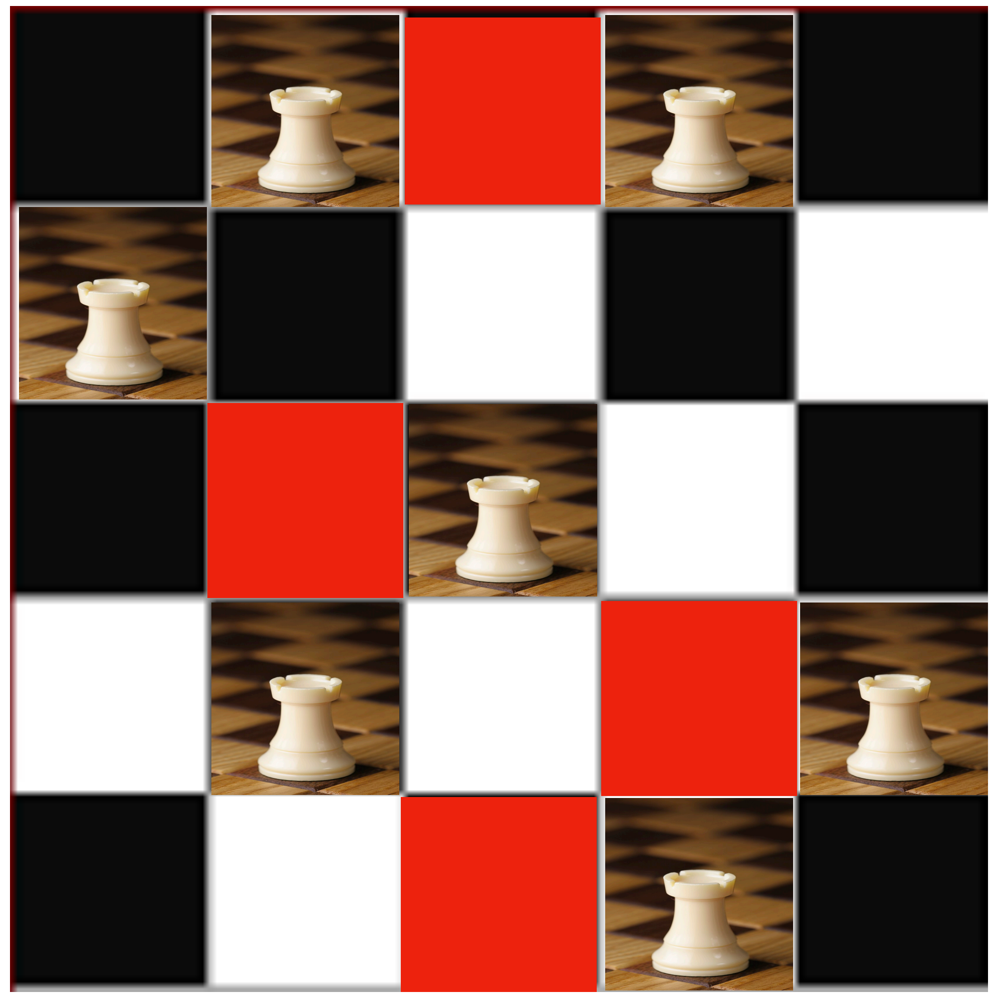
일반 체스판의경우 n*n 체스판 일시
n개의 룩을 배치할수 있음

응용

빨간색 칸은 벽이다. 벽으로 막혀있으면 룩이 이동할 수 없다.
최대 몇개의 룩을 배치할수 있는가?

응용

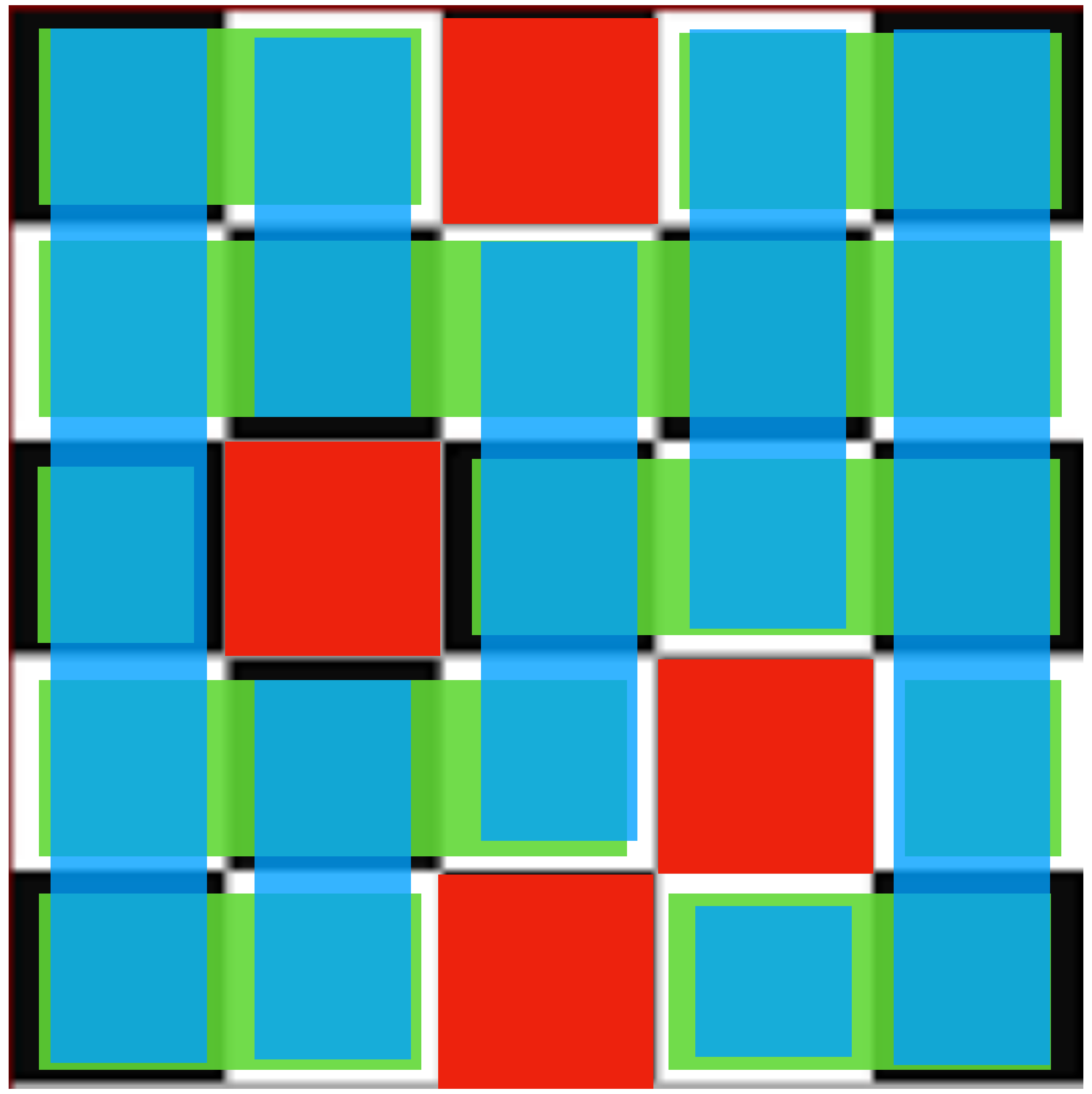
정답은 최대 룩을 7개 배치할 수 있다.



이문제는 이분매칭으로 해결이 가능하다!

응용

어떤 칸에 룩을 배치하면 이 칸을 포함한 행과 열에는
더이상 룩을 배치할 수 없음



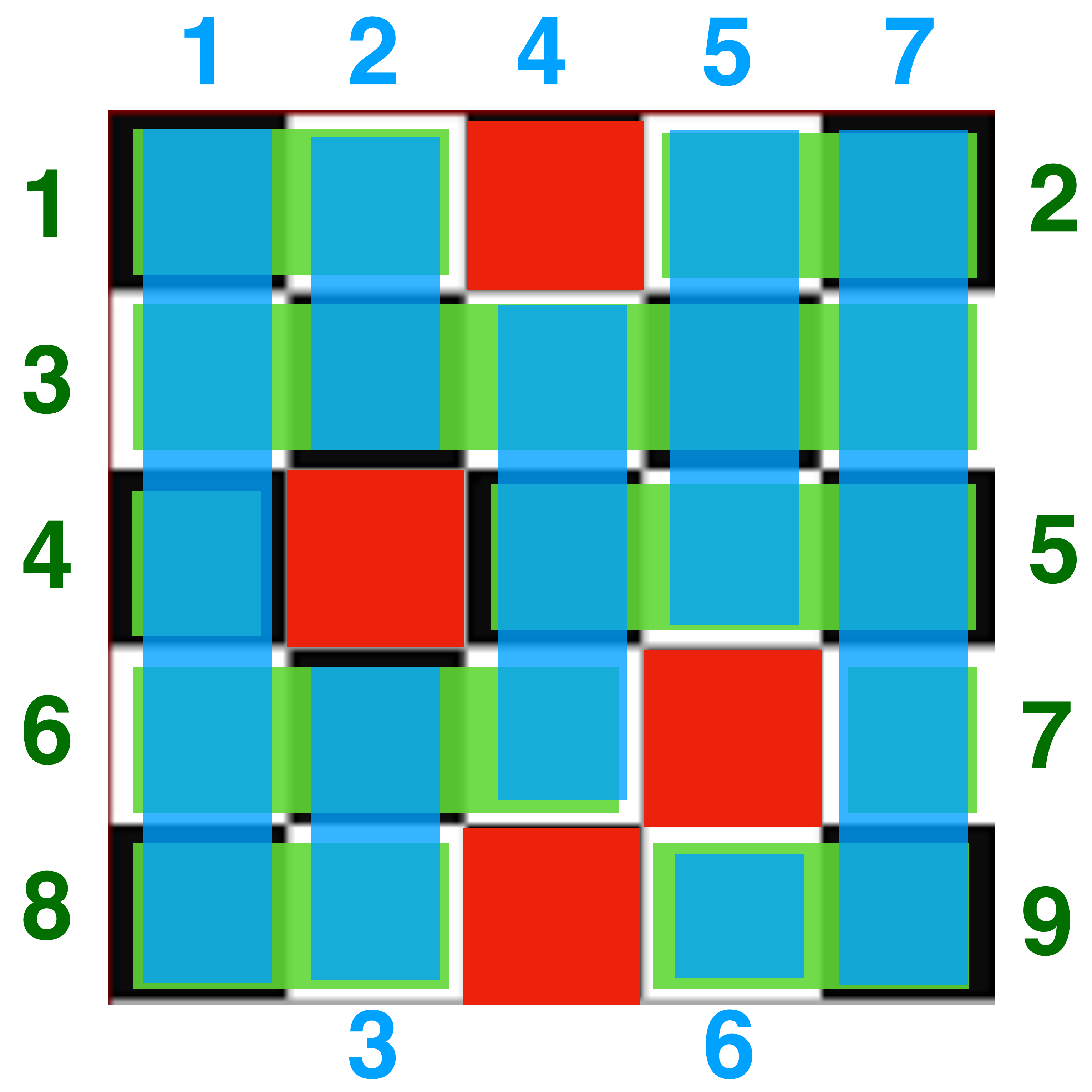
===

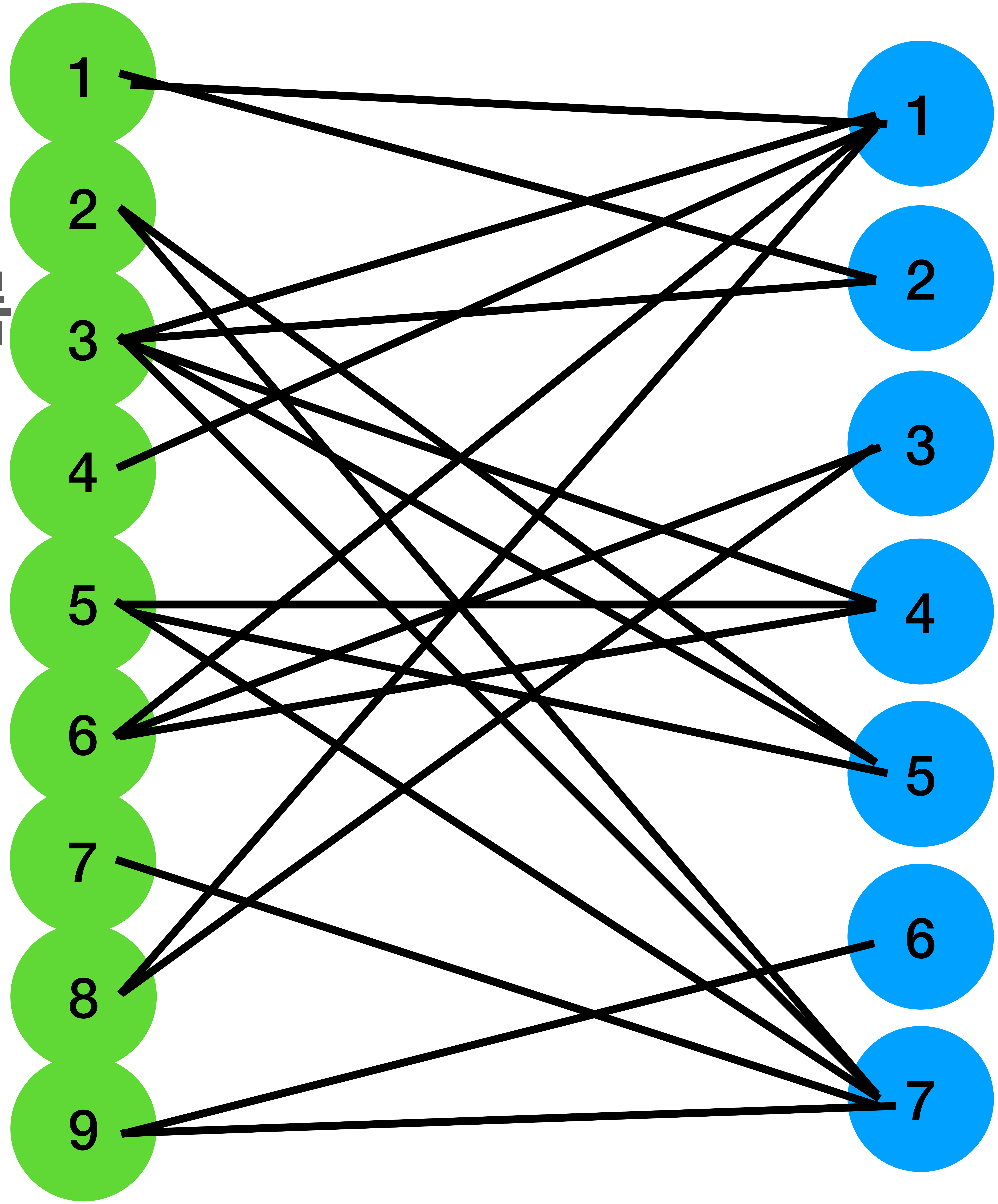
룩을 배치하는것은 두 빈 정점을 매칭하는것

이분그래프로 만들어보자!

응용

다음과 같은 이분그래프에서
최대매칭 = 배치할수 있는 룩





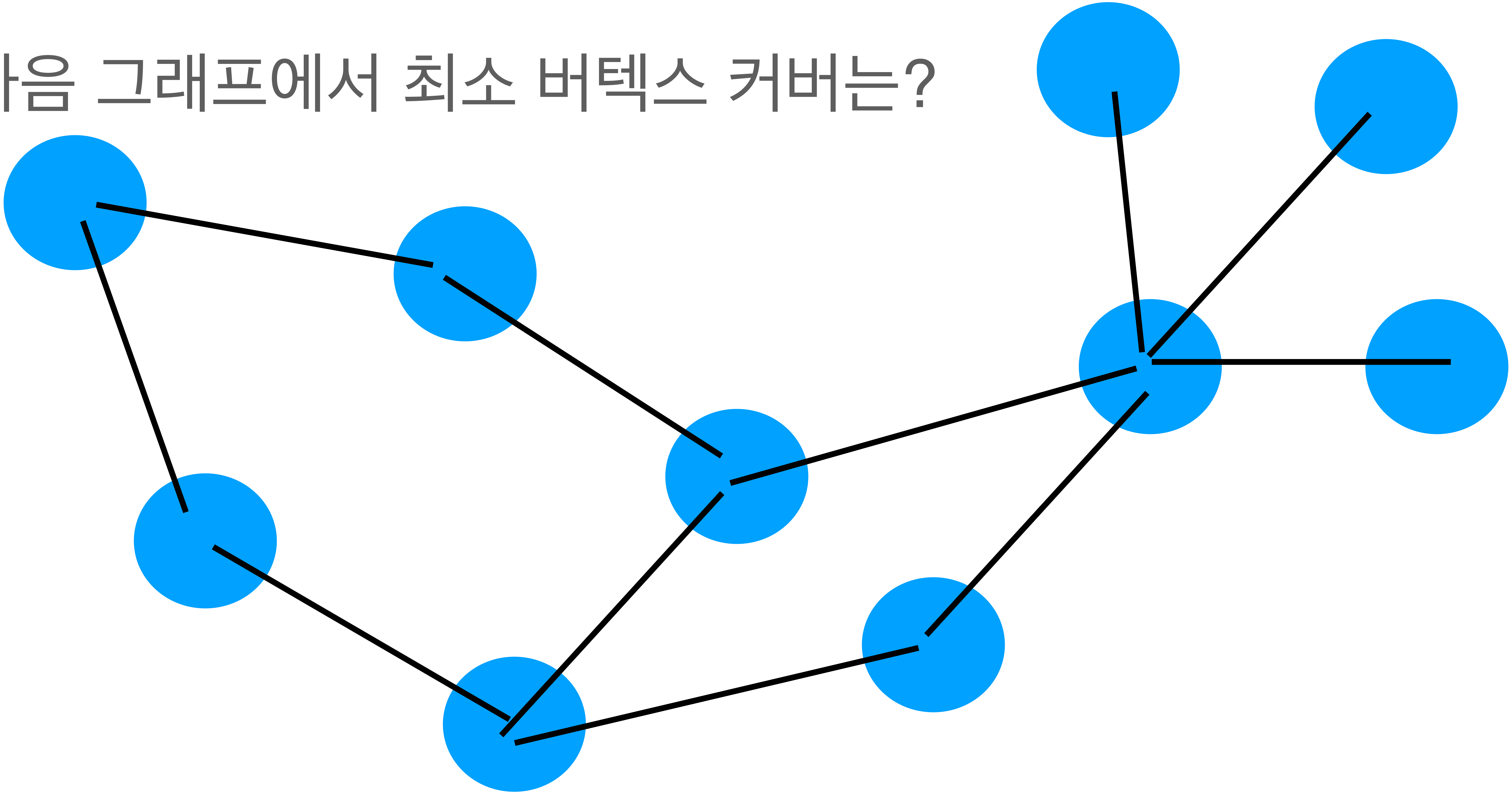
응용

이분매칭으로 그래프의 최소 버텍스 커버를 알수있음.

최소 버텍스 커버 : 정점 집합 S가 있을 때,
모든 간선은 양 끝점 중 적어도 하나가 S에 포함 되어야 한다.

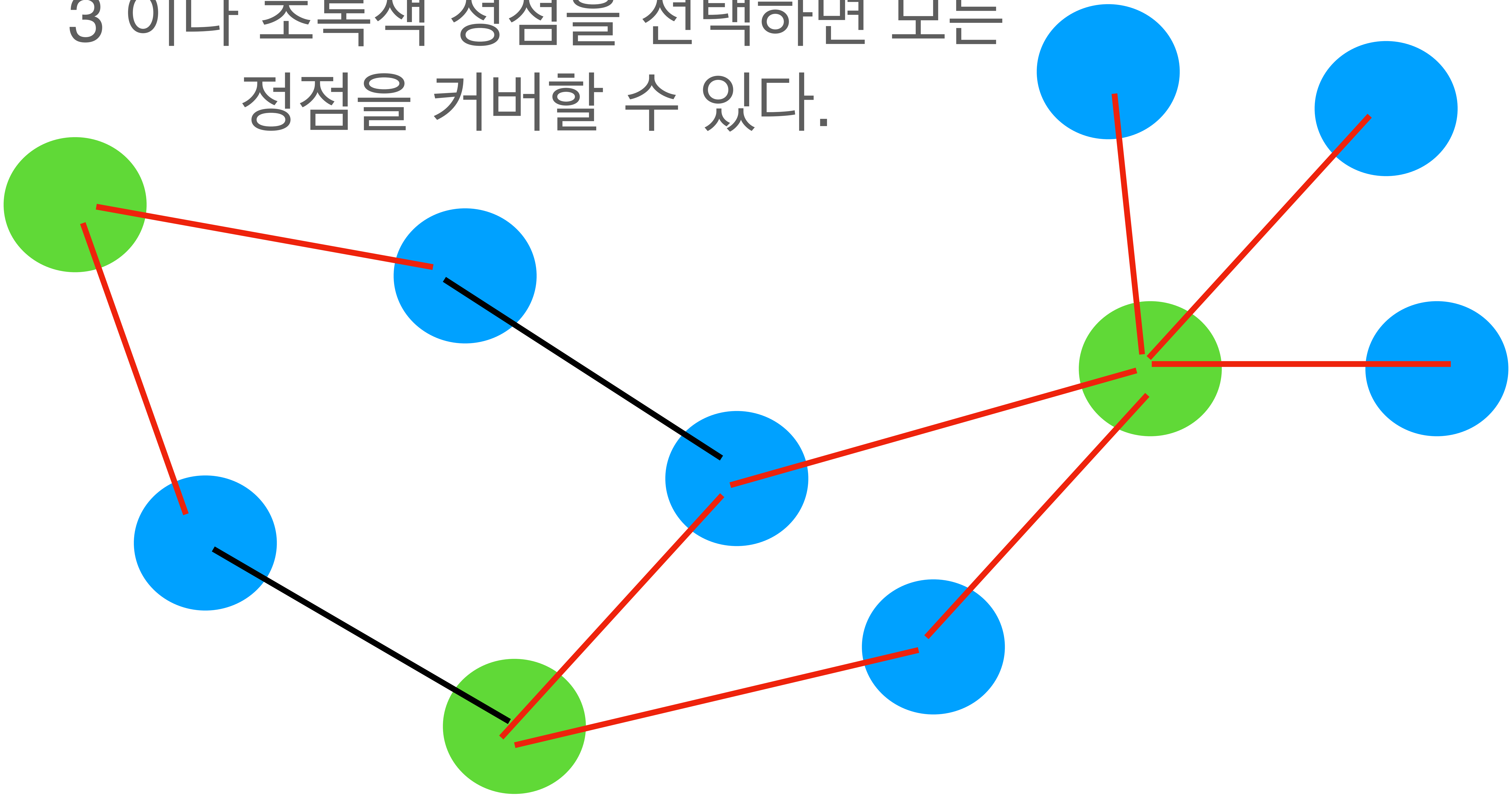
응용

다음 그래프에서 최소 버텍스 커버는?



응용

3 이다 초록색 정점을 선택하면 모든 정점을 커버할 수 있다.



응용

이분 그래프 에서 최대매칭 = 최소 버텍스 커버

최대 매칭보다 작은 버텍스 커버가 존재한다고 할 때
최소 1개 이상의 매칭은, 양 정점이 버텍스 커버에 속하지 않을 것이다.
고로 그럴 수 없다.

요약

정점을 두 개의 그룹으로 나누었을 때, 존재하는 모든 간선의 양 끝점이 서로 다른 그룹에 속하는 이분 그래프에 대한 기초적인 이론과 이에서 매칭을 효율적으로 하는 포드 폴커슨 알고리즘을 채택해 전반적인 이론을 설명했다. 뿐만 아니라 이분 매칭이 아닌 것 같은 문제에서도 어떻게 이분 그래프를 형성하여 이분 매칭을 해 문제를 해결하는 지를 설명하였다. 그 외에 다양한 그래프 이론 설명.