



## Capítulo 3

# Función de Green en distintas geometrías

De lo visto en el capítulo anterior, podemos concluir que la resolución de un problema electrostático general con condiciones de frontera, se concentra en la determinación de la función de Green para el problema, la cual se debe notar que solo depende de la geometría del problema es decir de la superficie del contorno y, dada su definición, es independiente de la distribución de cargas en el volumen y de la especificación exacta de la condición de contorno. Si queremos determinar la función de Green se debe resolver la siguiente ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 G = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (3.1)$$

con  $G_D = 0$  en  $S$  para el problema de Dirichlet.

**Método de las imágenes** Una de las metodologías que se utiliza para encontrar la función de Green es a través del denominado método de las imágenes. El método consiste en poner una carga puntual en el dominio y poner cargas “imágenes” fuera del dominio en cuestión (fuera de  $S$ ), se pondrán cargas con magnitudes y en las posiciones necesarias para que el problema en el espacio abierto cumpla con las condiciones de contorno de Dirichlet o Neumann en  $S$ . Es decir que la posición y magnitud de las cargas imágenes se determinarán de la exigencia que el potencial sea 0 en  $S$  para el caso de Dirichlet. Mientras para el caso de condiciones de Neuman se quiere que la derivada normal del potencial sea una constante en la superficie. Notar que las cargas imágenes están *fuera* del dominio de interés y por lo tanto *no* contribuyen a la ecuación de Poisson adentro del dominio la cual solo tendrá la carga puntual, como es requerido por (3.1). La única función de las cargas externas es la de generar las condiciones de contorno adecuadas.

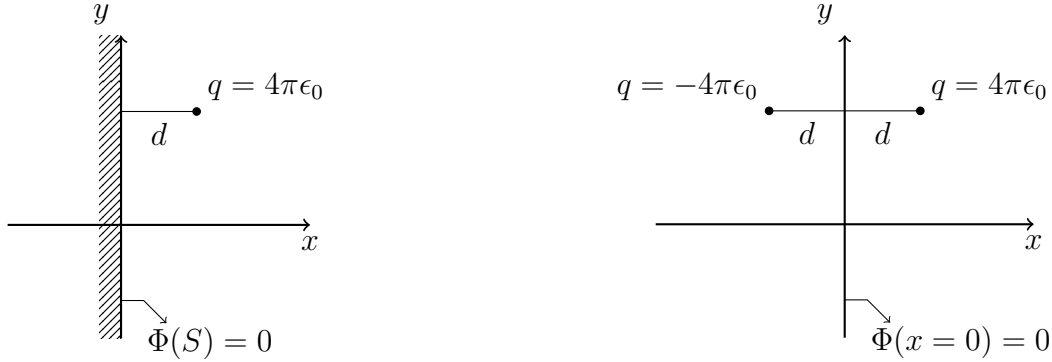


Figura 3.1: Problema a resolver para de-terminar la función de Green para el semi-espacio positivo. Figura 3.2: Problema equivalente en el espacio abierto con la carga imagen que satisface la condición de contorno  $\Phi(S) = 0$ .

### 3.1 Función de Green para el semiespacio $x > 0$

Queremos encontrar la función de Green para un dominio que tiene por superficie  $S$  el plano  $x = 0$  donde se pide que el potencial sea 0 y el resto de las condiciones de contorno son que el potencial se anule lejos del origen. El dominio es el semi-espacio de los  $x$  positivos. Para identificar a la  $S$  podemos pensar en el cascarón esférico de una semi-esfera en los  $x \geq 0$  cuyo radio se hace infinito (incluyendo la base de la semi-esfera como contorno).

Se plantea como problema entonces encontrar el potencial eléctrico de una carga puntual  $q$  que se encuentra situada a una distancia  $d$  de un plano conductor con  $\Phi = 0$  ubicado en  $x = 0$ . Este problema lo vamos a plantear a través del método de las imágenes por lo que proponemos a la carga fuente y además proponemos una carga imagen  $q'$  ubicada en una posición  $d'$  que estaría fuera del dominio de interés, es decir ubicada en  $x < 0$ . El potencial general viene entonces dado por

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q}{[(x-d)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} + \frac{q'}{[(x-d')^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} \right\} \quad (3.2)$$

donde hemos asumido por razones de simetría que la carga imagen se encuentra ubicada en la misma línea que une la carga fuente con la normal al plano. Dada la analogía con el problema de óptica resulta evidente que la carga imagen debería ser  $q' = -q$  y estar ubicada en  $d' = -d$ , sin embargo a los fines de concentrarnos en el procedimiento veamos como se determinarían la magnitud de la carga imagen y su posición. Es decir tenemos dos incógnitas, y sabemos que se debe cumplir que  $\Phi(x = 0) = 0$ , de aquí podemos tomar dos casos particulares para tener un sistema de dos ecuaciones, tomemos  $y = z = 0$  y  $y = y_0$  y  $z = 0$ . Para el primer caso se tiene que

$$\Phi(x = 0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{|d|} + \frac{q'}{|d'|} \right) = 0 \quad (3.3)$$

Por lo que la carga imagen viene dada por

$$q' = -q \frac{|d'|}{|d|}. \quad (3.4)$$

Imponiendo la segunda condición se obtiene que

$$\Phi(x=0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{(d^2 + y_0^2)^{1/2}} + \frac{qd'}{d(d'^2 + y_0^2)^{1/2}} \right) = 0, \quad (3.5)$$

de donde se deduce que

$$d^2(d'^2 + y_0^2) - d'^2(d^2 + y_0^2) = 0, \quad (3.6)$$

es decir que la posición de la carga imagen es  $d'^2 = d^2$ , de aquí descartamos la solución  $d' = d$  ya que estaría dentro del dominio en consideración y de hecho esta solución nos daría un potencial nulo en todas partes, por lo que la posición de la carga imagen debe ser  $d' = -d$  y reemplazando en (3.4) se obtiene que  $q' = -q$ . El potencial entonces es dado por

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{[(x-d)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} - \frac{1}{[(x+d)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} \right\}. \quad (3.7)$$

Esta ecuación cumple con ambas premisas del problema, tiene una carga puntual ubicada a una distancia  $d$  del plano y además en todo el plano  $x=0$  el potencial se hace 0.

Este potencial eléctrico (3.7) es en general el potencial de una carga puntual en un problema cuyas condiciones de contorno en el plano  $x=0$  y en infinito son  $\Phi=0$ . Por lo que sabemos que el potencial (3.7) satisface:

$$\nabla^2 \Phi_p = q/\epsilon_0 \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (3.8)$$

donde  $\vec{x}$  y  $\vec{x}'$  son vectores localizados en el semiespacio  $x > 0$ , y además se observa que por construcción (3.7) satisface con la condición de contorno  $\Phi=0$  en  $x=0$ .

Es decir que si fijamos el valor de la carga a  $q = 4\pi\epsilon_0$ , el potencial (3.7) es la función de Green de Dirichlet para el semiespacio  $x > 0$ ,

$$G_D(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{[(x-d)^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{1/2}} - \frac{1}{[(x+d)^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{1/2}} \quad (3.9)$$

A través de esta función de Green (3.9) podemos expresar la solución del problema general electrostático para el semiespacio  $x > 0$ ,

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\vec{x}') G_D(\vec{x} - \vec{x}') dV' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \Phi(\vec{x}') \partial_n G_D(\vec{x}, \vec{x}') \quad (3.10)$$

**Ejercicio 3.1:** a) Determinar la densidad de carga superficial de (3.7) sobre la superficie contorno  $x=0$  para un plano conductor con una carga puntual  $q$ . b) Integrar la densidad de carga superficial obtenida en a) para obtener la carga total inducida en el plano.

Explique el resultado en términos de superficies Gaussianas. c) Determinar la fuerza con la que la carga es atraída hacia el plano. d) Calcular la energía potencial electrostática.

**Ejercicio 3.2:** Determinar  $\partial_n G_D(\vec{x}, \vec{x}')$  en el problema del plano conductor.

**Ejercicio 3.3:** Determinar el potencial en el caso que tenemos dos planos formando un ángulo  $\alpha = \pi/2$  y existe una carga puntual  $q$  ubicada en una posición arbitraria. Escriba la función de Green del problema.

**Ejercicio 3.4:** ¿Como cambia la función de Green, (3.9), en el caso en que se requiere resolver un problema en el semiespacio  $x < 0$ ?

## 3.2 Función de Green para la esfera. Método de las imágenes

En el caso que se tiene una carga puntual frente a una esfera conductora conectada a tierra,  $\Phi = 0$ , como en el caso del semiespacio, el problema puede ser planteado por el método de las imágenes. Ponemos una carga imagen dentro de la esfera y requerimos que se anule el potencial en la esfera. Las incógnitas van a ser la posición de la carga imagen y la magnitud.

Dada la simetría del problema la carga imagen debería estar en la misma dirección que la carga fuente. El potencial que resulta es entonces el de dos cargas puntuales ubicadas en  $\vec{x}_0$  y  $\vec{x}'_0 = |\vec{x}'_0| \hat{x}_0$ ,

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} + \frac{q'}{|\vec{x} - |\vec{x}'_0| \hat{x}_0|} \right). \quad (3.11)$$

Luego lo que debemos determinar es la carga imagen  $q'$  y la posición  $\vec{x}'_0$ .

La distancia entre dos vectores puede ser expresada en la forma:

$$\begin{aligned} |\vec{x} - \vec{x}_0| &= \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x} - 2\vec{x} \cdot \vec{x}_0 + \vec{x}_0 \cdot \vec{x}_0} \\ &= \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x} - 2|\vec{x}||\vec{x}_0| \cos \gamma + \vec{x}_0 \cdot \vec{x}_0} \\ &= \sqrt{r^2 - 2rr_0 \cos \gamma + r_0^2} \end{aligned}$$

donde  $\gamma$  es el ángulo entre los vectores  $\vec{x}$  y  $\vec{x}_0$  y  $r$ ,  $r_0$  son sus respectivos módulos.

Solo necesito dos ecuaciones ya que son dos las incógnitas, tomo por simplicidad sobre la esfera de radio  $a$  las direcciones:  $\gamma = 0, \pi$  correspondientes a  $\cos \gamma = \pm 1$ .

Las dos ecuaciones resultantes son:

$$\Phi(\vec{x} = a\vec{x}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r_0 - a} + \frac{q'}{a - r'_0} \right) = 0 \quad (3.12)$$

$$\Phi(\vec{x} = -a\vec{x}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r_0 + a} + \frac{q'}{a + r'_0} \right) = 0 \quad (3.13)$$

Resolviendo el sistema (3.12)-(3.13) se obtiene  $r'_0 = \frac{a^2}{r_0}$  y  $q' = -\frac{a}{r_0}q$ .

Mientras mas cerca esta la carga de la esfera mas cerca también estará la carga imagen. Si la carga esta muy lejos de la esfera la carga imagen será muy pequeña.

El potencial de una carga puntual que se encuentra dentro de una esfera conductora conectada a tierra tal que el potencial en la esfera es  $\Phi = 0$  es

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} - \frac{a}{r_0|\vec{x} - \frac{a^2}{r_0^2}\vec{x}_0|} \right). \quad (3.14)$$

**Ejercicio 3.5:** Calcular la densidad superficial de carga sobre la esfera conductora utilizando que  $\sigma = \epsilon_0 \partial_n \Phi$ . Determinar la fuerza con la que la carga es atraída por la esfera conductora.

La fuerza con que la carga es atraída por la esfera conductora puede ser calculada directamente teniendo en cuenta la fuerza que se ejercen las cargas fuente e imagen. Dado que el efecto sobre la esfera conductora es de inducción habrá una atracción, razón por la cual las cargas son de distinto signo. La distancia entre las cargas es:

$$r_0 - r'_0 = r_0 - \frac{a^2}{r_0} = r_0 \left( 1 - \frac{a^2}{r_0^2} \right) \quad (3.15)$$

La fuerza es entonces:

$$|\vec{F}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{(r_0 - r'_0)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{aq^2}{r_0^3(1 - a^2/r_0^2)^2} \quad (3.16)$$

Entonces para alejar a una carga de un metal tenemos que hacer un trabajo que se debe a la inducción de cargas de signo contrario en el conductor, en el método de las imágenes esto se debe directamente a la atracción entre la carga fuente y la carga imagen.

**Ejercicio 3.6:** Determinar el potencial en el caso en que tenemos una esfera conductora con carga  $Q$ . En este caso la solución será una superposición del problema que ya resolvimos al problema de una carga puntual  $Q - q'$  en el origen.

**Ejercicio 3.7:** Esfera conductora a un potencial  $V$ . Calcular cual es la carga que genera ese potencial,  $Q - q' = Va$ , y luego resolver como el ejercicio anterior.

**Ejercicio 3.8:** Esfera conductora en un campo eléctrico uniforme. Pensar en cargas externas opuestas entre sí.

Si tenemos en cuenta la solución que se encontró para una carga puntual frente a una esfera conductora con potencial  $\Phi = 0$ , (3.14), reemplazando el valor de la carga por  $q = 4\pi\epsilon_0$  tenemos la función de Green para el problema de Dirichlet de la esfera (notar que pedimos que el potencial sea nulo en el contorno), además cambiamos de notación  $r_0$  por  $r'$ ,

$$G_D(\vec{x}, \vec{x}') = \left( \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{a/r'}{|\vec{x} - (a/r')^2\vec{x}'|} \right). \quad (3.17)$$

Esta es la función de Green para el problema interno de la esfera.

Teniendo en cuenta que el ángulo entre  $\vec{x}$  y  $\vec{x}'$  es  $\gamma$ , usando (3.12) en (3.17) tenemos

$$G_D = (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma)^{-1/2} - \left( \frac{r^2 r'^2}{a^2} + a^2 - 2 \frac{rr'^2}{a} \cos \gamma \right)^{-1/2}. \quad (3.18)$$

La solución general del problema con condiciones de contorno de Dirichlet

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_V \frac{\rho(\vec{x}')}{\epsilon_0} G_D(\vec{x} - \vec{x}') dV' - \int_S [\Phi \partial'_n G_D(\vec{x} - \vec{x}')] ds' \right\}. \quad (3.19)$$

Por lo que además de la función de Green (3.18) necesito determinar la derivada normal en la superficie esférica de la función de Green. Derivando a (3.18) con respecto a la normal, es decir con respecto a  $-\hat{r}'$ , ya que es hacia el interior de la esfera, la derivada normal resultante es

$$\partial_{n'} G_D|_{r'=a} = - \frac{(r^2 - a^2)}{a(r^2 + a^2 - 2ra \cos \gamma)^{3/2}} \quad (3.20)$$

esta representa la densidad superficial de carga inducida en el conductor debido a la presencia de la carga  $q = 4\pi\epsilon_0$ .

Para el caso en que tenemos la superficie esférica con un potencial  $\Phi(a, \theta, \phi) = V(\theta, \phi)$  y queremos resolver el problema externo sabiendo que no hay cargas,  $\rho = 0$ , y que  $\Phi(r \rightarrow \infty) = 0$  usamos (3.19),

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \Phi(a, \theta', \phi') \frac{a(r^2 - a^2)}{(r^2 + a^2 - 2ar \cos \gamma)^{3/2}} d\Omega'. \quad (3.21)$$

**Ejercicio 3.9:** ¿Como cambia la función de Green, (3.17), en el caso en que se quiera resolver un problema interior?

**Ejercicio 3.10:** Demostrar que  $\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi')$ . Esta transformación reviste de importancia ya que las coordenadas de la expresión de la derecha corresponden a los ángulos de las coordenadas esféricas.

Pensemos en dos vectores unitarios  $|\vec{x}| = |\vec{x}'| = 1$ .

Si usamos el teorema del coseno

$$|\vec{x} - \vec{x}'|^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cos \gamma = 2(1 - \cos \gamma) \quad (3.22)$$

Pensando en las coordenadas de los dos vectores:

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = 2(1 - \cos \gamma) \quad (3.23)$$

Transformando a coordenadas esféricas las coordenadas  $x, y, z$  y  $x', y', z'$ ,

$$(\cos \phi \sin \theta - \cos \phi' \sin \theta')^2 + (\sin \phi \sin \theta - \sin \phi' \sin \theta')^2 + (\cos \theta - \cos \theta')^2 = 2(1 - \cos \gamma). \quad (3.24)$$

Expandiendo los cuadrados y haciendo un poquito de álgebra resulta

$$\cos \gamma = \cos \theta' \cos \theta + \sin \theta' \sin \theta \cos(\phi' - \phi). \quad (3.25)$$

**Ejercicio 3.11:** Un problema de aplicación de (3.21) es una esfera conductora que tiene un aislante en el Ecuador, y de esta manera se divide en dos hemisferios uno el superior de potencial  $+V$  y otro el inferior de potencial  $-V$ . Determinar el potencial afuera de la esfera.

Reemplazando  $\Phi(a, \theta', \phi')$  en la ecuación (3.21)

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{V}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' \left[ \int_0^1 d(\cos \theta') - \int_{-1}^0 d(\cos \theta') \right] \frac{a(r^2 - a^2)}{(r^2 + a^2 - 2ar \cos \gamma)^{3/2}} \quad (3.26)$$

donde  $\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi')$ . Determinar el potencial afuera de la esfera.

### 3.3 Separación de variables

Si tenemos un problema de condiciones de contorno pero en el interior no hay cargas fuentes  $\rho(\mathbf{x}) = 0$  en  $V$  entonces debemos resolver a la ecuación de Laplace. La ecuación de Laplace puede ser resuelta proponiendo una solución que es un producto de funciones de sus variables independientes, es decir asumiendo que la solución es separable en sus variables independientes. Dado que la solución es única si existe tal solución la solución es por lo tanto separable. Existen en total 11 tipos de coordenadas para los cuales se conoce la solución de la ecuación de Laplace. En este curso solo veremos 3 de estas coordenadas: rectangulares, esféricas y cilíndricas.

Dado que el conjunto de soluciones es un conjunto ortogonal y *completo*, entonces estas soluciones pueden ser utilizadas para todos los casos cuya geometría este ligada al tipo de coordenadas que se utiliza.

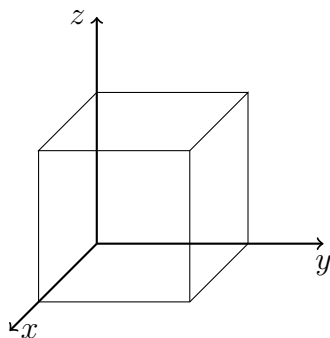


Figura 3.3: .



### 3.3.1 Ecuación de Laplace en coordenadas rectangulares

La ecuación de Laplace en coordenadas rectangulares es

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (3.27)$$

Proponemos que la solución puede escribirse como el producto de tres funciones; cada una de estas funciones es solo función de una de las variables independientes del problema  $x, y, z$ :

$$\Phi(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z) \quad (3.28)$$

Reemplazando en la ecuación:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0 \quad (3.29)$$

nótese que la derivadas son derivadas totales. Entonces la ecuación (3.29) ha quedado expresada en tres términos los cuales cada uno depende de una variable distinta, esta es la cualidad interesante que tiene la ecuación de Laplace (como toda ecuación lineal) por lo que para que esta expresión sea válida cada uno de los términos debería ser una constante ya que si dependieran de cada una de las variables no habría forma de satisfacer la ecuación.

Supongamos que tenemos que encontrar el potencial en un cubo que tiene condiciones de contorno periódicas en  $x$  e  $y$  y no periódicas en  $z$ . Esto permite que la ecuación pueda ser expresada como tres ecuaciones diferenciales ordinarias en variables diferentes es decir

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\alpha^2, \quad (3.30)$$

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\beta^2, \quad (3.31)$$

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \gamma^2 \quad (3.32)$$

donde el signo de la constantes se ha tomado de acuerdo a la condición de contorno. Si la condición es periódica se toma negativo, si la condición es no periódica se toma la constante positiva. Si se reemplaza en la ecuación de Laplace (3.27), estas tres ecuaciones diferenciales ordinarias, (3.30)-(3.32), se tiene que las constantes deben satisfacer

$$\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2. \quad (3.33)$$

Las soluciones para cada ecuación diferencial ordinaria son

$$X = \exp(\pm i\alpha x), \quad Y = \exp(\pm i\beta y), \quad Z = \exp(\pm \gamma z). \quad (3.34)$$

También se pueden expresar las soluciones en  $x$  y  $y$  en senos y cosenos, pero en general es mas conveniente trabajar con las exponenciales complejas. Para determinar las constantes

$\alpha$  y  $\beta$ , además del conjunto de soluciones necesitamos imponer las condiciones de contorno. Por otro lado, una vez conocidas  $\alpha$  y  $\beta$ ,  $\gamma$  queda determinada a través de la restricción resultante de la ecuación de Laplace.

Supongamos una caja con una arista ubicada en el origen y el resto de las aristas se encuentra en el subespacio positivo, cuyos lados en  $x$ ,  $y$  y  $z$  son  $a$ ,  $b$  y  $c$  respectivamente. La caja tiene potencial  $\Phi = 0$  excepto la cara superior  $z = c$  la cual tiene un potencial de  $\Phi = V(x, y)$ .

De la condición  $\Phi(x = 0) = 0$  se tiene que  $X = \sin(\alpha x)$

De la condición  $\Phi(y = 0) = 0$  se tiene que  $Y = \sin(\beta y)$

De la condición  $\Phi(z = 0) = 0$  se tiene que  $Z = \sinh(\gamma z)$

Como  $\Phi = 0$  en  $x = a$  entonces  $X = \sin(\alpha a) = 0$ , luego la condición es que  $\alpha a = n\pi$  es decir que  $\alpha$  esta cuantizado de la forma:

$$\alpha = \frac{n\pi}{a} \quad (3.35)$$

De la condición de contorno en  $y = b$  se tiene

$$\beta = \frac{m\pi}{b} \quad (3.36)$$

Entonces las funciones en las variables  $x$  e  $y$  quedan cuantizadas, debido a que hemos exigido condiciones periódicas en un dominio acotado, de tal manera que  $n$  y  $m$  determinarán el numero de raíces en las direcciones  $x$  y  $y$  respectivamente.

Luego  $\gamma$  queda determinado por

$$\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \pi \sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2} \quad (3.37)$$

Estos conjuntos de funciones ortogonales son completos en la caja sujeto a todas las funciones que cumplen con las condiciones de contorno.

La solución general será suma de todos los modos posibles

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm} \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) \sinh(\gamma_{nm} z) \quad (3.38)$$

con la condición de contorno que falta en  $z = c$  se debe satisfacer:

$$\Phi(x, y, z = c) = V(x, y) \quad (3.39)$$

por lo que se deben elegir los coeficiente  $sA_{nm}$  para que se cumpla esta condición. Dado que las funciones sin y cos son una base en una superficie rectangular, para cualquier  $V(x, y)$ , se determina las constantes,  $A_{nm}$ ,

$$A_{nm} = \frac{4}{ab \sin(\gamma_{nm} c)} \int_0^a \int_0^b V(x, y) \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) dx dy \quad (3.40)$$

esto se obtiene evaluando a (3.38) en  $z = c$ , multiplicando a ambos lados por  $\sin(\alpha_{n'} x) \sin(\beta_{m'} y)$  e integrando  $x$  y  $y$  y usando ortogonalidad de las funciones que las pensamos como vectores y cuyo producto interior esta definido por la integral en la superficie prescripta.

### 3.3.2 Ecuación de Laplace en coordenadas polares

Si tenemos un problema electrostático sin fuentes  $\rho = 0$  que tenga geometría cilíndrica y que tenga simetría en el eje  $z$  o que se pueda expresar en coordenadas polares, e.g. discos concéntricos, planos formando un ángulo, etc. Entonces cuando decimos que un problema tiene geometría cilíndrica nos estamos refiriendo a que *las condiciones de contorno del problema* están expresadas en coordenadas cilíndricas. Además, si decimos que tiene simetría en una de las variables, lo que estamos diciendo es que las condiciones de contorno son independientes de esa variable, y por lo tanto la solución del problema, el potencial, será independiente de esa variable. Entonces por ejemplo nos estamos refiriendo a un problema de condiciones de contorno en un cilindro  $\Phi(\rho = a, \phi, z) = V(\phi)$  y se quiere encontrar el potencial en el interior del cilindro.

La ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas es:

$$\frac{1}{\rho} \partial_\rho(\rho \partial_\rho \Phi) + \frac{1}{\rho^2} \partial_{\phi\phi}^2 \Phi + \partial_{zz}^2 \Phi = 0. \quad (3.41)$$

Esta ecuación se deduce de (??) usando los factores de escala de coordenadas cilíndricas. Un compendio de los principales operadores diferenciales expresados en distintas coordenadas puede ser encontrado en la tabla Schaum.

Dado que las condiciones de contorno del problema son independientes de la variable  $z$ , la solución también lo es  $\Phi(\rho, \phi)$ , por lo que el último término de (3.41) se anula y únicamente debemos resolver el problema en el plano:

$$\frac{1}{\rho} \partial_\rho(\rho \partial_\rho \Phi) + \frac{1}{\rho^2} \partial_{\phi^2}^2 \Phi = 0. \quad (3.42)$$

Asumiendo la solución es separable en las variables  $\rho$  y  $\phi$ , se propone una solución de la forma,

$$\Phi = R(\rho) \Psi(\phi) \quad (3.43)$$

Reemplazando la solución propuesta en la ecuación diferencial (3.42), en forma equivalente al caso de coordenadas rectangulares, para satisfacer la ecuación diferencial resultante cada uno de los términos de la ecuación deben ser constantes:

$$\frac{\rho}{R} \partial_\rho(\rho \partial_\rho R) = \nu^2 \quad (3.44)$$

y

$$\partial_{\phi^2}^2 \Psi = -\nu^2 \quad (3.45)$$

Nuevamente hemos elegido la constante negativa en la variable que esperamos tenga soluciones periódicas. Resolviendo la ecuación para  $\rho$ , (3.44),

$$\partial_\rho(\rho \partial_\rho R) = \nu^2 \frac{R}{\rho} \quad (3.46)$$

las posibles soluciones son  $R_\nu = \rho^{\pm\nu}$  donde aun no se ha demostrado la cuantización es decir  $\nu$  es un número real.

En el caso en que  $\nu = 0$  se tiene que

$$\partial_\rho(\rho \partial_\rho R) = 0 \quad (3.47)$$

cuya solución es

$$R_{\nu=0} = C \ln(\rho/\rho_0). \quad (3.48)$$

En el caso de la variable angular, la solución propuesta de (3.45) es

$$\Psi(\phi) = A \cos(\nu\phi) + B \sin(\nu\phi) \quad (3.49)$$

en el caso de  $\nu = 0$  es

$$\Psi = E + F\phi \quad (3.50)$$

como las funciones deben ser univaluadas se debe pedir que:

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi) \quad (3.51)$$

es decir que la función  $\Phi$  debe satisfacer condiciones de contorno periódicas, esto muestra que  $\nu$  debe ser entero y lo llamaremos  $n$ , además se debe pedir por la periodicidad que  $F = 0$ .

La solución general de la ecuación de Laplace para un problema en coordenadas polares, i.e. coordenadas cilíndricas con independencia de la variable  $z$ , es

$$\Phi(x, y, z) = a_0 \ln(\rho/\rho_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \{[a_n \cos(n\phi) + b_n \sin(n\phi)]\rho^n + [c_n \cos(n\phi) + d_n \sin(n\phi)]\rho^{-n}\}. \quad (3.52)$$

**Ejercicio 3.12:** Se tienen dos discos concéntricos de radios  $\rho = a$  y  $\rho = b$  con potenciales  $\Phi(\rho = a) = V_1$  y  $\Phi(\rho = b) = V_2$ . Determinar el potencial en el interior entre los discos.

Rta. La solución viene dada por (3.52). Dado que el problema es independiente de  $\phi$ , se deduce que de la solución general (3.52) se tiene  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $c_n$  y  $d_n$  iguales a 0, luego solo permanece el primer término en (3.52). Las dos constantes se deben determinar de la condición de contorno, por comodidad reescribimos las constantes de tal manera que la solución sea  $\Phi = A + B \ln \rho$ , luego

$$A + B \ln a = V_1 \quad (3.53)$$

y

$$A + B \ln b = V_2 \quad (3.54)$$

la solución es

$$\Phi = (\ln(a/b))^{-1} [V_1 \ln(\rho/b) - V_2 \ln(\rho/a)]. \quad (3.55)$$

### 3.4 Ecuación de Laplace en coordenadas esféricas. Simetría azimutal

Supongamos un problema donde se quiere determinar el potencial en un dominio que esta libre de cargas ( $\rho = 0$ ) con condiciones de contorno en una esfera de radio  $r = a$  donde el potencial es  $V(\theta)$ . En este caso lo mas conveniente es utilizar la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas y determinar el conjunto de funciones ortonormales que satisfacen esta ecuación de Laplace con simetría azimutal, i.e. el problema y en particular su solución es independiente de  $\phi$ .

La ecuación de Laplace en coordenadas esféricas es:

$$\frac{1}{r} \partial_{rr}^2(r\Phi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta(\sin \theta \partial_\theta \Phi) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_{\phi\phi}^2 \Phi = 0. \quad (3.56)$$

Para resolver esta ecuación utilizamos el método de separación de variables. Como el problema tiene simetría azimutal proponemos una solución que sea independiente de  $\phi$ ,

$$\Phi(r, \theta) = \frac{U(r)}{r} P(\theta) \quad (3.57)$$

si sustituimos esta solución en la ecuación (3.56) se debe cumplir que

$$\frac{P}{r} \partial_{rr}^2 U + \frac{U}{r^3 \sin \theta} \partial_\theta(\sin \theta \partial_\theta P) = 0 \quad (3.58)$$

Dividiendo a (3.58) por la función (3.57) se tiene que

$$\frac{r^2}{U} \partial_{rr}^2 U + \frac{1}{\sin \theta P} \partial_\theta(\sin \theta \partial_\theta P) = 0 \quad (3.59)$$

Dado que los dos sumandos son funciones de variables distintas, estos deberían ser constantes por lo tanto la función en  $r$  queda

$$\frac{r^2}{U} \partial_{rr}^2 U = l(l+1). \quad (3.60)$$

La solución que satisface esta ecuación diferencial ordinaria es  $U = Ar^{l+1} + Br^{-l}$ . Nótese que por el momento  $l$  puede ser cualquier número real luego veremos que dadas las condiciones de contorno que debe satisfacer la función en  $\theta$ ,  $l$  debe ser un número natural. Veamos la forma de la solución en la parte angular, en función de  $\theta$ ,

$$\frac{1}{\sin \theta P} \partial_\theta(\sin \theta \partial_\theta P) = -l(l+1) \quad (3.61)$$

Realizando un cambio de variable y llamando  $x = \cos \theta$  se tiene

$$\partial_\theta P = \partial_{\cos \theta} P \partial_\theta \cos \theta \quad (3.62)$$

$$= -\sin \theta \partial_{\cos \theta} P \quad (3.63)$$

$$= -(1-x^2)^{1/2} \partial_x P \quad (3.64)$$

la ecuación diferencial que resulta reemplazando (3.64) en (3.61) es entonces:

$$\partial_x[(1-x^2)\partial_x P] + l(l+1)P = 0, \quad (3.65)$$

esta es una ecuación clásica del problema de Sturm-Liouville que puede encontrarse en los libros de física matemática o la tabla Schawn, la solución a esta ecuación son los polinomios de Legendre  $P_l(x)$ . Este es un conjunto completo de funciones en el intervalo  $-1 \leq x \leq 1$ . Los polinomios de Legendre son además ortogonales entre sí. La condición de ortogonalidad es

$$\int_{-1}^1 P'_l(x)P_l(x)dx = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}. \quad (3.66)$$

Notar entonces que los polinomios de Legendre **no** están normalizados. La condición de “normalización” que satisfacen son:  $P_l(1) = 1$  es decir que en el extremo superior los polinomios valen 1, pero no la integral entre ellos que es lo que define el producto interior en el espacio vectorial en consideración.

Las características y propiedades de estos polinomios pueden verse en algún libro de física matemática, e.g. Morse and Feshbach, aquí no haremos hincapié en las propiedades, salvo alguna que otra excepción, como la fórmula generatriz que veremos a continuación.

Para obtener a los polinomios proponemos que la solución a la ecuación diferencial (3.65) es una serie de potencias de la forma:

$$P(x) = x^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \quad (3.67)$$

reemplazando en la ecuación (3.65) se obtiene la relación de recurrencia para los  $a_j$

$$a_{j+2} = \frac{(\alpha+j)(\alpha+j+1) - l(l+1)}{(\alpha+j+1)(\alpha+j+2)} a_j \quad (3.68)$$

para que la serie termine y así tener una solución finita, i.e. acotada como es esperable físicamente, en el intervalo  $-1 \leq x \leq 1$  se necesita que  $l$  sea un entero positivo.

A partir de estos polinomios teniendo en cuenta que es un conjunto completo en  $-1 \leq x \leq 1$ , cualquier función dentro de este intervalo puede ser escrita como

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(x) \quad (3.69)$$

La solución general para el problema de simetría azimutal es,  $\Phi = \frac{U}{r}P$ ,

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta) \quad (3.70)$$

Luego la metodología para un problema de condiciones de contorno con simetría azimutal es proponer la solución general para este tipo de problemas (3.70) para luego determinar los coeficientes  $A_l$  y  $B_l$  tal que se satisfagan las condiciones de contorno.

Supongamos un problema interno a una esfera de radio  $a$  cuyo potencial es  $V(\theta)$ , en este caso  $B_l = 0$  ya que el potencial debe ser finito en el dominio en cuestión debido a que no hay cargas, luego los  $A_l$  se determinan imponiendo la condición de contorno es decir:

$$\Phi(r = a) = V(\theta) = \sum_{l=1}^{\infty} A_l a^l P_l(\cos \theta) \quad (3.71)$$

debemos por lo tanto expresar a la condición de contorno  $V(\theta)$  como una superposición de polinomios de Legendre y de esta manera podemos determinar los coeficientes  $A_l$ . Multiplicando entonces por  $P_{l'}(\cos \theta)$  y usando la condición de ortogonalidad se tiene:

$$A_l = \frac{(2l+1)}{2a^l} \int_0^\pi V(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta \quad (3.72)$$

Si el problema fuera el externo, en este caso lo que pedimos es que el potencial vaya a 0 para  $r \rightarrow \infty$  por lo que se tiene que  $A_l = 0$  y

$$\Phi(r = a) = V(\theta) = \sum_{l=1}^{\infty} B_l a^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) \quad (3.73)$$

En este caso los coeficientes  $B_l$  quedan determinados por la siguiente integral

$$B_l = \frac{(2l+1)a^{l+1}}{2} \int_0^\pi V(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta \quad (3.74)$$

Una alternativa como método para encontrar la solución es si conocemos la solución en una región del dominio, como los coeficientes  $A_l$  y  $B_l$  son únicos si se pueden determinar en esa región específica, éstos son los coeficientes para todo el dominio.

Supongamos por ejemplo que conocemos la solución en el eje de simetría, eje  $z$ ,

$$\Phi(r, \theta = 0, \pi) = V(z) \quad (3.75)$$

en el caso de  $z^+$ , es decir  $\theta = 0$ , los coeficientes están normalizados para  $x = 1$ ,  $P_l(\cos 0) = 1$ , entonces se tiene que

$$\Phi(r, 0) = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}] \quad (3.76)$$

en el caso de  $z^-$ , es decir  $\theta = \pi$ ,  $P_l(\cos \pi = -1) = (-1)^l$  entonces

$$\Phi(r, \pi) = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}]. \quad (3.77)$$

**Ejercicio 3.13:** Resolver el problema de Laplace típico, que ya resolvimos usando función de Green, una esfera que tiene potenciales opuestos. En el hemisferio superior el potencial es  $+V$  y en el inferior es negativo  $-V$ .

### 3.4.1 Función de Green para un problema sin CCs con simetría azimutal

La función de Green para un problema sin condiciones de contorno, puede ser facilmente determinada de la solución del potencial de una carga puntual en el espacio,

$$\Phi_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} \quad (3.78)$$

si tomamos  $q = 4\pi\epsilon_0$  tenemos que la función de Green para el problema es

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (3.79)$$

La solución general es como sabemos

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\vec{x}') G(\vec{x}, \vec{x}') dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV'. \quad (3.80)$$

Si el problema a resolver tuviera simetría azimutal, es decir la densidad de carga es tal que tiene simetría azimutal lo mas conveniente es expandir la función de Green en los polinomios de Legendre (para utilizar la ortogonalidad de los polinomios).

Para determinar esta expansión haremos uso de la metodología explicada anteriormente, es decir determinamos los coeficientes en el eje  $z$ . Primero ponemos el punto carga  $\vec{x}'$  en  $z$  ( $\theta' = 0$ ) y luego expandimos en los  $P_l(\cos \theta)$ :

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta) \quad (3.81)$$

donde  $\theta$  esta representando el ángulo entre el punto fuente ubicado en el eje  $z$  y el punto de observación ubicado en  $\mathbf{x}$  con coordenadas  $r, \theta$ . Notar que en el caso en que  $\vec{x}'$  no este en el eje de simetría en lugar de tener el ángulo  $\theta$  tendremos el ángulo  $\gamma$  que es el ángulo entre los vectores  $\vec{x}$  y  $\vec{x}'$ .

Ahora ubicamos al vector  $\vec{x}$  en el eje  $z$ , el punto de observación lo ponemos en el eje  $z$ , en este caso

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{|r - r'|}, \quad (3.82)$$

realizando un desarrollo de Taylor, para  $r > r'$ :

$$\frac{1}{r - r'} = \frac{1}{r(1 - r'/r)} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l, \quad (3.83)$$

para  $r < r'$ :

$$\frac{1}{r' - r} = \frac{1}{r'} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r'}\right)^l, \quad (3.84)$$



luego en una sola ecuación escribimos que:

$$\frac{1}{|r - r'|} = \frac{1}{r_{>}} \sum_{l=0}^{\infty} \left( \frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^l \quad (3.85)$$

donde debe interpretarse a  $r_{<}$  como el menor de  $r$  y  $r'$  y en forma equivalente a  $r_{>}$ .

De esta manera hemos determinado los coeficientes  $A_l$  y  $B_l$  que dependerán de la magnitud de  $r'$  y  $r$ .

Luego podemos expresar al caso general:

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{(l+1)}} P_l(\cos \gamma) \quad (3.86)$$

Y la solución general resultante sin condiciones de contorno y en un problema de una distribución de cargas con simetría azimutal es

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \int \rho(\vec{x}') \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{(l+1)}} P_l(\cos \gamma) dV'. \quad (3.87)$$

Considerando que la densidad de cargas tiene simetría azimutal se puede expresar en los polinomios de Legendre y luego se puede usar la ortogonalidad de los polinomios para resolver la integral (3.87).

### 3.5 Problema general de simetría esférica

Comenzamos nuevamente con la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas pero ahora las condiciones de contorno y por lo tanto la solución depende de  $\phi$ :

$$\frac{1}{r} \partial_{rr}^2 (r\Phi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_{\theta} (\sin \theta \partial_{\theta} \Phi) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_{\phi\phi}^2 \Phi = 0 \quad (3.88)$$

Proponemos una solución separable en sus variables

$$\Phi = \frac{U}{r} P(\theta) Q(\phi) \quad (3.89)$$

Si sustituimos la solución propuesta en la ecuación diferencial (3.88) y multiplicamos por  $\frac{r^2 \sin^2 \theta}{UPQ}$  la ecuación resultante es

$$\sin^2 \theta \left[ \frac{r^2}{U} d_{rr}^2 U + \frac{1}{P \sin \theta} d_{\theta} (\sin \theta d_{\theta} P) \right] + \frac{1}{Q} d_{\phi\phi}^2 Q = 0 \quad (3.90)$$

La ecuación que resulta es de la forma  $f(\theta, r) + g(\phi) = 0$ , por lo que las dos funciones  $f$  y  $g$  tienen que ser constantes:

$$\frac{1}{Q} d_{\phi\phi}^2 Q = -m^2 \rightarrow Q = \exp(\pm im\phi) \quad (3.91)$$

reemplazando en (3.88)

$$\frac{r^2}{U} d_{rr}^2 U + \frac{1}{P \sin \theta} d_\theta (\sin \theta d_\theta P) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = 0 \quad (3.92)$$

La ecuación que debe satisfacer para la coordenada  $r$  es:

$$\frac{r^2}{U} d_{rr}^2 U = l(l+1) \quad (3.93)$$

Finalmente para las coordenada  $\theta$  tenemos

$$\frac{1}{\sin \theta} d_\theta (\sin \theta d_\theta P) + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] P = 0 \quad (3.94)$$

La solución a este problema son los polinomios asociados de Legendre  $P_l^m(x)$ . Para que la solución sea finita en  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $l$  debería ser un entero positivo o 0 y  $|m| \leq l$  y  $-l \leq m \leq l$ .

Las funciones asociadas de Legendre son un conjunto completo  $-1 \leq x \leq 1$  y además son ortogonales es decir satisfacen la relación

$$\int_{-1}^1 P_{l'}^m(x) P_l^m(x) dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll'} \quad (3.95)$$

notar que la ortogonalidad es para un  $m$  fijo.

Por otro lado como es bien conocido la funciones  $Q_m(\phi) = \exp(im\phi)$  forman un conjunto completo de soluciones en  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ . Por lo tanto  $P_l^m Q_m$  es un conjunto completo en la esfera unitaria para los índices  $l$  y  $m$ .

El conjunto de autofunciones normalizas sobre la esfera unitaria son:

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \left[ \frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{1/2} P_l^m(\cos \phi) e^{im\phi} \quad (3.96)$$

Los  $Y_{lm}$  son denominados armónicos esféricos y por definición estan normalizados en la superficie de la esfera unitaria, por lo que cumplen con la propiedad

$$\int d\Omega Y_{l'm'}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta, \phi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (3.97)$$

Por completitud podemos expresar a cualquier función sobre la esfera como una superposición de armónicos esféricos:

$$g(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (3.98)$$

donde  $A_{lm} = \int d\Omega Y_{lm}^*(\theta, \phi) g(\theta, \phi)$ .

La solución general en coordenadas esféricas es:

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [A_{lm}r^l + B_{lm}r^{-(l+1)}]Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (3.99)$$

es decir que los ármónicos esféricos satisfacen la ecuación:

$$\nabla^2 Y_{lm}(\theta, \phi) = -\frac{l(l+1)}{r^2} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (3.100)$$

donde los autovalores son  $\lambda = -l(l+1)$ .

Existe una degeneración en los  $m$  ya que estos pueden ir desde  $-m$  hasta  $m$ . Es decir que existen  $2l+1$  estados, i.e. autofunciones, con el mismo autovalor (todos los  $Y_{lm}$  con  $l$  fijo).

Como los armónicos esféricos son un conjunto completo de funciones en la esfera unitaria a cualquier función  $f(\theta, \phi)$  se la puede escribir como una combinación lineal de los  $Y_{lm}$

$$f(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (3.101)$$

Para determinar los coeficientes  $A_{lm}$ , multiplicamos por  $Y_{l'm'}^*(\theta, \phi)$  a ambos lados de (3.101)

$$\int f(\theta, \phi) Y_{l'm'}^*(\theta, \phi) d\Omega = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} \int Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{l'm'}^*(\theta, \phi) d\Omega \quad (3.102)$$

usando la ortonormalidad de los armónicos esféricos,  $\delta_{ll'}\delta_{mm'} = \int Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{l'm'}^*(\theta, \phi) d\Omega$ , resulta

$$A_{lm} = \int f(\theta', \phi') Y_{lm}^*(\theta', \phi') d\Omega'. \quad (3.103)$$

Si se quieren corroborar estas ecuaciones (3.101) y (3.103), se reemplazan los coeficientes (3.103) en (3.101)

$$f(\theta, \phi) = \int f(\theta', \phi') \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi') d\Omega' \quad (3.104)$$

finalmente se utiliza la relación de completitud

$$\delta(\phi - \phi') \delta(\cos \theta - \cos \theta') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi'), \quad (3.105)$$

demostrándose de esta manera que cualquier función en la superficie de la esfera unitaria puede ser escrita como una superposición de armónicos esféricos.

### 3.5.1 Teorema de adición de los armónicos esféricos

El teorema de adición de los armónicos esféricos expresa un polinomio de Legendre de  $\cos \gamma$  en términos de una combinación lineal de armónicos esféricos:

$$P_l(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (3.106)$$

Para demostrar este teorema existen varias alternativas. Jackson utiliza el hecho que los  $P_l(\cos \gamma)$  satisfacen una ecuación de la forma (3.100) y por lo tanto puede ser expresada como una superposición de los armónicos esféricos para luego demostrar que los coeficientes de la superposición son los que establece el teorema (3.106). Una alternativa es una demostración por inducción dada por Coster y Hart la cual apareció en el AJP, 59, 1991.

### 3.5.2 Función de Green para un problema sin condiciones de contorno de simetría esférica

Una de las aplicaciones directas del teorema de adición es la expresión de la función de Green sin condiciones de contorno para el caso de coordenadas esféricas, como fue demostrado:

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \gamma), \quad (3.107)$$

por lo que una expresión en los armónicos esféricos es obtenida facilmente reemplazando la expresión dada por el teorema de adición de los armónicos esféricos

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (3.108)$$

Por lo que la solución general en un problema sin condiciones de contorno donde la densidad de carga posee simetría esférica viene dada por

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} Y_{lm}(\theta, \phi) \int \rho(\vec{x}') \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') dV'. \quad (3.109)$$

## 3.6 Determinación de la función de Green usando separación de variables

El método de separación de variables nos permite resolver un problema de la ecuación de Laplace con condiciones de contorno de Dirichlet o Neumann, es decir un problema en el cual no existen cargas en el interior del dominio. Como podemos hacer para resolver entonces un problema que tenga cargas en el interior. Vimos que la función de Green

nos permite transformar el problema general en un problema de una carga puntual con condiciones de contorno triviales.

En general en estos casos para encontrar la función de Green podemos dividir el dominio en dos partes, por ejemplo si la carga esta ubicada a una distancia  $r = r'$  en un problema expresado en coordenadas esféricas, entonces en el problema con  $r < r'$  con contorno en  $r = r'$  no existen cargas y por lo tanto debemos encontrar la solución a la ecuación de Laplace, mientras en el problema “externo” para  $r > r'$  se tiene que tampoco existen cargas pero si existen probablemente condiciones de contornos por ejemplo en una superficie esférica de radio  $r = a$ , (con  $a > r'$ ), entonces para determinar la función de Green del problema debemos resolver el problema de Laplace que cumpla con las condiciones de contorno triviales en  $r = a$ , luego en  $r = r'$  debemos pegar la solución de Laplace interior con la exterior, de tal manera que en el contorno el potencial tenga un salto que represente a la carga puntual que se encuentra en  $r = r', \theta = \theta', \phi = \phi'$ , mientras para otros  $\theta$  y  $\phi$  con  $r = r'$  se deben cumplir condiciones de continuidad entre la solución interna y la externa.

### 3.7 Función de Green en coordenadas esféricas con CCs

Queremos encontrar la solución, función de Green, al problema general de una fuente puntual en coordenadas esféricas con condiciones de contorno triviales en  $S$  dada en coordenadas esféricas. Esto es

$$\nabla^2 G(\vec{x}, \vec{x}') = -4\pi\delta(\vec{x}, \vec{x}') \quad (3.110)$$

con las condiciones de contorno de Dirichlet  $G_D(\vec{x}, \vec{x}') = 0$  en  $S$ . La superficie  $S$  asumimos viene definida en coordenadas esféricas.

Ponemos el término no homogéneo, correspondiente a una carga puntual, en coordenadas esféricas

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{1}{r^2} \delta(r - r') \delta(\phi - \phi') \delta(\cos \theta - \cos \theta') \quad (3.111)$$

Para determinar la función de Green proponemos entonces que ésta viene expresada como una combinación lineal de los armónicos esféricos

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm}(r, r', \theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (3.112)$$

sabemos que esto es válido para cualquier punto con  $(r, \theta, \phi)$  distinto a  $(r', \theta', \phi')$  ya que en ese caso la ecuación a resolver es la ecuación de Laplace.

Si reemplazamos la serie (3.105) en la ecuación diferencial y usando que los armónicos esféricos son funciones ortogonales por lo cual cada término de la serie debe anularse

independientemente:

$$\nabla^2[A_{lm}(r, r', \theta', \phi')Y_{lm}(\theta, \phi)] = \frac{4\pi}{r^2}\delta(r - r') \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \phi')Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (3.113)$$

Expandiendo el Laplaciano

$$\nabla^2(A_{lm}Y_{lm}) = \frac{Y_{lm}}{r}\partial_{rr}^2(rA_{lm}) + \frac{\nabla_{\theta\phi}^2 Y_{lm}}{r^2} \quad (3.114)$$

como hemos visto  $\nabla_{\theta\phi}^2 Y_{lm} = -\frac{l(l+1)}{r^2}Y_{lm}$  resultando

$$\frac{1}{r}\partial_{rr}^2(rA_{lm}) - \frac{l(l+1)}{r^2}A_{lm} = -\frac{4\pi}{r^2}\delta(r' - r)Y_{lm}^*(\theta', \phi') \quad (3.115)$$

por lo que de esta forma ya nos queda definida la dependencias de  $A_{lm}$  en la forma

$$A_{lm}(r, r', \theta', \phi') = g(r, r')Y_{lm}^*(\theta', \phi'). \quad (3.116)$$

La ecuación resultante para la parte radial es

$$\frac{1}{r}\partial_{rr}^2(rg(r, r')) - \frac{l(l+1)}{r^2}g = -\frac{4\pi}{r^2}\delta(r - r') \quad (3.117)$$

Esta es la ecuación diferencial del problema radial, para  $r = r'$  tenemos una ecuación homogénea, en cada pedazo  $r > r'$  y  $r < r'$  debemos proponer una solución con distintas constantes y luego tengo que satisfacer la discontinuidad en  $r = r'$ :

$$g_l = \begin{cases} A(r')r^l + B(r')r^{-(l+1)} & r < r' \\ A'(r')r^l + B'(r')r^{-(l+1)} & r > r' \end{cases} \quad (3.118)$$

por lo que hasta el momento tenemos la función de Green en coordenadas esféricas puede ser escrita como:

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = g_l(r, r')Y_{lm}(\theta, \phi)Y_{lm}(\theta', \phi') \quad (3.119)$$

Supongamos el problema interior de la esfera.

Como no hay cargas en el origen la función debe ser finita en el interior de la esfera, i.e.  $B_l = 0$ . En  $r = a$   $g_l(a, r') = 0$ . Luego la función externa debe satisfacer que:

$$A'a^l + B'a^{-(l+1)} = 0 \quad (3.120)$$

Las soluciones resultantes son

$$g_l(r, r') = \begin{cases} A(r')r^l \\ B'(r')\left(\frac{r^l}{a^{2l+1}} - r^{-(l+1)}\right) \end{cases} \quad (3.121)$$

Por simetría las dependencias en  $r'$  deberían ser similares a las de  $r$  por lo tanto

$$g_l(r, r') = \begin{cases} Cr^l\left(\frac{r'^l}{a^{2l+1}} - r'^{-(l+1)}\right) \\ Cr'^l\left(\frac{r^l}{a^{2l+1}} - r^{-(l+1)}\right) \end{cases} \quad (3.122)$$

notar que de esta forma hemos determinado las dependencias en  $r'$  de  $A$  y  $B'$  y por lo tanto  $C$  es una constante.

Para determinar  $C$  se analiza como es el salto impuesto por la función delta en  $r = r'$ . La metodología en estos casos es integrar la ecuación diferencial alrededor de  $r = r'$ :

$$\int_{r'-\epsilon}^{r'+\epsilon} d_{rr}^2(r g_l) dr = -4\pi \int_{r'-\epsilon}^{r'+\epsilon} \frac{\delta(r - r')}{r} dr \quad (3.123)$$

donde el término proporcional a  $g/r$  se asume que es continuo por lo que no contribuye si  $\epsilon$  es suficientemente pequeño.

La ecuación resultante es

$$d_r(r g_l)|_{r'+\epsilon} - d_r(r g_l)|_{r'-\epsilon} = -\frac{4\pi}{r'} \quad (3.124)$$

es decir que la derivada de  $r g_l$  debe tener un salto en  $r = r'$ . Multiplicando por  $r$  a (3.122) y derivando con respecto a  $r$  obtenemos

$$d_r(r g_l)|_{r=r'} = \begin{cases} C(l+1)r'^l \left( \frac{r'^l}{a^{2l+1}} - r'^{-(l+1)} \right) \\ C r'^l \left( (l+1) \frac{r'^l}{a^{2l+1}} + l r'^{-(l+1)} \right) \end{cases} \quad (3.125)$$

Luego restando los límites por izquierda y por derecha de (3.125) se debe satisfacer que

$$C \left\{ (l+1) \left[ \frac{r'^{2l}}{a^{2l+1}} - r'^{-1} \right] - \left[ (l+1) \frac{r'^{2l}}{a^{2l+1}} + l r'^{-1} \right] \right\} = -\frac{4\pi}{r'} \quad (3.126)$$

de donde se deduce que la constante es

$$C = \frac{4\pi}{2l+1}. \quad (3.127)$$

De esta forma hemos determinado la función de Green para un problema en coordenadas esféricas la cual puede ser expresada en forma compacta por

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{r_{<}^l}{2l+1} \left( \frac{r_{>}^l}{a^{2l+1}} - r_{>}^{-(l+1)} \right) Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (3.128)$$

### 3.8 Problemas en coordenadas cilíndricas

El problema de la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas podría ser considerado la extensión del problema de coordenadas polares que ya estudiamos. La ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas es

$$\partial_{\rho\rho} \Phi + \frac{1}{\rho} \partial_{\rho} \Phi + \frac{1}{\rho^2} \partial_{\phi\phi}^2 \Phi + \partial_{zz}^2 \Phi = 0. \quad (3.129)$$

Proponemos una solución a esta ecuación con variable separables

$$\Phi = R(\rho)Q(\phi)Z(z) \quad (3.130)$$

Las ecuaciones resultantes para cada una de las variables son

$$d_{zz}^2 Z - k^2 Z = 0 \quad (3.131)$$

$$d_{\phi\phi}^2 Q + \nu^2 Q = 0 \quad (3.132)$$

Finalmente la ecuación en  $\rho$  es

$$d_{\rho\rho}^2 R + \frac{1}{\rho} \partial_\rho R + \left( k^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) R = 0 \quad (3.133)$$

Las soluciones para las coordenadas  $z$  y  $\phi$  son:

$$Z = e^{\pm kz} \quad (3.134)$$

$$Q = e^{\pm i\nu\phi} \quad (3.135)$$

Realizando un cambio de variable  $x = k\rho$  la ecuación que nos queda para  $R$  es

$$d_{xx}^2 R + \frac{1}{x} d_x R + \left( 1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) R = 0 \quad (3.136)$$

Esta es la ecuación de Bessel (ver por ejemplo la tabla Schawm) cuya soluciones son las funciones de Bessel de orden  $\nu$ , en el caso en que  $\nu$  no es entero:

$$f(\rho) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_{\nu n} J_\nu(x_{\nu n} \rho / a) \quad (3.137)$$

donde  $x_{\nu n}$  es la raíz de  $J(x_{\nu n}) = 0$ .

Para el caso  $\nu$  entero, la solución general la escribimos por

$$f(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_{\nu n} J_\nu(x_{\nu n} \rho / a) + B_{\nu n} N_\nu(x_{\nu n} \rho / a)] \quad (3.138)$$

donde  $N_\nu$  es la función de Bessel de segunda especie (tener cuidado con la notación para no confundir con los armónicos).

Los coeficientes son estimados de la ecuación

$$A_{\nu n} = \frac{2}{a^2 J_{\nu+1}^2(x_{\nu n})} \int_0^a \rho f(\rho) J_\nu\left(\frac{x_{\nu n} \rho}{a}\right) d\rho \quad (3.139)$$

En general si  $\nu$  no es un entero las funciones linealmente independientes que se pueden tomar son las funciones de Bessel de primera clase  $J_\nu$  y  $J_{-\nu}$ . En el caso que  $\nu$  sea entero, que es el relevante en electromagnetismo cuando tenemos la exigencia de continuidad del



potencial en  $\phi$ , entonces se deben tomar las funciones de Bessel de primera clase  $J_\nu$  y las funciones de Neumann  $N_\nu(x)$  (función de Bessel de segunda clase) en lugar de  $J_{-\nu}$ .

Supongamos el problema de un cilindro cuya tapa en  $z = l$  tiene condiciones de contorno  $\Phi = V(\rho, \phi)$  y las otras caras vienen definidas por  $\Phi = 0$ .

Para que se anule en  $z = 0$  las soluciones (3.134) nos queda que  $Z = \sinh(kz)$ .

Para que nos cumpla continuidad en  $\phi$ ,  $Q(0) = Q(2\pi)$ , nos queda que

$$Q = A \sin(m\phi) + B \cos(m\phi). \quad (3.140)$$

Mientras la solución en la parte radial es:

$$R(\rho) = C J_m(x_{mn}\rho/a) + D N_m(x_{mn}\rho/a) \quad (3.141)$$

La solución general es:

$$\Phi(\rho, \phi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [A_{mn} \sin(m\phi) + B_{mn} \cos(m\phi)] J_m(k_{mn}\rho) \sinh(k_{mn}z) \quad (3.142)$$

donde  $k_{mn} = x_{mn}/a$ .

Ahora tenemos que imponer la condición de contorno en  $z = l$ :

$$A_{mn} = \frac{2}{\pi a^2 J_{m+1}^2(k_{mn}a) \sinh(k_{mn}L)} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a d\rho \rho V(\rho, \phi) J_m(k_{mn}\rho) \sin(m\phi) \quad (3.143)$$

$$B_{mn} = \frac{2}{\pi a^2 J_{m+1}^2(k_{mn}a) \sinh(k_{mn}L)} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a d\rho \rho V(\rho, \phi) J_m(k_{mn}\rho) \cos(m\phi). \quad (3.144)$$