Capítulo 7

Campos variables en el tiempo

En el cap'tulo anterior trabajando con un conjunto de ecuaciones que denominamos aproximación quasi-estática las cuales en el vacio vienen expresadas por

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{7.1}$$

$$\nabla \times \vec{E} = \partial_t \vec{B} \tag{7.2}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \tag{7.3}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{7.4}$$

Si aplicamos la divergencia a la ecuación del rotor del campo magnético, (7.3),

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \nabla \cdot \vec{J} \tag{7.5}$$

dado que la divergencia del rotor de cualquier campo vectorial es nulo, se obtiene que

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \tag{7.6}$$

El conjunto de ecuaciones lentamente variable en el tiempo no cumple con la ecuación de conservación de la carga general, sino que tendría como hipótesis que la ρ se mantiene constante.

Sin embargo para campos variables en el tiempo la corriente debería ser de la forma

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \vec{J} = 0 \tag{7.7}$$

Esta inconsistencia de las ecuaciones del electromagnetismo fue notada por primera vez por Maxwell, quien propuso agregar un término extra para que las ecuaciones del electromagnetismo, luego llamadas de Maxwell, satisfagan con la forma general de conservación de la carga. Lo que se plantea entonces es proponer un término extra en la ecuación del rotor del campo magnético, (7.3), que resulte en la ecuación (7.7). Pero de hecho el término extra, $\partial_t \rho$ lo podemos directamente asociar a (7.1),

$$\partial_t \rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \partial_t \vec{E} \tag{7.8}$$

Entonces si agrego un término extra, $\epsilon_0\mu_0\partial_t\vec{E}$, a (7.3) luego cuando se aplica la divergencia resulta en $\mu_0\partial_t\rho$.

Es decir que el conjunto de ecuaciones completo del electromagnetismo en un medio material es:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \tag{7.9}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0\vec{J} + \frac{1}{c^2}\partial_t\vec{E} \tag{7.10}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{7.11}$$

$$\nabla \times \vec{E} + \partial_t\vec{B} = 0 \tag{7.12}$$

7.1 Vector potencial

Las ecuaciones de Maxwell estan escritas en una forma donde las variables no son todas independientes entre si, y las ecuaciones tampoco, tenemos 8 ecuaciones y 6 variables. Para simplificar la resolución general de un problema electromagnético lo que se debe hacer es transformar las variables y el conjunto de ecuaciones a uno mas simple. Esto se lleva a cabo, de la misma manera que lo hicimos en electrostática y en magnetostática, a través de potenciales. Para el caso del vector potencial usamos de hecho la misma definición que en el caso estático.

Para reescribir el conjunto completo de ecuaciones en función de potenciales comencemos por la ecuación (7.11), la cual es satisfecha para cualquier potencial vector $\vec{A}$ definido por

$$\vec{B} = \nabla \times A. \tag{7.13}$$

Claramente no podemos definir directamente al campo eléctrico como el gradiente de un escalar, como hicimos en el caso estático ya que el rotor del campo eléctrico no es 0, pero reemplazando (7.13) en (7.14), se obtiene que

$$\nabla \times (\vec{E} + \partial_t\vec{A}) = 0. \tag{7.14}$$

Luego podemos proponer un potencial escalar que sea definido por

$$\vec{E} + \partial_t\vec{A} = -\nabla\Phi \tag{7.15}$$

El campo eléctrico queda determinado si conocemos a Φ y $\vec{A}$ por

$$\vec{E} = -\partial_t\vec{A} - \nabla\Phi \tag{7.16}$$

Las ecuaciones resultantes en el vacío son

$$\nabla^2\Phi + \partial_t(\nabla \cdot \vec{A}) = -\rho/\epsilon_0 \tag{7.17}$$

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\partial^2_{tt}-\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\partial_t\Phi\right)=-\mu_0\vec{J} \tag{7.18}$$

Éstas ecuaciones están acopladas entre ellas, sin embargo podemos elegir la arbitrariedad que tenemos en elegir los potenciales para simplificarlas y desacoplarlas, existen dos 'gauges' muy utilizados. El gauge de Coulomb y el de Lorenz.

7.1.1 Gauge de Coulomb

En el caso del gauge de Coulomb se toma que el potencial vector debe satisfacer:

$$\nabla\cdot\vec{A}=0. \tag{7.19}$$

En este caso el conjunto de ecuaciones resultantes son:

$$\nabla^2\Phi=-\rho/\epsilon_0 \tag{7.20}$$

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\partial^2_{tt}\vec{A}=-\mu_0\vec{J}+\frac{1}{c^2}\nabla\partial_t\Phi \tag{7.21}$$

La solución a la primer ecuación, (7.20) es el potencial de Coulomb instantaneo:

$$\Phi(\vec{x},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{x}',t)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\mathrm{d}V' \tag{7.22}$$

este potencial es equivalente al de electrostática, pero para la distribución de carga que existe en el momento t.

Para resolver (7.21) es conveniente escribir a la corriente en una componente irrotacional y una componente solenoidal,

$$\vec{J}=\vec{J}_l+\vec{J}_t \tag{7.23}$$

donde $\nabla\times\vec{J}_l=0$, $\nabla\cdot\vec{J}_l=\nabla\cdot\vec{J}$ y por otro lado $\nabla\cdot\vec{J}_t=0$, $\nabla\times\vec{J}_t=\nabla\times\vec{J}$. De las ecuaciones para $\vec{J}_l$, en forma equivalente al campo eléctrico estático, se deduce que el gradiente del campo viene dado por

$$\vec{J}_l=\frac{1}{4\pi}\nabla\int\frac{-\nabla\cdot\vec{J}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\mathrm{d}V'. \tag{7.24}$$

Derivando con respecto al tiempo (7.22) y teniendo en cuenta la ecuación de conservación de la carga se obtiene que

$$\partial_t\Phi=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{-\nabla\cdot\vec{J}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\mathrm{d}V' \tag{7.25}$$

resultando que

$$\frac{1}{c^2}\nabla\partial_t\Phi=\mu_0\vec{J}_l. \tag{7.26}$$

Mientras la ecuación (que queda) de (7.21) para el vector potencial eliminando (7.26) es:

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\partial^2_{tt}\vec{A}=\mu_0\vec{J}_t. \tag{7.27}$$

7.1.2 Gauge de Lorenz

En el gauge de Lorenz, tomamos que el potencial vector satisface la condición

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\partial_t \Phi = 0. \tag{7.28}$$

Ejercicio 7.1: Demostrar que realmente se puede tomar esta condición como una consecuencia de la libertad que tenemos en la elección del potencial vector.

Luego si imponemos la condición (7.28) a (7.17) y (7.18), las ecuaciones resultantes son:

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2}\partial^2_{tt}\Phi = -\rho/\epsilon_0 \tag{7.29}$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\partial^2_{tt}\vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \tag{7.30}$$

estas tienen la forma familiar de 4 ecuaciones de ondas en 3D independientes con términos de forzado, es decir hemos transformado la ecuaciones acopladas entre el campo eléctrico y el campo magnético variables en el tiempo, en 4 ecuciones de ondas desacopladas. La velocidad de fase de las ondas, representadas en (7.29) y (7.30), es la velocidad de la luz, por otro lado queda establecido de las ecuaciones que las ondas electromagnéticas son no dispersivas en el vacio, dado que la frecuencia de las ondas depende linealmente del número de onda, o dicho de otro modo la velocidad de fase de las ondas es la misma para ondas de cualquier frecuencia. Entonces, las ondas electromagnéticas se pueden propagar largas distancias sin disminuir notablemente la amplitud. Las fuentes de las ondas son las variaciones temporales de corrientes o densidades de carga (y por supuesto los contornos en un problema limitado por una superficie cerrada).

7.2 Funciones de Green para la ecuación de ondas

En el gauge de Lorenz las ecuaciones resultantes tanto para Φ, (7.29), como para $\vec{A}$, (7.30), son la ecuaciones de ondas desacopladas. También en el caso del gauge de Coulomb se obtuvo para el potencial vector una ecuación de ondas. Veamos en general como se puede resolver la ecuación de ondas para una variable Ψ tal que

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2}\partial^2_{tt}\Psi = -4\pi f(\vec{x}, t) \tag{7.31}$$

es decir tenemos una ecuación de ondas 3D, donde no hay dispersión y la velocidad de fase es c, con un término de forzado f.

Supondremos un problema abierto sin condiciones de contorno. En general las condiciones de contorno serían equivalentes a las del problema de Poisson, o la función o su derivada normal en la superficie.

En el caso en que tengamos simetría esférica la ecuación de ondas resultante es

$$\frac{1}{r}\partial^2_{rr}(r\Psi) - \frac{1}{c^2}\partial^2_{tt}\Psi = 0 \tag{7.32}$$

Asumiendo que la condición inicial es:

$$\Psi(r, t=0) = \frac{F(r)}{r} \tag{7.33}$$

Debido a que no hay dispersión la onda conservará la forma inicial, las soluciones posibles (Dependiendo de la otra condición inicial necesaria) son

$$\Psi(r, t) = A\frac{F(r-ct)}{r} + B\frac{F(r+ct)}{r} \tag{7.34}$$

donde por (7.33) se tiene que $A + B = 1$.

Si también pedimos que la derivada de la función sea 0 inicialmente, $\partial_t \psi(\vec{x}, 0) = 0$, entonces $A = B = 1/2$. La amplitud en este caso se reparte en partes iguales.

Entonces la forma inicial que tenía Ψ en $t = 0$ se mantiene a lo largo del tiempo, la ecuacíon de ondas no dispersivas lo único que hace es mover la forma inicial, la condición inicial, con una velocidad $+c$ y con $-c$. De (7.34) vemos que el primer término de la solución se propaga con velocidad $+c$ mientras el segundo término se propaga con $-c$. Si inicialmente $F(r)$ tiene forma de un anillo gaussiano, $F(r) = A\, e^{-(r-r_0)^2/\sigma^2}$ parte de la solución se propagará hacia afuera mientras la otra se propagará hacia el origen.

Para resolver la ecuación no homógenea utilizamos el método de la función de Green, la cual debe ser solución de la ecuación:

$$\nabla^2 G - \frac{1}{c^2}\partial^2_{tt} G = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}')\delta(t - t') \tag{7.35}$$

es decir que queremos ver como el operador de ondas evoluciona una fuente de forzado que esta localizada en $\vec{x} = \vec{x}'$ y $t = t'$. Esto es un pulso espacio-temporal que luego el operador de onda se encarga de propagarlo.

Proponemos escribir a G como una integral de Fourier por definición es

$$G(\vec{x}, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G_\omega(\vec{x}) e^{-i\omega t} \mathrm{d}\omega \tag{7.36}$$

Teniendo en cuenta que la función delta viene dada por

$$\delta(t - t') = \frac{1}{2\pi}\int e^{i\omega(t-t')}\mathrm{d}\omega. \tag{7.37}$$

La ecuación resultante en el espacio de las frecuencias es:

$$\nabla^2 \hat{G}_\omega + \frac{\omega^2}{c^2}\hat{G}_\omega = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}')e^{-i\omega t'} \tag{7.38}$$

Tenemos una ecuación solo en el espacio de las frequencias, notar que t' es fijo, si asumimos simetría esférica (sin condiciones de contorno) el problema se simplifica a:

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}R^2}(R\hat{G}_\omega) + k^2 G_\omega = -4\pi\delta(\vec{R}) \tag{7.39}$$

donde $k = \omega/c$. La solución para $\vec{R} \neq 0$ es

$$\hat{G}_\omega = A_\pm \frac{\exp(\pm ikR)}{R} \tag{7.40}$$

Para encontrar las constantes $A_\pm$ integramos la ecuación (7.38) en un volumen que comprenda a $\vec{R} = 0$ (un esfera de radio ϵ):

$$\int [\nabla^2 \hat{G} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \hat{G}] \mathrm{d}V = -4\pi \int \delta(\vec{x} - \vec{x}') \mathrm{d}V e^{-i\omega t'} \tag{7.41}$$

Teniendo en cuenta que G es continua el segundo término del LHS de (7.41) se anula si la integración es en un volumen infinitesimal, mientras el primero permanece, pero entonces esto es esencialmente lo que se tenía en electrostática:

$$\nabla^2 G = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}') \tag{7.42}$$

Deducimos que las constantes $A_\pm = 1$. Es decir que $A_+ + A_- = 1$, pero aqui la derivada temporal selecciona una de las dos soluciones posibles.

La solución volviendo al espacio físico es

$$G(\vec{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pm ikR}}{R} e^{-i\omega(t-t')} \mathrm{d}\omega. \tag{7.43}$$

Luego usando $k = \omega/c$ reescribimos a (7.43) como

$$G_\pm(\vec{x}, t) = \frac{1}{2\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega[\pm R/c - (t-t')]} \mathrm{d}\omega \tag{7.44}$$

El cual es la definición de la función delta, por lo que queda

$$G_\pm = \frac{\delta(t' - t \pm R/c)}{R} \tag{7.45}$$

G_+ es la función de Green retardada. Un efecto observado en el punto $\vec{x}$ y en el tiempo t es causado por una fuente que esta a una distancia R y fue producido en un tiempo anterior. La información se propaga desde las fuentes en círculos concéntricos y luego esta información es recibida en el punto de observación. Dado que estamos con ondas no-dispersivas no hay ningun tipo de dispersión. Si la fuente fue una delta esta se conserva en el tiempo. No hay ensanchamiento-dispersión de los disturbios, los cuales siguen localizadas espacio-temporalmente. La función original se mueve por el espacio desde su punto espacio-temporal fuente hasta el punto de observación conservando su forma.

La solución particular, no homogenea, es:

$$\Psi_N(\vec{x}, t) = \int\int G(\vec{x}, t; \vec{x}', t') f(\vec{x}', t') \mathrm{d}V' \mathrm{d}t' \tag{7.46}$$

Para encontrar la solución general se debe agregar la solución homogenea:

$$\Psi = \Psi_{in} + \int\int G_+ f \mathrm{d}V' \mathrm{d}t' \tag{7.47}$$

Si evaluamos a la función δ en el tiempo, resulta en:

$$\Psi = \Psi_{in} + \int \frac{f|_{t'=t-R/c}}{R} \mathrm{d}V' \tag{7.48}$$

el tiempo $t' = t - R/c$ es lo que llamamos tiempo retardado.

La condición que debe satisfacer es:

$$\Psi = \Psi_{in} \qquad \text{para} \qquad t \to -\infty \tag{7.49}$$

es decir que la interpretamos como la condición inicial a tiempos remotos.

En el caso de la solución adenlantada se tiene que

$$\Psi = \Psi_{out} + \int\int G_{-} f \, \mathrm{d}V'\mathrm{d}t' \tag{7.50}$$

$$\Psi = \Psi_{out} + \int \frac{f|_{t'=t+R/c}}{R} \, \mathrm{d}V' \tag{7.51}$$

La condición que debe satisfacer la solución adelantada es:

$$\Psi = \Psi_{out} \qquad \text{para} \qquad t \to \infty \tag{7.52}$$

Esta solución no es muy representativa fisicamente, tenemos especificada las condiciones finales del problema.

Ejercicio 7.2: Supongamos que tenemos una fuente lineal en z, tal que $f(\vec{x}, t) = \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(t - t')$. Para resolver este problema se debe hacer uso de la solución 3D e integrar la superposición de fuentes ubicadas a lo largo del eje z.

7.3 Conservación de la energía

En general siempre las leyes de conservación están "escondidas" en las ecuaciones que gobiernan el fenómeno por ejemplo las ecuaciones de Maxwell. La ecuación de la carga, de la energía, y el momento pueden ser deducidas de la ecuaciones sin utilizar información o "física" extra.

Teniendo en cuenta las ecuaciones de Maxwell en un medio lineal,

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \tag{7.53}$$

$$\nabla \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0 \tag{7.54}$$

$$\nabla \times \vec{H} - \partial_t \vec{E} = \vec{J} \tag{7.55}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{7.56}$$

Multiplico escalarmente (7.54) por $\vec{H}$ y (7.55) por $\vec{E}$, es decir se busca que obtener derivadas temporales cuadráticas de los campos,

$$\vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E} + \vec{H} \cdot \partial_t \vec{B} = 0 \tag{7.57}$$

$$\vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H} - \vec{E} \cdot \partial_t \vec{D} = 0 \tag{7.58}$$

Restando estas ecuaciones se obtiene

$$\vec{H} \cdot \partial_t \vec{B} + \vec{E} \cdot \partial_t \vec{D} = \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H} - \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E} \tag{7.59}$$

Si se asume que $\vec{H}$ es proporcional a $\vec{B}$ y que $\vec{E}$ es proporcional a $\vec{D}$ se tiene

$$\frac{1}{2}\partial_t(\vec{H} \cdot \vec{B} + \vec{E} \cdot \vec{D}) - \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H} + \vec{H} \cdot \nabla \times E = -\vec{E} \cdot \vec{J} \tag{7.60}$$

notando que $\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{A} - \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{B}$, obtenemos la ecuación de conservación de la energía electromagnética

$$\partial_t u_{EM} + \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\vec{J} \cdot \vec{E} \tag{7.61}$$

donde $u_{EM} = \frac{1}{2}\left(\vec{H} \cdot \vec{B} + \vec{E} \cdot \vec{D}\right)$ es la densidad de energía electromagnética, $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ es la densidad de flujo de energía también conocida como el vector de Poynting.

Notar que el término $-\vec{J} \cdot \vec{E}$ esta actuando como fuente o sumidero de la energía electromagnética, es el trabajo hecho sobre el campo por unidad de tiempo y de volumen, este término representa la conversión de energía mecánica en energía electromagnética. Si tenemos en cuenta a la energía mecánica,

$$\frac{\mathrm{d}U_{ME}}{\mathrm{d}t} = \int \vec{J} \cdot \vec{E} \mathrm{d}V \tag{7.62}$$

luego se tiene que

$$\partial_t(u_{EM} + u_{ME}) + \nabla \cdot \vec{S} = 0. \tag{7.63}$$

7.4 Teorema de Poynting en medios dispersivos

Hasta el momento hemos asumido que los medios son conservativos es decir ϵ and μ constantes reales. En general los medios tienen dispersión y pérdidas. Entonces esperamos que aparezcan términos de pérdidas en la ecuación de conservación de la energía. En este caso ϵ depende de la frecuencia y es un número complejo cuya parte real dependiente de ω representa la dispersión y la componente imaginaria representa la disipación. Comenzamos por expresar a los campos en el espacio espectral

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t} \mathrm{d}\omega \tag{7.64}$$

$$\vec{D}(\vec{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{D}(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t} \mathrm{d}\omega \tag{7.65}$$

Sabemos entonces que la relación que existe entre el campo eléctrico y el desplazamiento es,

$$\hat{D}(\vec{x}, \omega) = \epsilon(\omega) \hat{E}(\vec{x}, \omega) \tag{7.66}$$

notar que ésta relación es en el espacio espectral.

Esperamos que en la ecuación de conservación de energía deberían aparecer nuevos términos que representen las pérdidas y la dispersión en la ecuación. De la deducción que ya hicimos no es válido el razonamiento

$$\vec{E} \cdot \partial_t \vec{D} \neq \frac{1}{2}\partial_t(\vec{E} \cdot \vec{D}) \tag{7.67}$$

Al desplazamiento lo representamos en el espacio espectral, usando (7.66), por

$$\vec{D}(\vec{x}, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \epsilon(\omega)\hat{E}(\vec{x}, \omega)e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{7.68}$$

En el espacio físico las cantidades deberían ser reales por lo que tenenmos que sumar el complejo conjugado,

$$\vec{E} \cdot \partial_t \vec{D} = \frac{1}{2}(\vec{E}^* \cdot \partial_t \vec{D} + \vec{E} \cdot \partial_t \vec{D}^*) \tag{7.69}$$

El término del cambio temporal de la densidad de energía electromagnética viene dado por (7.65)

$$\vec{E} \cdot \partial_t \vec{D} = \frac{1}{2}\int\int [-i\omega\epsilon(\omega)]\hat{E}(\omega)\hat{E}^*(\omega')e^{-i(\omega-\omega')t}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\omega' + CC \tag{7.70}$$

Es decir

$$\vec{E} \cdot \partial_t \vec{D} = \frac{1}{2}\int\int [-i\omega\epsilon(\omega) + i\omega'\epsilon^*(\omega')]\hat{E}(\omega)\hat{E}^*(\omega')e^{-i(\omega-\omega')t}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\omega' \tag{7.71}$$

Teniendo en cuenta que los campos son reales, vale que $\epsilon(-\omega) = \epsilon^*(\omega)$ y $\epsilon^*(-\omega) = \epsilon(\omega)$, y realizando un desarrollo de Taylor de ϵ^*, se obtiene que

$$i\omega'\epsilon^*(\omega') = i\omega\epsilon^*(\omega) + i(\omega' - \omega)\partial_{\omega'}[\omega'\epsilon^*(\omega')]|_{\omega} \tag{7.72}$$

de lo cual se deduce que

$$-i\omega\epsilon(\omega) + i\omega'\epsilon^*(\omega') = -i\omega[\epsilon(\omega) - \epsilon^*(\omega)] + i(\omega - \omega')\partial_{\omega'}[\omega'\epsilon^*(\omega')]|_{\omega} \tag{7.73}$$

Reemplazando (7.73) en (7.71),

$$\vec{E} \cdot \partial_t \vec{D} = \frac{1}{2}\int\int \hat{E}^*(\omega')\hat{E}(\omega)[2\omega Im\epsilon(\omega) - i(\omega - \omega')\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}(\omega\epsilon^*)] \tag{7.74}$$

el primer término representa la pérdida de energía electromagnética por calor y el segundo término, representa la densidad de energía efectiva.

La ecuación resultante si pensamos en un paquete de ondas con frecuencia ω_0 (es decir la energía esta concentrada alrededor de una frecuencia característica),

$$\partial_t u_{efec} + \nabla \cdot \vec{S} = -\vec{J} \cdot \vec{E} - \omega_0 Im(\epsilon(\omega_0)\langle\vec{E} \cdot \vec{E}\rangle - \omega_0 Im(\mu\langle\vec{H} \cdot \vec{H}\rangle) \tag{7.75}$$

donde la densidad de energía efectiva es

$$u_{efec} = \frac{1}{2}Re\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}(\omega\epsilon)\right)\langle\vec{E} \cdot \vec{E}\rangle + \frac{1}{2}Re\left(\frac{\mathrm{d}\omega\mu(\omega_0)}{\mathrm{d}\omega}\right)\langle\vec{H} \cdot \vec{H}\rangle \tag{7.76}$$

7.5 Conservación del momento electromagnético

Para demostrar la conservación del momento electromagético comenzamos nuevamente de las ecuaciones de Maxwell. Multiplicando (7.9) producto vectorial por $\epsilon_0\vec{E}$ y (7.10) producto vectorial por $\frac{1}{\mu_0}\vec{B}$ obtenemos

$$\epsilon_0(\nabla\times\vec{E})\times\vec{E}+\epsilon_0\partial_t\vec{B}\times\vec{E}=0 \tag{7.77}$$

$$\frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\vec{B})\times\vec{B}+\frac{1}{\mu_0 c^2}\partial_t\vec{E}\times\vec{B}=\vec{J}\times\vec{B} \tag{7.78}$$

Sumando estas ecuaciones obtenemos

$$\epsilon_0(\nabla\times\vec{E})\times\vec{E}+\frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\vec{B})\times\vec{B}-\epsilon_0\partial_t(\vec{E}\times\vec{B})=\vec{J}\times\vec{B} \tag{7.79}$$

Sumando $\rho\vec{E}$ a ambos lados de la ecuación resulta

$$\epsilon_0\partial_t(\vec{E}\times\vec{B})+\rho\vec{E}+\vec{J}\times\vec{B}=\epsilon_0(\nabla\times\vec{E})\times\vec{E}+\frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\vec{B})\times\vec{B}+\epsilon_0\nabla\cdot\vec{E}\vec{E} \tag{7.80}$$

Definiendo por un lado al momento mecánico por unidad de volumen como

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{ME}}{\mathrm{d}t}=\rho\vec{E}+\vec{J}\times\vec{B} \tag{7.81}$$

y el momento electromagnético por unidad de volumen como

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{EM}}{\mathrm{d}t}=\partial_t\epsilon_0(\vec{E}\times\vec{B}) \tag{7.82}$$

Reemplazando estas definiciones en

$$\partial_t(\vec{p}_{EM}+\vec{p}_{ME})=\epsilon_0\left\{\left[\vec{E}(\nabla\cdot\vec{E})-\vec{E}\times\nabla\times\vec{E}\right]+c^2\left[(\nabla\times\vec{B})\times\vec{D}\right]\right\} \tag{7.83}$$

Ejercicio 7.3: Expresando en componentes el operador y reorganizado términos demostrar que

$$[\vec{E}\nabla\cdot\vec{E}-\vec{E}\times(\nabla\times\vec{E})]_\alpha=\sum_\beta\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(E_\alpha E_\beta-\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{E}\delta_{\alpha\beta}\right) \tag{7.84}$$

Definimos al tensor de stress electromagnético de segundo orden por

$$T_{\alpha\beta}=\epsilon_0[E_\alpha E_\beta+c^2B_\alpha B_\beta-\frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{E}+c^2\vec{B}\cdot\vec{B})\delta_{\alpha\beta}] \tag{7.85}$$

La razón de cambio del momento viene dada por

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{p}_{EM}+\vec{p}_{ME})_\alpha=\sum_\beta\partial_{x_\beta}T_{\alpha\beta} \tag{7.86}$$

donde el tensor de flujo de momento electromagnético $T_{\alpha\beta}$ lo expresamos como $\overleftrightarrow{T}$ de tal manera que la expresion diferencial queda como una divergencia del tensor:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{p}_{EM} + \vec{p}_{ME})_\alpha = \nabla \cdot \overleftrightarrow{T}. \tag{7.87}$$

Si integramos en un volumen fijo a (7.87) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{P}_{EM} + \vec{P}_{ME})_\alpha &= \sum_\beta \int \partial_{x_\beta} T_{\alpha\beta} \mathrm{d}V & (7.88) \\ &= \int_S \sum_\gamma T_{\alpha\gamma} u_\gamma \mathrm{d}s & (7.89) \end{aligned}$$

expresado en forma vectorial

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{P}_{EM} + \vec{P}_{ME}) = \int_S \overleftrightarrow{T} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \tag{7.90}$$

Entonces obtenemos una ecuación de conservación integral en la cual el flujo de momento electromagnético entrante o saliente de la región en consideración nos produce cambios en el momento del sistema. Entonces el flujo de momento electromagnético conlleva un stress y de allí la supuesta existencia del eter.

Al momento electromagnético lo llamamos

$$\vec{g} = \vec{p}_{EM} = \epsilon_0 \mu_0 \vec{E} \times \vec{H} \tag{7.91}$$

notar que el flujo de energía, vector de Poynting, $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ por lo que

$$\vec{g} = \frac{1}{c^2}\vec{S}. \tag{7.92}$$

7.5.1 Presión de radiación

Reinterpretando (7.90) vemos que

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{P}_{ME} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{P}_{EM} + \int_S \overleftrightarrow{T} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \tag{7.93}$$

Esta es la fuerza que le ejerce el campo electromagnético a los cuerpos.

Supongamos una onda electromagnetica que se propaga en el vacio, la onda en un tiempo δt cubrirá un volumen dado por $c\delta t A$ en una sección de área transversal A a la dirección de propagación, el momento de radiación por unidad de volumen es $\vec{g}$.

El momento de radiación adentro del volumen considerado es

$$\vec{P}_{EM} = |\vec{g}| A c \delta t \tag{7.94}$$

si esta onda es totalmente absorbida por una superficie, una vela absorbente, entonces la superficie sufrirá un impulso ejercido por el momento electromagnético que transportaba la onda, este es denominado presión de radiación y viene dado por

$$pres_{rad} = \frac{F}{A} = c|\vec{g}|. \tag{7.95}$$