Programación 2020

Guía 7: Matplotlib: Graficación

17 de Setiembre 2020

Para realizar esta guía se recomienda realizarla en el google colab (mediante archivos py) y luego la guardan en el servidor en un directorio `guia7`. **En el caso de ejecutar en el servidor los ejercicios de la guía asegúrense de que todos los gráficos se guarden en archivos .png.**

Problema 1: Realice la graficación de la función $f(x) = sin(x)/|x|$ entre -2π y 2π. Busque la resolucion adecuada. Guarde la salida del gráfico en un archivo .png.

Problema 2: Se requiere realizar evaluaciones de la función de Besel de orden 0 a través de la serie

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} - \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} + \cdots \tag{1}$$

(a) Diseñar una rutina que dados n (número de términos) y x calcule la serie de la función de Besel.

(b) Realice una función para determinar cuantos términos son necesarios para obtener una precisión de δ_p.

(c) Grafique entre 0 y 20 la función de Bessel aproximada y la función de Bessel provista por scipy.

(d) Determinar cual es la primera raíz positiva de la función de Bessel de orden 0 con una resolución de $delta_p = 0{,}5, 0{,}1, 0{,}01$.

(e) Determine la raíz de la función de Bessel de orden 0 en el intervalo [0,5] usando el método de bisección.

Problema 3: Considere la integral de la función Gaussiana, conocida como función error:

$$\mathcal{E}(x) = \int_0^x e^{-t^2} \mathrm{d}t \tag{2}$$

Esta integral no tiene solución analítica por lo que la única forma de determinarla es a través de la integración numérica.

(a) Escribir una función que calcule a $\mathcal{E}$ para valores de x entre 0 y 3 con pasos de 0.1. Comparar los métodos de integración del trapecio y la regla de Simpson.

Regla del trapecio. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right]$

Regla de Simpson. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2} + f(b)\right]$.

(b) Realizar un gráfico de $\mathcal{E}$ comparando los dos métodos de integración (investigue como cambian cuando se cambia la precisión de 0.1).

Problema 4: Grafique la función $z = x^2 + y^2 - 4$. Utilice los comandos de graficación *contour* y $plot\_surface$. Utilice también pyplot con axes(projection='3d'), ax.contour3D(X, Y, Z, 50, cmap='binary')

Problema 5: La segunda ley de Newton en 1D se expresa como :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{f(x,v)}{m} \tag{3}$$

$$v = \frac{dx}{dt} \tag{4}$$

donde $f(x,v)$ es la fuerza que actúa sobre la partícula, m es la masa, x es la posición y v la velocidad de la misma. La fuerza puede variar según la posición y velocidad de la partícula.

Usando la derivada como el cociente incremental podemos expresar como :

$$\frac{v(t+dt)-v(t)}{dt} = \frac{f(x(t),v(t))}{m} \tag{5}$$

$$\frac{x(t+dt)-x(t)}{dt} = v(t) \tag{6}$$

Si los tiempos estan ordenados de manera que $t_i = i \cdot dt$ $(i = 1, ..., N)$ entonces podemos definir $x(t_i) = x_i$ y $v(t_i) = v_i$ y las ecuaciones serían :

$$\frac{v_{i+1}-v_i}{dt} = \frac{f(x_i,v_i)}{m} \tag{7}$$

$$\frac{x_{i+1}-x_i}{dt} = v_i \tag{8}$$

despejando la velocidad y la posición en el tiempo $i+1$, obtenemos un par de ecuaciones recursivas:

$$v_{i+1} = v_i + dt \cdot \frac{f(x_i,v_i)}{m} \tag{9}$$

$$x_{i+1} = x_i + dt \cdot v_i \tag{10}$$

Esta últimas ecuaciones permiten calcular conociendo los valores iniciales x_0 y v_0 en el tiempo $t = 0$ los valores de x_i, v_i a cualquier tiempo $t_i = i \cdot dt$.

Implemente un programa que permita resolver la segunda ley de Newton para el caso de un oscilador armónico amortiguado, donde la fuerza tiene la expresión :

$$f(x,v) = -kx - bv \tag{11}$$

donde b es la constante de amortiguamiento y k es la constante del resorte.
El valor de $dt = 0{,}1$ puede ser adecuado para el caso particular de este ejercicio.
Asumiendo $k = 1$ en unidades arbitrarias, encuentre el efecto de aumentar b (0.1, 0.2, 0.3 ...) graficando $x(t)$ y observando el amortiguamiento de las oscilaciones.

Problema 6: Grafique la trayectoria de una partícula en movimiento rectilíneo y circular uniformes en tres dimensiones. Reutilice los códigos desarrollados en la Guía anterior. Utilice pyplot con gca(projection='3d').

Problema 7: Caos en el mapa logístico. El mapa logístico es definido por la ecuación iterativa

$$x_{i+1} = rx_i(1-x_i) \tag{12}$$

Este es un mapa iterativo que puede tener tres comportamientos límites

- Puntos fijos. Es decir una vez que se obtiene el valor del punto fijo todas las iteraciones siguientes daran el mismo valor. Por ejemplo el $x = 0$.
- Ciclo límite. Se los valores son repetitivos y periódicos (secuencia de valores que se repiten).
- La evolución se vuelve totalmente loca, parece que fueran números aleatorios sin no ni son. Sin embargo no son aleatorio es un fenómeno puramente deterministico denominado caos. Aun cuando tengamos la ecuación de evolución la predicción se vuelve impredecible, pequeñas perturbaciones de la situación actual conllevan a grandes desviaciones en pocas iteraciones.

(a) Implemente una función que simule la evolución de la población de la especie en funcion de la generación $i = 1, 2, ...T$.

(b) Estudie las soluciones de este problema en función del parámetro r (r entre 0 y 5). Para un dado r comience con $x_0 = 1/2$ y resuelva 1000 iteraciones.

(c) Grafique para $r = 0{,}5, 1{,}5, 3{,}2, 3{,}53{,}7$ los valores de las poblaciones x posibles entre i=100 a i=400 como función del tiempo i.

(d) Grafique para cada r los valores de las poblaciones x posibles entre i=100 a i=400 como función de r 3 y 4. Grafique con resoluciones de 10, 100, 1000 puntos.

(e) Grafique en un gráfico (r, x) donde x esta en el eje vertical integraciones comenzando por x=1/2 (conviene desechar las primeras 1000 iteraciones) y con valores de r entre 2 y 4 con pasos de 0.01 grafique con puntos 'k.' en la función *plot* o utilizando la función `scatter`.

Lo que debería obtener es un gráfico que se parece a un "árbol", conocido como gráfico de Feigenbaum (Buscar en internet el gráfico y corroborar que les ha dado lo mismo).

Problema 8: Edward Lorenz un físico del MIT que trabajaba en modelos atmosféricos de la convección, obtuvó un sistema de ecuaciones de solo tres variables que simplificaba el fenómeno. Estudiando numericamente las soluciones de este sistema descubrió en 1963 que las soluciones eran totalmente caóticas y el atractor de las soluciones tenía un comportamiento fractal (en un espacio de dimensión fraccional). En 1972 dio una conferencia en la Asociación Americana para el Avance de la Ciencia titulada ¿Puede el aleteo de una mariposa en Brazil generar un tornado en Texas? En alusión directa al fenómeno del caos y lo impredecible que son los fenómenos atmosféricos. A partir de esa charla el "caos inestable" se conoce como "el efecto mariposa", y se aplica en muy diversas aplicaciones particularmente los mercados financieros.

El modelo de Lorenz-63 (denominado asi por su trabajo) viene definido por las ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \sigma(y - x), \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= x(\rho - z) - y, \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= xy - \beta z. \end{aligned} \tag{13}$$

Tome como valores de los parámetros $\sigma = 10$, $\rho = 28$ and $\beta = 8/3$ y un $\delta t = 0{,}005$. Comenzando desde 0 realice una integración larga (1000 tiempos) y desechelos. Luego analice 500 tiempos graficando cada variable en función del tiempo por separado y graficando las tres variables en un gráfico 3D. Analice las alas de la mariposa y el comportamiento caótico. Utilice como esquemas de integración para representar la derivada temporal diferencias finitas (método de Euler) y el esquema de Runge-Kutta de 4 orden (provisto en la página de la asignatura; tenga cuidado con el δt).(Buscar en internet los gráfico del atractor de Lorenz y corroborar que les ha dado lo mismo.

Problema 9: Interferencia de ondas.

Suponga que se tiran un par de piedras en una pileta las cuales cada una genera ondas circulares que se desparraman con el tiempo produciendo interferencia entre las dos fuentes.

Cada onda se puede representar por $\zeta_i = \zeta_0 \sin(kr_i)$ con $i = 1, 2$ donde asumimos que anmbas ondas tienen la misma longitud de onda y la misma amplitud y difieren en su centro (lugar donde cayó la piedra); $r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$, luego el patrón de la pileta es la suma $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2$. Notar que ζ representa el desplazamiento vertical de la superficie del agua.

(a) Realice una función que determine el patrón ondulatorio de una piedra.

(b) Realice una función que permita evaluar el patrón ondulatorio de una piedra en un dominio o grilla cuadrada dados un δx y δy y un largo del estanque de $L_x = L_y$.

(c) Evalue el patrón de interferencia asumiendo que las ondas tienen una longitud de onda de $5cm$; $k = 2\pi/\lambda$; una amplitud de 1cm y los centros estan separados por 20cm. El estanque tiene un metro de largo y requerimos una resolución.

(d) Realice un gráfico de densidad del patrón de interferencia.

Problema 10: Curvas paramétricas en un gráfico.

(a) Haga un gráfico con la curva deltoide que se define paramétricamente con las ecuaciones

$$x = 2\cos\theta + \cos 2\theta \tag{14}$$

$$y = 2\sin\theta - \sin 2\theta \tag{15}$$

donde $0 \leq \theta < 2\pi$.

(b) Grafique la espiral de Galileo la cual viene definida en coordenadas polares por $r = \theta^2$ para $0 \leq \theta \leq 10\pi$.

(c) Considerando coordenadas polares en el rango de a $0 \leq \theta \leq 24\pi$ grafique la función:

$$r = e^{\cos\theta} - 2\cos(4\theta) + \sin^5 \frac{\theta}{12}. \tag{16}$$

F@CENA © 2020