Programación 2024

Guía 1: Repaso de cálculo vectorial

19 de marzo, 2025

Problema 1: Haciendo uso de la notacion de Einstein y de las cantidades δ_{ij} (delta de Kronecker), y ϵ_{ijk} (tensor de Levi-Civita) demostrar las siguientes identidades:

(a) $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$

(b) $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$

(c) $\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$

(d) $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$

(e) $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$

(f) Demostrar que $\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\,\delta_{jm} - \delta_{im}\,\delta_{jl}$

(g) $\nabla \times (\phi \vec{A}) = \nabla \phi \times \vec{A} + \phi \nabla \times \vec{A}$

(h) $\nabla(\phi\psi) = \psi\,\nabla\phi + \phi\,\nabla\psi$

(i) $\nabla \cdot (\phi \vec{A}) = \phi \nabla \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \nabla \phi$

(j) $\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A}$

Ayudas varias: La definición de la delta de Kronocker es:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \tag{1}$$

La definición del tensor de Levi-Civita es

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si ijk es una permutación par de 123} \\ 0 & \text{si se repite un índice} \\ -1 & \text{si ijk es una permutación impar de 123} \end{cases} \tag{2}$$

El producto vectorial se expresa por: $(\vec{A} \times \vec{B})_i = \epsilon_{ijk} \hat{u}_i A_j B_k$. El producto de tensores de Levi-Civita se puede expresar en función de deltas de Kroneker,

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} \tag{3}$$

Problema 2: Si $\vec{r}$ es el vector posición del punto (x, y, z), i.e. $\vec{r} = x_i \hat{x}_i$ demuestre:

(a) $\nabla \cdot \vec{r} = 3$

(b) $\nabla \times \vec{r} = 0$

(c) $\nabla(1/r) = -\vec{r}/r^3$

(d) $\nabla \cdot (\vec{r}/r^3) = 0$

(e) $\nabla(\vec{r} \cdot \vec{k}) = \vec{k}$, donde $\vec{k} = \text{cons.}$

Problema 3: Si la divergencia de un campo vectorial en un punto dado es distinta de cero, ¿Qué representa ese valor en ese punto para el campo? Buscar algún ejemplo.

Problema 4: ¿Cómo se relaciona la dirección del rotacional de un campo vectorial en un punto dado con el plano de circulación del campo en ese punto?. ¿Cómo se relaciona esa circulación con la magnitud y el signo del rotacional en ese punto? Buscar algún ejemplo.

Problema 5: Mediante el uso del teorema de Gauss, demuestre las siguientes identidades integrales que son de uso frecuente en el electromagnetismo:

(a) $\oint_S \phi \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_V [\phi(\nabla \cdot \vec{A}) + \vec{A} \cdot \nabla\phi] \, \mathrm{d}V$

(b) $\oint_S \phi \, \mathrm{d}\vec{s} = \int_V \nabla\phi \, \mathrm{d}V$ use un campo de la forma $\vec{F} = \phi(\vec{x})\vec{k}$ donde $\vec{k} = \text{cte}$

(c) $\oint_S \vec{r}\vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_V [\vec{r}(\nabla \cdot \vec{A}) + \vec{A}] \, \mathrm{d}V$

(d) $\oint_S \phi\nabla\psi \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_V [\phi\nabla^2\psi + \nabla\phi \cdot \nabla\psi] \, \mathrm{d}V$ conocida por 1ra. identidad de Green.

(e) $\oint_S (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi) \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_V (\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi) \, \mathrm{d}V$ conocida por 2da. identidad de Green.

Problema 6: Demuestre las siguientes propiedades de la distribución delta:

(a) La función $\delta(x)$ es par, $\delta(x) = \delta(-x)$

(b) $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$

(c) $\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|}(\delta(x-a) + \delta(x+a))$

(d) $\int_{-\infty}^{\infty} F(x) \, \delta(g(x)) \, \mathrm{d}x = \sum_i \frac{F(x_i)}{|g'(x_i)|}$ donde los x_i son los ceros de la función $g(x)$

(e) $\int_{-\infty}^{\infty} F(x) \, \frac{d^n\delta(x)}{dx^n} \, \mathrm{d}x = (-1)^n \left. \frac{d^nF(x)}{dx^n} \right|_{x=0} \qquad n \geq 0$

Problema 7: Demuestre que:

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi\delta(\vec{r})$$

Problema 8: Utilizando la segunda identidad de Green demuestre que:

$$\phi(0) = -\frac{1}{4\pi} \left[\int_V \frac{\nabla^2\phi}{r} \mathrm{d}V + \oint_S \left(\phi\partial_n(1/r) - \frac{\partial_n\phi}{r} \right) \mathrm{d}s \right]$$

Problema 9: Demuestre el siguiente teorema: “Dado un campo vectorial $\vec{B}$ tal que $\nabla \cdot \vec{B}$ y $\nabla \times \vec{B}$ son funciones/campos acotados, continuos, que admiten las primeras derivadas parciales continuas en todo el espacio y tienden a cero como r^{-3} para $r \to \infty$, existe siempre la descomposición:

$$\vec{B} = \nabla\phi + \nabla \times \vec{A}$$

en un campo irrotacional y otro solenoidal.”

Problema 10: Sean $q_i = q_i(x, y, z)$ las ecuaciones de coordenadas curvilíneas ortogonales arbitrarias. Demuestre:

(a) El diferencial de volumen $\mathrm{d}V = h_1 h_2 h_3 \mathrm{d}q_1 \mathrm{d}q_2 \mathrm{d}q_3$ en donde $h_i^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2$

(b) El cuadrado del diferencial de longitud es: $\mathrm{d}l^2 = \sum h_i^2 \mathrm{d}q_i^2$

(c) Las componentes del gradiente de una función ϕ valen $(\nabla\phi)_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial\phi}{\partial q_i}$

(d) La divergencia de un campo vectorial $\vec{A}$ vale:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial(h_2 h_3 A_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial(h_1 h_3 A_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial(h_1 h_2 A_3)}{\partial q_3}\right]$$