Capítulo 7

Ondas electromagnéticas

Supongamos que no existen fuentes $\rho = 0$ y $J = 0$ en un problema sin condiciones de contorno (en $\mathbb{R}^3$). En el caso de campos estáticos la solución era la trivial, sin embargo las ecuaciones de Maxwell, con sus dependencias temporales si soportan soluciones notriviales para el caso sin fuentes. ¿Cúal será la solución de un problema de condiciones iniciales?

Las ecuaciones de Maxwell sin fuentes en el vacio se leen

$$\nabla \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0 \tag{7.1}$$

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2}\partial_t \vec{E} = 0 \tag{7.2}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{7.3}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \tag{7.4}$$

Para encontrar la ecuación que satisface la inducción magnética aplicamos la derivada temporal a (7.1) y luego reemplazamos $\partial_t \vec{E}$ de la segunda ecuación resultando en:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) + \partial_{tt}^2 \vec{B} = 0 \tag{7.5}$$

usando (7.3) se obtiene

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2}\partial_{tt}^2 \vec{B} = 0 \tag{7.6}$$

De la misma manera el campo eléctrico es gobernado por la ecuación:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2}\partial_{tt}^2 \vec{E} = 0 \tag{7.7}$$

Ambas campos son gobernados por la ecuación de ondas no dispersivas, el operador de ondas llamado operador de d'Alembert es:

$$\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_{tt}^2 \tag{7.8}$$

Por lo que pasemos a analizar el tipo de soluciones que tiene el operador de d'Alembert.

7.1 Ondas planas

Supongamos que los campos solo dependen de x y t luego las superficies de fase constante serán planos $y - z$. La ecuación para una dada componente del campo vectorial será

$$\partial^2_{tt}\psi - c^2\partial^2_{xx}\psi = 0 \tag{7.9}$$

factorizando el operador,

$$(\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x)\psi = 0 \tag{7.10}$$

los dos operadores lineales sugieren un cambio de variable:

$$\zeta = t - x/c \qquad \eta = t + x/c \tag{7.11}$$

Las viejas variables vienen dadas por

$$t = 1/2(\zeta + \eta) \qquad x = (\eta - \zeta)c/2 \tag{7.12}$$

Teniendo en cuenta que las derivadas en (7.10) se expresan en función de las nuevas variables por

$$\partial_t = \partial_\zeta\partial_t\zeta + \partial_\eta\partial_t\eta = \partial_\zeta + \partial_\eta \tag{7.13}$$

Mientras la derivada en x resulta:

$$\partial_x = -\frac{1}{c}(\partial_\zeta + \partial_\eta) \tag{7.14}$$

reemplazando en (7.10) se obtiene la ecuación:

$$\partial^2_{\zeta\eta}\psi = 0 \tag{7.15}$$

La solución de esta ecuación diferencial es archiconocida, integramos primero en η obteniendose

$$\partial_\zeta\psi = F(\zeta) \tag{7.16}$$

es decir nos da una constante independiente de η, integramos nuevamente ahora en ζ,

$$\psi = F_1(\zeta) + F_2(\eta) \tag{7.17}$$

es decir que la solución es igual a la suma de dos funciones totalmente arbitrarias una en la variable ζ y la otra en la variable η. Estas funciones quedan complementamente determinadas si se especifican las condiciones iniciales, en general se debe especificar el valor de la función y el valor de la derivada.

Si retornamos a las variables originales, la solución es:

$$\psi(x,t) = F_1(x - ct) + F_2(x + ct) \tag{7.18}$$

es decir que la solución esta compuesta por dos funciones arbitrarias una que se mueve en función del tiempo hacia los x positivos (F_1) y la otra se mueve en la dirección negativa F_2.

Ejercicio 7.1: Determinar la $\partial_t\psi(x,0)$ para que cumpla con la condición inicial $\psi(x,0) = F_1(x)$ y la solución es $\psi(x,t) = F_1(x - ct)$.

7.1.1 Características de las ondas electromagnéticas

Expresemos a la solución, i.e. las componentes del campo electromagnético, en el espacio de las frecuencias

$$(E_i, B_i) = \frac{1}{2\pi} \int (\hat{E}_i(\vec{x}, \omega), \hat{B}_i(\vec{x}, \omega))\, e^{-i\omega t}\, \mathrm{d}\omega \tag{7.19}$$

si reemplazamos esta solución propuesta en las ecuaciones de ondas para un medio lineal y uniforme en el cual ϵ y μ pueden depender de la frecuencia y ser complejos, se obtiene,

$$\nabla^2 \hat{E}_i + \mu\epsilon\omega^2 \hat{E}_i = 0 \tag{7.20}$$

$$\nabla^2 \hat{B}_i + \mu\epsilon\omega^2 \hat{B}_i = 0 \tag{7.21}$$

Proponemos, en el espacio físico una solución particular, una onda plana de número de onda $\vec{k}$,

$$E_i(\vec{x}, t) = E_{0i} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)} \tag{7.22}$$

Luego si reemplazamos en la ecuación de ondas lo que obtenemos es una relación de dispersión,

$$-|\vec{k}|^2 + \mu\epsilon\omega^2 = 0 \tag{7.23}$$

esta ecuación nos dice que en el espacio de Fourier, hay una relación que se debe cumplir entre la frecuencia y el número de onda ω y $\vec{k}$. Esta relación es conocida por *relación de dispersión*. Si μ y ϵ son constantes independientes de ω y $\vec{k}$ entonces las ondas serán no-dispersivas y la velocidad de fase será una constante $v = (\epsilon\mu)^{-1/2}$. Si es en el vacio esta constante es la velocidad de la luz en el vacio, c, si es en un medio la velocidad de la luz en el medio será menor a la del vacio.

El índice de refracción es el cociente entre la velocidad de la luz (la onda electromagnética) en el vacio sobre la velocidad en el medio

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{\mu_0\epsilon_0}} \tag{7.24}$$

Por construcción la dirección de propagación de la fase de la onda será en la dirección $\vec{k}$, los planos de iso-fase tienen a $\vec{k}$ como normal al plano.

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0 \tag{7.25}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \rightarrow \vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0 \tag{7.26}$$

Es decir que la dirección de los campos eléctrico y magnético es transversal a la dirección de propagación, las ondas oscilan en un plano perpendicular al vector $\vec{k}$, por esta propiedad se denominan ondas transversales.

De las otras ecuaciones de Maxwell, $\nabla \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0$, deducimos que

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E} \tag{7.27}$$

es decir que $\vec{B}$ y $\vec{E}$ son perpendiculares entre si y a su vez perpendiculares a $\vec{k}$. Si $\vec{k}$ es real entonces $\vec{B}$ y $\vec{E}$ tienen la misma fase.

La propagación del flujo de energía nos da

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{E}\times\vec{H}^* \tag{7.28}$$

$$= \frac{1}{2\mu\omega}|\vec{E}_0|^2\vec{k} \tag{7.29}$$

La densidad de energía de una onda electromagnética en un medio viene dada por,

$$u = \frac{1}{4}(\vec{E}\cdot\vec{D}^* + \vec{B}\cdot\vec{H}^*) \tag{7.30}$$

teniendo en cuenta la relación entre los campos (7.27), en (7.30) es

$$u = \frac{1}{4}(\epsilon|\vec{E}_0|^2 + \frac{1}{\mu v^2}|\vec{E}_0|^2) = \frac{1}{2}\epsilon|\vec{E}_0|^2 \tag{7.31}$$

esta es la densidad de energía promediada en el tiempo. Notar que con el uso de cantidades complejas y al conjugar estas cantidades nos esta dando una densidad de energía en el espacio que es un promedio espacial o temporal, de hecho para esta onda plana monocromática la densidad de energía es constante en todo el espacio. Para estudiar el transporte de energía electromagnética en las ondas deberíamos estudiar ondas que estan concentradas espacialmente en lugar de una onda monocromática, estas ondas concentradas espacialmente y/o temporalmente son denominadas paquetes ondulatorios o tren de ondas.

7.1.2 Cantidades complejas

Cuando trabajamos con cantidades complejas para representar a las ondas se debe recordar que esto es solo un representación para facilitar el tratamiento, pero que las cantidades físicas son cantidades reales, por lo que se debe tomar la parte real de las cantidades complejas:

$$Re(\psi) = \frac{1}{2}(\psi + \psi^*) \tag{7.32}$$

donde sumamos por el complejo conjugado de la cantidad y dividimos por dos para obtener la parte real.

En el caso que tengamos un producto y estamos trabajando con cantidades complejas, primero tenemos que tomar la parte real de cada cantidad y luego realizar el producto,

$$Re(\psi_1)Re(\psi_2) = \frac{1}{4}(\psi_1\psi_2 + \psi_1\psi_2^* + \psi_1^*\psi_2 + \psi_1^*\psi_2^*) \tag{7.33}$$

En el caso que estemos trabajando con cantidades cuadráticas como la energía ondulatoria en la cual queremos obtener un valor promediado temporalmente,

$$\overline{\psi} = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \psi \mathrm{d}t \tag{7.34}$$

entonces en el caso en que tengamos

$$(\psi_1, \psi_2) = (\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2)e^{-i\omega t} \tag{7.35}$$

el valor promedio del producto

$$\overline{Re(\psi_1)Re(\psi_2)} = \frac{1}{4}(\overline{\psi_1\psi_2} + \overline{\psi_1\psi_2^*} + \overline{\psi_1^*\psi_2} + \overline{\psi_1^*\psi_2^*}) \tag{7.36}$$

pero la integración temporal de funciones que dependen harmonicamente de t da 0, $\overline{\psi_1\psi_2} = 0$, $\overline{\psi_1^*\psi_2^*} = 0$, por lo que resulta

$$\overline{Re(\psi_1)Re(\psi_2)} = \frac{1}{4}(\overline{\psi_1\psi_2^*} + \overline{\psi_1^*\psi_2}) = \frac{1}{4}(\hat{\psi}_1\hat{\psi}_2^* + \hat{\psi}_1^*\hat{\psi}_2) \tag{7.37}$$

expresando las cantidades en componente real e imaginaria $\hat{\psi}_i = \hat{\psi}_i^R + i\hat{\psi}_i^I$, obtenemos,

$$\overline{Re(\psi_1)Re(\psi_2)} = \frac{1}{2}(\hat{\psi}_1^R\hat{\psi}_2^R + \hat{\psi}_1^I\hat{\psi}_2^I) \tag{7.38}$$

entonces otra forma de expresar esto es por

$$\overline{Re(\psi_1)Re(\psi_2)} = \frac{1}{2}Re(\psi_1\psi_2^*) = \frac{1}{2}Re(\psi_1^*\psi_2) \tag{7.39}$$

7.2 Polarización de las ondas electromagnéticas

Nos vamos a enfocar en el plano perpendicular a la dirección de propagación para mirar que sucede con el vector del campo eléctrico o magnético en ese plano. Asumamos una onda plana cuyas componentes vienen dadas por

$$E_y = \hat{E}_y \cos(\omega t - kx + \alpha_y) \tag{7.40}$$

$$E_z = \hat{E}_z \cos(\omega t - kx + \alpha_z) \tag{7.41}$$

donde $\hat{E}_y, \hat{E}_z$ son las amplitudes. Estas ecuaciones representan una onda que se propaga en la dirección x cuyas componentes vienen dadas en las direcciones perpendiculares, y, z.

Reescribo a E_z en función de los desfasajes pensando en una fase dada por $\omega t - kx + \alpha_z + \alpha_y - \alpha_y$,

$$E_z = \hat{E}_z[\cos(\omega t - kx + \alpha_y)\cos(\alpha_z - \alpha_y) - \sin(\omega t - kx + \alpha_y)\sin(\alpha_z - \alpha_y) \tag{7.42}$$

llamemos a la fase $\psi = \omega t - kx$.

Luego elevando al cuadrado las dos componentes y sumando se obtiene

$$\begin{aligned}\left(\frac{E_y}{\hat{E}_y}\right)^2 + \left(\frac{E_z}{\hat{E}_z}\right)^2 = \quad & \cos^2\psi + \cos^2\psi\cos^2(\alpha_z - \alpha_y) \\ & -2\cos\psi\cos(\alpha_z - \alpha_y)\sin(\psi)\sin(\alpha_z - \alpha_y) \\ & +\sin^2\psi\sin^2(\alpha_z - \alpha_y)\end{aligned} \tag{7.43}$$

Reescribiendo

$$\left(\frac{E_y}{\hat{E}_y}\right)^2 - 2\frac{E_y}{\hat{E}_y}\frac{E_z}{\hat{E}_z}\cos(\alpha_z - \alpha_y) + \left(\frac{E_z}{\hat{E}_z}\right)^2 = \sin^2(\alpha_z - \alpha_y) \tag{7.44}$$

esta es la ecuación general de una elipse. Es decir que en general tenemos polarización elíptica, léase, la punta del vector del campo eléctrico dibuja una elipse cuando lo variamos en el tiempo o en la posición x.

La polarización lineal se da cuando se tiene:

$$\vec{E} = (\hat{\epsilon}_1 E_1 + \hat{\epsilon}_2 E_2)e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})} \tag{7.45}$$

donde en general $\hat{\epsilon}_1$ y $\hat{\epsilon}_2$ son dos versores en el plano perpendicular a la dirección de propagación y son perpendiculares entre sí y E_1 y E_2 tienen la misma fase, la dirección y el módulo vienen dados por

$$\theta = \tan^{-1}(E_2/E_1), \qquad E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}. \tag{7.46}$$

La polarización circular viene dada en función de dos ondas dadas polarizadas linealmente por:

$$\vec{E} = E_0(\hat{\epsilon}_1 \pm i\hat{\epsilon}_2)e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})} \tag{7.47}$$

Un ejemplo de polarización circular asumiendo componentes reales es

$$E_y = E_0\cos(\omega t - kx) \tag{7.48}$$

$$E_z = \pm E_0\sin(\omega t - kx) \tag{7.49}$$

En general podemos expresar cualquier polarización en función de los versores:

$$\hat{\epsilon}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\epsilon}_1 \pm i\hat{\epsilon}_2) \tag{7.50}$$

luego el campo se puede expresar por

$$\hat{E} = (E_+\hat{\epsilon}_+ + E_-\hat{\epsilon}_-)e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})} \tag{7.51}$$

$\hat{\epsilon}_+$ y $\hat{\epsilon}_-$ son llamados la base circular, ϵ_+ representa la rotación del vector en el sentido positivo mientras $\hat{\epsilon}_-$ en el sentido negativo.

Una forma general de expresar la polarización es a través de los parámetros de Stokes,

$$s_0 = |\hat{\epsilon}_1 \cdot \vec{E}|^2 + |\hat{\epsilon}_2 \cdot \vec{E}|^2 \tag{7.52}$$

esta es la intensidad

$$s_1 = |\hat{\epsilon}_1 \cdot \vec{E}|^2 - |\hat{\epsilon}_2 \cdot \vec{E}|^2 \tag{7.53}$$

esta es la polarización en $\hat{\epsilon}_1$ versus $\hat{\epsilon}_2$.

$$s_2 = 2\mathrm{Re}[(\hat{\epsilon}_1 \cdot \vec{E})^*(\hat{\epsilon}_2 \cdot \vec{E})] \tag{7.54}$$

$$s_3 = 2\mathrm{Im}[(\hat{\epsilon}_1 \cdot \vec{E})^*(\hat{\epsilon}_2 \cdot \vec{E})] \tag{7.55}$$

En general la luz natural no esta polarizada en este caso el campo eléctrico viene dado por

$$\vec{E} = (E_1\hat{\epsilon}_1 \pm E_2 e^{i\phi}\hat{\epsilon}_2)e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})} \tag{7.56}$$

donde ϕ es una fase arbitraria.

7.3 Propagación de ondas: velocidad de grupo

Para el análisis que vamos a realizar a continuación nos vamos a concentrar en una de las componentes del campo eléctrico o magnético. La idea es demostrar las características básicas de la propagación de las ondas dispersivas; a través de la aproximación del tren de ondas demostraremos que las ondas se propagan con la denominada velocidad de grupo, por propagación nos estamos refiriendo a la propagación o transporte de energía o información realizada por la onda no al movimiento de la fase. La velocidad de grupo viene definida como el gradiente de la frecuencia en el espacio de números de onda.

En el vacio la velocidad de fase de la onda y la velocidad del grupo o la energía son ambas iguales. En el caso de propagación de ondas en medios dispersivos, la velocidad de grupo o de la energ
'ıa difiere de la velocidad de fase.

En general hasta el momento hemos propuesto una solución particular de la ecuación de ondas y hemos estudiado las características de la solución en base a la solución particular. Si se quiere encontrar la solución general lo que debemos hacer es la superposición lineal de todas las soluciones linealmente independientes posibles. Veamos cual es la solución general de la ecuación de ondas, por el momento solo trabajaremos en 1D, asumiendo ondas planas en el plano perpendicular a k.

Supongamos que tenemos una ecuación diferencial lineal de orden N y queremos resolver un problema de condiciones iniciales a través de la integral de Fourier. Para esto expresamos a la solución general en función de una suma en k [1]:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_n(k) \exp[i(\omega_n t - kx)]\mathrm{d}k \tag{7.57}$$

donde ω_n son las n raíces de la relación de dispersión. Para el caso de las ondas electromagnéticas, la ecuación es de segundo orden, resultando en una relación de dispersión cuadrática por lo que $N = 2$. Una raiz representa ondas que se mueven hacia la izquierda y la otra hacia la derecha.

[1] Los problemas de condiciones iniciales es conveniente expresarlos como una integral en k, k variable independiente, mientras los de condiciones de contorno es conveniente tener a ω como variable independiente

La ecuación (7.57) nos dice que la solución general esta compuesta por todos los posibles números de onda, lo que estamos haciendo entonces es sumar la solución de ondas planas que habiamos obtenido para las ecuaciones de Maxwell.

Para determinar los $\hat{u}_n(k)$ es necesario imponer las condiciones iniciales.

Dado que la ecuación diferencial es de segundo orden representando ondas que se mueven hacia la izquierda y hacia la derecha, las condiciones iniciales que se imponen son:

$$u(x,0) = f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_1(k) \exp(ikx) \mathrm{d}k, \tag{7.58}$$

$$\partial_t u(x,0) = f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_2(k) \exp(ikx) \mathrm{d}k, \tag{7.59}$$

donde $\hat{f}_1(k)$ y $\hat{f}_2(k)$ son las transformadas de Fourier de la condición inicial $f_1(x)$ y la derivada temporal en $t = 0$, $f_2(x)$.

Multiplicando por $\exp(ikx)$ e integrando en x a ambos lados de (7.58) y (7.59) y usando que $\delta(k - k') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k')x} \mathrm{d}x$ se obtiene

$$\hat{u}_1 = \frac{-i\hat{f}_2 - \omega_2 \hat{f}_1}{\omega_1 - \omega_2} \tag{7.60}$$

$$\hat{u}_2 = \frac{i\hat{f}_2 - \omega_1 \hat{f}_1}{\omega_1 - \omega_2} \tag{7.61}$$

Asumiendo que $\omega_1 = \omega(k)$ y $\omega_2 = -\omega(k)$ resulta

$$\hat{u}_1 = \frac{1}{2} \left(\hat{f}_1 - i\frac{\hat{f}_2}{\omega} \right) \tag{7.62}$$

$$\hat{u}_2 = \frac{1}{2} \left(\hat{f}_1 + i\frac{\hat{f}_2}{\omega} \right) \tag{7.63}$$

Luego la solución general para el caso de la ecuación de segundo orden con las condiciones iniciales arbitrarias f_1 y f_2 viene dada por

$$\begin{aligned} u(x,t) = \; & \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \left\{ \tfrac{1}{2} \left(\hat{f}_1 - i\tfrac{\hat{f}_2}{\omega} \right) \exp[i(\omega_1 t - kx)] + \right. \\ & \left. + \tfrac{1}{2} \left(\hat{f}_1 + i\tfrac{\hat{f}_2}{\omega} \right) \exp[i(\omega_2 t - kx)] \right\} \mathrm{d}k \end{aligned} \tag{7.64}$$

En lo que sigue por brevedad representamos a la solución por

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \hat{u}_1(k) \exp[i(\omega_1 t - kx)] \mathrm{d}k \tag{7.65}$$

es decir que tenemos en cuenta solo uno de los términos de (7.65), las cuentas son equivalentes para el otro.

Aun cuando hemos encontrado a la solución general, esta expresión es bastante compleja y aun en casos simples no nos permite examinar las características básicas de la solución y como esta evoluciona temporalmente. A continuación realizaremos un procedimiento a partir de una aproximación, asumimos que el espectro de la solución, es decir $\hat{u}_1(k)$ o en su lugar $\hat{f}_1$ y $\hat{f}_2$, se encuentran concentradas alrededor de k_0; es decir $\hat{u}_1(k)$ es un pico concentrado alrededor del número de onda k_0. En el espacio físico a esta condición se la puede visualizar como un tren de ondas cuyo número de onda es k_0 y tiene una evolvente que es lo suficientemente ancha como para que varios longitudes de onda queden bien definidas, la envolvente larga establece en el espacio de números de onda la alta concentración alrededor de k_0 en el espacio de Fourier.

Hagamos un desarrollo de Taylor alrededor de k_0 para la relación de dispersión

$$\omega_1 = \omega(k_0) + \partial_k \omega(k_0)(k - k_0) + \cdots \tag{7.66}$$

para esto asumimos que la relación de dispersión es una función "suave" alrededor de k_0.

Si aplicamos el desarrollo de Talor, (7.66), en la integral de Fourier (7.65), para poder aplicar Taylor en la exponencial estamos asumiendo que $\hat{u}_1(k)$ esta concentrada en k_0, por lo que las contribuciones significativas a la integral estan concentradas alrededor de k_0 y por ese motivo podemos aplicar el desarrollo de Taylor [2].

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[i(\omega_0 t - k_0 x)] \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_1(k) \exp[-i(k - k_0)(x - \partial_k \omega(k_0)t)] \mathrm{d}k \tag{7.67}$$

Como estamos asumiendo que la transformada de Fourier de $\hat{u}_1$ (o $\hat{f}_1$) esta concentrada en k_0 la función puede ser escrita como $u_1(x,0) = f_1(x) = A(x)e^{-ik_0x}$ donde $A(x)$ es una función suave con transformada de Fourier concentrada en $k = 0$, mientras la $f_2 = 0$. En particular, podemos pensar que $A(x) = A_0 \exp[-(x - x_0)^2/(2\sigma_x^2)]$ cuya transformada de Fourier es $\hat{A}(k) = A_0 \sigma_x \sqrt{2\pi} \exp(-\sigma_x^2 k^2/2)$, mientras la condición inicial para este caso es $u_1(x,0) = A_0 \exp[-(x - x_0)^2/(2\sigma_x^2)]e^{-ik_0x}$ y su transformada es $\hat{A}(k) = A_0 \sigma_x \sqrt{2\pi} \exp(-\sigma_x^2 (k - k_0)^2/2)$ es decir que lo que hace el factor e^{-ik_0x} es producir un corrimiento de k_0 en el espacio de Fourier.

Realizando un cambio de variables de $x' = x - \partial_k \omega(k_0)t$ y de $\tilde{k} = k - k_0$ en (7.68)

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[i(\omega_0 t - k_0 x)] \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_1(\tilde{k} + k_0) \exp[-ik'x')] \mathrm{d}k' \tag{7.68}$$

Luego deberíamos notar que la integral corresponde a la integral dada como condición inicial pero la trasladamos en el espacio de número de onda de tal manera que el número de onda principal este en el origen (en ese caso tendríamos que $\tilde{u}(k - k_0) = \hat{u}_1(k)$. Recordar que una transformada de una gaussiana centrada en $k = 0$ es una gaussiana mientras que una gaussiana centrada en $k = k_0$ es función periódica modulada por una gaussiana.

[2]Como se relaciona esto al hecho que se pide que el paquete de ondas sea lo suficiente localizado en el espacio físico pero debe contener varias longitudes de onda?

Luego resulta que la solución general en esta aproximación de tren de ondas puede ser expresada por:

$$u(x,t) = A(x - \partial_k \omega(k_0)t) \exp[i(\omega_0 t - k_0 x)] \tag{7.69}$$

es decir que si se cumplen condiciones de regularidad y el paquete esta lo suficientemente localizado en el espacio de número de onda, la propagación del paquete puede ser expresada como una envolvente que se mueve con la velocidad de grupo por una función periódica que contiene la información de la fase. De esta manera la envolvente conserva su forma a lo largo del movimiento para un dado k_0 fijo, esto es consecuencia de tomar solo el primer orden en la relación de dispersión y por lo tanto despreciar los efectos dispersivos que aparecen en los órdenes superiores.

La velocidad con que se mueve la envolvente del disturbio la llamamos velocidad de grupo y resulta que

$$c_g = \partial_k \omega. \tag{7.70}$$

Para que en la integral la frecuencia se pueda aproximar por los dos primeros términos del desarrollo de Taylor debe cumplirse que

$$\frac{\partial_t A}{A\omega(k_0)} \ll 1 \qquad \frac{\partial_x A}{A k_0} \ll 1. \tag{7.71}$$

Estas condiciones exigen que la envolvente del disturbio cambie lentamente con respecto al periodo principal del disturbio, y lo mismo en el espacio, que las variaciones espaciales de la envolvente sean apreciables en distancias mucho mas largas que la longitud de onda central del disturbio.

7.4 Desparramamiento de un pulso cuando se propaga en un medio dispersivo

En este caso haremos una aproximación levemente superior a la del tren de ondas, en ciertos contextos es denominada haz gaussiano ya que se asume el campo inicialmente es una onda modulada por una gaussiana.

Supongamos tenemos un problema de valor inicial donde conocemos que

$$u(x,0) = e^{-x^2/(2L^2)} \cos(k_0 x) \tag{7.72}$$

$$\partial_t u(x,0) = 0 \tag{7.73}$$

es decir son dos pulsos que se propagan en direcciones distintas cuya derivada en $t = 0$ debido a estos dos pulsos opuestos se anula.

Se quiere encontrar como evoluciona esta onda o disturbio inicial con el tiempo.

Nuevamente trabajaremos con un solo término de la solución, dado por:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k) e^{i(\omega t - kx)} \mathrm{d}k \tag{7.74}$$

Teniendo en cuenta la condición inicial y notando que:

$$\cos(k_0 x) = \frac{1}{2}(e^{ik_0 x} + e^{-ik_0 x}) \tag{7.75}$$

luego la transformada de la condición inicial es:

$$\hat{u}(k) = \frac{L}{2}\left[e^{-L^2/2(k-k_0)^2} + e^{-L^2/2(k+k_0)^2}\right] \tag{7.76}$$

Asumimos que la relación de dispersión viene dada por (se podría generalizar a una expansión de Taylor de segundo orden)

$$\omega(k) = \omega_0\left(1 + \frac{a^2k^2}{2}\right) \tag{7.77}$$

Tenemos que reemplazar (7.76) e integrar en forma exacta,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\frac{1}{1 + ia^2\omega_0 L^{-2}t}\exp\left[-\frac{(x-\omega_0 a^2 k_0 t)^2}{2L^2(1 + i\omega_0 a^2 L^{-2}t)}\right] && (7.78)\\ &\exp[i(-k_0 x + \omega_0(1 + a^2k^2/2)t)] && (7.79)\end{aligned}$$

entonces notar que la solución esta compuesta por dos términos exponenciales el último corresponde a una onda armónica con número de onda k_0 y frecuencia ω_0, mientras el primero es una función error que se mueve con velocidad a^2k_0 la cual debe notarse que corresponde a $c_g = \partial_k\omega_{k_0}$, sin embargo esta gaussiana esta cambiando su ancho con el tiempo, considerando solo la parte real vemos que el ancho de la gaussiana viene dado por

$$\sigma_x^2 = (L^2 + (a^2k_0t)^2)^{1/2} \tag{7.80}$$

es decir que inicialmente el ancho era L pero luego debido a que las distintas componentes espectrales que conforman el espectro se mueven con distintas velocidades esto provoca un desparramamiento, o estiramiento del ancho de la envolvente.

7.5 Ondas electromagnéticas en una interface

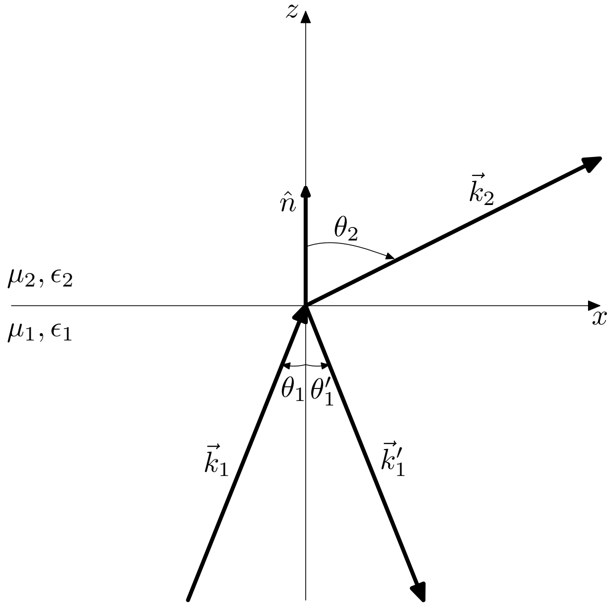


Figura 7.1: Onda electromagnética incidente $\vec{k}_1$ que se propaga en dos medios, la interface entre los medios a traves de las condiciones de contorno da lugar a una onda reflejada $\vec{k}_1'$ y a una onda refractada $\vec{k}_2$.

Supongamos que tenemos dos medios dieléctricos divididos por una interface que puede ser considerada plana, y existe un campo electromagnético que se propaga de un medio al otro. Cuales son los cambios que sufrirá el campo electromagnético, las ondas, con el cambio de medio. Este es un problema de condiciones de contorno en la interface entre los medios dieléctricos con campos variables en el tiempo. Resolvemos la solución de las ecuaciones de Maxwell en cada medio y luego pegamos a estas soluciones a través de las condiciones de contorno.

Las soluciones de las ecuaciones de Maxwell en cada medio son:

en el **medio 1** (onda incidente) se tiene:

$$\vec{E}_1^T = \vec{E}_1 + \vec{E}_1' = \hat{E}_1 e^{i(\vec{k}_1\cdot\vec{x}-\omega t)} + \hat{E}_1' e^{i(\vec{k}_1'\cdot\vec{x}-\omega t)} \tag{7.81}$$

por E_1^T interpretamos el campo eléctrico total en el medio 1 compuesto de la onda incidente y la reflejada.

Teniendo en cuenta que $\nabla \times \vec{E} = -i\omega\vec{B}$, se deduce que la inducción magnética viene dada por

$$\vec{B}_1^T = \frac{1}{\omega}\vec{k} \times \vec{E}_1^T = \sqrt{\epsilon_1\mu_1}\hat{k} \times \vec{E}_1^T. \tag{7.82}$$

En el **medio 2** asumimos como condición física que no hay onda entrante y solo tenemos la *onda refractada*, luego se tiene que

$$\vec{E}_2^T = \vec{E}_2 = \hat{E}_2 e^{i(\vec{k}_2\cdot\vec{x}-\omega t)} \tag{7.83}$$

$$\vec{B}_2 = \sqrt{\mu_2\epsilon_2}\hat{k}' \times \vec{E}' \tag{7.84}$$

Dado que no hay dependencias temporales en las propiedades de los medios, estos solo tienen variaciones espaciales luego resulta que ω es constante, es decir la frecuencia de oscilación en el medio 1 es igual a la del medio 2, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$.

La única forma de tener soluciones no triviales es si las exponenciales tienen los mismos argumentos, notar que estas varian en la interface. En otras palabras, para que se cumplan las condiciones de contorno en todos los puntos de ia interface, los argumentos de las exponenciales deben ser equivalentes para todo t y $\vec{x}$ (en la interface), de lo contrario $\hat{E}_1 = \hat{E}_1' = \hat{E}_2 = 0$.

$$\vec{k}_1 \cdot \vec{x} - \omega t|_{\text{interface}} = \vec{k}_1' \cdot \vec{x} - \omega t|_{\text{interface}} = \vec{k}_2 \cdot \vec{x} - \omega t|_{\text{interface}} \tag{7.85}$$

como la frecuencia es la misma,

$$\vec{k}_1 \cdot \vec{x}|_{\text{interface}} = \vec{k}_1' \cdot \vec{x}|_{\text{interface}} = \vec{k}_2 \cdot \vec{x}|_{\text{interface}} \tag{7.86}$$

Si tomamos la interface en $z = 0$ la componente del vector de número de onda $\vec{k}_1$ en el plano $z = 0$ es $k_1 \sin\theta_1$. Luego la igualdad nos dice que

$$k_1 \sin\theta_1 \cos\gamma_1 = k_1' \sin\theta_1' \cos\gamma_1' = k_2 \sin\theta_2 \cos\gamma_2, \tag{7.87}$$

la única forma que se satisfaga la igualdad es que $\gamma_1 = \gamma_1' = \gamma_2$, entonces los vectores $\vec{k}_1, \vec{k}_1'$ y $\vec{k}_2$ son coplanares. (En ese caso γ es el ángulo de $\vec{x}$ al del eje horizontal del plano donde se encuentran $\vec{k}_1$, $\vec{k}_1'$ y $\vec{k}_2$. Notar que $\cos\gamma = \cos(180 - \gamma)$). El plano donde se encuentran $\vec{k}_1, \vec{k}_1'$ y $\vec{k}_2$ se denomina plano de incidencia y es el plano que forman $\vec{k}_1$ y $\hat{n}$ donde $\hat{n}$ es el versor normal a la superficie.

Además de (7.87) se cumple que

$$k_1 \sin\theta_1 = k_1' \sin\theta_1' = k_2 \sin\theta_2 \tag{7.88}$$

como $|\vec{k}_1| = |\vec{k}_1'|$, debido a que estan en el mismo medio y vale que $|\vec{k}_1| = |\vec{k}_1'| = \sqrt{\mu_1\epsilon_1}\omega$ entonces $\sin\theta_1 = \sin\theta_1'$ luego se tiene $\theta_1 = \theta_1'$, el ángulo reflejado es igual al ángulo incidente.

Por otro lado de (7.88) se encuentra la ley de refracción del rayo,

$$k_1 \sin\theta_1 = k_2 \sin\theta_2 \tag{7.89}$$

Notar que la componente $\vec{k}$ en el plano perpendicular a $\hat{n}$ es continua, la de la dirección $\hat{n}$ tiene un salto.

Como ω es constante se tiene que $v_1 k_1 = v_2 k_2$. Además sabemos que los índices de refracción se definen por $n_1 = \frac{c}{v_1}$, $n_2 = \frac{c}{v_2}$, luego resulta que

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{n_1}{n_2} \tag{7.90}$$

Teniendo en cuenta esta relación entre los números de onda y de (7.89) se encuentra la ley de Snell

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2. \tag{7.91}$$

Entonces a través de las condiciones de continuidad en el argumento de la exponencial hemos deducido las condiciones cinemáticas, el ángulo de reflexión y el ángulo de refracción.

Las condiciones de contorno en la interface deben ser deducidas de las ecuaciones variables en el tiempo, sin fuentes.

De $\nabla \cdot \vec{D} = 0$ resulta entonces

$$\int \nabla \cdot \vec{D} \mathrm{d}V = \int \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0 \tag{7.92}$$

De la ecuación $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ entonces

$$\int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0 \tag{7.93}$$

De la ecuación $\nabla \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0$ resulta que

$$\int \nabla \times \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} + \partial_t \int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0 \tag{7.94}$$

Usando el Teorema de Stokes y (7.93) se obtiene que

$$\int \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0 \tag{7.95}$$

De la misma manera integrando en superficie la ecuación $\nabla \times \vec{H} - \partial_t \vec{D} = 0$ luego

$$\int \nabla \times \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{s} - \partial_t \int \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0 \tag{7.96}$$

luego resulta que

$$\int \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0 \tag{7.97}$$

Quedan las mismas condiciones de contorno que en el caso de los campos estáticos explicitamente

$$D_{1\perp} = D_{2\perp} \tag{7.98}$$

$$B_{1\perp} = B_{2\perp} \tag{7.99}$$

$$E_{1\parallel} = E_{2\parallel} \tag{7.100}$$

$$H_{1\parallel} = H_{\parallel} \tag{7.101}$$

Aplicando estas condiciones de contorno para las soluciones propuestas en cada medio, (7.81) y (7.83), se tiene que

$$\epsilon_1(E_{1\perp} + E'_{1\perp}) - \epsilon_2 E_{2\perp} = 0 \tag{7.102}$$

$$(\vec{k}_1 \times \vec{E}_1)_\perp + (\vec{k}'_1 \times \vec{E}'_1)_\perp - (\vec{k}_2 \times \vec{E}_2)_\perp = 0 \tag{7.103}$$

$$E_{1\parallel} + E'_{1\parallel} - E_{2\parallel} = 0 \tag{7.104}$$

$$\frac{1}{\mu_1}(\vec{k}_1 \times \vec{E}_1 + \vec{k}'_1 \times \vec{E}'_1)_\parallel - \frac{1}{\mu_2}(\vec{k}_2 \times \vec{E}_2)_\parallel = 0 \tag{7.105}$$

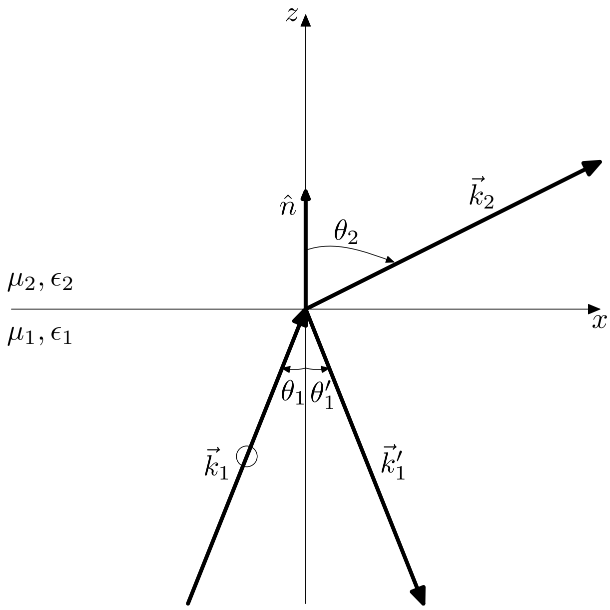
donde por $\perp$ nos referimos a la componente perpendicular al plano de la interface y la componente $\parallel$ yace en el plano de la interface.

Dado que para cualquier onda la podemos descomponer en dos ondas linealmente polarizadas en

$$\vec{E} = (E_{pe}\hat{e}_{pe} + E_{pa}\hat{e}_{pa})e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \tag{7.106}$$

donde $\hat{e}_{pe}$ es un vector perpendicular al plano de incidencia (formado por $\vec{k}$ y $\hat{n}$) y $\hat{e}_{pa}$ yace en el plano de incidencia (NOTAR que no se relacionan con la $\parallel$ y $\perp$ de las condiciones de contorno las cuales se refieren al plano de la interface!).

7.5.1 Onda $\vec{E}$ perpendicular al plano de incidencia



Si el campo eléctrico es perpendicular al plano de incidencia entonces es paralelo a la interface, $\vec{E}$ no tiene componentes perpendiculares a la interface (en la direccion de $\hat{n}$) por lo que de las condiciones de contorno

$$E_1 + E'_1 - E_2 = 0 \tag{7.107}$$

$$\frac{k_1}{\mu_1}\cos\theta(E_1 - E_1') - \frac{1}{\mu_2}E_2 k_2\cos\theta_2 = 0 \tag{7.108}$$

Teniendo en cuenta que $k_1 = \omega\sqrt{\mu_1\epsilon_1}$ y $k_2 = \omega\sqrt{\mu_2\epsilon_2}$

$$\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta_1(E_1 - E_1') - \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}}E_2\cos\theta_2 = 0 \tag{7.109}$$

Usando de (7.107) que $E_1' = E_2 - E_1$ y reemplazando en (7.108) se obtiene

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{2\cos\theta_1\sqrt{\epsilon_1\mu_1}}{\sqrt{\epsilon_1\mu_1}\cos\theta_1 + \frac{\mu_1}{\mu_2}\sqrt{\epsilon_2\mu_2}\cos\theta_2} \tag{7.110}$$

Usando la ley de Snell y trigonometría se obtiene

$$\cos\theta_2 = \frac{1}{n_2}\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\theta_1} \tag{7.111}$$

de esta manera se deja todo en función del ángulo incidente. Luego reexpresando en función de los índices de refracción trivialmente se deducen los coeficientes de Fresnel,

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{2n_1\cos\theta_1}{den} \tag{7.112}$$

donde $den = n_1\cos\theta_1 + \frac{\mu_1}{\mu_2}\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\theta_1}$, mientras la amplitud de la onda reflejada viene dada por

$$\frac{E_1'}{E_1} = \frac{n_1\cos\theta_1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\theta_1}}{den} \tag{7.113}$$

Si las frecuencias estan en el rango del visible se puede asumir que $\mu_1/\mu_2 = 1$.

Para el caso de incidencia del campo eléctrico paralela al plano de incidencia, tenemos las dos componentes del campo eléctrico una paralela y otra perpendicular a la interface, la componente tangencial a la interface del campo eléctrico es $E_1\cos\theta_1$ mientras el campo magnético es directamente tangencial a la interface por lo que las condiciones de contorno resultantes de (7.104) y (7.105) se deduce que

$$(E_1 - E_1')\cos\theta_1 - E_2\cos\theta_2 = 0 \tag{7.114}$$

$$\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}}(E_1 + E_1') - \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}}E_2 = 0 \tag{7.115}$$

Ejercicio 7.2: Se deja como ejercicio el caso en que $\vec{E}$ es paralelo al plano de incidencia, demostrar que los coeficientes de Fresnel resultantes en este caso son:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{2n_1n_2\cos\theta_1}{\frac{\mu_1}{\mu_2}n_1^2\cos\theta_1 + n_1\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\theta_1}} \tag{7.116}$$

$$\frac{E_1'}{E_1} = \frac{\frac{\mu_1}{\mu_2}n_2^2\cos\theta_1 - n_1\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\theta_1}}{den} \tag{7.117}$$

Para incidencia normal $\theta_1 = 0$. A partir de (7.114)-(7.115), y asumiendo inversión de la fase de la onda reflejada

$$E_1 - E_1' - E_2 = 0 \tag{7.118}$$

$$n_1(E_1 + E_1') - n_2 E_2 = 0. \tag{7.119}$$

Luego se tiene

$$E_1' = \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} E_1 \tag{7.120}$$

es decir que si $n_2 > n_1$ la fase de E_1' se invierte con respecto a la de E_1 (mientras una componente apunta hacia adentro de la hoja, la otra apunta hacia afuera).

$$E_2 = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} E_1 \tag{7.121}$$

donde se ha asumido que $\mu_1 = \mu_2$.

Para la polarización paralela al plano de incidencia (7.116) y (7.117) existe un ángulo para el cual no hay onda reflejada, anulando el numerador en (7.116) se obtiene

$$n_2^2 \cos\theta_1 - n_1\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2\theta_1} = 0 \tag{7.122}$$

$\mu_1 \approx \mu_2$, en este caso no hay reflexión es decir $E_1' = 0$. Elevando al cuadrado (7.122)

$$n_2^4 \cos^2\theta_1 = n_1^2(n_2^2 - n_1^2 \sin^2\theta_1) \tag{7.123}$$

usando trigonometría agregamos

$$n_2^4 \cos^2\theta_1 = n_1^2 n_2^2(\cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1) - n_1^4 \sin^2\theta_1 \tag{7.124}$$

reagrupando se tiene que

$$(n_2^4 - n_1^2 n_2^2)\cos^2\theta_1 = (n_1^2 n_2^2 - n_1^4)\sin^2\theta_1 \tag{7.125}$$

Pero entonces despejando de (7.125) n_2^2 en el LHS y n_1^2 en el RHS podemos determinar el ángulo,

$$\tan^2\theta_1 = \frac{n_2^2}{n_1^2} \tag{7.126}$$

para este ángulo crítico no existe componente reflejada y solo existe componente transmitida, este es denominado *el ángulo de Brewster*. Esto solo se da para la componente paralela al plano de incidencia del campo eléctrico. En el caso en que el campo eléctrico tenga componentes en ambas direcciones de polarización, la paralela y la perpendicular, entonces la onda reflejada solo tendrá componente perpendicular.

La reflexión interna total es el fenómeno inverso es decir se da cuando no hay refracción y toda la onda es reflejada. Cuando $n_1 > n_2$ no hay onda refractada para ciertos ángulos.

En este caso $\theta_1 < \theta_2$ y si comenzamos a aumentar θ_1 lo que sucederá es que en algun momento $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$, esto se da para un ángulo de incidencia crítico de

$$\frac{n_2}{n_1} = \sin\theta_{1c} \tag{7.127}$$

Un ejemplo es agua-aire cuando estamos mirando dentro de la pileta.

Si seguimos aumentando el ángulo de incidencia mas alla del ángulo crítico se tiene que no habrá onda refractada, sin embargo aparece una onda evanescente del otro lado de la interface (que decae con la distancia a la interface). Esto se da porque el $\vec{k}$ en la dirección normal a la interface, $\hat{n}$, se vuelve complejo y por lo tanto la solución es una exponencial real con exponente negativo.

7.6 Modelo físico de dispersión anómala

Supongamos un electrón con carga e^- y masa m confinado debido a una fuerza restauradora $\vec{F} = -m\omega_0^2\vec{x}$, inmerso en un campo eléctrico $\vec{E}$ y además existe una fuerza disipativa de constante γ, luego la ecuación de movimiento del electrón viene dada por

$$m(d_{tt}^2\vec{x} + \gamma d_t\vec{x} + \omega_0^2\vec{x}) = -e\vec{E}(\vec{x}, t) \tag{7.128}$$

Supongamos que el campo eléctrico varía armonicamente en el tiempo: $\vec{E}(\vec{x}, t) = \hat{E}e^{i\omega t}$, luego la solución del problema se asume de la forma

$$\vec{x} = \hat{x}e^{i\omega t} \tag{7.129}$$

reemplazando en (7.128) obtenemos que

$$m(-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2)\hat{x} = -e\hat{E} \tag{7.130}$$

El desplazamiento del electrón alrededor de la posición de equilibrio viene dado por

$$\hat{x} = -\frac{e}{m}\frac{\hat{E}}{(-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2)} \tag{7.131}$$

Luego el momento dipolar del electrón es

$$\vec{p} = -e\vec{x} = \frac{e^2}{m}(-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2)^{-1}\vec{E} \tag{7.132}$$

Si existen N moléculas por unidad de volumen con electrones de distintas frecuencias. La polarización es

$$\vec{P} = \frac{Ne^2}{m}\sum_j f_j(\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j)^{-1}\vec{E} \tag{7.133}$$

Como la polarización es $\vec{P} = \epsilon_0(\epsilon/\epsilon_0 - 1)\vec{E}$, entonces

$$\epsilon_0(\epsilon/\epsilon_0 - 1) = \frac{Ne^2}{m}\sum_j f_j(\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j)^{-1} \tag{7.134}$$

la permitividad viene dada por

$$\epsilon = \epsilon_0 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0}\sum_j f_j(\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j)^{-1} \tag{7.135}$$

En las cercanías de una frecuencia de oscilación la parte real de ϵ diverge mientras la parte imaginaria se hace grande.

Absorción resonante, la parte real pasa en forma abrupta de positiva a negativa y la absorción tiene un pico en las frecuencias resonantes.

7.7 Dispersión en medios-Causalidad

Sabemos que la relación entre el desplazamiento eléctrico y el campo eléctrico en el espacio de las frecuencias es

$$\vec{D}(\vec{x}, \omega) = \epsilon(\omega)\vec{E}(\vec{x}, \omega) \tag{7.136}$$

Pero cual es la relación entre estos en el espacio fisico, si transformamos (7.136) al espacio físico se tiene

$$\vec{D}(\vec{x}, t) = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}\omega\epsilon(\omega)e^{-i\omega t}\int \mathrm{d}t' e^{i\omega t'}\vec{E}(\vec{x}, t'). \tag{7.137}$$

Si tenemos en cuenta la transformada de Fourier de la susceptibilidad eléctrica:

$$\chi_e(t) = \frac{1}{2\pi}\int \hat{\chi}_e(\omega)e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int (\epsilon(\omega)/\epsilon_0 - 1)e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{7.138}$$

Luego reemplazando (7.138) en (7.137) en el espacio físico, y haciendo $\tau = t - t'$ se tiene

$$\vec{D}(\vec{x}, t) = \epsilon_0\vec{E}(\vec{x}, t) + \int_{-\infty}^{\infty}\chi_e(\tau)\vec{E}(\vec{x}, t - \tau)\mathrm{d}\tau. \tag{7.139}$$

esta ecuación da una dependencia no-local temporalmente entre el $\vec{E}$ y el $\vec{D}$, los cambios de $\vec{E}$ anteriores y posteriores a t afectan al valor de $\vec{D}$ al tiempo t. Por cuestiones físicas es impensable que cambios en el futuro de $\vec{E}$ afecten al valor actual de $\vec{D}$, es decir que tenemos que imponer el principio de causalidad.

El principio de causalidad, entre el desplazamiento y el campo eléctrico, manifiesta que los efectos en $\vec{D}$ a cambios en $\vec{E}$ deben ser posteriores a los cambios que ocurren en $\vec{E}$. Para que se cumpla este principio se debe exigir que

$$\chi_e(\tau) = 0 \quad \text{para} \quad \tau < 0 \tag{7.140}$$

Además la función $\chi_e(\tau)$ es finita para todo valor de τ y tiende a cero cuando $\tau \to \infty$. Fisicamente el rango temporal en que la función $\chi_e(\tau)$ difiere de 0 es del orden del tiempo de relajación que caracteriza los procesos de polarización eléctrica.

Teniendo en cuenta la definición de χ_e, (7.138), si se integra τ positivos,

$$\int_0^\infty \chi_e(\tau) e^{i\omega'\tau} \mathrm{d}\tau = (\epsilon(\omega)/\epsilon_0 - 1)\delta(\omega' - \omega) \tag{7.141}$$

Luego se obtiene que

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 \left(1 + \int_0^\infty \chi_e(\tau) e^{i\omega t} \mathrm{d}\tau \right) \tag{7.142}$$

Dado que $\chi_e(\tau)$ es real de (7.138), ya que $\vec{D}$ y $\vec{E}$ lo son, se tiene que $\epsilon(-\omega) = \epsilon^*(\omega)$. La parte real e imaginaria satisfacen

$$\epsilon_R(-\omega) = \epsilon_R(\omega) \qquad \epsilon_I(-\omega) = -\epsilon_I(\omega) \tag{7.143}$$

es decir ϵ_R es una función para y ϵ_I es impar. Entonces en un desarrollo de potencias de ϵ, ϵ_R tendrá potencias pares y ϵ_I potencias impares.

En el caso de conductores en el límite de bajas frecuencias se tiene

$$\epsilon(\omega) = i\sigma/\omega \tag{7.144}$$

$\epsilon(\omega)$ es una función analítica en la parte de arriba del plano de los números complejos.

Realizando una integración por partes de (7.142)

$$\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0} = 1 + i\frac{\chi_e(0)}{\omega} - \frac{\chi_e'(0)}{\omega^2} + \cdots \tag{7.145}$$

donde $\chi_e(0) = 0$ ya que $\chi_e(0^-) = 0$.

7.7.1 Relación entre ϵ_R y ϵ_I. Kramers-Kronig

Dado que $\epsilon(\omega)/\epsilon_0$ es analítica en la parte de arriba del plano podemos usar el teorema de Cauchy para encontrar una relación entre las partes reales e imaginarias de ϵ. El resultado de la integración es

$$\epsilon/\epsilon_0 = 1 + \frac{1}{\pi i} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon/\epsilon_0 - 1}{\omega - \omega_0} \mathrm{d}\omega \tag{7.146}$$

donde P es la parte principal. En componentes esto resulta

$$Re\,(\epsilon/\epsilon_0) = 1 + \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Im(\epsilon/\epsilon_0)}{\omega - \omega_0} \mathrm{d}\omega \tag{7.147}$$

$$Im\,(\epsilon/\epsilon_0) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Re(\epsilon/\epsilon_0) - 1}{\omega - \omega_0} \mathrm{d}\omega \tag{7.148}$$

Estas son las conocidas relaciones de Kramer-Kronig. No podemos elegir ϵ_R y ϵ_I independientemente. En lo único que se basa la demostración en la causalidad y la analiticidad de ϵ.