

# Objetivos

## Temario de la clase

- Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs)
- Problemas de valores/condiciones iniciales
- Metodos Runge-Kutta
- Sistemas dinámicos
- Caos

## EDOs en la física

Supongamos que queremos resolver el problema de movimiento balístico en forma numérica.

Las ecuaciones de movimiento son ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{dv}{dt} = f(x, t)$$

$$\frac{dx}{dt} = v$$

donde  $v = v(x, t)$ ,  $x = x(t)$ .

## Usamos diferencias finitas en las derivadas

Para calcular la velocidad podemos hacer diferencias finitas:

$$\frac{dv}{dt} \approx \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

como  $\Delta v = v(t + \Delta t) - v(t)$  si tenemos un tiempo  $t_i$  y posiciones  $x_i$

$$v_{i+1} = v_i + \Delta t f(x_i, t_i)$$

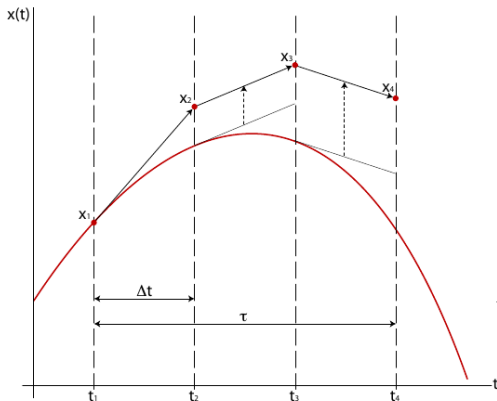
Haciendo lo mismo con la posición:

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t v_i$$

Notar que las ecuaciones están **acopladas**. La variable de una se usa en la otra.

# Método de Euler

Esto que acabamos de hacer es el metodo de Euler y se puede aplicar a cualquier EDO.



$$\text{1D: } x_{i+1} = x_i + f(x_i, t_i) \rightarrow \frac{dx}{dt} = f(x, t)$$

Multidimensional:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \mathbf{f}(\mathbf{x}_i, t_i) \rightarrow \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$$

donde ahora  $\mathbf{x}$  es un vector de  $N_x$  componentes  $\mathbf{x} = (x_{(1)}, \dots, x_{(N_x)})$

# Ecuaciones diferenciales de orden superior

Si tenemos una ecuación diferencial de orden  $n$ :

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2 x}{dt^2}, \dots, \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}}\right)$$

lo que se puede hacer es convertirlas en ecuaciones de primer orden.

Redefinimos con **nuevas variables**:

$$\frac{dx}{dt} = x_1, \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{d^3 x}{dt^3} = \frac{dx_2}{dt} = x_3, \dots, \frac{d^n x}{dt^n} = f(t, x, x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$$

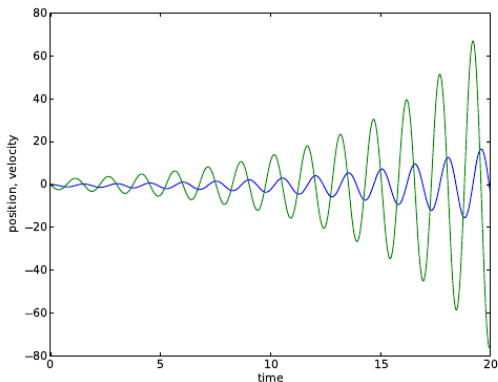
Se convirtieron en  **$n$  ecuaciones diferenciales de primer orden con  $n$  variables**.

Como es un problema de condición inicial para resolverlo se requiere de todas las variables:

$$x(0) = \alpha_1, x_2(0) = \alpha_2, x_3(0) = \alpha_3, \dots, x_{n-1}(0) = \alpha_{n-1}$$

## Problemas de Euler

Siempre sub-estima la curvatura de la solución. Para movimiento oscilatorio la energía de la solución de Euler crece con el tiempo.



## Podemos mejorar la precisión utilizando la serie de Taylor?

El método de Euler solo usa aproximación de primer orden, podemos usar órdenes superiores de la derivada?

$$\mathbf{x}(t + \delta) \approx \mathbf{x}(t) + \frac{d\mathbf{x}}{dt}\delta + \frac{1}{2!} \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\delta^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3\mathbf{x}}{dt^3}\delta^3 + \dots$$

El último término que consideremos es el orden de la integración y luego lo que quedaría sería el error de truncamiento.

$$\epsilon = \frac{\delta^m}{(m+1)!} \frac{d^{m+1}\mathbf{x}}{dt^{m+1}}$$

El gran problema de esto es que solo disponemos de  $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$  pero no disponemos de los órdenes superiores.

## Derivadas de orden superior

Si queremos ir a segundo orden en la serie de Taylor seria:

$$\mathbf{x}(t + \delta) \approx \mathbf{x}(t) + \frac{d\mathbf{x}}{dt}\delta + \frac{1}{2!} \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\delta^2$$

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \frac{d\dot{\mathbf{x}}}{dt} = \frac{df(\mathbf{x}(t), t)}{dt}$$

Es una fn de 2 variables. Debemos ser cuidadosos para evaluar la derivada de la función  $f$  con regla de la cadena:

$$\begin{aligned}\frac{df(x(t), t)}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} \\ &= f_t + f_x f\end{aligned}$$

Reemplazando,

$$\mathbf{x}(t + \delta) \approx \mathbf{x}(t) + f(\mathbf{x}, t)\delta + \frac{1}{2!}(f_t + f_x f)\delta^2$$

## Metodos de segundo orden

Evaluamos a la  $f$  en dos puntos  $t_i, x_i$  y el de su evolución,

$$x_{n+1} = x_n + ak_1 + bk_2$$

donde  $k_1 = f(t_i, x_i)$  y  $k_2 = f(t_i + \alpha\delta t, x_i + \beta k_1)$

Desarrollamos  $k_2$  alrededor de  $(t_i, x_i)$ :

$$k_2 = \delta [f(t_i, x_i) + \alpha\delta f_t(t_i, x_i) + \beta k_1 f_x(t_i, x_i) + O(\delta^2)]$$

$$k_2 = \delta f(t_i, x_i) + \alpha\delta^2 f_t(t_i, x_i) + \beta\delta^2 f(t_i, x_i)f_x(t_i, x_i) + O(\delta^3)$$

Sustituimos en la formula de evolución:

$$x_{i+1} = x_i + a(\delta f) + b [\delta f + \alpha\delta^2 f_t + \beta\delta^2 f f_x] + O(\delta^3)$$

$$x_{i+1} = x_i + (a + b)\delta f + \delta^2 [b\alpha f_t + b\beta f f_x] + O(\delta^3)$$

Entonces ahora deberiamos elegir los coeficientes  $a, b, \alpha, \beta$  para que sea de 2do orden.

## Metodos de segundo orden

$$x_{i+1} = x_i + (a + b)hf + h^2 [b\alpha f_t + b\beta ff_x] + O(h^3)$$

Lo que requerimos es que:

$$x(t_i + h) = x_i + hf + \frac{h^2}{2}(f_t + ff_x) + O(h^3)$$

Entonces para tener una igualdad entre las ecuaciones requerimos que:

$$a + b = 1 \text{ y } b\alpha = b\beta = 1/2$$

## Método de Runge-Kutta de segundo orden

Hay múltiples soluciones a los coeficientes, dos conocidas son:

El método de Euler modificado:  $a = 0, b = 1, \alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{2}$

El método de Ralston:  $a = \frac{1}{3}, b = \frac{2}{3}, \alpha = \frac{3}{4}, \beta = \frac{3}{4}$

$$x(t + \Delta t) = x + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2$$

$$k_1 = \delta f(x, t) \tag{1}$$

$$k_2 = \delta f(x + k_1, t + \delta) \tag{2}$$

Es equivalente a tomar el promedio de la pendiente en  $t$  y en  $t + \Delta t$  y usar la pendiente del promedio en el método de Euler para determinar  $x(t + \Delta t)$ .

## Método de Runge-Kutta de segundo orden

Hay múltiples soluciones a los coeficientes, dos conocidas son:

El método de Euler modificado:  $c_0 = 0, c_1 = 1, d_0 = \frac{1}{2}, d_1 = \frac{1}{2}$

El método de Heun:  $c_0 = \frac{1}{2}, c_1 = \frac{1}{2}, d_0 = 1, d_1 = 1$

El método de Ralston:  $c_0 = \frac{1}{3}, c_1 = \frac{1}{3}, d_0 = \frac{3}{4}, d_1 = \frac{3}{4}$

Algoritmo de Euler modificado:

$$x(t + \Delta t) = x + k_2$$

$$k_1 = \delta f(x, t) \tag{3}$$

$$k_2 = \delta f(x + k_1/2, t + \delta/2) \tag{4}$$

Algoritmo de Heun:

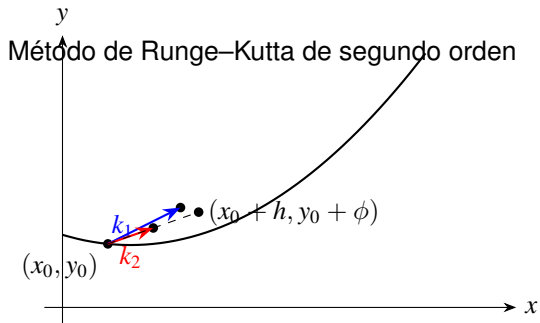
$$x(t + \Delta t) = x + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2$$

$$k_1 = \delta f(x, t) \tag{5}$$

$$k_2 = \delta f(x + k_1, t + \delta) \tag{6}$$

Es equivalente a tomar el promedio de la pendiente en  $t$  y en  $t + \Delta t$  y usar la pendiente del promedio en el método de Euler para determinar  $x(t + \Delta t)$ .

## Metodos de segundo orden



## Método de Runge-Kutta de cuarto orden

Los mas utilizados son los de 4to orden:

$$k_1 = \delta f(x, t) \quad (7)$$

$$k_2 = \delta f(x + k_1/2, t + \delta/2) \quad (8)$$

$$k_3 = \delta f(x + k_2/2, t + \delta/2) \quad (9)$$

$$k_4 = \delta f(x + k_3, t + \delta) \quad (10)$$

$$x(t + \delta) = x(t) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

En la página se encuentra el método implementado.

Sugerencia importante: la  $\delta$  conviene incorporarla al  $f$ .

$\tilde{f} = \delta f$  luego se calcula con  $k_1 = \tilde{f}(x, t)$ .

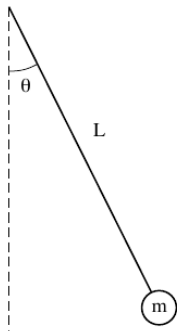
# Sistema dinámico

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(\mathbf{x}, t)$$

Una o varias variables que evolucionan con el tiempo.

Pensado generalmente en sistemas físicos, biológicos.

## Pendulo simple



Variación del momento angular:  $\tau = I\alpha = mL^2\ddot{\theta}$

El torque es:  $\tau = -mgL \sin \theta$

Ecuación exacta del péndulo:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \sin \theta$$

Es una ecuación diferencial ordinaria **NO lineal**.

Esto se lo suele aproximar para  $\theta$  chico por

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \theta$$

quedando una **ecuación lineal**. Esto es lo que terminaron viendo en Mecánica Clásica.

## Pendulo amortiguado y forzado

Le vamos a agregar amortiguamiento o viscosidad al pendulo para hacerlo mas realista:

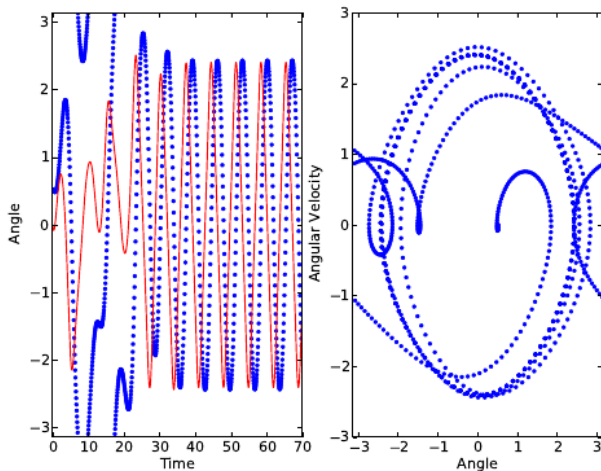
Ecuación exacta del péndulo:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \sin \theta - \beta \dot{\theta}$$

Esta es una ecuación disipativa asi que pronto dejará de oscilar, pero le podemos empezar a dar tincazos (forzado) al péndulo para mantenerlo en movimiento:

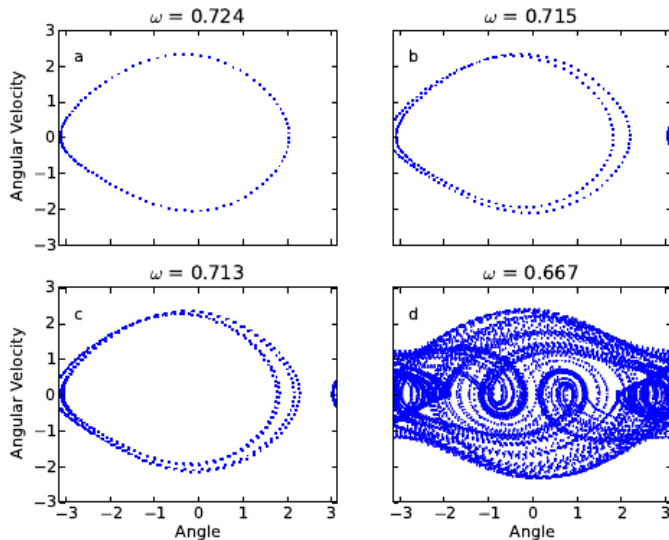
$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \theta - \beta \dot{\theta} + A \cos(\omega t)$$

## Soluciones numéricas usando RK4



Evolución temporal. Espacio de las fases.

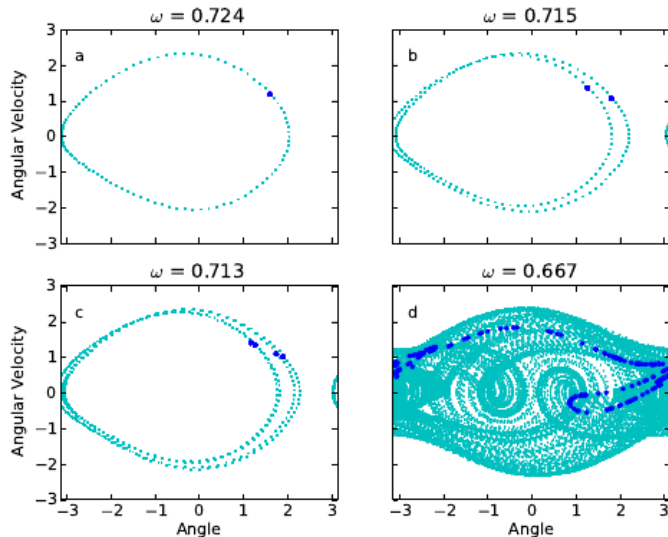
## Aparición de caos en el péndulo



Notar el atractor. Orbitas “quasi-periodicas”.

## Poincare plot

Tomamos una fotografia del estado (un punto) por cada ciclo del forzado.



## Lorenz 1963

Modelo matemático de convección atmosférica en término de rolos, una capa de fluido es calentada desde abajo y enfriada hacia arriba:

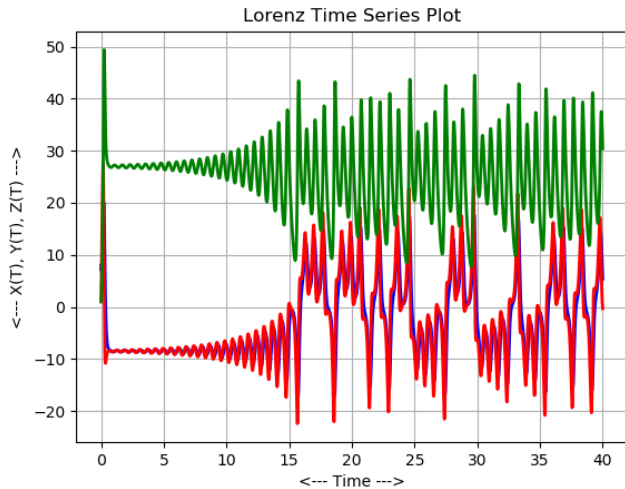
$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x), \\ \frac{dy}{dt} &= x(\rho - z) - y, \\ \frac{dz}{dt} &= xy - \beta z.\end{aligned}\tag{11}$$

## Chaos

At one point I wanted to examine a solution in greater detail, so I stopped the computer and typed in the twelve numbers from a row that the computer had printed earlier. I started the computer again, and went out for a cup of coffee. When I returned about an hour later, after the computer had generated about two months of data, I found that the new solution did not agree with the original one. At first I suspected trouble with the computer, which occurred fairly often, but, when I compared the new solution step by step with the older one, I found that at first the solutions were the same, and then they would differ by one unit in the last decimal place, and then the differences would become larger and larger, doubling in magnitude in about four simulated days, until, after sixty days, the solutions were unrecognizably different.

Edward N. Lorenz, A Scientist by Choice. [Kyoto prize lecture link](#)

# Chaos



# Atractor de Lorenz. Las alas de la mariposa

