Dinámica de Fluidos Geofísicos

Guía 2: Ajuste bajo gravedad.

Setiembre de 2024

Problema 1: Deduzca la ecuación de estabilidad para un gas ideal bajo la acción de la gravedad utilizando la ecuación de momento vertical y la conservación de la temperatura potencial. Asuma que hay pequeñas perturbaciones (método perturbativo) a un estado básico en reposo. Asuma además que las perturbaciones de la presión son despreciables. Ayuda. Recordar que las ρ_0 y p_0 para el caso de un gas ideal bajo la acción de la gravedad dependen de la altura.

Problema 2: Supongamos un viento (muy) repentino que produce un forzado en la superficie libre de un estanque extenso que inicialmente estaba en reposo. El forzado del viento produce una perturbación inicial de la interfase de la forma $\eta = \eta(x, t_0)$. Determine cual será la evolución de la presión y la velocidad. Utilice teoría de Fourier.

Problema 3: Linealizar el sistema de ecuaciones de ondas pandas alrededor de un estado en reposo con $h = h_0$, encontrar la velocidad de fase de las ondas. Notar que hemos logrado pasar las dependencias temporales del sistema de las ecuaciones de contorno a las ecuaciones mismas.

Problema 4: Considere un estanque de largo L_x y ancho L_y con una profundidad H, determine la perturbación de presión en el estanque. Determine el mayor periodo del sistema asumiendo $L_x > L_y$.

Problema 5: Considere las ecuaciones generales para un fluido incomprensible norotante en 2D que estando en reposo y con una profundidad H es perturbado levemente.

(a) Encuentre las soluciones ondulatorias que satisfagan la condiciones de contornos.

(b) ¿Cúal es la relación de dispersión que debe satisfacer las soluciones?

(c) Realizar un desarrollo de Taylor en función de kH de las soluciones y ver como es el comportamiento de u, w y η para el límite $kH \to 0$.

(d) Analize las ecuaciones en este límite y deduzca que términos serán despreciables.

(e) ¿Cuáles son las velocidades de fase y de grupo para el límite $kH \to 0$?

(f) En el límite de aguas profundas $kH \gg 1$, muestre que la velocidad del fluido es

$$\mathbf{u} = \exp\left(-k(H-z)\right) Re\left\{\frac{gk\hat{\eta}}{\omega}(1, -\mathrm{i}) \exp \mathrm{i}(kx - \omega t)\right\}$$

con $\omega^2 = gk$.

(g) ¿Cuáles son las velocidades de fase y de grupo para el límite $kH \gg 1$?

Problema 6: Derive las ecuaciones shallow-water para un sistema no-rotante linearizadas en un medio en reposo y con profundidad media H. Estudie la evolución del sistema si inicialmente la altura de la interface viene dada por una perturbación de la forma $\eta = \eta_0 \mathrm{sgn}(x)$.

Problema 7: Considere las ecuaciones shallow-water para un sistema no-rotante linearizadas en un medio en reposo y con profundidad media H:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial h}{\partial x}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + H\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{2}$$

(a) Obtenga una ecuación para la razón de cambio de la energía cinética KE $= Hu^2/2$. Similarmente obtenga una ecuación para la energía potencial PE $= gh^2/2$. Finalmente deduzca una ecuación para la energía total $E =$ KE + PE y de una explicación física de la ecuación resultante.

(b) Proponiendo soluciones ondulatorias encuentre la relación entre la amplitud de la perturbación de la velocidad $\hat{u}$ y la amplitud de la perturbación de la profundidad $\hat{h}$.

(c) Demuestre que la energía para este tipo de ondas esta equiparticionada, *i.e.* $\overline{\mathrm{KE}}/\overline{\mathrm{PE}} = 1$ donde las barras representan un promedio en la fase de las ondas.

(d) Demuestre que el flujo de energía promedio $\overline{F}$ viene dado por $\overline{F} = c_g\overline{E}$, donde c_g es la velocidad de grupo. De una interpretación física.

Problema 8: Supongamos que tenemos un estanque cuya profundidad viene dada por $H(x) = -H_1 + H_2 \tanh(x/L)$. Considere la aproximación shallow-water.

- Determine las soluciones de perturbaciones lineales asumiendo que en $x \to -\infty$ la interface viene dada por $\eta = \eta_0 \exp i(\omega t - kx)$.
- ¿Que es lo que sucede para un estanque con $H_1 = H_2$?
- Determine las soluciones de perturbaciones lineales si la profundidad del estanque $H(x) = -H_1 + H_2 \tanh(x/L)$ es aproximada por tres líneas rectas, con $H = -H_1 - H_2$ para $x < -L$, y $H = -H_1 + H_2$ para $x > L$ asumiendo que en $x \to -\infty$ la interface viene dada por $\eta = \eta_0 \exp i(\omega t - kx)$.
- Saque conclusiones físicas de las diferencias que encuentra en las soluciones para $x \gg L$ en comparación con $x \ll -L$. ¿Qué es lo que esta sucediendo con el (pseudo)momento transportado por la onda? ¿Qué es lo que esta sucediendo con la energía de la onda?

Problema 9: Plantear un sistema de ecuaciones que tenga 3 capas de fluidos. ¿Cuántos modos tiene este sistema? ¿Qué tipo de modos nuevos aparecen? ¿son barotrópicos o baroclínicos? Extender el problema anterior a un sistema de n capas. ¿Puede hacer algun comentario sobre la aplicación de este sistema a modelos numéricos de la atmósfera?. Cada nuevo modo lento que aparece representa el movimiento de una sola capa y los desplazamientos en las otras capas son pequeños.

Problema 10: Suponga las ecuaciones de un fluido 2D estratificado en reposo, linealice las ecuaciones y proponga la aproximación hidrostática directamente desde el inicio (en forma equivalente a la deducción de las ecuaciones shallow-water) obtenga la relación de dispersión para este caso. Compare esta relación con la obtenida mediante la aproximación de Boussinesq que se viera en el teórico. ¿Qué se debe asumir en la relación de dispersión de Boussinesq para obtener la relación de dispersión hidrostática?

Problema 11: Suponga las perturbaciones lineales bajo la aproximación de Boussinesq que se producen en un fluido 2D que tiene como estado básico una frecuencia de Brunt-Vaisala constante y un flujo básico (o viento de entorno) que solo depende de la altura $\mathbf{u}_0 = (u_0(z), 0)$.

(a) Obtenga la ecuación para las perturbación de velocidad vertical conocida como ecuación de Taylor-Goldstein.

(b) Resuelva la ecuación diferencial resultante si el viento de entorno es una función lineal de la altura. Encuentre el número de onda vertical en función de la frecuencia y el número de onda horizontal, analice en que situaciones se dan sus comportamientos extremos ($m \to 0$ y $m \to \infty$).

(c) En el caso general para $u_0(z)$ encuentre una solución por el método aproximado WKB y encuentre las condiciones para los cuales la aproximación WKB es válida.

(d) Discuta para que amplitudes de la perturbación la aproximación lineal dejará de ser válida.

Manuel Pulido, GICA