Capítulo 10

Radiación

10.1 Radiación de una carga acelerada

Supongamos que tenemos una carga puntual q en movimiento cuya trayectoria en el espacio es $\vec{y}(t)$. En ese caso tendremos una densidad de carga dada por $\rho(\vec{x},t) = q\delta(\vec{x} - \vec{y}(t))$ y la corriente es $\vec{J}(\vec{x},t) = q\delta(\vec{x} - \vec{y}(t))\vec{v}(t)$¿Cual es el campo eléctrico y el campo magnético generado por esa carga? o en su defecto el potencial eléctrico y el potencial vector. Las soluciones a las ecuaciones de Maxwell transformadas, las ecuaciones de ondas no homogeneas, a los potenciales bajo el gauge de Lorenz son las soluciones retardadas de las ecuaciones de ondas,

$$\Phi(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{1}{R}[\rho(\vec{x}',t')]_{ret}\mathrm{d}V' \tag{10.1}$$

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{1}{R}[\vec{J}(\vec{x}',t')]_{ret}\mathrm{d}V' \tag{10.2}$$

donde $R = |\vec{x} - \vec{x}'|$ y $t' = t - R/c$. Estos son los denominados potenciales retardados, ya que se evaluan los efectos de las fuentes en los tiempos retardados. Se debe notar que para fuentes extensas, los tiempos retardados estarán en función de la posición de la fuente $\vec{x}'$.

Ejercicio 10.1: Determinar el potencial escalar exacto a partir de la solución retardada de una carga que se mueve con velocidad constante $\vec{y}(t) = \vec{v}t$. Demuestre que este viene dado por

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qc}{[(tc^2 - \vec{x}\cdot\vec{v})^2 + (|x|^2 - c^2t^2)(c^2 - v^2)]}. \tag{10.3}$$

Para el caso de la carga puntual, con una trayectoria $\vec{y}(t)$, el potencial a evaluar de (10.1) es

$$\Phi(\vec{x},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{1}{R}\delta(\vec{x}' - y(t'))_{ret}\mathrm{d}V' \tag{10.4}$$

El problema aqui es que t' depende de $\vec{x}'$ por lo que para evaluar la integral en la delta tenemos una función de $\vec{x}'$ y deberíamos usar la regla (en una dimensión):

$$\delta(f(x)) = \frac{\delta(x - x_r)}{|f'(x_r)|} \tag{10.5}$$

donde x_r es la raíz de $f(x)$.

Si realizamos una serie de Taylor alrededor de $x' = 0$ (porque?) entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
\delta(x - y(t - (x - x')/c)) &= \delta(x'(1 - \frac{dy}{dx'}|_{x'=0}) - y(t')|_{x'=0}) & (10.6)\\
&= \delta\left(x' - \frac{y(t')|_{x'=0}}{1 - \frac{dy}{dx'}|_{x'=0}}\right)\frac{1}{(1 - \frac{dy}{dx'}|_{x'=0})} & (10.7)
\end{aligned}$$

Dado que es una carga puntual es pertinente la aproximación de campo lejano es decir $\vec{x} \gg \vec{x}'$, luego puedo tomar el desarrollo de Taylor de la distancia entre el punto fuente y el punto observación,

$$\begin{aligned}
|\vec{x} - \vec{x}'| &= (|\vec{x}|^2 + 2\vec{x}\cdot\vec{x}' + |\vec{x}'|^2)^{1/2} & (10.8)\\
&\approx |\vec{x}| - \hat{x}\cdot\vec{x}' & (10.9)
\end{aligned}$$

Si tenemos en cuenta que el tiempo t' se debe evaluar en el tiempo retardado, luego aplicamos al tiempo t' la aproximación (10.9),

$$t' = t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c} \approx t - \frac{|\vec{x}|}{c} + \frac{\hat{x}\cdot\vec{x}'}{c} \tag{10.10}$$

La densidad de carga manteniendo hasta el primer orden en $\vec{x}'$ del tiempo retardado es

$$\begin{aligned}
\rho(\vec{x}', t') &= q\delta(\vec{x}' - \vec{y}(t')) & (10.11)\\
&= q\delta\left(\vec{x}' - \vec{y}\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c} + \frac{\hat{x}\cdot\vec{x}'}{c}\right)\right) & (10.12)
\end{aligned}$$

entonces la delta es una función nolineal de $\vec{x}'$ ya que las dependencias con $\vec{x}'$ también aparecen en la evaluación de la trayectoria en el tiempo retardado. Pensemos por el momento que tenemos una sola dirección luego vale que

$$\delta(f(\vec{x}')) = \frac{\delta(\vec{x}' - \vec{y}(t))}{|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x'}|} \tag{10.13}$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x'} = 1 - \frac{\mathrm{d}y_x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x'} = 1 - \frac{v_x}{c} \tag{10.14}$$

Se deduce que en el caso de la delta en las tres direcciones

$$\rho(\vec{x}', t') = q\frac{\delta(\vec{x}' - \vec{y})}{1 - \vec{v}\cdot\frac{\hat{x}}{c}} \tag{10.15}$$

Es decir que aparece un término distorsivo en la carga producido por el hecho que la carga se esta moviendo.

¿Cúal es el efecto físico que produce esta corrección en la densidad de carga? Lo que sucede con las fuentes si pensamos en una fuente extendida es que hay una distorsion del volumen visto desde el punto de vista del observador debido a que lo que esta observando a un dado tiempo esta mezclando tiempos fuentes diferentes para distintos puntos de las fuentes. El volumen aparente de una configuración de carga en movimiento se ve distorsionada por este efecto,

$$V' = \frac{V}{1 - \vec{R} \cdot \vec{v}/c} \tag{10.16}$$

Cuando la configuracion de carga se mueva hacia el observador el denominador es menor que 1 y entonces el volumen aparente es mayor al real.

Para entender este efecto pensemos en la emisión de luz desde los extremos de un tren que se mueve hacia el observador con una velocidad v. En el tiempo t la locomotora se encuentra en el lugar del observador por lo que ese punto lo observa inmediatamente. Sin embargo el haz de luz del último vagón tiene que haber salido antes de tiempo $t' - t < 0$ para que pueda ser observado pero cuando salió entonces el tren se encontra mas atras por lo que el observador esta viendo un tren mas largo de lo que es en la realidad, por el movimiento del tren y por la velocidad finita en la que se propaga la luz. Cuanto mas largo es el tren?

El tiempo que tarda en llegar la señal, es el largo aparente sobre la velocidad de la luz',

$$(t' - t) = L'/c \tag{10.17}$$

Mientras el largo extra del tren es la velocidad del tren por el tiempo que tarda la señal en llegar,

$$L' - L = v(t' - t) \tag{10.18}$$

de estas ecuaciones despejando el largo aparente del tren resulta en

$$L' = \frac{L}{1 - v/c} \tag{10.19}$$

Es importante notar que esta extensión del volumen se extiende a volúmenes puntuales (la delta) como hemos demostrado anteriormente.

Reemplazando en la integral, (10.1), tenemos que

$$\Phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|(1 - \vec{v} \cdot \frac{\hat{R}}{c})} \int \delta(\vec{x}' - \vec{y}) \mathrm{d}V' \tag{10.20}$$

donde $\vec{R} = \vec{x} - \vec{y}$. La integral de la delta en un volumen que incluye al punto $\vec{y}$ es uno por lo que resulta

$$\Phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{R}| - \vec{v} \cdot \frac{\vec{R}}{c}} \tag{10.21}$$

Hasta el momento hemos calculado el potencial eléctrico de una carga en movimiento, (10.21), realizando el mismo cálculo para el potencial vector, de (10.2),

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x}|} \int \rho(\vec{x}', t') \vec{v}(t') \mathrm{d}V' \tag{10.22}$$

Manteniendo solo el primer orden

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v}}{|\vec{x}| - \vec{v} \cdot \frac{\vec{x}}{c}} = \frac{\vec{v}}{c^2}\Phi. \tag{10.23}$$

El potencial escalar y potencial vector para una carga en movimiento, (10.21) - (10.23), son conocidos por *potenciales de Liénard-Wiechert.* A partir de éstos, podemos calcular los campos de las cargas puntuales que se mueven usando

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \qquad \vec{E} = -\nabla\Phi - \partial_t \vec{A}. \tag{10.24}$$

El campo eléctrico es

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\vec{x}|}{(\vec{x} \cdot (c\hat{x} - \vec{v}))^3} [(c^2 - v^2)(c\hat{x} - \vec{v}) + \vec{x} \times ((c\hat{x} - \vec{v}) \times \dot{\vec{v}})] \tag{10.25}$$

donde hemos ubicado a la carga en movimiento en el origen, i.e. $\vec{x} = \vec{R}$. El primer término decae como r^{-2} y es el que da el potencial de Coulomb, el segundo término solo aparece si la carga tiene aceleración y decae como r^{-1}, este es un campo de radiación y será el dominante lejos de la carga. *Entonces, las cargas puntuales aceleradas generan un campo de radiación que es el dominante lejos de la carga.*

El campo magnético es

$$\vec{B} = -\frac{1}{c} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(\vec{x} \cdot (c\hat{x} - \vec{v}))^3} [\vec{x} \times [(c^2 - v^2)\hat{v} + (\vec{x} - \vec{v})\vec{v} + [\hat{x} - (v\hat{x} - \vec{v})]\dot{\vec{v}}]] \tag{10.26}$$

La relación entre ellos es

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\hat{x} \times \vec{E} \tag{10.27}$$

Denotemos por $\vec{u} = c\hat{x} \cdot \vec{v}$. Si tenemos solo en cuenta el término de radiación, el campo eléctrico de radiación se puede escribir como

$$\vec{E}_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\vec{x}|}{(\vec{x} \cdot \vec{u})^3} [\vec{x} \times (\vec{u} \times \dot{\vec{v}})]. \tag{10.28}$$

Calculemos el vector de Poynting para cuantificar la energía irradiada por la carga

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{1}{\mu_0 c}(\vec{E} \times (\hat{x} \times \vec{E})) \tag{10.29}$$

$$= \frac{1}{\mu_0 c}(|\vec{E}|^2 \hat{x} - (\hat{x} \cdot \vec{E})\vec{E}) \tag{10.30}$$

el producto interno del campo de radiación por el versor de posición es nulo

$$\hat{x} \cdot \vec{E}_r = (\cdots)\hat{x} \cdot (\vec{x} \times (\vec{u} \times \dot{\vec{v}}) = 0 \tag{10.31}$$

por lo que

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0 c} \left(\frac{\mu_0 q}{4\pi|\vec{x}|}\right)^2 (\dot{\vec{v}}^2 - (\hat{x} \cdot \dot{\vec{v}})^2)\hat{x} \tag{10.32}$$

si el ángulo entre $\hat{x}$ y $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$ es θ tenemos que

$$\vec{S} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \frac{\sin^2\theta}{|\vec{x}|^2} \hat{x} \tag{10.33}$$

La potencia total irradiada por la carga acelerada es

$$P = \oint \vec{S} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \tag{10.34}$$

$$= \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \int \sin^2\theta \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi \tag{10.35}$$

$$= \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c} \tag{10.36}$$

esta última es conocida por fórmula de Larmor.

Esta potencia irradiada por cargas aceleradas en el electromagnetismo conlleva a una inconsistencia de la física clásica para la estabilidad del átomo ya que si el electrón esta rotando alrededor del nucleo en un átomo de hidrogeno, entonces esta acelerado y debería estar radiando energía electromagnética en forma continua. Por lo que los átomos desde la óptica de la física clásica no serían estables.

10.2 Radiación de una fuente localizada

Supongamos un sistema de cargas y corrientes $\rho(\vec{x}, t)$ y $\vec{J}(\vec{x}, t)$ que dependen del tiempo y estan localizadas. La solución general del problema puede escribirse como

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{x}', t')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} |_{ret} \, \mathrm{d}V' \tag{10.37}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{x}', t')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} |_{ret} \, \mathrm{d}V' \tag{10.38}$$

donde ret significa evaluar en el tiempo $t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}$.

Lo que queremos hacer es observar al sistema lejos, esto es con $\vec{x} \gg \vec{x}'$ es decir como la carga esta localizada en un radio y el punto de observación esta alejado de ese lugar/esfera. El problema es que al evaluar el t' también aparecen términos de la forma $|\vec{x} - \vec{x}'|$ con el $\rho(\vec{x}', t')$ y $\vec{J}(\vec{x}', t')$. Lo que hacemos entonces es expresar con una transformada de Fourier a la densidad de carga y la corriente,

$$\rho(\vec{x}', t') = \int \hat{\rho}(\vec{x}', \omega) e^{-i\omega t'} \mathrm{d}\omega \tag{10.39}$$

$$\vec{J}(\vec{x}', t') = \int \hat{\vec{J}}(\vec{x}', \omega) e^{-i\omega t'} \mathrm{d}\omega. \tag{10.40}$$

En el caso de la carga notar que un término de la forma $\rho(\vec{x}, t) = Q e^{-i\omega t}$ localizado no puede existir ya que no se conservaría la carga por lo que no hay contribuciones monopolar eléctrica (el primer término en el desarrollo es nulo).

Entonces los potenciales nos quedan de la forma:

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\int \frac{\hat{\vec{J}}(\vec{x}',\omega)}{|\vec{x}-\vec{x}'|} e^{i(\omega/c|\vec{x}-\vec{x}'|-\omega t)} \mathrm{d}V'\mathrm{d}t'. \tag{10.41}$$

el potencial en el espacio de las frecuencias es

$$\hat{A}(\vec{x},\omega) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\hat{\vec{J}}(\vec{x}',\omega)}{|\vec{x}-\vec{x}'|} e^{i(\omega/c|\vec{x}-\vec{x}'|)} \mathrm{d}V' \tag{10.42}$$

Hasta aqui tenemos una expresión exacta del vector potencial, ahora vamos a tomar la aproximación de campo lejano, si estamos mirando lejos podemos aproximar los términos de la forma:

$$\begin{aligned} |\vec{x}-\vec{x}'| &= (\vec{x}\cdot\vec{x} - 2\vec{x}\cdot\vec{x}' + \vec{x}'\cdot\vec{x}')^{1/2} && (10.43)\\ &= r\left(1 - 2\frac{\vec{x}\cdot\vec{x}'}{r^2} + \cdots\right)^{1/2} && (10.44)\\ &= r\left(1 - \frac{\vec{x}\cdot\vec{x}'}{r^2}\right) && (10.45) \end{aligned}$$

donde hemos mantenido solo el primer término de la serie.

En el caso de

$$|\vec{x}-\vec{x}'|^{-1} = r^{-1}\left(1 + \frac{\vec{x}\cdot\vec{x}'}{r^2}\right) \tag{10.46}$$

Luego reemplazando en (10.42) obtenemos

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}\omega \frac{e^{i(-\omega t + kr)}}{r}\left[\int \hat{J}(\vec{x}',\omega) e^{-ik\frac{\vec{x}\cdot\vec{x}'}{r}}\left(1 + \frac{\vec{x}\cdot\vec{x}'}{r^2}\right)\mathrm{d}V'\right] \tag{10.47}$$

donde hemos mantenido tanto en la exponencial como en el desarrollo del denominador el primer término de la serie.

Este es el campo de radiación de una corriente localizada, desde lejos se ve como ondas esféricas saliendo de la región localizada, que decaen como r^{-1}.

Si ahora asumimos que la fuente esta localizada y que es mucho menor a la longitud de onda $d \ll \lambda$, la expresión del potencial vector teniendo en cuenta potencias en k es:

$$\hat{A}(\vec{x},\omega) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\sum_n \frac{(-ik)^n}{n!}\int \hat{J}(\vec{x}',\omega)(\hat{n}\cdot\vec{x}')^n \mathrm{d}V' \tag{10.48}$$

Entonces notar que hemos hecho una doble aproximacion primero con respecto al tamaño de la fuente, y luego con respecto al tamaño de la fuente y de la longitud de onda.

10.3 Campos dipolares eléctricos

Dejando solo el primer término en el potencial vector (10.47) tenemos

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{i(-\omega t+kr)}}{r}\int \vec{J}(\vec{x}')\mathrm{d}V' \tag{10.49}$$

Notando que

$$\int \nabla\cdot(\vec{J}x_i)\mathrm{d}V' = \int(\vec{J}\cdot\nabla' x_i' + x_i'\nabla'\vec{J})\mathrm{d}V' \tag{10.50}$$

como la corriente es localizada la integral de la izquierda es 0 entonces:

$$\int(\vec{J}_i + x_i'\nabla'\vec{J})\mathrm{d}V' = 0 \tag{10.51}$$

válido para todo i, luego también es válido en forma vectorial. Por lo que hemos reescrito la integral de la densidad de corriente como una divergencia,

$$\begin{aligned}\int \vec{J}\mathrm{d}V' &= -\int(\vec{x}'\nabla'\cdot\vec{J})\mathrm{d}V' &(10.52)\\ &= -i\omega\int \vec{x}'\rho(\vec{x}')\mathrm{d}V' &(10.53)\\ &= -i\omega\vec{p} &(10.54)\end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta la conservación de la carga:

$$-i\omega\rho + \nabla\cdot J = 0 \tag{10.55}$$

y que el dipolo eléctrico viene dado por $\vec{p} = \int \vec{x}'\rho(\vec{x}')\mathrm{d}V'$.

Por lo tanto el potencial vector generado por un dipolo oscilante es:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}(-i\omega\vec{p}) \tag{10.56}$$

los campos lejanos son:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{A} = \frac{ck^2}{4\pi}(\hat{n}\times\vec{p})\frac{e^{ikr}}{r} \tag{10.57}$$

$$\vec{E} = \frac{iZ_0}{k}\nabla\times\vec{H} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{k^2(\hat{n}\times\vec{p})\times\hat{n}\frac{e^{ikr}}{r}\right\} \tag{10.58}$$

donde $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$

La media temporal de la potencia irradiada por el dipolo eléctrico en un ángulo sólido es

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}(r^2\hat{n}\cdot\vec{E}\times\vec{H}^*) &(10.59)\\ &= \frac{Z_0\omega^4}{32\pi^2c^2}|(\hat{n}\times\vec{p})\times\hat{n}|^2 &(10.60)\\ &= \frac{Z_0\omega^4}{32\pi^2c^2}|\vec{p}|^2\sin^2\theta &(10.61)\end{aligned}$$

donde θ es la dirección entre $\hat{n}$ y $\vec{p}$.

La dependencia de la potencia en función de la frecuencia a la cuarta es lo que explica el azul del cielo. La radiación solar es luz blanca que abarca todo el rango de frecuencias. Esta es absorbida por los átomos de la atmósfera y reirradiada por los dipolos eléctricos de los gases, por lo que son el momento dominante. Luego la radiación reirradiada por los moléculas tiene una dependencia de ω^4 siendo entonces con mayor intensidad para mayor frecuencia y entonces predominando el azul sobre el rojo. Este proceso de interación de las ondas electromagnéticas incidentes sobre los dipolos eléctricos de las moléculas es a través del escatering de Rayleigh.

Ejercicio 10.2: Antena oscilante. Suponga un caño lineal de longitud $d \ll \lambda$ orientado en la dirección z, se alimenta en el centro (donde esta cortado) con una corriente de la forma $I = I_0\left(1 - \frac{2|z|}{d}\right)e^{-i\omega t}$. Determine la potencia irradiada por la antena.

De la ecuación de continuidad de la carga la densidad de carga por unidad de longitud es

$$\hat{\rho} = \pm\frac{i2I_0}{d} \tag{10.62}$$

El momento dipolar vendrá dado por

$$p = \int z\hat{\rho}\mathrm{d}z = \frac{iI_0 d}{2\omega} \tag{10.63}$$

Luego reemplazando en la expresión de la potencia por ángulo sólido es

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{Z_0 I_0^2}{128\pi^2}(kd)^2\sin^2\theta. \tag{10.64}$$

10.4 Campo dipolar magnético y cuadropolar eléctrico

Si tenemos en cuenta el término del orden siguiente en el potencial vector (10.48) tenemos

$$\hat{A}(\vec{x},\omega) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\left(\frac{1}{r} - ik\right)\int \vec{J}(\vec{x}')(\hat{n}\cdot\vec{x}')\mathrm{d}V' \tag{10.65}$$

donde el primer término es una corrección para campo intermedio. Reescribiendo el término de la densidad de corriente

$$(\hat{n}\cdot\vec{x}')\vec{J} = \frac{1}{2}[(\hat{n}\cdot\vec{x}')\vec{J} + (\hat{n}\cdot\vec{J})\vec{x}'] + \frac{1}{2}(\vec{x}'\times\vec{J})\times\vec{n} \tag{10.66}$$

el último término integrado en volumen lo identificamos como el momento dipolar magnético

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int(\vec{x}\times\vec{J})\mathrm{d}V' \tag{10.67}$$

el potencial vector generado por el momento dipolar mágnetico es

$$\hat{A}(\vec{x},\omega) = \frac{ik\mu_0}{4\pi}(\hat{n}\times\vec{m})\frac{e^{ikr}}{r}\left(1 - \frac{1}{ikr}\right) \tag{10.68}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi}(\hat{n} \times \vec{m}) \times \hat{n}\frac{e^{ikr}}{r} \tag{10.69}$$

mientras el campo eléctrico viene dado por

$$\vec{E} = -\frac{Z_0}{4\pi}k^2(\hat{n} \times \vec{m})\frac{e^{ikr}}{r} \tag{10.70}$$

Notar que las expresiones son similares a los campos generados por un dipolo eléctrico cambiando $\vec{E} \to \sqrt{\mu_0}\epsilon_0\vec{H}$ y $\vec{H} \to -\vec{E}$

Veamos ahora la contribución por el cuadrupolo eléctrico. De los dos primeros términos del RHS de (10.66) se tiene

$$\frac{1}{2}\int [(\hat{n} \cdot \vec{x}')\vec{J} + (\hat{n} \cdot \vec{J})\vec{x}']\mathrm{d}V' = \frac{-i\omega}{2}\int \vec{x}'(\hat{n} \cdot \vec{x}')\rho(\vec{x}')\mathrm{d}V' \tag{10.71}$$

El vector potencial es

$$\hat{A}(\vec{x}, \omega) = \frac{\mu_0 ck^2}{8\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\int \vec{x}'(\hat{n} \cdot \vec{x}')\rho(\vec{x}')\mathrm{d}V' \tag{10.72}$$

Si aplicamos la definición del H,

$$\hat{H} = -\frac{ick^3}{8\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\int (\hat{n} \times \vec{x}')(\hat{n} \times \vec{x}')\rho(\vec{x}')\mathrm{d}V' \tag{10.73}$$

$$\hat{n} \times \int \vec{x}'(\hat{n} \cdot \vec{x}')\rho(\vec{x}')\mathrm{d}V' = \frac{1}{3}\hat{n} \times \vec{Q} \tag{10.74}$$

$$\vec{H} = \frac{ick^3}{8\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\hat{n} \times \vec{Q} \tag{10.75}$$

la potencia irradiada promediada en el tiempo es

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{c^2 Z_0}{1152\,\pi^2}k^6|(\hat{n} \times \vec{Q}) \times \vec{n}|^2 \tag{10.76}$$