

Electromagnetismo 2025

Guía 5: Desarrollos multipolares y medios materiales

31 de abril de 2025

Desarrollos multipolares

Problema 1: Calcule los momentos multipolares q_{lm} de las siguientes distribuciones de carga:

- (a) dos cargas q : una en $(a, 0, 0)$ y la otra en $(0, a, 0)$ y dos cargas $-q$ en $(-a, 0, 0)$ y en $(0, -a, 0)$.
- (b) dos cargas q : una en $(0, 0, a)$ y la otra en $(0, 0, -a)$ y una carga $-2q$ en el origen.
- (c) un disco de radio a , centrado en el origen, sobre el plano x-y, con una carga q distribuida uniformemente.

Trate de obtener resultados, para los momentos no nulos, válidos para todo l pero en cada caso encuentre al menos los dos primeros conjuntos de momentos no nulos.

- (I) Para la distribución de carga (b) escriba el desarrollo multipolar para el potencial. Manteniendo sólo el término de orden mas bajo en la expansión, dibuje el potencial en el plano x-y como función de la distancia al origen para distancias mayores que a .
- (II) Calcule directamente, a partir de la ley de Coulomb el potencial exacto para b) en el plano x-y. Dibuje, como función de la distancia al origen, el potencial y compare con el resultado obtenido en el punto anterior.
- (III) Estudie la forma asintótica en los puntos anteriores para ver claramente el comportamiento a grandes distancias.

Problema 2: Una densidad localizada de carga $\rho(x, y, z)$ está ubicada en un campo electrostático externo descrito por un potencial $\Phi(x, y, z)$ que varía suavemente en la región donde ρ es distinta de cero.

A partir de primeros principios calcular la fuerza total actuante sobre la distribución de cargas como un desarrollo de momentos multipolares hasta el término cuadrupolar. Muestre que la fuerza es:

$$\vec{F} = q\vec{E}(0) + \{\nabla[\vec{p} \cdot \vec{E}]\}_0 + \left\{ \nabla \left[\frac{1}{6} \sum_{j,k} Q_{jk} \frac{\partial E_j}{\partial x_k} \right] \right\}_0 + \dots \quad (1)$$

Compare ésta con la expansión de la energía de los momentos multipolares. ¿Cuál es la conexión entre éstas expresiones?

Problema 3: Un núcleo de momento cuadrupolar Q , que se encuentra en un campo eléctrico de simetría cilíndrica con un gradiente en la dirección del eje z en la posición ocupada por el núcleo.

- (a) Demuestre que la energía de interacción cuadrupolar es:

$$W = -\frac{e}{4}Q(\partial_z E_z)_0 \quad (2)$$

donde $Q = Q_{33}/e$ (notación de Jackson)

- (b) Las distribuciones de carga nuclear pueden aproximarse mediante una densidad de carga constante que ocupa un volumen esferoidal de semieje mayor a y semieje menor b . Calcule el momento cuadrupolar de dicho núcleo suponiendo que la carga total es Ze .
- (c) Sabiendo que el Eu^{153} ; ($Z = 63$) tiene un momento cuadrupolar $Q = 2.5 \cdot 10^{-24} \text{cm}^2$ y radio medio $R = \frac{a+b}{2} = 7 \cdot 10^{-13} \text{cm}$ calcule la diferencia relativa entre los radios $\frac{a-b}{R}$.

Problema 4: Se tiene una distribución localizada de carga cuya densidad es:

$$\rho(r) = \frac{\alpha}{64\pi} r^2 \exp(-r) \sin^2 \theta \quad (3)$$

- (a) Obtenga un desarrollo en multipolos del potencial debido a ésta densidad de carga y determine todos los momentos multipolares no nulos. Exprese el potencial a distancias grandes como un desarrollo finito en polinomios de Legendre.
- (b) Determine explícitamente el potencial en un punto cualquiera del espacio y demuestre que cerca del origen del sistema se tiene:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{r^2}{120} \right) P_2(\cos \theta) \right] \quad (4)$$

- (c) Si en el origen existe un núcleo de momento cuadrupolar $Q = 10^{-24} \text{cm}^2$ determine la magnitud de la energía de interacción suponiendo que la unidad de carga en $\rho(r)$ es la carga electrónica y que la unidad de longitud es el radio de Bohr para el hidrógeno, $a_0 = 0.529 \cdot 10^{-8} \text{cm}$. Exprese el resultado como una frecuencia dividiendo por la constante de Planck.

Medios materiales

Problema 5: Una cáscara cilíndrica circular muy larga, de constante dieléctrica ϵ/ϵ_0 y radios interior a y exterior b , es puesta en un campo eléctrico E_0 originalmente uniforme con su eje perpendicular al campo. El medio en el cual esta inmerso el cilindro tiene una constante dieléctrica $\epsilon/\epsilon_0 = 1$.

- (a) Determine el potencial y el campo eléctrico en las tres regiones, despreciando efectos de borde.
- (b) Dibuje las líneas de fuerza para un caso típico $b = 2a$.
- (c) Discuta las formas límites de su solución, apropiadas para un cilindro dieléctrico sólido en un campo uniforme y para una cavidad cilíndrica en un dieléctrico uniforme.

Problema 6: Una carga puntual q es colocada en el espacio libre a una distancia d de una esfera dieléctrica de radio $a < d$, y constante dieléctrica $\frac{\epsilon}{\epsilon_0}$.

- (a) Encuentre el potencial en todos los puntos del espacio, como un desarrollo de armónicos esféricos.
- (b) Calcule las componentes rectangulares del campo eléctrico cerca del centro de la esfera
- (c) Verifique que en el límite $\epsilon/\epsilon_0 \rightarrow \infty$, el resultado es el mismo que para una esfera conductora.

Problema 7: Sea una esfera dieléctrica de radio a y constante dieléctrica ϵ/ϵ_0 colocada en un campo eléctrico inicialmente uniforme (paralelo al eje z y de módulo E_0). No hay cargas libres ni dentro ni fuera de la esfera. Calcule el potencial interior y exterior, los campos internos y externos a la esfera y la densidad de carga de polarización.