Electromagnetismo 2025

Guía 4: Electrostática. Separación de variables

16 de abril de 2025

Coordenadas rectangulares.

Problema 1: Las paredes de un cubo hueco conductor están definidas por los seis planos $x = y = z = 0$ y $x = y = a$. Las paredes se mantienen a potencial cero excepto las de $z = 0$ y $z = a$ que se mantienen a V constante (condiciones de contorno de Dirichlet).

(a) Hállese el potencial $\Phi(x, y, z)$ en un punto cualquiera interior al cubo.

(b) Calcule numéricamente el potencial en el centro del cubo, con un grado de precisión de tres cifras significativas. ¿Cuántos términos de la serie son necesarios para obtener ese grado de exactitud? Compare los resultados numéricos con el valor medio del potencial sobre las paredes.

(c) Halle la densidad superficial de carga sobre la superficie $z = a$.

Coordenadas polares.

Problema 2: La solución general de la ecuación de Laplace para el problema de potencial bidimensional, utilizando coordenadas polares, viene dada por:

$$\Phi(\rho, \phi) = a_0 + b_0 \ln(\rho) + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n [a_n \cos(n\phi) + b_n \sin(n\phi)] + \rho^{-n}[c_n \cos(n\phi) + d_n \sin(n\phi)] \tag{1}$$

(a) Partiendo de esta expresión, calcule los coeficientes para el caso en el que se especifica el potencial sobre la superficie de un cilindro de radio b.

(b) Sustituya los coeficientes en la serie y sume ésta para obtener el potencial en el interior del cilindro en forma de una integral de Poisson:

$$\Phi(\rho, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(b, \phi') \frac{b^2 - \rho^2}{b^2 + \rho^2 - 2b\rho \cos(\phi' - \phi)} \mathrm{d}\phi' \tag{2}$$

(c) ¿Qué modificación sería necesaria si se desea el potencial en la región del espacio comprendida entre el cilindro y el infinito?

Problema 3: Las dos mitades de un conductor cilíndrico largo de radio b están separadas por una pequeña ranura y mantenidas a distintos potenciales V_1 y V_2. Demuestre que el potencial en el interior viene dado por

$$\Phi(\rho, \phi) = \frac{V_1 + V_2}{2} + \frac{V_1 - V_2}{\pi} \arctan\left(\frac{2b\rho}{b^2 - \rho^2} \cos\phi\right) \tag{3}$$

siendo ϕ el ángulo medido desde la perpendicular al plano que pasa por la ranura.

Problema 4: Una superficie cilíndrica infinita de radio R está cargada con una densidad superficial $\sigma = \sigma_0 \cos\phi$, donde ϕ es el ángulo polar del sistema de coordenadas cilíndricas con origen sobre el eje del cilindro, con el eje z orientado a lo largo del mismo. Por medio de un campo exterior, transversal y homogéneo, E_0, la superficie se mantiene a potencial cero. Hallar el potencial Φ y la intensidad E del campo eléctrico dentro y fuera de la superficie cilíndrica. Determine el valor de E_0.

Problema 5: Dos cilindros conductores concéntricos de radios a y b se encuentran a potenciales V_1 y V_2 respectivamente.

(a) Reduzca las dimensiones del problema usando argumentos de simetría y encuentre la solución general del problema utilizando coordenadas polares.

(b) Resuelva el problema para las condiciones de contorno particulares.

(c) ¿Qué sucede si $V_1 = V_2$?.

(d) Plantee el caso en que solo existe un disco con $\Phi(r = a) = V$ y queremos resolver el problema exterior o el interior.

Simetría azimutal.

Problema 6: Dos esferas concéntricas de radios a y b ($b > a$) se hallan divididas en hemisferios por el mismo plano horizontal. El hemisferio superior de la esfera interior y el inferior de la exterior se mantienen a potencial V. Los otros dos hemisferios están a potencial cero. Determínese el potencial en la región $a \leq r \leq b$ como una serie de polinomios de Legendre. Inclúyanse términos al menos hasta $l = 4$. Compárese la solución con otros resultados ya conocidos en los casos límites $b \to \infty$ y $a \to 0$.

Problema 7: Un disco conductor delgado y plano de radio R está situado en el plano $x - y$ con su centro en el origen y mantenido a potencial fijo V. Sabiendo que la densidad superficial de carga sobre dicho disco a potencial fijo es proporcional a $(R^2 - \rho^2)^{-1/2}$, siendo ρ la distancia medida desde el centro del disco.

(a) Demuéstrese que para $r > R$ el potencial es

$$\Phi(r, \theta, \phi = \frac{2V}{\pi} \frac{R}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1} \left(\frac{R}{r}\right)^{2l} P_{2l}(\cos\theta) \tag{4}$$

(b) Hállese el potencial para $r < R$.

(c) ¿Cuál es la capacidad del disco?.

Coordenadas cilíndricas.

Problema 8: Un cilindro circular recto hueco de radio b tiene su eje coincidiendo con el eje z y sus bases en los planos $z = 0$, $z = L$. El potencial en las bases es cero, mientras que en la superficie cilíndrica viene dado por $V(\phi, z)$. Mediante una separación de variables adecuada en coordenadas cilíndricas, hállese una solución por desarrollo en serie que nos de el potencial en todos los puntos interiores al cilindro.