Programación 2025

Guía 11: Ecuaciones diferenciales ordinarias. Sistemas dinámicos

29 de octubre 2025

Problema 1: Modelos epidemiológicos. Desarrolle una clase de objetos que trabaje con un modelo epidemiológico Susceptible-Infectado-Recuperado, S, I, R respectivamente que represente el avance del virus SARS-Cov 2 cuyas ecuaciones son

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{R_0}{\tau_I}\frac{I}{N}S \tag{1}$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{R_0}{\tau_I}\frac{I}{N}S - \frac{I}{\tau_I} \tag{2}$$

$$\frac{dR}{dt} = \frac{I}{\tau_I} \tag{3}$$

$$\tag{4}$$

donde $N = S + I + R$ es la población τ_I es el tiempo de infección, R_0 es el número de reproducción.

(a) Defina los parámetros en la instanciación.

(b) Realice una función de integración de un paso utilizando como metodo de integracion de la derivada temporal diferencias finitas (método de Euler)..

(c) Realice una función de integración de múltiples N*k pasos que como salida tenga una lista/array con las variables cada k pasos.

(d) Realice una función para graficar una variable del sistema.

(e) Realice una función para graficar varias variables del sistema.

(f) Analice como cambian las curvas de infectados de acuerdo al parámetro $R_0 = 0.8, 2.0, 3.0$.

(g) Solo si se siente motivado puede instrumentar un sistema con widgets para graficar con distintos parámetros.

Problema 2: Edward Lorenz un físico del MIT que trabajaba en modelos atmosféricos de la convección, obtuvó un sistema de ecuaciones de solo tres variables que simplificaba el fenómeno. Estudiando numericamente las soluciones de este sistema descubrió en 1963 que las soluciones eran totalmente caóticas y el atractor de las soluciones tenía un comportamiento fractal (en un espacio de dimensión fraccional). En 1972 dio una conferencia en la Asociación Americana para el Avance de la Ciencia titulada ¿Puede el aleteo de una mariposa en Brazil generar un tornado en Texas? En alusión directa al fenómeno del caos y lo impredecible que son los fenómenos atmosféricos. A partir de esa charla el "caos inestable" se conoce como "el efecto mariposa", y se aplica en muy diversas aplicaciones particularmente los mercados financieros.

El modelo de Lorenz-63 (denominado asi por su trabajo) viene definido por las ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \sigma(y-x), \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= x(\rho-z)-y, \\
\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= xy-\beta z.
\end{aligned} \tag{5}$$

(a) Defina los parámetros en la instanciación.

(b) Realice una función de integración de un paso. Utilice como esquemas de integración para representar el esquema de Runge-Kutta de 4 orden (provisto en la página de la asignatura; tenga cuidado con el δt).

(c) Realice una función de integración de múltiples N*k pasos que como salida tenga una lista/array con las variables cada k pasos.

(d) Realice una función para graficar las tres variables del sistema (con tres paneles).

(e) Realice una función para graficar en tres dimensiones al sistema.

(f) Tome como valores de los parámetros $\sigma = 10$, $\rho = 28$ and $\beta = 8/3$ y un $\delta t = 0.005$. Comenzando desde 0 realice una integración larga (1000 tiempos) y desechelos. Luego analice 500 tiempos graficando con las dos funciones desarrolladas. Analice las alas de la mariposa y el comportamiento caótico.(Buscar en internet los gráfico del atractor de Lorenz y corroborar que les ha dado lo mismo.