Dinámica de Fluidos Geofísicos

Guía 3: Vorticidad. Ajuste bajo gravedad en sistemas rotantes

30 octubre de 2024

Problema 1: Muestre que la razón ζ/f de la componente vertical de la vorticidad relativa al parámetro de Coriolis (i.e. componente vertical de la vorticidad de la tierra) tiene una escala del número de Rossby $Ro = U/fL$. Haga una estimación grosera de Ro para un sistema de medias latitudes de una atmósfera típica. Haga una estimación similar para el océano. ¿Cúal espera que este mas cercano al balance geostrófico?

Problema 2: Considere las ecuaciones shallow water para un sistema en rotación

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} + f\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{v} = -g\nabla_H h, \tag{1}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla_H \cdot (\mathbf{v}h) = 0. \tag{2}$$

Escriba $h = H + \eta$ donde H es una profundidad media constante y η describe las perturbaciones a la profundidad media.

(a) Adimensionalice las ecuaciones (1), (2), usando las escalas de longitud horizontal y de velocidad, L y U y usando una escala de D para η.

(b) Muestre que para flujo cercano a balance geostrófico $D = fUL/g$.

(c) Muestre que las formas adimensionales de (1), (2) se reducen a

$$Ro\frac{D\mathbf{v}^\star}{Dt^\star} + \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{v}^\star = -\nabla_H^\star \eta^\star,$$

$$\frac{\partial \eta^\star}{\partial t^\star} + \nabla_H^\star \cdot (\mathbf{v}^\star \eta^\star) + \frac{Ro}{Fr^2}\nabla_H^\star \cdot (\mathbf{v}^\star) = 0,$$

donde $Fr = U/(gH)^{1/2}$ es el número de Froude.

Problema 3: Ecuaciones shallow water en coordenadas cilíndricas.

(a) Reexprese la ecuación (1) en forma de componentes en coordenadas cilíndricas polares (r, θ) con $\mathbf{v} = u\hat{\mathbf{r}} + v\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Entonces muestre que para un vórtice shallow water, estático(=steady) y circular

$$fv + \frac{v^2}{r} = g\frac{\partial h}{\partial r}. \tag{3}$$

(b) En coordenadas cilíndricas polares la componente vertical de la vorticidad relativa es

$$\xi = \frac{1}{r}\frac{\partial(rv)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Basado en esto, escriba una expresión para la vorticidad potencial π para el caso estático de un vórtice shallow water circular.

(c) Combine la expresión para π con la condición de balance (3) para eliminar h y obtener una ecuación relacionando v a π para un vórtice estático circular.

Problema 4: Considere la ecuación de vorticidad barotrópica

$$\frac{D\zeta}{Dt} = 0 \tag{4}$$

donde $\zeta = f_0 + \beta y + \xi$ es la componente vertical de la vorticidad absoluta, $\xi = \nabla_H^2 \psi$ es la componente vertical de la vorticidad relativa, y ψ es la función corriente. Linearice la ecuación (4) alrededor de un flujo uniforme hacia el este $(u, v) = (U, 0)$ y busque soluciones ondulatorias

$$\psi = Re\left\{\hat{\psi} e^{i(kx+ly-\omega t)}\right\}$$

para obtener la relación de dispersión

$$\omega = kU - \frac{k\beta}{k^2 + l^2}.$$

Luego calcule las componentes Este y Norte de la velocidad de grupo $\mathbf{c}_g$.
Restringíendose a las ondas de Rossby estacionarias ($\omega = 0$); las cuales pueden ser forzadas por una cordillera o por contraste tierra-mar, tanto por calentamiento como por fricción. Muestre que las ondas de Rossby estacionarias solo pueden existir si $U \geq 0$. Muestre que

$$|\mathbf{c}_g - (U, 0)|^2 = U^2,$$

i.e. la velocidad de grupo de una onda de Rossby estacionaria yace en el círculo de radio U centrado en $(U, 0)$. Deduzca que la componente Este de la velocidd de grupo es siempre mayor o igual a 0.

Problema 5: Considere un flujo gobernado por las ecuaciones shallow water linealizadas en coordenadas cartesianas

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv = -g\frac{\partial h'}{\partial x}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu = -g\frac{\partial h'}{\partial y}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + H\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0, \tag{7}$$

con f constante.
Si tenemos una condición inicial $u = v = 0$ y

$$h' = \begin{cases} h_0 & |x| < L \\ 0 & |x| \geq L \end{cases}$$

con h_0 constante, el cual no esta en balance geostrófico. El flujo se ajusta al balance radiando ondas de Poincaré mientras conserva la distribución inicial de vorticidad potencial.

$$\pi' = \frac{\xi}{H} - \frac{fh'}{H^2}.$$

Asuma que el estado final ajustado (i) es estático, (ii) es independiente de y, y (iii) tiene π' final igual al π' inicial. Muestre que el campo h' final satisface

$$a^2 \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} - h' = \frac{\pi' H^2}{f}$$

donde $a = \sqrt{gH}/f$.
Resolver esta ecuación asumiendo continuidad de h' y $\partial h'/\partial x$ en $x = \pm L$ y condiciones adecuadas como $x \to \pm\infty$, para mostrar que

$$h' = \begin{cases} h_0 \left(1 - e^{-L/a} \cosh(x/a)\right) & |x| < L \\ h_0 \sinh(L/a) e^{-|x|/a} & |x| \geq L \end{cases}$$

(Puede resultar útil asumir simetría alrededor de $x = 0$.)
Exprese la perturbación de la vorticidad potencial π' en términos del viento y la profundidad de las perturbaciones. Luego deduzca que $\pi' = 0$ para ondas de Kelvin.

Problema 6: Usando la ecuación para el balance hidrostático

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho$$

y la ley de los gases ideales, derive la ecuación de balance hidrostático con la presión como coordenada vertical

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \ln p} = -RT$$

donde $\Phi = gz$ es el geopotential.

Problema 7: En la teoría cuasigeostrófica los primeros términos en la ecuación de momento horizontal definen el balance geostrófico. En el próximo orden la ecuación de momento resulta

$$\frac{D_g}{Dt}\mathbf{v}_g + f_0 \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{v}_a + \beta y \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{v}_g = \mathbf{0} \tag{8}$$

donde $\mathbf{v}_g$ es la velocidad horizontal geostrófica, $\mathbf{v}_a$ es la velocidad horizontal ageostrófica, y es la distancia al norte, y

$$\frac{D_g}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_g \cdot \nabla_H\right).$$

El parámetro de Coriolis es aproximado por $f \approx f_0 + \beta y$ con f_0 y β constantes.
Tome la componente vertical del rotor de (8) a los fines de derivar la ecuación de vorticidad cuasigeostrófica

$$\frac{D_g \zeta}{Dt} = -f_0 \nabla_H \cdot \mathbf{v}_a$$

donde

$$\zeta = f_0 + \beta y + \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y}$$

es la aproximación cuasigesotrófica a la componente vertical de la vorticidad absoluta. Si le resulta conveniente utilice coordenadas cartesianas, utilice también que $\nabla_H \cdot \mathbf{v}_g = 0$.

Manuel Pulido, GICA
F@CENA © 2024