Capítulo 6

Magnetostática

Las ecuaciones que representan la inducción magnética son

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{6.1}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}, \tag{6.2}$$

denominaremos a $\vec{B}$ inducción magnética y reservamos el término campo magnético para referirnos a $\vec{H}$.

La esencia de la inducción magnética es distinta del campo eléctrico ya que no existe el monopolo magnético. Para condiciones de contorno triviales en estática la densidad de corriente eléctrica es la generadora de campo magnético. Estas diferencias intrínsicas entre los campos magneticos y los campos electricos hicieron que inicialmente se los identificará como fenónmenos independientes. Esto solo sucede asi para campos estáticos.

Que condición necesitamos pedir para que la densidad de corriente sea estática, notar que de la condición de conservación de la carga:

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \vec{J} = 0 \tag{6.3}$$

de aqui se deduce que si $\partial_t \rho = 0$ entonces se tiene que

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \tag{6.4}$$

Luego para que $\vec{J}$ sea independiente del tiempo no debe haber acumulación o fuentes de cargas para un área fija $\nabla \cdot \vec{J} \mathrm{d}V = \int \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$.

En el caso que tengamos una corriente en un caño se debe cumplir que en los extremos del caño:

$$J_1 S_1 = J_2 S_2 \tag{6.5}$$

Si tenemos una línea de corriente hacemos el proceso límite

$$\vec{J} \mathrm{d}V = I \mathrm{d}\vec{l} \tag{6.6}$$

6.0.1 Ley de Ampere

La ley de Ampere nos relaciona la inducción magnética con la corriente que circula por una superficie transversal. Si integramos en una superficie a (6.2) se obtiene

$$\int_S \nabla \times \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \tag{6.7}$$

En el lado izquierdo de la ecuación usamos teorema de Stokes, mientras en el lado derecho notamos que la densidad de corriente que pasa transversal por una superficie es de hecho la corriente I (carga por unidad de tiempo) que atravieza la superficie, de esta manera obtenemos la ley de Ampere,

$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I \tag{6.8}$$

Esta ley tiene un caracter similar a la ley de Gauss en electrostática, las cargas totales en un volumen estan ligadas al campo eléctrico en la superficie frontera y las corrientes en el interior de una superficie esta ligada a la inducción magnética en la curva que rodea a la superficie. Sin embargo notesé también la diferencia en el caracter vectorial entre el campo eléctrico y la inducción magnética, en el último caso la integral de la inducción magnética es una integral de línea a lo largo de la curva.

Si tenemos una corriente rectilínea I, circulando por un alambre, entonces la ley de Ampere integrando en un círculo de radio R alrededor del alambre establece que

$$B 2\pi R = \mu_0 I \tag{6.9}$$

por lo que la inducción magnética viene dada por

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \tag{6.10}$$

en el cual la dirección de la inducción magnética es paralela al círculo de radio R y tal que tiene el sentido de la mano derecha.

6.0.2 Vector potencial

En el caso del campo eléctrico el hecho que su rotor es nulo, se utilizó para expresar al campo como el gradiente de un función escalar, denominada potencial eléctrico, de tal manera que la ecuación resultante es la ecuación de Poisson para el potencial eléctrico. En el caso de la inducción magnética lo que se tiene es que la divergencia de ésta es nula, $\nabla \cdot \vec{B} = 0$. Si definimos un campo vectorial $\vec{A}$, tal que

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{6.11}$$

entonces se encuentra que la ecuación de la divergencia de la inducción magnética se satisface siempre ya que

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0 \tag{6.12}$$

es válido para cualquier campo vectorial $\vec{A}$, a este campo vectorial $\vec{A}$ se lo denomina vector potencial (magnético).

La otra ecuación de Maxwell para la inducción magnética que debe satisfacer $\vec{A}$ es

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{J} \tag{6.13}$$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}. \tag{6.14}$$

Así como el potencial eléctrico esta definido a menos de una constante aditiva, el vector potencial esta definido a menos del gradiente de una función escalar arbitraria. La inducción magnética dada por $\vec{A} + \nabla\psi$, es

$$\vec{B}' = \nabla \times (\vec{A} + \nabla\psi) = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times \nabla\psi = \nabla \times \vec{A} = \vec{B}. \tag{6.15}$$

Podemos usufructuar de esta arbitrariedad para expresar de la forma mas simple posible la ecuación diferencial que satisface el potencial vector, en este sentido de todos los posibles $\vec{A}$ que son solución vamos a elegir una específico, que sea el que nos simplifique las ecuaciones, este proceso se llama calibración o gauge. Tomamos a los campos vectoriales que satisfacen

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \tag{6.16}$$

este es el denominado gauge de Coulomb. Las razones de esta denominación las veremos mas adelante. Si tenemos encuenta a esta subconjunto de vectores potenciales posibles la ecuación que deben satisfacer es

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \tag{6.17}$$

es decir que el vector potencial debe satisfacer una ecuacion similar a la ecuación de Poisson que satisface el potencial eléctrico, sin embargo notesé el carácter vectorial de (6.17), por lo que en realidad si ésta es expresada en coordenadas, cada componente del vector potencial satisface una ecuación de Poisson con la componente correspondiente de la densidad de corriente como término no-homogeneo, por ejemplo

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x. \tag{6.18}$$

Para convencernos de que el gauge de Coulomb esta realmente comprendido dentro de las arbitrariedades que tiene la definición del vector potencial, supongamos que tenemos un potencial que no cumple,

$$\nabla \cdot \vec{A}' = \alpha \tag{6.19}$$

esto puede ser reescrito como

$$\nabla \cdot (\vec{A} + \nabla\psi) = \alpha \tag{6.20}$$

para cualquier función arbitraria ψ, pero entonces podemos elegir una ψ que sea solución de la siguiente equación

$$\nabla^2 \psi = \alpha \tag{6.21}$$

para esta ecuación ya sabemos que de existir condiciones que decaigan lo suficientemente rapido en el infinito, existirá una solución única de la ecuación, teorema de Helmholtz por lo tanto hemos encontrado la ψ que nos permite tener

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0. \tag{6.22}$$

En el caso de que estemos en el espacio libre sin fronteras y tengamos una densidad de corriente $\vec{J}$, dada la similitud entre la ecuaciones se determina que el potencial vector viene dado por

$$\vec{A} = \int \frac{\vec{J}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \mathrm{d}V' \tag{6.23}$$

Mientras la induccion magnética es

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{J}(\vec{x}') \nabla \times \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \mathrm{d}V' \tag{6.24}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{J}(\vec{x}') \times \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \mathrm{d}V' \tag{6.25}$$

6.1 Fuerza a cargas en movimiento

La ley de Lorenz establece que la fuerza que le ejerce el campo magnético a una carga en movimiento viene dada por

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \tag{6.26}$$

Si tenemos una corriente en un alambre la fuerza ejercida sobre el alambre debido a un campo magnético externo es

$$\mathrm{d}\vec{F} = \vec{v} \times \vec{B} \mathrm{d}q \tag{6.27}$$

si integramos a lo largo del alambre se obtiene

$$\vec{F} = \int I(\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}) \tag{6.28}$$

si lo que tenemos es una densidad de corriente, $I\mathrm{d}\vec{l} = \vec{J}\mathrm{d}s$ entonces la fuerza viene dada por

$$\vec{F} = \int (\vec{J} \times \vec{B}) \mathrm{d}s. \tag{6.29}$$

6.2 Campo magnético de una corriente localizada

De la misma manera que se aproximó el potencial eléctrico a través de una serie de potencias hacemos lo mismo para el potencial vector. La forma apropiada para realizar esta expansión es a través de los armónicos esféricos vectoriales sin embargo el tema excede a la materia por lo que solo veremos el primer orden no nulo del desarrollo.

Considerando que no existe el término monopolar fuente para la inducción magnética, esperamos que el primer término del desarrollo de potencias inversas en $|\mathbf{x}|^{1-}$ del potencial vector sea nulo y que por lo tanto la contribución no-nula será el termino dipolar debido al momento magnético. Realicemos entonces la derivación correspondiente.

Asumimos que la corriente esta localizada en una pequeña región y que el punto de observación se encuentra lejos. Luego si $\vec{x}' \ll \vec{x}$ tenemos que

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \approx \frac{1}{|\vec{x}|} + \frac{\vec{x}\cdot\vec{x}'}{|\vec{x}|^3} + \cdots \tag{6.30}$$

Si reemplazamos la expresión (6.30) en la componente $i-$ésima del potencial vector en (6.23) se tiene que

$$A_i(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{1}{|\vec{x}|}\int J_i(\vec{x}')\mathrm{d}V' + \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}\cdot\int J_i(\vec{x}')\vec{x}'\mathrm{d}V' + \cdots\right] \tag{6.31}$$

Si la corriente $\vec{J}$ esta localizada, entonces la divergencia de

$$\int \nabla'\cdot(x_i'\vec{J})\mathrm{d}V' = 0 \tag{6.32}$$

por teorema de Gauss y asumiendo no existen condiciones de borde. Luego realizamos la expansión de la divergencia,

$$\int(\vec{J}\cdot\nabla' x_i' + x_i\nabla\cdot\vec{J})\mathrm{d}V' = 0 \tag{6.33}$$

de lo cual teniendo en cuenta que la divergencia de la densidad de corriente es nula deducimos que

$$\int J_i(\vec{x}')\mathrm{d}V' = 0. \tag{6.34}$$

Entonces el primer término de la expansión de A_i en (6.31) se anula. Es decir que en la expansión del potencial vector para una corriente localizada no existe contribución del término monopolar. El segundo término puede ser reescrito en la forma:

$$\vec{x}\cdot\int \vec{x}' J_i\mathrm{d}V' = -\frac{1}{2}\left[\vec{x}\times\int(\vec{x}'\times J)\mathrm{d}V'\right]_i \tag{6.35}$$

Ejercicio 6.1: Se deja como tarea al lector demostrar la igualdad, (6.35), expresando por componentes e identificando los términos.

Luego resulta de (6.31) y (6.35) que

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{8\pi}\frac{\int(\vec{x}'\times\vec{J})\mathrm{d}V'\times\vec{x}}{|\vec{x}|^3}. \tag{6.36}$$

Definiendo el momento magnético como

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int \vec{x}'\times\vec{J}(\vec{x}')\mathrm{d}V' \tag{6.37}$$

La magnetización o momento magnético por unidad de volumen se define como

$$< \vec{m} >= \frac{1}{2}\vec{x} \times \vec{J}(\vec{x}) \tag{6.38}$$

Se tiene que el potencial vector producido por un momento magnético es

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m} \times \vec{x}}{|\vec{x}|^3}, \tag{6.39}$$

este corresponde al primer término no nulo en la expansión del potencial vector. De aqui se deduce, en forma equivalente a como se hizo en la expansión multipolar con el campo eléctrico, que el campo magnético viene dado por

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3\hat{x}(\hat{x} \cdot \vec{m}) - \vec{m}}{|\vec{x}|^3}. \tag{6.40}$$

El primer término que contribuye al campo magnético generado por una corriente localizada es el término dipolar.

La fuerza entre un campo magnético externo y una distribución de corriente localizada, dada por un momento magnético,

$$\vec{F} = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}). \tag{6.41}$$

El torque total que se ejerce sobre la distribución de corriente localizada es

$$\vec{N} = \int \vec{x}' \times [\vec{J} \times \vec{B}(0)]\mathrm{d}V', \tag{6.42}$$

resultando en

$$\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B}(0). \tag{6.43}$$

6.3 Campos magnéticos en medios

Cuando existe materia, ésta esta compuesta de electrones que pueden dar lugar a corrientes atómicas efectivas. Los electrones contribuyen al momento magnético a través de su movimiento orbital, pero también los momentos magnéticos intrínsicos, i.e. el spin, contribuyen al momento magnético macroscópico. Llamemos $\vec{J}_M$ a la densidad de corriente efectiva que produce la materia, luego la inducción magnética viene gobernada por

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0(\vec{J} + \vec{J}_M) \tag{6.44}$$

La densidad de corriente satisface que

$$\nabla \cdot \vec{J}_M = 0 \tag{6.45}$$

del teorema de Gauss se deduce que

$$\int \vec{J}_M \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0 \tag{6.46}$$

por lo cual la densidad de corriente efectiva se puede escribir en función del momento magnético en la forma

$$\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M} \tag{6.47}$$

donde $\vec{M}$ es la magnetización o densidad de momento magnético. Reemplazando en (6.44) la expresión (6.47) se deduce que

$$\nabla \times (\vec{B}/\mu_0 - \vec{M}) = \vec{J}. \tag{6.48}$$

Definiendo al campo magnético $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}$ (y notando que llamaremos inducción magnética a $\vec{B}$) tenemos que las ecuaciones diferenciales de la magnetostática en medios son

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \tag{6.49}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \tag{6.50}$$

Además para resolver el problema magnetostático se requiere de una relación constitutiva que relacione a $\vec{B}$ con $\vec{H}$. Si estamos en presencia de un medio lineal la relación es

$$\vec{B} = \mu\vec{H}. \tag{6.51}$$

donde μ es la permeabilidad magnética del medio. Si $\mu > \mu_0$ el medio es paramagnético, en cambio si $\mu < \mu_0$ el medio es diamagnético.

Los materiales ferromagnéticos cumplen con una relación nolineal conocida como el fenómeno de histérisis: $\vec{B} = \vec{F}(\vec{H})$.

¿Qué sucede con las ecuaciones si existe una relación nolineal? ¿Qué sucede con el principio de superposición? Sin embargo nótese que esto solo sucede en la presencia de medios y el material ferromagnético describe la memoria de los momentos magnéticos intrínsecos. Es decir que $\vec{M}$ no responde a los campos externos en forma lineal por lo que cuando desaparece el campo permanece una magnetización no nula. En general notar que no sería factible una solución analítica del problema si la relación entre $\vec{B}$ y $\vec{H}$ es nolineal, por lo que se debe aproximar particularmente las condiciones de contorno.

Las condiciones de contorno que deben satisfacer $\vec{B}$ y $\vec{H}$ en las interfaces entre medios vienen dadas por

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \hat{n} = 0 \tag{6.52}$$

$$\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K} \tag{6.53}$$

donde $\vec{K}$ es la densidad de corriente superficial.

6.4 Métodos de solución de problemas magnéticos

6.4.1 Método del vector potencial

Si expresamos la inducción magnética en función del vector potencial $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, luego si asumimos que el medio es lineal $\vec{B} = \mu\vec{H}$ la ecuación que resulta es

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu}\nabla \times \vec{A}\right) = \vec{J} \tag{6.54}$$

Si la permeabilidad es una constante resulta que

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2\vec{A} = \mu\vec{J} \tag{6.55}$$

Si elegimos el gauge de Coulomb $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ resulta que

$$\nabla^2\vec{A} = \mu\vec{J} \tag{6.56}$$

6.4.2 Potencial escalar magnético

Si no existe densidad de corriente dentro del dominio luego: $\nabla\times\vec{H} = 0$, podemos trabajar un potencial magnético escalar:

$$\vec{H} = -\nabla\Phi_M \tag{6.57}$$

reemplazando en la ecuación de la divergencia:

$$\nabla \cdot (\mu\nabla\Phi_M) = 0 \tag{6.58}$$

Si en cada subregión del dominio μ es constante entonces por pedazos se tiene

$$\nabla^2\Phi_M = 0 \tag{6.59}$$

En este caso se debe usar las condiciones de contorno para $\vec{H}$ en la interface entre medios:

$$\vec{H}_{2\perp} = \frac{\mu_1}{\mu_2}H_{1\perp} \tag{6.60}$$

$$\vec{H}_{2\parallel} = \vec{H}_{1\parallel} \tag{6.61}$$

asumiendo no existen corrientes superficiales en la superficie.

Si en cambio se trabaja con la inducción magnética, entonces se define un potencial magnético Ψ_M tal que $\vec{B} = -\nabla\Psi_M$ y en este caso se deben tomar las condiciones de contorno para $\vec{B}$.

Un ejemplo interesante es una cáscara esférica de un material altamente permeable $\mu_0 \ll \mu$, la cual se ubica en un campo magnético externo constante. En este caso las líneas de campo seran practicamente normales en la superficie externa del cascarón, por lo cual las líneas estan siendo dobladas hacia la dirección tangencial de la geometría de tal manera que el campo adentro del cascarón será practicamente nulo. Es decir que el cascarón produce un apantallamiento magnético de los campos externos.

6.4.3 Materiales ferromagnéticos

Los materiales ferromagnéticos en general tienen una magnetización $\vec{M}$ permanente o semipermanente que es independiente de los campos aplicados y se asume es conocida.

Potencial escalar

Si $\vec{J} = 0$ de nuevo tengo que $\nabla \times H = 0$, por lo que se puede definir un potencial escalar $\vec{H} = -\nabla\Phi_M$.

Con $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ reemplazando en la ecuación de la divergencia:

$$\nabla \cdot \vec{H} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M} \tag{6.62}$$

Luego tenemos que

$$\nabla^2\Phi_M = \nabla \cdot \vec{M} \tag{6.63}$$

si definimos a una densidad magnética como

$$\rho_M = -\nabla \cdot \vec{M} \tag{6.64}$$

La ecuación resultante es equivalente a la ecuación de Poisson en electrostática la cual es

$$\nabla^2\Phi_M = -\rho_M. \tag{6.65}$$

Si no hay condiciones de contorno la solución es la de un problema electrostático es decir:

$$\Phi_M = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\nabla' \cdot \vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}\mathrm{d}V' \tag{6.66}$$

Si hay discontinuidades en $\vec{M}$, por ejemplo un objeto magnetizado (cubo o esfera), debemos considerar la contribución de las discontinuidades de $\vec{M}$ en la superficie:

$$\Phi_M = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\nabla' \cdot \vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}\mathrm{d}V' + \frac{1}{4\pi}\oint_S \frac{\hat{n}' \cdot \vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}\mathrm{d}s' \tag{6.67}$$

donde $\sigma_M = \hat{n}' \cdot \vec{M}$.

Potencial vector

De la ecuación del rotor asumiendo no existen corrientes libres se deduce que

$$\nabla \times \vec{H} = \nabla \times (\vec{B}/\mu_0 - \vec{M}) = 0 \tag{6.68}$$

si reemplazamos $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ tenemos que

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu_0\nabla \times \vec{M} \tag{6.69}$$

representando a $\nabla \times \vec{M} = \vec{J}_M$, bajo el gauge de Coulomb resulta que

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}_M. \tag{6.70}$$

La solución para un problema sin condiciones de contorno viene dada por

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\nabla' \times \vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \mathrm{d}V' \tag{6.71}$$

Entonces para resumir. Los materiales ferromagnéticos estan caracterizados por una magnetización constante (en forma temporal), la cual se asume conocida. Estos problemas pueden ser tratados como un problema electrostático con una densidad de carga $\rho_M = -\nabla \cdot \vec{M}$, o como un problema de magnestostática en el vacio con una corriente dada por $\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M}$.

6.5 Esfera con magnetización constante

Supongamos una esfera ferromagnética de radio a con una magnetización

$$\vec{M} = M\hat{k} \tag{6.72}$$

En el interior de la esfera se tiene $\nabla \cdot M = 0$ por lo que el potencial escalar magnético viene dada

$$\Phi_M = \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\hat{n}' \cdot \vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \mathrm{d}s' \tag{6.73}$$

para realizar la integral notar que

$$\vec{M}(\vec{x}') \cdot \hat{n}' = M \cos\theta' \tag{6.74}$$

las dependencias en θ son equivalentes a la función Y_{10}, por lo que podemos expresar al término $|\vec{x} - \vec{x}'|^{-1}$ como una expansión en armónicos esféricos y luego utilizar la ortonormalidad de estos,

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_<^l}{r_>^{(l+1)}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \tag{6.75}$$

La integral superficial resultante de reemplazar la (6.75) en (6.73), utilizando la ortornomalidad de los ylm es:

$$\Phi_M = \frac{Ma^2}{3} Y_{10} \oint \frac{r_<}{r_>^2} Y_{10}^*(\theta', \phi') \cos\theta' \mathrm{d}\Omega' \tag{6.76}$$

recordando que

$$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta \tag{6.77}$$

Luego el potencial escalar magnético es

$$\Phi_M = \frac{1}{3} M a^2 \frac{r_<}{r_>^2} \cos\theta \tag{6.78}$$

Adentro de la esfera se tiene que $r_< = r$ y $r_> = a$ luego resulta que

$$\Phi_M = \frac{1}{3} M r \cos\theta = \frac{1}{3} M z \tag{6.79}$$

entonces el campo magnético

$$\vec{H} = -\partial_z \Phi_M \hat{k} = -\frac{M}{3} \hat{k} \tag{6.80}$$

La inducción magnética es

$$\vec{B} = \frac{2}{3} \mu_0 M \hat{k} \tag{6.81}$$

Afuera de la esfera se tiene $r_< = a$ y $r_> = r$ resultando en

$$\Phi_M = \frac{1}{3} M_0 a^3 \cos\theta / r^2 \tag{6.82}$$

es decir que afuera de la esfera el campo tiene la forma de un campo dipolar.

6.6 Campos magnéticos quasi-estáticos en conductores

Cuando se empiezan a analizar las ecuaciones de electrostática-magnetostática con campos que varian lentamente con el tiempo aparece la ley de Faraday la cual en forma diferencial establece que

$$\nabla \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0 \tag{6.83}$$

Esta ley fue producto de experimentos realizados por Faraday en los cuales se ubicaba circuitos, espiras, en campos magnéticos que varían en el tiempo. Faraday observó que en la espira se induce una corriente transitoria, en términos matemáticos encontró que el cambio de flujo magnético en un circuito es igual a la fuerza electromotriz alrededor del circuito,

$$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} \mathrm{d}a. \tag{6.84}$$

Esta ley entonces nos relaciona los cambios temporales de la inducción magnética con el campo eléctrico. Usando el teorema de Stokes en el primer término de (6.84) y asumiendo que el circuito es fijo y no cambia en el tiempo se determina (6.83).

Por supuesto existe otro término en la ecuaciones de Maxwell, que expresa las variaciones temporales del campo eléctrico y como estas generan campos magnéticos, es el término $\frac{1}{c^2}\partial_t \vec{E}$ en el rotor del campo magnético, sin embargo si los campos varían lentamente este término puede ser considerado despreciable. Por lo que, por el momento consideramos las ecuaciones de Maxwell pero sin este término, denominado término de desplazamiento de Maxwell.

Si tenemos en cuenta la ley de Ohm para un material conductor, $\vec{J} = \sigma\vec{E}$ y que $\vec{H} = \vec{B}/\mu$ resulta que

$$\nabla \times \vec{B} = \mu\sigma\vec{E}. \tag{6.85}$$

Reemplazando esta ecuación en la ley de Faraday, (6.83), encontramos que

$$\mu\sigma\partial_t\vec{B} - \nabla^2\vec{B} = 0, \tag{6.86}$$

esta es la ecuación de difusión.

En forma equivalente, eliminando $\vec{B}$ de las ecuaciones en lugar de $\vec{E}$, se puede encontrar una ecuación de difusión para el campo eléctrico

$$\mu\sigma\partial_t\vec{E} - \nabla^2\vec{E} = 0. \tag{6.87}$$

Si tenemos un campo eléctrico que varía sinusoidalmente en x, $E_z(x,t) = \hat{E}_z(t)e^{-ikx}$, la forma de la solución vendrá dada por

$$E_z(x,t) = E_{0z}e^{-\frac{k^2}{\mu\sigma}t-ikx}, \tag{6.88}$$

es decir que la señal decae con un tiempo de decaimiento de $\tau = \frac{\mu\sigma}{k^2}$.

Si pensamos en un campo del tipo sinusoidal temporalmente, en una dimensión, ej. $E_z(x,t) = \hat{E}_z(x)e^{-i\omega t}$, entonces la ecuación resultante será

$$\mu\sigma i\omega\hat{E}_z - \partial^2_{xx}\hat{E}_z = 0, \tag{6.89}$$

luego tenemos que la solución será $E_z(x,t) = \hat{E}_{0z}e^{-i\omega t+\gamma x}$ con $\gamma = \pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\mu\sigma\omega}$. La solución tiene forma sinusoidal en x pero además un decaimiento espacial (o penetración cuando se piensa en como penetran los campos a un conductor) de

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}}. \tag{6.90}$$

Ejercicio 6.2: Supongamos un material conductor diamagnético con μ, σ en $z > 0$ y vacio en $z \leq 0$, en $z = 0$ se pone como condición de borde un campo magnético de la forma $H_x(t) = H_0\cos(\omega t)$. Determine el campo magnético en z negativo. ¿Cúal es la profundidad de penetración del campo magnético?