# Capítulo 1

# Revisión de conceptos de análisis vectorial

Realizamos un repaso de identidades y conceptos del cálculo vectorial que nos serán de utilidad, necesidad, durante el curso de Electromagnetismo. Como referencia del tema se puede utilizar el Capítulo 1 del Griffiths. Para una referencia mas completa del tema ver "Vectores y Tensores" de Santalo.

## 1.1 Vectores

En forma no rigurosa solemos asociar el concepto de vector a un segmento que contiene una dirección. Este puede estar representado en un espacio de cualquier dimensión $\mathbb{R}^N$. En física existen numerosos ejemplos de vectores en $\mathbb{R}^3$ tales como el desplazamiento y la velocidad. En forma mas rigurosa decimos que los vectores son elementos de los *espacios vectoriales* los cuales deben satisfacer un conjunto de propiedades.

Un espacio vectorial es un conjunto de elementos que esta caracterizado por dos operaciones la aditividad entre elementos del espacio vectorial $\mathbb{V}$, y el producto de un elemento por un escalar. Estas operaciones satisfacen un conjunto de axiomas:

1. Conmutatividad de la adición $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2. Asociatividad de la adición $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
3. Existencia del elemento identidad $\vec{0} \in V$ tal que $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$ para cualquier $\vec{v} \in \mathbb{V}$.
4. Existencia del elemento inverso (aditivo) Existe $-\vec{v}$ para cualquier $\vec{v} \in \mathbb{V}$ tal que $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$

Se suele utilizar dos notaciones para representar a vectores la fuente negrita $\mathbf{v}$ o un vector por encima $\vec{v}$, sin embargo para texto en lapiz o pizarrón es conveniente representar con un vector por encima de la letra $\vec{v}$. Esta última será la opción utilizada en este apunte.

Ejemplos de espacios vectoriales mas allá de $\mathbb{R}^N$ son el conjunto de los complejos $\mathbb{C}^N$, las sucesiones, las matrices y las funciones.

Si pensamos en vectores en $\mathbb{R}^3$ y los representamos en una base particular

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k} \tag{1.1}$$

cuyas componentes estan expresadas en las coordenadas cartesianas es decir $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, y $\hat{k}$ representan vectores unitarios en los ejes $x$, $y$, y $z$.

En general a un vector en $\mathbb{R}^3$ lo podemos expresar en función de una base $\{\hat{u}_i\}$ cualquiera

$$\vec{A} = A_1\hat{u}_1 + A_2\hat{u}_2 + A_3\hat{u}_3 \tag{1.2}$$

notar que el vector $\vec{A}$ es independiente de la base, sin embargo su expresión en componentes $(A_1, A_2, A_3)$ si depende de la base.

Si tenemos un conjunto de $N$ vectores linealmente independendientes, a través de combinaciones lineales de estos vectores podemos generar un espacio de $N$ dimensiones. En particular una base es un conjunto de vectores linealmente independientes que generan el espacio.

Las bases que vamos a utilizar estarán compuestas por vectores ortogonales y de módulo unidad $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ o $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3$. A los vectores de módulo unidad los llamamos versores y los denotamos por el sombrerito. Mientras en general a los vectores los denotamos con la flecha.

**Notación de Einstein.** Se utiliza para simplificar la escritura y visibilidad, todo doble índice en una expresión lo interpretamos como una suma que cubre las $N$ dimensiones del espacio, y por lo tanto podemos obviar el símbolo de la suma (la sigma en mayúsculas), es decir

$$\vec{A} = \sum_{i=1}^{N} A_i\hat{u}_i = A_i\hat{u}_i. \tag{1.3}$$

Esto también permite trabajar facilmente en dimensiones arbitrarias por ejemplo en $\mathbb{R}^N$. Se asume que la suma recorre todas las dimensiones del espacio donde estamos trabajando, si es en $\mathbb{R}^3$ irá de 1 a 3, si es en $\mathbb{R}^N$ irá de 1 a $N$, es decir se asume implicitamente con la notación de Einstein que la suma contiene $N$ elementos.

La notación de Einstein es de mucha utilidad para demostrar propiedades del cálculo vectorial, las cuales en general es necesario demostrarlas expresando los vectores en sus componentes y aplicando las propiedades de operaciones escalares.

Suma de vectores:

$$\vec{A} + \vec{B} = A_i\hat{u}_i + B_i\hat{u}_i = (A_i + B_i)\hat{u}_i \tag{1.4}$$

Si los vectores son expresados en la misma base, la suma de vectores es igual a la suma de sus componentes en la base dada.

Multiplicación de un vector por un escalar:

$$\alpha\vec{A} = \alpha(A_i\hat{u}_i) = (\alpha A_i)\hat{u}_i \tag{1.5}$$

Cada componente es multiplicada por el escalar.
**Producto interno.** Es una operación de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$. Operación entre vectores cuyo resultado es un escalar. El producto interno debe satisfacer 4 axiomas:

1. Sea $\vec{v}$ en $\mathbb{V}$ entonces $\vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0$.
2. Sean $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ en $\mathbb{V}$ entonces $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$.
3. $\vec{u} \cdot \lambda \vec{v} = \lambda \vec{u} \cdot \vec{v}$
4. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

Sean dos vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ en $\mathbb{R}^n$ el producto interno de estos vectores se define por:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_i \hat{u}_i) \cdot (B_j \hat{u}_j) = A_i B_j \hat{u}_i \cdot \hat{u}_j = A_i B_i \tag{1.6}$$

donde hemos aplicado la propiedad distributiva quedando una doble suma y luego usamos las ortonormalidad de la base $\{\hat{u}_i\}$,

$$\hat{u}_i \cdot \hat{u}_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \tag{1.7}$$

Para expresar a este tipo de funcionalidad, definimos a la delta Kronecker,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \tag{1.8}$$

luego podemos expresar el producto interior de los versores de la base por

$$\hat{u}_i \cdot \hat{u}_j = \delta_{ij}. \tag{1.9}$$

De esta manera decimos que *la base es ortonormal*, es decir sus vectores son ortogonales entre sí y estan normalizados.

**Módulo o norma de un vector.** La norma de un vector es la raíz cuadrada del producto interno del vector por si mismo

$$|\vec{A}| = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} = \sqrt{A_i^2}, \tag{1.10}$$

donde en el cuadrado de $A_i$ vale la notación de Einstein. El módulo es una función de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$. La *norma* de un espacio vectorial debe cumplir los siguientes axiomas:

1. $|\vec{v}| \geq 0$,
2. $|\vec{v}| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = 0$,
3. $|\alpha \vec{v}| = |\alpha||\vec{v}|$,
4. $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$

*Nota:* Para la función módulo de un vector utilizamos el símbolo | |. Esta función es distinta de la utilizada para el módulo de un escalar aun cuando la denotemos con el mismo símbolo. El módulo de un vector también suele ser denotado por ‖ ‖ para distinguirlo del módulo de un escalar.

Independencia lineal: un conjunto de vectores $\{\vec{v}_i\}_{i=1}^N$ es linealmente independiente si para cualquier combinación lineal se cumple que:

$$0 = a_i v_i \Rightarrow a_i = 0 \tag{1.11}$$

**Ejercicio 1.1:** Demostrar que si tenemos un conjunto de $M$ vectores con $M > N$ entonces los vectores será linealmente dependientes, es decir existe una combinación lineal de los vectores con coeficientes de la combinación no nulos.

**Desigualdad de Cauchy-Schwarz.** El valor absoluto del producto interior de dos vectores es menor o igual al producto del módulo de los vectores:

$$|\vec{A} \cdot \vec{B}| \leq |\vec{A}||\vec{B}| \tag{1.12}$$

La igualdad vale para el caso en el que los vectores sean paralelos o antiparalelos. En este caso si $\hat{u}_A$ es el versor en la dirección de $\vec{A}$, entonces podemos expresar los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ como

$$\vec{A} = |\vec{A}|\hat{u}_A, \qquad \vec{B} = |\vec{B}|\hat{u}_A \tag{1.13}$$

El producto interior de los vectores es:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}|\ |\vec{B}|\hat{u}_A \cdot \hat{u}_A = |\vec{A}|\ |\vec{B}| \tag{1.14}$$

En el caso que $\vec{B}$ tenga la dirección opuesta a $\vec{A}$ se debe cambiar el signo a negativo.

El otro caso extremo es para $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$, en este caso los vectores son ortogonales.

En general se tiene que

$$\cos\phi = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} \tag{1.15}$$

donde $\phi$ es el ángulo comprendido entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

Entonces, en forma geómetrica independiente de la base, el producto interior se puede expresar como:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\phi. \tag{1.16}$$

**Producto vectorial** El producto vectorial es una operación entre dos elementos en un espacio vectorial que resulta en otro elemento del espacio vectorial.

El producto vectorial de dos vectores en $\mathbb{R}^3$ en la base $\{\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3\}$ viene dado por

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_2B_3 - B_2A_3)\hat{u}_1 + (B_1A_3 - B_3A_1)\hat{u}_2 + (A_1B_2 - B_1A_2)\hat{u}_3 \tag{1.17}$$

donde $A_i$ y $B_i$ son las componentes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en la base $\hat{u}_i$.

Como forma mnemotécnica para el cálculo se utiliza

$$\vec{A} \times \vec{B} \ = \ \det \begin{bmatrix} \hat{u}_1 & \hat{u}_2 & \hat{u}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{bmatrix} \tag{1.18}$$

El producto vectorial en general para $\mathbb{R}^3$ se puede expresar en forma compacta usando el tensor de Levi-Civita quedando definido por:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \epsilon_{ijk} \hat{u}_i A_j B_k \tag{1.19}$$

El tensor tridimensional anti-simétrico de Levi-Civita viene definido por

$$\epsilon_{ijk} \ = \ \begin{cases} 1 & \text{si ijk es una permutación par de (123)} \\ 0 & \text{si se repite el índice} \\ -1 & \text{si ijk es una permutación impar de (123)} \end{cases} \tag{1.20}$$

Permutaciones pares son 123, 231, 312. Mientras las permutaciones impares son 321, 132, 213. Como regla mnemotécnica se puede utilizar

$$\mathrm{sgn}(\epsilon_{ijk}) = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \tag{1.21}$$

El producto de tensores de Levi-Civita se puede expresar en función de deltas de Kroneker,

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} \tag{1.22}$$

Las propiedades del producto vectorial son

$$\vec{A} \times \vec{B} = -(\vec{B} \times \vec{A}), \tag{1.23}$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}, \tag{1.24}$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot C), \tag{1.25}$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) \tag{1.26}$$

Este último producto triple es el volumen del paralepípedo generado por los tres vectores. Como se deduce de la misma propiedad (1.26), este volumen da 0 si dos de los vectores son paralelos entre sí.

**Ejemplo 1.1:** Demostrar la propiedad (1.24).

Expreso a los productos vectoriales mediante el tensor de Levi-Civita, (1.19),

$$\vec{B} \times \vec{C} = \epsilon_{ijk} \hat{u}_i B_j C_k \tag{1.27}$$

luego el producto vectorial externo

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \epsilon_{lmi} A_m \epsilon_{ijk} B_j C_k \hat{u}_l \tag{1.28}$$

Dado que nos queda un producto de tensores de Levi-Civita, podemos utilizar la propiedad (**??**), pero notar que hay un índice que se repite, $n = i$, en estos casos se sabe que $\delta_{ni} = 1$, $\delta_{li} = 0$, $\delta_{mi} = 0$, por lo tanto el determinante de (**??**) se reduce a

$$\epsilon_{lmi} \epsilon_{ijk} = \delta_{lj} \delta_{mk} - \delta_{lk} \delta_{mj} \tag{1.29}$$

reemplazando en (1.28),

$$\begin{aligned} \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) &= (\delta_{lj} \delta_{mk} - \delta_{lk} \delta_{mj}) A_m B_j C_k \hat{u}_l & (1.30) \\ &= (B_l A_k C_k - C_l A_m B_m) \hat{u}_l & (1.31) \\ &= \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}) & (1.32) \end{aligned}$$

donde se uso la expresión del producto interno, (1.6) y (1.3).

**Ejercicio 1.2:** Expresando los vectores en notación de Einstein y utilizando el tensor de Levi-Civita, demostrar las propiedades (1.23), (1.25) y (1.26) del producto vectorial.

## 1.2 Transformación lineales. Transformación de vectores bajo rotaciones

Un tensor afin $T$ de rango 2 es una transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en si misma, $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, especificada por una matriz real de $3 \times 3$, $T_{jk}$ dada por

$$\vec{u} = \overleftrightarrow{T} \vec{v} \tag{1.33}$$

en componentes vale que

$$u_j = (\overleftrightarrow{T} \vec{v})_j = T_{jk} v_k. \tag{1.34}$$

*Ejemplo.* Cuando queremos realizar una rotación de los ejes, ¿cómo quedará expresado el vector en un nuevo sistema de coordenadas rotado?. En primera medida cabe recordar que los vectores no se transforman, lo que cambia son las componentes en la base rotada.

Supongamos que rotamos los ejes de coordenadas $x - y$ en un ángulo $\phi$ la transformación de las componentes del vector $\vec{A}$ viene dada por

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_1 \\ \tilde{A}_2 \\ \tilde{A}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \tag{1.35}$$

## 1.3 Campos y operadores diferenciales

Definimos el operador diferencial vectorial nabla (un bicho que se come funciones escalares o vectoriales con dominio en $\mathbb{R}^N$) por

$$\nabla = \hat{u}_i \partial_{u_i}. \tag{1.36}$$

De aquí en adelante a este operador diferencial lo denominaremos operador nabla. Si aplicamos el operador a una función escalar lo que tenemos es un vector *gradiente*. Si aplicamos el operador nabla a través del producto interno a un vector lo que tenemos es la *divergencia*, mientras que si lo aplicamos a través del producto vectorial a un vector lo que tenemos es el *rotor*. Veamos en detalle cada una de estas definiciones.

**Gradiente** Si aplicamos el operador nabla a un función escalar $\phi(\vec{x})$ lo que obtendremos es un campo vectorial definido por

$$\nabla \phi(\vec{x}) = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \hat{u}_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \hat{u}_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \hat{u}_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \hat{u}_3. \tag{1.37}$$

Esta definición es dependiente de las coordenadas que se utilizan, una definición del gradiente independiente de las base es

$$\vec{u} \cdot \nabla \phi(\vec{x}) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{[\phi(\vec{x} + \epsilon \vec{u}) - \phi(\vec{x})]}{\epsilon} \tag{1.38}$$

para todo vector $\vec{u}$ en $\mathbb{R}^3$.

El gradiente de $\phi$ en un punto $\vec{x}$, apunta en la dirección de máximo crecimiento de la función $\phi$ en $\vec{x}$. Es decir apunta hacia la cima, mientras $-\nabla\phi$ apunta hacia el valle. La magnitud del vector nos da la razón de crecimiento de la función escalar. Esta razón de crecimiento es la mayor o igual a cualquier otra dirección de la derivada direccional:

$$\partial_{\vec{u}} \phi(\vec{x}) = \nabla \phi(\vec{x}) \cdot \vec{u} \leq |\nabla \phi(\vec{x})| \tag{1.39}$$

Notar además como expresamos a la derivada direccional en función del gradiente.

**Divergencia** Si aplicamos el operador nabla a través del producto interno a un vector tenemos una función escalar definida por

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{A} &= (\hat{u}_i \partial_{u_i}) \cdot (A_j \hat{u}_j) \\ &= \hat{u}_i \cdot \hat{u}_j \partial_{u_i} A_j \\ &= \delta_{ij} \partial_{u_i} A_j \\ &= \partial_{u_i} A_i \end{aligned} \tag{1.40}$$

La divergencia es una medida de como el campo vectorial sale/diverge del punto en cuestión, esta estrechamente relacionada a la integral de superficie, en una pequeña superficie cerrada que rodea al punto, cualquier diferencia en esta superficie entre los campos salientes y entrantes serán interpretados como una divergencia o convergencia del campo vectorial.

Las fuentes (líneas salientes de un punto) tienen divergencia positiva (Fig. 1.1), los sumideros (líneas congruentes a un punto) divergencia negativa.

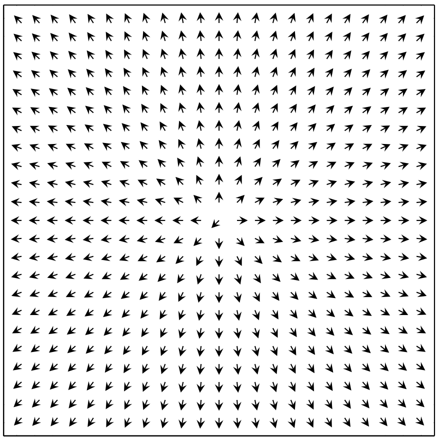

Figura 1.1: Campo vectorial divergente $\nabla \cdot \vec{A} > 0$.

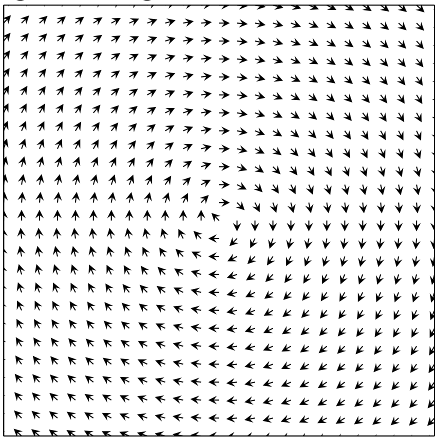

Figura 1.2: Campo vectorial rotational no divergente.

**Rotor** El rotor proviene de la aplicación del operador nabla a través del producto vectorial a un campo vectorial, el cual da como resultado un vector dado por

$$\nabla \times \vec{A}(\vec{x}) \ = \ \det \begin{bmatrix} \hat{u}_1 & \hat{u}_2 & \hat{u}_3 \\ \partial_{u_1} & \partial_{u_2} & \partial_{u_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix} \tag{1.41}$$

Figura 1.2 muestra un campo rotacional (con rotor negativo) con divergencia nula. Los campos con divergencia nula se denominan solenoidales.

En notación tensorial escribimos al producto vectorial en la forma

$$\nabla \times \vec{A} = \epsilon_{ijk} \partial_{u_j} A_k \hat{u}_i. \tag{1.42}$$

Nuevamente interpretamos al operador $\nabla$ como un vector para escribir la operación en función de sus componentes.

**Reglas de la derivación.** En general para demostrar las reglas de derivación del análisis vectorial se trata de escribir en componentes y utilizar los resultados del cálculo de una variable. De gran utilidad es la notación de Einstein.

**Ejemplo 1.2:** Veamos un par de ejemplos de demostración de propiedades que involucran operadores diferenciales.

(a)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\phi \vec{A}) &= \partial_{u_i}(\phi A_i) \\ &= \partial_{u_i} \phi A_i + \phi \partial_{u_i} A_i \\ &= \vec{A} \cdot \nabla \phi + \phi \nabla \cdot \vec{A} \end{aligned}$$

donde se ha usado que la derivada del producto es el producto de las derivadas de funciones escalares.

(b)

$$
\begin{aligned}
[\nabla \times (\phi \vec{A})] &= \epsilon_{ijk}\partial_j(\phi A_k)\hat{u}_i \\
&= \epsilon_{ijk}[\partial_j \phi A_k + \phi \partial_j A_k]\hat{u}_i \\
&= \epsilon_{ijk}\partial_j \phi A_k \hat{u}_i + \phi(\epsilon_{ijk}\partial_j A_k)\hat{u}_i \\
&= \nabla\phi \times \vec{A} + \phi(\nabla \times \vec{A})
\end{aligned}
$$

donde hemos usado derivada de un producto, para luego realizar distributiva y finalmente asociar a rotores los términos resultantes.

## 1.4 Integración en varias variables

**Integral de línea.** Integral de un campo vectorial a lo largo de un camino, esta puede ser entre dos puntos $a$ y $b$, $\int_a^b \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$ o a lo largo de un camino cerrado $\oint_\Gamma \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$ donde $\mathrm{d}\vec{l}$ es un vector con dirección tangente al camino.
**Integral de superficie.** Integral de un campo vectorial en una superficie, $\int_S \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$ donde $\mathrm{d}\vec{s}$ es un vector normal a la superficie que apunta hacia afuera de ésta.
**Teorema fundamental de Gauss o de la divergencia.** Si tenemos un volumen $V$ en $\mathbb{R}^3$ que es cerrado y acotado con borde $S$ suave y $\vec{A}$ es un campo vectorial en $V$ que es continuamente diferenciable, entonces

$$\int_V \nabla \cdot \vec{A}\,\mathrm{d}V = \oint_S \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{s}. \tag{1.43}$$

La integral de la divergencia de un campo vectorial en un volumen es igual a la integral del campo vectorial en la superficie que encierra a dicho volumen.

Se deja al lector para pensar en forma gráfica las razones por las cuales el volumen interno no contribuye a la integral de volumen de la divergencia y solo importa como es el campo vectorial $\vec{A}$ en la superficie exterior $S$.

La suma de las divergencias en todos los puntos adentro del volumen, si pensamos en la divergencia en pequeños volúmenes microscópicos se cancelarán entre sí y solo me quedarán las contribuciones de la superficie.

En general, la integral de superficie es el flujo del campo vectorial a través de la superficie, y puede ser expresado por

$$\oint_S \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \oint_S \vec{A} \cdot \hat{u}_n\,\mathrm{d}s = \oint_S A_n\,\mathrm{d}s \tag{1.44}$$

donde $\hat{u}_n$ es el versor normal saliente de la superficie y $A_n$ es la componente del campo vectorial en la dirección normal saliente de la superficie.

El teorema de Gauss se aplica a distintos campos de la física. El flujo eléctrico saliente de una superficie esta relacionado a la divergencia del campo eléctrico en el interior. Mientras en fluidos, corresponde a la conservación de la masa, el flujo saliente de un fluido incomprensible es igual a la cantidad de fluido que se esta inyectando dentro del volumen.

**Teorema de Stokes.** Sea $S$ una superficie orientada, cerrada y acotada con borde $\Gamma$ suave y $\vec{V}$ un campo vectorial continuamente diferenciable en una región que contiene a $S$ y su frontera entonces

$$\int_S \nabla\times\vec{V}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \oint_\Gamma \vec{V}\cdot \mathrm{d}\vec{l}, \tag{1.45}$$

la integral de línea puede ser expresada por

$$\oint_\Gamma \vec{V}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_\Gamma v_t \mathrm{d}l, \tag{1.46}$$

donde $v_t$ es la componente tangencial a la curva $\Gamma$, y la integral de línea se interpreta como la *circulación* del campo vectorial a lo largo de la curva cerrada $\Gamma$.

El teorema se puede pensar como la suma de pequeños vórtices, elementos de circulación en pequeñas superficies, ubicados en la superficie $S$ es igual a la circulación en la curva cerrada que encierra a la superficie. En el caso en que $\nabla\times\vec{V} = 0$ en $S$ (el rotor es 0 para todo punto de $S$), entonces el campo es irrotacional, y esta libre de vórtices.

*Campo vectorial conservativo.* Si el campo vectorial $\vec{V}$ puede ser expresado como $\vec{V} = \nabla\phi$ entonces $\phi$ es el potencial del campo vectorial y se dice que $\vec{V}$ es conservativo.

**Corolario 1.** Los campos vectoriales conservativos son irrotacionales.

Supongamos existe una $\phi$ tal que $\vec{V} = \nabla\phi$, entonces tenemos que el campo conservativo satisface $\nabla\times\vec{V} = \nabla\times\nabla\phi = 0$. Por lo que un campo vectorial conservativo es irrotacional.

**Corolario 2.** Para campos conservativos las integrales de línea entre dos puntos son independientes del camino.

Demostremos este enunciado. Sea la integral de línea entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$ a lo largo de una curva $\Gamma_1$ que va entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$, si elegimos otra curva entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$, $\Gamma_2$ entonces la integral

$$\int_{\Gamma_1} \vec{V}\cdot \mathrm{d}\vec{l} - \int_{\Gamma_2} \vec{V}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint \vec{V}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \nabla\times\vec{V}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0 \tag{1.47}$$

donde ambas curvas $\Gamma_1$ y $\Gamma_2$ se interpretan desde $\vec{a}$ hasta $\vec{b}$, por lo que para la integración desde $\vec{b}$ hasta $\vec{a}$ se realiza con signo negativo. Además en la segunda igualdad de (1.47) se uso el teorema de Stokes y luego en la tercera igualdad se usa que $\nabla\times\vec{V} = 0$ (Corolario 1). Entonces tenemos que

$$\int_{\Gamma_1} \vec{V}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{\Gamma_2} \vec{V}\cdot \mathrm{d}\vec{l}. \tag{1.48}$$

Notar que para que valga este resultado el rotor del campo debe ser 0 en *toda* la superficie comprendida entre $\Gamma_1$ y $\Gamma_2$.

El lector se preguntará entonces si es que vale la afirmación inversa, ¿todo campo vectorial irrotacional será convervativo? la respuesta es no siempre, solo para el caso en el que la región donde el campo es irrotacional sea simplemente conexa. Como contraejemplo, supongamos un toro o donut/rosquilla de Homero, en ese caso no tenemos garantizado si la integración es por fuera de la donut que el campo sea conservativo.

En el caso en que la región sea simplemente conexa vale el teorema siguiente:

**Teorema** Si $\nabla\times\vec{V} = 0$ en una región simplemente conexa $V$ donde $\vec{V}$ es continuamente diferenciable, entonces para $\vec{p}$ en $V$, la integral de línea

$$\phi(\vec{x}) = \int_{\vec{p}}^{\vec{x}} \vec{V}\cdot \mathrm{d}s, \tag{1.49}$$

es independiente de la curva que une a $\vec{p}$ con $\vec{x}$ y se puede definir un potencial de $\vec{V}$ tal que $\vec{V} = \nabla\phi$. Este potencial es único hasta una constante aditiva que depende de $\phi$.

Esta claro ahora que si tenemos un campo vectorial que esta libre de vórtices en una región simplemente conexa, entonces podemos aplicar el razonamiento inverso, es decir en la región interna a la de las curvas $\Gamma_1$ y $\Gamma_2$ *todo* punto del campo vectorial será irrotacional y por lo tanto la integral de línea cerrada es 0 de lo cual se deduce que las integrales de línea entre los dos caminos $\Gamma_1$ y $\Gamma_2$ son iguales. En el caso en que el dominio en el que el campo sea irrotacional no sea simplemente conexo no tenemos garantía que la integral cerrada se anule.

Ahora supongamos que existe un campo vectorial $\vec{A}$ tal que el campo $\vec{V}$ se puede escribir de la forma $\vec{V} = \nabla\times\vec{A}$ luego se deduce que $\nabla\cdot\vec{V} = 0$, *el campo es solenoidal*. Vale la pregunta inversa también en este caso, ¿será que todo campo vectorial solenoidal se puede escribir como el rotor de un campo vectorial? La respuesta es equivalente al anterior planteo. Si la región $V$ donde se cumple que el campo es solenoidal tiene la propiedad que cualquier superficie cerrada en $S$ encierra un volumen cuyos puntos son todos pertenecientes a la región $V$ entonces vale, es decir el campo vectorial solenoidal puede ser escrito como un rotor de otro campo vectorial.

### 1.4.1 Identidades de Green

Si proponemos al campo vectorial dado por dos funciones escalares $\phi$, $\psi$:

$$\vec{A} = \phi\nabla\psi \tag{1.50}$$

Luego reemplazamos esta expresión en el teorema de la divergencia:

$$\int \nabla\cdot(\phi\nabla\psi)\mathrm{d}V = \oint_S \phi\nabla\psi\cdot\mathrm{d}\vec{s} \tag{1.51}$$

donde $\mathrm{d}\vec{s}$ es el diferencial de superficie con dirección normal saliente a la superficie, alternativamente se puede denotar $\mathrm{d}\vec{s} = \hat{n}\mathrm{d}s$.

Expandiendo la primera integral en (1.51) obtenemos:

$$\int_V (\phi\nabla^2\psi + \nabla\phi\cdot\nabla\psi)\mathrm{d}V = \oint_S \phi\partial_n\psi\mathrm{d}s \tag{1.52}$$

donde $\partial_n\psi$ es la derivada de $\psi$ en la dirección normal a la superficie.

La ecuación (1.52) es conocida como la primera identidad de Green.

La segunda identidad de Green se obtiene a partir de aplicar la primera identidad de Green a $\vec{A} = \phi\nabla\psi$ en la cual se obtiene (1.52) y a $\vec{B} = \psi\nabla\phi$. Para este último campo vectorial la primera identidad de Green se lee

$$\int_V (\psi\nabla^2\phi + \nabla\psi \cdot \nabla\phi)\mathrm{d}V = \oint_s \psi\partial_n\phi\mathrm{d}s \tag{1.53}$$

Restando (1.52) menos (1.53) resulta la segunda identidad de Green:

$$\int_V (\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi)\mathrm{d}V = \oint_S (\phi\partial_n\psi - \psi\partial_n\phi)\mathrm{d}s \tag{1.54}$$

## 1.5 Teorema de Helmholtz

**Teorema** Si $\vec{V}$ es un campo vectorial *continuamente diferenciable del cual conocemos su divergencia y su rotor* y éstos se van a 0 en el infinito (al menos como $r^{-3}$), entonces, este campo vectorial queda *univocamente determinado.* Es decir que cuando especificamos la divergencia y el rotor de un campo vectorial estamos determinando univocamente al campo vectorial.

*Demostración.* Demostremos que el campo $\vec{V}$ lo podemos descomponer y escribir como la suma de un campo solenoidal y de un campo irrotacional $\vec{V}$:

$$\vec{V} = \nabla\phi + \nabla \times \vec{A}. \tag{1.55}$$

Entonces si encontramos a la función escalar $\phi$ y además encontramos al campo vectorial $\vec{A}$, y además estos son únicos, hemos logrado la descomposición.

Si aplicamos la divergencia a (1.55) tenemos que

$$\nabla \cdot \vec{V} = \nabla^2\phi \tag{1.56}$$

es decir que si tenemos como dada a $\nabla \cdot \vec{V}$, debemos determinar la $\phi$ que satisface la ecuación de Poisson. La $\phi$ se determina de

$$\phi = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\nabla \cdot \vec{V}}{r}\mathrm{d}V' + \oint_S \left[\phi\partial_n(r^{-1}) - \frac{\partial_n\phi}{r}\right]\mathrm{d}s' \tag{1.57}$$

donde $r = |\vec{x} - \vec{x}'|$. Esta solución se puede encontrar utilizando la segunda identidad de Green, en la cual se toma una función escalar como $\phi$ y la segunda función escalar como $\psi = 1/r$, utilizando el concepto de la delta de Dirac. Se deja como ejercicio hacer en detalle las cuentas.

En un problema sin condiciones de contorno la superficie $S$ puede ser pensada como una esfera cuyo radio tiende a $\infty$ como tenemos que $\nabla \cdot \vec{V} \to r^{-3}$ para $r \to \infty$ entonces $\phi \to r^{-1}$ para $r \to \infty$. La integral de superficie se anula (sin embargo si es importante para cuando tenemos condiciones de contorno). Luego (1.57) para estas condiciones de contorno se reduce a

$$\phi = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\nabla\cdot\vec{V}}{r}\mathrm{d}V'. \tag{1.58}$$

hemos determinado $\phi$ y por lo tanto determinado el primer término de (1.55) y con esto su existencia queda comprobada.

Ahora pasamos a la demostración de la existencia de $\vec{A}$, aplicando $\nabla\times$ a la expresión (1.55) se tiene

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{V} &= \nabla\times\nabla\times\vec{A} \\ &= \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}\end{aligned} \tag{1.59}$$

como $\vec{A}$ esta determinada a menos de un gradiente, $\vec{A}' = \vec{A}+\nabla\psi$, manteniendose el mismo rotor $\nabla\times\vec{A}' = \nabla\times\vec{A}$, entonces podemos elegir a $\psi$ tal que $\nabla\cdot\vec{A} = 0$.

Supongamos que $\nabla\cdot\vec{A} \neq 0$, luego se tiene que $\nabla\cdot(\vec{A}'+\nabla\psi) = \gamma$, Entonces puedo resolver la ecuación de Poisson $\nabla^2\psi = \gamma$, encontrando a $\psi$ y por lo tanto vale que $\nabla\cdot\vec{A}' = 0$.

Luego la ecuación resultante es

$$\nabla\times\vec{V} = -\nabla^2\vec{A} \tag{1.60}$$

pero estas son tres ecuaciones de Poisson, entonces bajo los mismos argumentos podemos encontrar que

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\nabla\times\vec{V}}{r}\mathrm{d}v \tag{1.61}$$

Por un lado, hemos demostrado que existen $\phi$ y $\vec{A}$ tal que el campo vectorial lo puedo descomponer en (1.55). Por otro lado, hemos demostrado que si conocemos a $\nabla\cdot\vec{V}$ y $\nabla\times\vec{V}$ podemos determinar a $\vec{V}$.

Este resultado es de fundamental importancia en electrostática donde tendremos especificado la divergencia y el rotor del campo eléctrico y a partir de estos determinaremos al campo. Notar que la demostración realizada aquí, asume un dominio no acotado y totalmente abierto. Mas adelante durante el curso veremos el caso general a dominios con condiciones de contorno.

## 1.6 Coordenadas curvilíneas ortogonales

En general podemos representar a puntos en el espacio no solo por las coordenadas cartesianas rectangulares $(x, y, z)$ sino por coordenadas curvilíneas generales $u_1, u_2, u_3$ tal que existan ecuaciones de transformación entre las coordenadas,

$$x_i = x_i(u_1, u_2, u_3). \tag{1.62}$$

Si tenemos *el vector posición* dado por $\vec{r} = x_i\hat{\imath}_i$. Las superficies de las coordenadas curvilíneas, estan dadas por $u_j = cte$, intersectandosé estas tres superficies en el punto.

Notar que dado que la transformación (1.62) no necesariamente es lineal, entonces las superficies no son planos.

Los vectores $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}$ son tangentes a las curvas coordenadas $u_1, u_2, u_3$, representando a $\hat{u}_i$ a los vectores unitarios tangentes a dichas curvas entonces podemos representar a las derivadas en el punto del vector posición por

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} = h_1 \hat{u}_1 \tag{1.63}$$

donde $h_1$ es denominado el factor de escala, el cual es la magnitud del cambio del vector posición en la direción $\hat{u}_1$,

$$h_1 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \right| = \left[ \sum_i \left( \frac{\partial x_i}{\partial u_1} \right)^2 \right]^{1/2}. \tag{1.64}$$

Si los versores $\hat{u}_i$ son ortogonales entre sí, se dice que el sistema curvilíneo es ortogonal.

La variación del vector posición, el desplazamiento infinitesimal, expresada en las coordenadas curvilíneas es

$$\mathrm{d}\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \mathrm{d}u_i = \sum_i h_i \hat{u}_i \mathrm{d}u_i \tag{1.65}$$

Por lo tanto si el sistema coordenado curvilíneo es ortogonal el arco de longitud viene dado por

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\vec{r} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \sum_i h_i^2 \mathrm{d}u_i^2 \tag{1.66}$$

como el sistema es ortogonal no aparecen los términos cruzados en esta expresión.

Si queremos transformar el desplazamiento infinitesimal de coordenadas, lo escribimos en función de las coordenadas cartesianas

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x_i \hat{\imath}_i \tag{1.67}$$

las variaciones de la coordenada $\mathrm{d}x_i$ en función de las coordenadas curvilíneas dan

$$\mathrm{d}x_i = \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \mathrm{d}u_j \tag{1.68}$$

luego nos queda que

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x_i \hat{\imath}_i = \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \mathrm{d}u_j \hat{\imath}_i = \left( \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \hat{\imath}_i \right) \mathrm{d}u_j \tag{1.69}$$

por lo que nos queda definido un vector no necesariamente normalizado,

$$\vec{u}_1 = \frac{\partial x_i}{\partial u_1} \hat{\imath}_i = h_1 \hat{u}_1. \tag{1.70}$$

Introducimos el Jacobiano normalizado dado por

$$J = \begin{pmatrix} h_1^{-1} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & h_2^{-1} \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & h_3^{-1} \frac{\partial x_1}{\partial u_3} \\ h_1^{-1} \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & h_2^{-1} \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & h_3^{-1} \frac{\partial x_2}{\partial u_3} \\ h_1^{-1} \frac{\partial x_3}{\partial u_1} & h_2^{-1} \frac{\partial x_3}{\partial u_2} & h_3^{-1} \frac{\partial x_3}{\partial u_3} \end{pmatrix} \tag{1.71}$$

La matriz $J$ es ortogonal y su inversa es igual a su transpuesta $J^T$.

Los vectores pueden ser transformados a través del Jacobiano normalizado, entre el sistema cartesiano y un sistema coordenado curvilíneo. Sea un vector artibrario $\vec{A}$, la relación de sus coordenadas viene dada por

$$\begin{pmatrix} A_1^x \\ A_2^x \\ A_3^x \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} A_1^u \\ A_2^u \\ A_3^u \end{pmatrix} \tag{1.72}$$

y también la transformación inversa del sistema cartesiano al curvilíneo

$$\begin{pmatrix} A_1^u \\ A_2^u \\ A_3^u \end{pmatrix} = J^T \begin{pmatrix} A_1^x \\ A_2^x \\ A_3^x \end{pmatrix} \tag{1.73}$$

**Ejemplo 1.3:** En el caso de coordenadas cilíndricas $(r, \phi, z)$ se tiene que la transformación viene dada por

$$x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi,\ z = z \tag{1.74}$$

derivando estas expresiones por las coordenadas cilíndricas y normalizando con los $h_i$, se obtiene la expresión del Jacobiano normalizado,

$$J = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.75}$$

Es decir que la transformación de vectores expresados en cartesianas a cilíndricas viene dada por

$$A_r = \cos\phi A_x + \sin\phi A_y, \tag{1.76}$$
$$A_\phi = -\sin\phi A_x + \cos\phi A_y \tag{1.77}$$
$$A_z = A_z \tag{1.78}$$

Los operadores diferenciables en coordenadas curvilíneas tienen las siguientes expresiones,

$$\nabla\psi = \sum_j h_j^{-1}\frac{\partial\psi}{\partial u_j}\hat{u}_j \tag{1.79}$$

$$\nabla\cdot\vec{A} = (h_1h_2h_3)^{-1}\left[\frac{\partial h_2h_3A_1}{\partial u_1} + \frac{\partial h_1h_3A_2}{\partial u_2} + \frac{\partial h_1h_2A_3}{\partial u_3}\right] \tag{1.80}$$

$$\nabla^2\psi = (h_1h_2h_3)^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial u_3}\right)\right] \tag{1.81}$$

**Ejercicio 1.3:** A partir de la expresión del gradiente en coordenadas curvilíneas, $\nabla\psi = u_j\hat{u}_j$ demuestre (1.79).

## 1.7 Función delta de Dirac

La delta de Dirac es una función impropia que tiene las siguientes propiedades,

(a) $\delta(x-a) = 0$ si $x \neq a$

(b) $\int \delta(x-a)\mathrm{d}x = 1$ si la región de integración contiene al punto $a$ y es 0 si no lo contiene.

Dadas estas dos propiedades la delta de Dirac es clasificada como una distribución o función generalizada. Puede ser pensada como el límite de secuencias de funciones cuyo ancho disminuye mientras su altura crece acordemente tal que el área integrable se conserve.

Por ejemplo se puede pensar en una función densidad de probabilidad Gaussiana definida por

$$\mathcal{N}(x, 0, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \tag{1.82}$$

Algunos ejemplos de estas funciones son:

$$\delta(x) = \lim_{m\to\infty} \frac{m}{\sqrt{\pi}} \exp(-m^2x^2) \tag{1.83}$$

$$\delta(x) = \lim_{m\to\infty} \frac{\sin(mx)}{\pi x} \tag{1.84}$$

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\epsilon/\pi}{x^2+\epsilon^2} \tag{1.85}$$

en todas estas secuencias de funciones se puede comprobar que su integral es 1 si el intervalo de integración contiene al punto $x = 0$ y es 0 si no lo contiene.

Algunas propiedades derivables importantes de la delta:

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)\mathrm{d}x = f(a)$

(b) $\int f(x)\delta'(x-a)\mathrm{d}x = -f'(a)$

(c) $\delta(kx) = \frac{\delta(x)}{|k|}$ donde $k$ una constante.

(d) $\delta(f(x)) = \sum_i \left|\frac{df}{dx}(x_i)\right|^{-1} \delta(x-x_i)$ donde $x_i$ son las raíces de $f(x)$.

(e) $\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx)\mathrm{d}k$

*Ejemplo.* Veamos la demostración de la propiedad (c), $\delta(kx) = \frac{\delta(x)}{|k|}$.

Si $k > 0$ entonces propongo como cambio de variables $y = kx$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(kx)\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y/k)\delta(y)\mathrm{d}y/k \\ &= f(0)/k \end{aligned} \tag{1.86}$$

Si $k < 0$ entonces

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(kx)\mathrm{d}x &= \int_{+\infty}^{-\infty} f(y/k)\delta(y)\mathrm{d}y/k \\ &= -f(0)/k. \end{aligned} \tag{1.87}$$