Dinámica de Fluidos Geofísicos

Guía 1: Ecuaciones de movimiento.

Agosto de 2024

Problema 1: Suponga que tenemos una propiedad ψ en 1D que varía linealmente con la posición $\psi = Ax$ para un tiempo fijo y además sabemos que $\partial_t \psi = B$. Calcule el cambio total de ψ si el fluido tiene una velocidad u constante conocida. ¿Qué condicion debe cumplir la velocidad u para que la ψ se conserve para un elemento material (i.e. la derivada material sea nula)?

Problema 2: Regla de Leibnitz de la razón de cambio de una integral. Demuestre que en una dimensión vale que:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{x_1(1)}^{x_2(t)} \Psi(x,t)\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} \partial_t \Phi \mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}\Psi(x_2,t) - \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}\Psi(x_1,t). \tag{1}$$

Problema 3: Teorema de transporte de Reynold. Demuestre que si tenemos una propiedad $\Psi(\mathbf{x},t)$ que esta definida adentro de un volumen $V(t)$ el cual esta cambiando con el tiempo, entonces el cambio temporal de la propiedad total dentro del volumen viene dado por

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \Psi \mathrm{d}V(t) = \int_{V(t)} \partial_t \Psi \mathrm{d}V(t) + \int_{S(t)} \Psi(\mathbf{x},t)\mathbf{u}\cdot \mathrm{d}S \tag{2}$$

donde $\mathbf{u}$ es la velocidad de los puntos en la frontera del volumen. Para la demostración, comience demostrando el caso unidimensional de un fluido en una caja de límites variables, con velocidades u_I, u_D y luego extienda al resultado a tres dimensiones.

Problema 4: Demostrar que $\partial_t J(\mathbf{x},t) = J(\mathbf{x},t)\nabla\cdot\mathbf{u}$. Físicamente esto significa que el cambio del volumen *material* δV_L con el tiempo es $\frac{d\delta V_L}{dt} = \nabla\cdot\mathbf{u}\,\delta V_L$. No utilizar al principio de conservación de la masa en la demostración.

Problema 5: Demostrar el teorema de transporte que establece que una propiedad extensiva (e.g. salinidad, energía, momento) cuya cantidad intensiva (por unidad de masa) es $\gamma(\mathbf{x},t)$ satisface

$$d_t \int_{V_L} \rho\gamma \,\mathrm{d}V_L = \int_{V_L} \rho \mathrm{D}_t \gamma \,\mathrm{d}V_L \tag{3}$$

teniendo en cuenta que la densidad ρ satisface la ecuación de conservación de la masa.

Problema 6: Demostrar usando un marco Lagrangiano que si tenemos una propiedad extensiva (e.g. salinidad, energía, momento) cuya cantidad intensiva es $\gamma(\mathbf{x},t)$ (e.g. salinidad, energía, momento por unidad de masa) que posee una fuente por unidad de volumen y tiempo, Q, entonces la evolución de dicha cantidad es gobernada por la ley:

$$\rho \mathrm{D}_t \gamma = Q \tag{4}$$

Ayuda: obtenga primero una expresión integral para el cambio total de la propiedad extensiva en un sistema Lagrangiano.

Problema 7: Demostrar usando un marco Euleriano, en forma similar a como se demostró la conservación de la masa en un marco Euleriano, que la cantidad γ satisface:

$$\partial_t(\rho\gamma) + \nabla \cdot (\rho\gamma\mathbf{u}) = Q \tag{5}$$

Problema 8: Demostrar que las leyes de conservación para la cantidad intensiva, γ, cuya fuente es Q,

$$\rho \mathrm{D}_t \gamma = Q \quad y$$

$$\partial_t(\rho\gamma) + \nabla \cdot (\rho\gamma\mathbf{u}) = Q,$$

son equivalentes si la masa se conserva.

Problema 9: Demostrar que las líneas de corriente en un flujo son el conjunto de funciónes de corriente constantes.

Problema 10: Demostrar que el flujo de masa de un fluido con $\rho = cte$ en un contorno cerrado es nulo. A partir de esta demostración fundamente que la función ψ únicamente depende de los puntos extremos y no del camino.

Problemas advectivos.

Problema 11: Sea una chimenea ubicada en la superficie de la tierra que en $t = 0$ comienza a emitir como $Q(x,t) = A\exp[\sigma_x^{-2}x^2]\mathrm{kg\,m^{-3}\,s^{-1}}$ en una atmósfera en reposo, determine la densidad de humo en función del tiempo. ¿Cúal es la razón de cambio local y material del humo en $x = 0$ y en $x = \sigma_x/4$?.

Problema 12: Al otro día la chimenea vuelve a emitir de la misma manera, $Q(x,t) = A\exp[\sigma_x^{-2}x^2]\mathrm{kg\,m^{-3}\,s^{-1}}$, pero ahora corre un viento de $5\mathrm{m\,s^{-1}}$. ¿Cúal es la razón de cambio local y material del humo en $x = 0$ y en $x = \sigma_x/4$?.

Problema 13: En un instante de tiempo se observa que una sustancia inerte tiene una distribución $q(x)$ determine cual será la distribución de la sustancia en función del tiempo si se tiene un viento constante u_0. Use la intuición, en última instancia use teoría de Fourier.

Problema 14: En $x = 0$ se ha puesto un estación meteorológica que ha medido el CO2 siendo la distribución temporal $q(t)$, $t > 0$, determine cuál será la distribución de CO2 para $x > 0$ si existe un viento constante $u(x,t) = u_0 > 0$. Asuma que inicialmente no hay CO2. Use la intuición, en última instancia use transformada de Fourier.

Problema 15: Utilice el método de la función de Green para determinar la distribución de una sustancia inerte q cuya fuente por unidad de tiempo es Q asuma que no existe sustancia en $t \to -\infty$, $q(x, t \to -\infty) = 0$. La velocidad es $u(x,t) = u_0$. ¿Que sucede si existe una condicion inicial $q(x, 0)$?. Compruebe los resultados de los problemas anteriores.