Capítulo 2

Electrostática

2.1 Ley de Coulomb y principio de superposición

Si tenemos dos cargas q_1 y q_2, las cuales en principio asumimos puntuales o con volúmenes pequeños comparado a las distancias entre ellas, existirá una interacción eléctrica entre estas cargas que produce una fuerza de la forma

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1\,q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{21} \tag{2.1}$$

donde r_{12} es la distancia entre las dos cargas, y $\hat{r}_{21}$ es la dirección entre las cargas desde la carga q_2 hacia la carga q_1, $\vec{F}_{12}$ es la fuerza que siente la carga q_1. Esta es la famosa ley de Coulomb y explica la interacción eléctrica estática entre cargas, fue propuesta a partir de numerosas observaciones de fenómenos eléctricos y ha sido extensivamente corroborada. En particular la dependencia con la inversa del cuadrado a la distancia r^{-2}, siendo el exponente -2 una expresión muy precisa, es decir se ha corroborado el exponente -2 experimentalmente con numerosos decimales.

¿Que sucede si ahora introducimos una tercera carga q_3 en el sistema? ¿Cual es la fuerza que sentirá q_1? Si solo estan las cargas q_1 y q_2 tenemos la expresión (2.1). Si ahora solo tenemos en el sistema a las cargas q_1 y q_3 entonces tendremos una expresión similar a (2.1),

$$\vec{F}_{13} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_3}{r_{13}^2}\hat{r}_{31}. \tag{2.2}$$

¿Podemos suponer que la fuerza total que se le ejerce a q_1 es la suma de $\vec{F}_{12}$ y $\vec{F}_{13}$?. Es decir nos preguntamos si existen interacciones eléctricas entre las cargas q_2 y q_3 que puedan alterar la fuerza que se ejerce sobre q_1 cuando q_2 y q_3 actuan juntas sobre q_1?

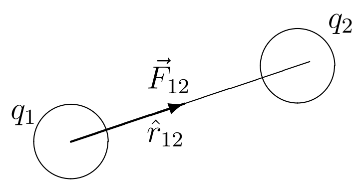

Figura 2.1: Fuerza eléctrica entre dos cargas fijas.

La respuesta es no hay efectos secundarios, ni interacciones, y se puede asumir que las cargas actuan independientemente. En efecto este es un principio muy general en el electromagnetismo, denominado *principio de superposición*, y ha sido evaluado y comprobado en numerosas situaciones experimentales. De aquí en mas asumimos la validez de este principio en el electromagnetismo y toda la teoría electromagnética se construye en base a este.

Expresado de otra manera, el principio de superposición nos dice que los efectos electromagnéticos o los denominados campos eléctricos y magnéticos van a ser lineales. Veamos entonces a que nos estamos refiriendo por *campos*.

2.2 Concepto de campo

Supongamos que queremos aislar los efectos que produce una distribución de cargas de la distribución de carga en sí, incluso podrían existir dos distribuciones de carga que produzcan el mismo efecto por lo que nuestro interés es olvidarnos de la distribución de cargas y concentrarnos solamente en los efectos que éstas producen.

Si ponemos una carga de prueba en una posición arbitraria dentro de un sistema que contiene una distribución de carga, la carga de prueba sentirá los efectos eléctricos de la distribución de carga de tal manera que la distribución de carga le realizará una fuerza a la carga de prueba dada por

$$\vec{F} = q\vec{E} \tag{2.3}$$

donde $\vec{E}(\vec{x})$ es el efecto de la distribución de carga en la posición $\vec{x}$ donde ubicamos a la carga q.

Las distribuciones de carga generadoras del campo eléctrico pueden estar compuestas por distribuciones continuas (carga por unidad de volumen), denotadas por $\rho(\vec{x})$ o también por cargas puntuales (distribución de carga localizada en un punto), denotadas por q_i. En principio las distribuciones continuas pueden parecer irreales ya que existe una unidad fundamental de carga que es indivisible, la carga del electrón, sin embargo esta es muy pequeña por lo que a todos los fines prácticos podemos asumir distribuciones de carga continuas en lugar de discretas.

Entonces podemos definir el campo eléctrico en el punto $\vec{x}$ por

$$\vec{E} = \lim_{q \to 0} \frac{\vec{F}}{q} \tag{2.4}$$

La carga de prueba debe ser lo suficientemente pequeña como para que no altere los efectos del campo eléctrico existente.

¿Por que es de tanta importancia el concepto de campo?

- Dos distribuciones de cargas distintas pueden producir exactamente los mismos efectos.
- Los campos electromagnéticos pueden existir en regiones donde no hay cargas. Los campos pueden incluso transportar momento y energía y pueden existir aun en el vacío.
- Todos los procesos electromagnéticos pueden ser tratados a través del campo eléctrico y magnético.

2.3 Ecuaciones de Maxwell

Vamos a establecer las ecuaciones que gobiernan los procesos electromagnéticos, denominadas ecuaciones de Maxwell, estas ecuaciones en principio las tomaremos como un conjunto de postulados, a pesar que por supuesto han sido derivadas a través numerosos esfuerzos observacionales y teóricos.

Sea una distribución de carga $\rho(\vec{x})$ y una densidad superficial de corriente $\vec{J}(\vec{x})$ que estan en el vacío, las ecuaciones que gobiernan los campos electromagnéticos son:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0 \tag{2.5}$$

$$-\mu_0\epsilon_0\partial_t\vec{E} + \nabla \times \vec{B} = \mu_0\vec{J} \tag{2.6}$$

$$\partial_t\vec{B} + \nabla \times \vec{E} = 0 \tag{2.7}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{2.8}$$

donde ϵ_0 es la permitividad en el vacío y μ_0 es la permitividad en el vacío. La velocidad de la luz en el vacío viene dada por $c = (\mu_0\epsilon_0)^{-1/2}$.

- $\rho(\vec{x})$ es la densidad de carga volumétrica es decir tiene unidades de carga por unidad de volumen. En general la denominaremos distribución de carga.
- $\vec{J}(\vec{x})$ es la densidad superficial de corriente, tiene unidades de carga por unidad de tiempo y superficie. Es decir, mide la cantidad de carga que atravieza una (unidad de) superficie dada por unidad de tiempo.

Las ecuaciones (2.5)-(2.8) son las ecuaciones de Maxwell que nos determinan los campos eléctricos y magnéticos y su evolución en el tiempo. Las incógnitas son las 3 componentes del campo eléctrico, $\vec{E}$, y las tres componentes del campo magnético, $\vec{B}$. Las ecuaciones de Maxwell son un conjunto de 8 ecuaciones, las cuales por supuesto no son todas linealmente independientes (dado que existen solo 6 incógnitas, si fueran linealmente independientes entonces el sistema no tendría solución), de las 8 ecuaciones solo 6 son linealmente independientes.

Se debe notar que los términos fuentes, términos no-homogéneos de las ecuaciones, es decir aquellos que son generadores de los campos son:

- La distribución de cargas ρ/ϵ_0
- La distribución de corrientes $\mu_0\vec{J}$

Estos términos son los datos, son prescripciones del problema y actuan como las fuentes de los campos. También el problema debe explicitar las condiciones de contorno, en el caso que se requiera la solución en un dominio acotado. Si el problema es en el espacio libre, en $\mathbb{R}^3$, se pide que la densidad de carga y la distribución de corriente sean localizadas, es decir que decaigan a 0 en el infinito (ver Teorema de Helmholtz en el capítulo 1).

Las ecuaciones de Maxwell son lineales en las variables incógnitas $\vec{E}$ y $\vec{B}$, esto significa que una superposición lineal de soluciones es también solución, que por supuesto esto esta ligado al principio de superposición que ya discutimos para cargas puntuales.

Los términos de las variaciones temporales de los campos, (2.6) y (2.7) son los que acoplan las ecuaciones, notar que las variaciones temporales del campo eléctrico producen campo magnético (2.6) y viceversa (2.7). Sin embargo notar que hay una asimetría entre la relación entre los cambios temporales del campo eléctrico y la distribución espacial del campo magnético (2.6), a la relación entre los cambios temporales del campo magnético y la distribución espacial del campo eléctrico.

No existen cargas magnéticas (monopolos), razón por la cual el término no-homogéneo en la ecuación del divergencia del campo magnético es nulo.

La conservación de la carga esta implícita en las ecuaciones de Maxwell, (2.5)-(2.8), en efecto si aplicamos el operador divergencia a (2.6),

$$-\epsilon_0\partial_t\nabla\cdot\vec{E} = \nabla\cdot\vec{J} \tag{2.9}$$

Si usamos (2.5) y reemplazamos en (2.9), se tiene

$$\partial_t\rho + \nabla\cdot\vec{J} = 0 \tag{2.10}$$

Esta es la expresión general de la conservación de la carga, si integramos en un volumen cerrado, lo que obtenemos es que

$$\partial_t Q + \oint_S \vec{J}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0 \tag{2.11}$$

donde $Q = \int_V \rho \mathrm{d}V$ y se ha usado el teorema de Gauss en el segundo término de (2.11). Esta expresión (2.11) nos dice que los cambios de la carga total que esta localizada en el volumen V se deben unicamente al flujo de cargas que atravieza la superficie S (contorno de V). Es decir, que si tenemos un flujo entrante de cargas positivas la carga total encerrada aumentará, mientras una salida de carga disminuirá la carga neta total localizada dentro del volumen. Esta es la única posibilidad de variación de la carga a través del transporte, las cargas no pueden ni aparecer ni desaparecer, solo transportarse de un lugar a otro.

Si tenemos una carga de prueba inmersa en un campo eléctrico y magnético, la fuerza que se ejerce sobre la carga viene dada por

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{2.12}$$

donde $\vec{v}$ es la velocidad de la carga y $\vec{B}$ es el campo magnético. Ésta expresión es conocida por *fuerza de Lorenz*.

La expresión de la fuerza de Lorenz es discutida (léase controversial) en el marco general del electromagnetismo con la relatividad especial y existen expresiones alternativas como la ley de Einstein-Laub que es una generalización de la de Lorenz. Para una discusión de este aspecto ver un trabajo reciente sobre el tema, Mansuripur (2012)[1]

2.4 Estática

Si la distribución de cargas y corrientes son independientes del tiempo, éstas producirán campos eléctricos y magnéticos que son independientes del tiempo es decir los términos de las ecuaciones $\partial_t \vec{E}$ y $\partial_t \vec{B}$ se anulan y por lo tanto las ecuaciones se reducen a:

cuatro ecuaciones para el campo eléctrico:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0 \tag{2.13}$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \tag{2.14}$$

y cuatro para el campo magnético

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \tag{2.15}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{2.16}$$

La conclusión mas importante que se puede deducir es que los campos eléctricos y magnéticos están desacoplados para el caso estático. Esta es la razón por la cual históricamente los fenómenos eléctricos se consideraban de una naturaleza independiente de los fenómenos magnéticos hasta que los experimentos de Faraday con corrientes que

[1]Mansuripur, 2012: Trouble with the Lorentz law of force: Incompatibility with special relativity and momentum conservation, *Physical Research Letters*, **108**, 193901.

variaban en el tiempo permitieron comprender que ambos fenómenos en el fondo estaban ligados intrinsicamente.

La primera parte de esta materia la dedicaremos a estudiar la electrostática es decir aquellos fenómenos que están gobernados por las ecuaciones (2.13) y (2.14).

El teorema de Helmholtz nos garantiza que si se especifica la divergencia de un campo vectorial y el rotor de ese campo es posible determinar el campo unívocamente si la divergencia del campo que se especifica (es decir la distribución de carga prescripta) decae como r^{-3}.

La resolución de problemas de electrostática se suele simplificar a través de la introducción de un potencial eléctrico esto es una función escalar Φ que esta definida por:

$$\vec{E} = -\nabla\Phi \tag{2.17}$$

donde entonces el campo por su propia definición verifica que

$$\nabla \times \vec{E} = \nabla \times \nabla\Phi = 0. \tag{2.18}$$

Esto es cualquier potencial eléctrico, dada la forma en que lo definimos satisface trivialmente la ecuación de rotor del campo igual a 0.

De esta manera la única ecuación que debería satisfacer el potencial es (2.13) reemplazando en esta ecuación la definición (2.17) se obtiene:

$$\nabla^2\Phi = -\rho/\epsilon_0 \tag{2.19}$$

Mientras las otras tres ecuaciones que debe cumplir el campo eléctrico, (2.14), se estan cumpliendo por haber tomado como campo eléctrico el gradiente de un potencial. Es decir que al trabajar con un potencial electrico hemos disminuido el problema de 4 ecuaciones que debia satisfacer el campo eléctrico a una sola (2.19) que debe satisfacer el potencial eléctrico. Esta es la ecuación conocida por ecuación de Poisson. Si la distribución de cargas es nula se reduce a la ecuación de Laplace

$$\nabla^2\Phi = 0 \tag{2.20}$$

en este caso para que la solución no sea la trivial deberían existir condiciones de borde que sean generadoras del campo eléctrico, las cuales discutiremos mas adelante.

Notar que la definición del potencial eléctrico nos permite una fuerte simplificación del problema electrostático, de hecho pasamos de tener 3 variables incógnitas (E_x, E_y, E_z) a una sola Φ y solo tenemos que resolver una ecuación para Φ. Esto se debe a que estas variables no son independientes por lo que con determinar una sola función escalar Φ ya es posible determinar las tres componentes del campo eléctrico. La restricción que nos permite pasar de tres variables a una sola variable incógnita es el hecho que el campo es irrotacional. Esta restricción son tres ecuaciones de las cuales solo dos son linealmente independientes.

2.5 Solución del problema electrostático. Caso sin fronteras

Queremos encontrar el campo eléctrico para un sistema compuesto por una distribución de cargas $\rho(\vec{x})$ arbitraria (pero que decae como r^{-3}) en el espacio abierto y no existen condiciones de contorno.

Todo lo que conocemos es que el campo eléctrico debería satisfacer

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0 \tag{2.21}$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \tag{2.22}$$

2.5.1 Carga puntual

Supongamos que tenemos una carga puntual q ubicada en el origen, proponemos como ansatz motivados por la ley de Coulomb que el campo eléctrico de la carga puntual es:

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}. \tag{2.23}$$

La distribución o densidad de carga de una carga puntual es:

$$\rho(\vec{x}) = q\delta^3(\vec{x}) \tag{2.24}$$

donde $\delta^3(\vec{x})$ es la función delta de Dirac en $\mathbb{R}^3$.

Tratemos ahora de demostrar que efectivamente (2.23) es la solución de (2.21) y (2.22). Si (2.23) es la solución entonces debe satisfacer la ecuación de la divergencia (2.21), reemplazando (2.23) y (2.24) en (2.21) se tiene que

$$\nabla \cdot \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}\right) = \frac{q}{\epsilon_0}\delta^3(\vec{x}) \tag{2.25}$$

por lo que simplificando (2.25) deducimos se debe demostrar que:

$$\nabla \cdot (\hat{x}/|\vec{x}|^2) = 4\pi\delta^3(\vec{x}). \tag{2.26}$$

Si (2.26) es válida entonces (2.23) satisface (2.21) de las ecuaciones estáticas.

En coordenadas esféricas la divergencia de un campo vectorial arbitrario $\vec{V} = V_r\hat{u}_r + V_\theta\hat{u}_\theta + V_\phi\hat{u}_\phi$ se expresa como:

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 V_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta V_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi V_\phi \tag{2.27}$$

Luego para $\vec{V} = \frac{\hat{r}}{r^2}$ y asumiendo $r > 0$ se tiene que:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 r^{-2}) = 0 \tag{2.28}$$

donde en coordenadas esféricas $\hat{x} = \hat{r}$ y $|\vec{x}| = r$.

Este resultado nos dice que fuera del origen la divergencia del campo vectorial es nula. Sin embargo, en el origen la función $\frac{\hat{r}}{r^2}$ no esta acotada (diverge). Si integramos alrededor del origen con una esfera de radio R y usamos el teorema de Gauss (el cual es válido para $r > 0$) se tiene:

$$\begin{aligned}\int_{V_R} \nabla \cdot \vec{V} \mathrm{d}V &= \int_{S_R} \frac{\hat{r}}{r^2} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \\ &= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\hat{r}}{r^2} \cdot \hat{r} r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi \\ &= 4\pi \qquad (2.29)\\ & \qquad (2.30)\end{aligned}$$

Luego como es válido para un volumen arbitrario hemos demostrado que:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} \right) = 4\pi \delta^3(\vec{x}) \tag{2.31}$$

Entonces interpretando este resultado a la luz del electromagnetismo, en particular de la ecuación (2.21), se tiene que una densidad de carga dada por una carga puntual en el origen: $\rho = 4\pi\epsilon_0 \delta^3(\vec{x})$ genera un campo eléctrico

$$\vec{E} = \frac{\vec{x}}{r^3} = \frac{\hat{x}}{r^2}. \tag{2.32}$$

Las líneas del campo son entrantes/salientes a la carga. Si $q > 0$ las líneas son salientes. En el presente contexto vemos que esto tiene directa relación al operador divergencia del campo el cual es positivo cuando $\rho > 0$.

Entonces hemos encontrado la forma que tiene el campo eléctrico generado por una carga puntual ubicada en el origen de coordenadas y demostrado que esta satisface la ecuación (2.21). Nos falta demostrar que la expresión del campo eléctrico (2.23) satisface también (2.22).

Ejercicio 2.1: Demuestre que $\nabla \left(\frac{1}{|\vec{x}|} \right) = -\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$.

Dem. $\hat{u}_i \partial_i (x_j^2)^{-1/2} = -\frac{\hat{u}_i x_i}{(x_j)^{3/2}}$

Luego usando el Ejercicio nabla1/x el campo lo podemos expresar por

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left(\frac{1}{|\vec{x}|} \right) \tag{2.33}$$

Teniendo en cuenta que para cualquier función escalar ψ se cumple que $\nabla \times \nabla\psi = 0$ entonces

$$\nabla \times \nabla \left(\frac{1}{|\vec{x}|} \right) = 0 \tag{2.34}$$

Se ha demostrado de esta manera que la solución propuesta para el campo tiene rotor nulo y por lo tanto también satisface la otra ecuación de la electrostática, (2.22). Por lo que hemos demostrado que la solución propuesta satisface las ecuaciones de la electrostática, además como sabemos que el problema satisface el teorema de Helmholtz, entonces existe una única solución.

Carga puntual en una posición arbitraria. Continuemos por el próximo caso mas simple posible; una carga puntual ubicada en $\vec{x}_0$, la distribución de carga correspondiente a la carga puntual se puede escribir en la forma:

$$\rho(\vec{x}) = q\delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0) \tag{2.35}$$

El problema podríamos resolverlo fácilmente ubicando el origen en $\vec{x}_0$ y entonces valdria lo que ya hemos demostrado, sin embargo realicemos tood el procedimiento de vuelta. Es decir, las ecuaciones resultantes son:

$$\nabla \cdot \vec{E} = q/\epsilon_0 \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0), \qquad \nabla \times \vec{E} = 0 \tag{2.36}$$

Ya hemos demostrado en un ejercicio anterior que $\nabla \cdot (\hat{x}/|\vec{x}|^2) = \delta^3(\vec{x})$ es decir ya conocemos que la divergencia del campo $\hat{x}/|\vec{x}|^2$ nos da la función delta de Dirac. Dejamos como otro ejercicio su generalización a un caso relativo a $\vec{x}_0$.

Ejercicio 2.2: Extender el resultado al caso relativo a un vector $\vec{x}_0$: $\nabla \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)/|\vec{x} - \vec{x}_0|^3) = 4\pi\delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0)$ donde el ∇ representa la derivada con respecto a $\vec{x}$.

Teniendo en cuenta el resultado del ejercicio, y multiplicando al campo $(\vec{x}-\vec{x}_0)/|\vec{x}-\vec{x}_0|^3$ por q/ϵ_0 podemos proponer como solución del campo eléctrico a:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}(\hat{x} - \hat{x}_0)/|\vec{x} - \vec{x}_0|^2 \tag{2.37}$$

por construcción entonces esta ecuación cumple con la primera ecuación de la electrostática (2.21), ¿cumplirá con las otras tres, (2.22), es decir esta este campo libre de vórtices?

Ejercicio 2.3: Demuestre que $\nabla \left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_0|}\right) = -\frac{\vec{x}-\vec{x}_0}{|\vec{x}-\vec{x}_0|^3}$.

Dado el ejercicio 2.3 aplicamos el rotor:

$$\nabla \times \vec{E} = q/(4\pi\epsilon_0)\nabla \times \nabla \left[\frac{\hat{x} - \hat{x}_0}{|\vec{x} - \vec{x}_0|}\right] \tag{2.38}$$

Dado que el rotor de un gradiente es siempre 0 (ejercicios) se tiene que el campo eléctrico encontrado satisface:

$$\nabla \times E = 0 \tag{2.39}$$

El ejercicio 2.3 nos permite también determinar el potencial eléctrico de una carga puntual, definamos al potencial eléctrico por $\vec{E} = -\nabla\Phi$, entonces

$$-\nabla\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}q\frac{\hat{x}}{|\vec{x}|^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}q\nabla\left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|}\right) \tag{2.40}$$

Entonces a menos de una constante aditiva el potencial eléctrico de una carga puntual viene dado por

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{|\vec{x}-\vec{x}_0|}. \tag{2.41}$$

Si tenemos una carga de prueba q_p inmersa en el campo generado por la carga generadora del campo q (2.23), se tiene que la fuerza que se ejercen entre sí, de (2.3) y (2.23) es dada por

$$\vec{F} = q_p\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q\, q_p \frac{\hat{x}}{|\vec{x}|^2} \tag{2.42}$$

esta es la conocida ley de Coulomb que nos da la fuerza que se ejercen dos cargas puntuales. La dirección $\hat{x}$ debería ser interpretada como la dirección que liga a las cargas, desde la carga q a la carga q_p (interpretamos que $\vec{F}$ es la fuerza que se ejerce sobre q_p), mientras $|\vec{x}|$ es la distancia entre las cargas. Ver sección 2.1 para mas detalles sobre la ley de Coulomb.

Hemos demostrado entonces que la ley de Coulomb esta de acuerdo con las ecuaciones de electrostática. También es interesante desarrollar el camino inverso, partiendo de la ley de Coulomb llegar a las ecuaciones de electrostática. Se deja como ejercicio para el lector motivado.

Demostración utilizando el teorema de Gauss

Si integramos en un volumen arbitrario a la ec. (2.21) resulta

$$\int_V \nabla\cdot\vec{E}\mathrm{d}V = \epsilon_0^{-1}\int_V \rho\mathrm{d}V. \tag{2.43}$$

En el lado derecho de esta ecuación (2.43) tenemos la integral en volumen de la densidad volumétrica de carga, por lo que esta es la carga total encerrada en el volumen V la cual denotaremos por Q.

Aplicando ahora el teorema de la divergencia en el lado izquierdo de la ecuación (2.43) resulta que

$$\int_V \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = \epsilon_0^{-1}Q \tag{2.44}$$

este es el resultado conocido en electromagnetismo como el teorema de Gauss. Una lectura física de este teorema nos dice que el flujo de campo eléctrico en una superficie cerrada esta *absolutamente* determinado por la carga encerrada en dicha superficie. El campo en V es totalmente independiente de las cargas externas a la superficie.

Asumamos que tenemos como volumen una superficie esférica S de radio R alrededor de la carga con centro en la carga luego:

$$\begin{aligned}\int \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{s} &= |\vec{E}|R^2\int \mathrm{d}\Omega \\ &= |\vec{E}|4\pi R^2 \end{aligned} \tag{2.45}$$

Entonces, el módulo del campo eléctrico de una carga puntual q viene dado por

$$|\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q/R^2. \tag{2.46}$$

Dadas las características del teorema de Gauss, las líneas de superficie del campo eléctrico deben ser entrantes o salientes a una carga puntual de lo contrario el campo podría depender de las cargas externas. Entonces la dirección del campo es $\hat{r}$ (versor de coordenadas esféricas, saliente del origen).

Luego el campo eléctrico viene dado por

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q/R^2 \hat{r}. \tag{2.47}$$

2.5.2 Campo eléctrico producido por una distribución de carga arbitraria. Solución general sin fronteras

Para generalizar el resultado obtenido en (2.37) utilizamos el principio de *superposición lineal*, es decir si existen varias cargas el campo eléctrico solución será la suma de los campos producidos por cada una de las cargas por separado. Supongamos que el lugar de observación es $\vec{x}$ y la ubicación de las N cargas q_i es $\vec{x}_i$ entonces el campo eléctrico total es:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \frac{\vec{x} - \vec{x}_i}{|\vec{x} - \vec{x}_i|^3} \tag{2.48}$$

En el caso que tengamos una distribución de cargas continuas la suma pasa a ser una integral en volumen y $q_i \to \rho \mathrm{d}V$,

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{x}') \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \mathrm{d}V' \tag{2.49}$$

donde $\vec{x}'$ es la posición de la carga infinitesimal $\rho(\vec{x}')\mathrm{d}V'$, la integración se realiza en $\vec{x}'$. En general a la posicion $\vec{x}'$, la llamaremos punto fuente, ya que es donde se ubican las cargas que son generadoras del campo eléctrico. Mientras $\vec{x}$ es el lugar donde se mide el campo eléctrico y es un vector fijo a los fines de la integración. A $\vec{x}$ en este contexto lo llamaremos el punto observación.

La ecuación (2.49) es *la solución general del problema electrostático para cualquier distribución de cargas sin condiciones de contorno.* Dada la distribución de cargas $\rho(\vec{x})$ se puede obtener el $\vec{E}$ a través de (2.49) que por construcción satisface el sistema de ecuaciones diferenciales de la electrostática (2.21) y (2.22).

Si se quiere determinar el potencial eléctrico de una distribución de cargas arbitraria nuevamente utilizamos el resultado del ejercicio 2.3, $\nabla\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) = -\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}$, para expresar el campo eléctrico en la forma

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \int_V \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \mathrm{d}V' \tag{2.50}$$

donde se ha usado que el operador ∇ es la derivada en $\vec{x}$, y por lo tanto independiente de la integral que se realiza en la variable $\vec{x}'$.

Luego dada la definición del potencial $\vec{E} = -\nabla\Phi$ se determina que

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\mathrm{d}V' \tag{2.51}$$

este potencial queda definido a menos de una constante, sin embargo dado que estamos en un problema sin CCs se suele tomar como potencial en el infinito $\Phi = 0$ lo que determina esta constante. De todas maneras nótese que lo único físico aquí es el campo eléctrico $\vec{E}$ por lo que el potencial es solo una metodología de resolución por el momento y aun no tiene significado físico.

Si quisiéramos demostrar que (2.51) satisface la ecuación de Poisson. Apliquemos a esta ecuación el operador laplaciano:

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{x}')\nabla^2\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\mathrm{d}V' \tag{2.52}$$

Como ya hemos visto $\nabla^2\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) = -4\pi\delta(\vec{x}-\vec{x}')$

Recordando que $\int_V f(\vec{x}')\delta(\vec{x}-\vec{x}')\mathrm{d}V' = f(\vec{x})$ resulta

$$\nabla^2\Phi = -\frac{4\pi}{4\pi\epsilon_0}\rho(\vec{x}) \tag{2.53}$$

Entonces reobtenemos la ecuación de Poisson

$$\nabla^2\Phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{x}) \tag{2.54}$$

2.5.3 Unicidad de la solución caso sin fronteras: Teorema de Helmholtz

En la unidad 1, hemos visto que vale la relación

$$\nabla^2\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) = -4\pi\delta(\vec{x}-\vec{x}') \tag{2.55}$$

si comparamos con la ecuación de Poisson (2.54), se determina que para una carga puntual $q = 4\pi\epsilon_0$ ubicada en $\vec{x}'$, o equivalentemente una distribución de carga dada por $\rho(\vec{x}) = 4\pi\delta(\vec{x}-\vec{x}')$, la solución, potencial eléctrico, es:

$$\Phi_p = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}. \tag{2.56}$$

En lugar de usar el principio de superposición directamente vamos a utilizar la segunda identidad de Green, (**??**), tomando como funciones $\phi = \Phi$ el potencial eléctrico general y $\psi = \Phi_p = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$ el potencial eléctrico de una carga puntual $q = 4\pi\epsilon_0$, tenemos

$$\int_V \left[\Phi\nabla^2\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) - \frac{\nabla^2\Phi}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right]\mathrm{d}V' = \oint_S \left[\Phi\partial_n\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) - \frac{\partial_n\Phi}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right]\mathrm{d}s'. \tag{2.57}$$

El truco mas importante en esta expresón es que podemos sacar al potencial $\Phi(\vec{x})$ afuera de la integral (con sus dependencias en $\vec{x}$) considerando que $\nabla^2\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) = -4\pi\delta(\vec{x}-\vec{x}')$

$$\int_V \left[\Phi\nabla^2\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)\right]\mathrm{d}\vec{x}' = -4\pi\int_V \Phi(\vec{x}')\delta(\vec{x}-\vec{x}')\mathrm{d}\vec{x}' \tag{2.58}$$

$$= -4\pi\Phi(\vec{x}) \tag{2.59}$$

Además si consideramos que $\nabla^2\Phi = -\rho/\epsilon_0$ y despejando en (2.57) se obtiene

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\mathrm{d}V' - \frac{1}{4\pi}\oint_S \left[\Phi(\vec{x}')\partial_n\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) - \frac{\partial_n\Phi}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right]\mathrm{d}s'. \tag{2.60}$$

Si $\Phi \to r^{-1}$ cuando $r \to \infty$, entonces las integrales de superficie se anulan para un problema sin condiciones de frontera. El potencial eléctrico resultante para una distribución de carga arbitraria ρ es

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\mathrm{d}V'. \tag{2.61}$$

2.6 Solución general del problema electrostático. Caso con condiciones de contorno

Hasta el momento, entonces, hemos encontrado la solución general para el problema sin condiciones de contorno en la vida real los problemas suelen estar en volúmenes finitos con especificación de condiciones de contorno en dicho volumen. Por ejemplo cuando se trabaja dentro de una caja de Faraday donde las condiciones de contorno quedan especificadas a través de un potencial constante (o cero por convención) en la caja.

Para trabajar con condiciones de contorno necesitamos pensar en dos aspectos:

1. ¿Qué condiciones de contorno se deben exigir tal que la solución del problema sea única? Si uno especifica menos condiciones de contorno de las requeridas las soluciones serían infinitas si se sobre-especifican puede no haber ninguna solución.

2. Desarrollar un método de resolución para problemas que contengan los efectos de las condiciones de contorno.

2.6.1 Unicidad de la solución

Por el momento proponemos el tipo de condiciones de contorno que resultan razonables y luego demostraremos que efectivamente éstas son las condiciones de contorno que imponen una solución única al problema electrostático.

Si estamos resolviendo un problema en Φ que satisface la ecuación de Poisson, (2.19), lo que proponemos es:

- Condición de Dirichlet: conocemos al potencial Φ en la superficie cerrada que encierra el dominio.

- Condición de Neumann: Se especifica la derivada normal del potencial eléctrico en la superficie, este es el campo eléctrico en la superficie. Esto podría ser interpretado como dar una densidad de carga superficial tal que genere la derivada normal del potencial eléctrico.

Demostremos la unicidad del problema con condiciones de Dirichlet reduciendo el argumento contrario al absurdo, es decir propongamos que existen dos soluciones para terminar demostrando que la única posibilidad es que éstas sean exactamente iguales.

Sean Φ_1 y Φ_2 dos soluciones a la ecuación de Poisson, (2.19), con condiciones de contorno de Dirichlet, e.g. $\Phi_1 = V_1(\vec{x})$ en S. Consecuentemente definimos una función que es la diferencia de las dos soluciones $\Psi = \Phi_2 - \Phi_1$ luego la ecuación diferencial que satisface Ψ en el interior de V es:

$$\nabla^2 \Psi = 0 \tag{2.62}$$

cuya condición de contorno en S, debe ser $\Psi = 0$. Desde luego estamos ante un problema donde no existen fuentes en el interior y por otro lado la condición de contorno es la trivial, luego se trata de demostrar que en este caso la función Ψ debe ser idénticamente nula en todo el interior y por lo tanto no pueden existir dos soluciones distintas.

De la primera identidad de Green eligiendo ambas variables, ψ y ϕ como Ψ se tiene

$$\int_V (\Psi \nabla^2 \Psi + \nabla \Psi \cdot \nabla \Psi) \mathrm{d}V = \oint_S \Psi \partial_n \Psi \mathrm{d}s \tag{2.63}$$

dadas las condiciones de contorno de Dirichlet $\Psi = 0$ en S. Por otro lado también sabemos que $\nabla^2 \Psi = 0$ luego resulta que

$$\int_V |\nabla \Psi|^2 \mathrm{d}V = 0 \tag{2.64}$$

pero entonces el único Ψ que puede satisfacer esta integral es que $\nabla \Psi = 0$ luego se tiene que Ψ es una constante adentro de V pero dado que las condiciones de contorno son que $\Psi = 0$ esa constante tiene que ser el 0. Finalmente hemos determinado que:

$$\Phi_1 = \Phi_2. \tag{2.65}$$

La solución del problema con condiciones de Dirichlet es por lo tanto única.

Este resultado nos indica que si hubiéramos pedido condiciones de Cauchy, es decir, exigiendo valores de Φ y $\partial_n \Phi$ arbitrarios en S no existe solución. Si tenemos un dado Φ y elegimos un valor arbitrario de $\partial_n \Phi$ que no corresponde al Φ especificado entonces no existirá una solución para tal problema (ya que con solo elegir una de las dos condiciones el problema ya tiene solución única).

2.6.2 Solución general del problema. Función de Green

El problema que queremos resolver es encontrar el potencial eléctrico Φ que satisface la ecuación de Poisson,

$$\nabla^2\Phi = -\rho(\vec{x})/\epsilon_0 \tag{2.66}$$

sujeto a condiciones de Dirichlet o Neumann en el contorno del dominio.

En el caso de resolución del problema sin condiciones de contorno, léase con condiciones de contorno en el infinito, el método que utilizamos para encontrar la solución fue primero encontrar la solución del problema de una carga puntual. Luego para el problema de una distribución de cargas, utilizamos una superposición lineal, es decir la solución del problema consistió en sumar las soluciones de cada una de las carguitas puntuales que componen la distribución de carga y de esta forma encontramos la solución general del problema sin condiciones de contorno para una distribución de cargas arbitraria. ¿Podemos extender este método de resolución al caso con condiciones de contorno?

Para esto deberíamos resolver el problema de una carga puntual q ubicada en una posición arbitraria $\vec{x}_0$, es decir $\rho(\vec{x}) = q\delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0)$,

$$\nabla^2\Phi_p = -q\delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0)/\epsilon_0 \tag{2.67}$$

dado que luego vamos a usar el principio de superposición, nos conviene tomar como condición de contorno de potencial 0, es decir $\Phi_p = 0$ en la superficie S.

Por comparación con el caso sin condiciones de contorno, Sección (2.5.3), podemos ver que la carga que debería tomarse es de $q = 4\pi\epsilon_0$.

Si ahora tenemos una distribución de carga arbitraria y suponemos que conocemos la solución para el problema de una carga puntual, lo que hacemos es utilizar la segunda identidad de Green, con Φ y Φ_p, a $\vec{x}_0$ lo pensamos como una posición arbitraria $\vec{x}'$ y la integración la realizamos sobre esta variable,

$$\int (\Phi\nabla'^2\Phi_p - \Phi_p\nabla'^2\Phi)\mathrm{d}V' = \oint (\Phi\partial_{n'}\Phi_p - \partial_{n'}\Phi\Phi_p)\mathrm{d}s' \tag{2.68}$$

usando (2.67), $\nabla'^2\Phi = -\rho/\epsilon_0$, y que $\Phi = 0$ en S resulta

$$\int q\Phi(\vec{x}')\delta^3(\vec{x} - \vec{x}')\mathrm{d}V' = \int \Phi_p\rho(\vec{x}')\mathrm{d}V' - \epsilon_0 \oint (\Phi\partial_n\Phi_p)\mathrm{d}s' \tag{2.69}$$

de aqui asumiendo $q = 4\pi\epsilon_0$ resulta

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \rho(\vec{x}')\Phi_p(\vec{x},\vec{x}')\mathrm{d}V' - \frac{1}{4\pi}\oint \Phi(\vec{x}')\partial_{n'}\Phi_p(\vec{x},\vec{x}')\mathrm{d}s' \tag{2.70}$$

A la solución del problema de la carga puntual con una carga de $q = 4\pi\epsilon_0$ con condiciones de contorno triviales en S la llamamos función de Green de Dirichlet, $G_D(\vec{x},\vec{x}')$ la cual entonces satisface el problema

$$\nabla^2 G_D = -4\pi\delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \tag{2.71}$$

con $G_D = 0$ en S.

La solución general del problema electrostático para una distribución de cargas arbitraria $\rho(\vec{x})$ y condiciones de contorno también arbitrarias Φ en S puede ser escrita como

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\left\{\int_V \frac{\rho(\vec{x}')}{\epsilon_0} G_D(\vec{x}-\vec{x}')\mathrm{d}V' - \int_S \left[\Phi\, \partial_n' G_D(\vec{x}-\vec{x}')\right] \mathrm{d}s'\right\} \tag{2.72}$$

Interpretación de la función de Green La expresión de la solución general esta sujeta a determinar la función de Green la cual es la solución de un problema de Poisson para una carga puntual de carga $q = 4\pi\epsilon_0$ con condiciones de contorno triviales $G_D(\vec{x},\vec{x}') = 0$ sin embargo éstas son para $\vec{x}'$ en S. Es decir hemos convertido el problema de densidad de carga con condiciones de contorno de Dirichlet en S en un problema de una carga puntual con condiciones de contorno de Dirichlet triviales. (Aun cuando el problema es mas simple que el original no siempre este puede ser resuelto, en particular si las condiciones de contorno involucran geometrías complicadas).

Para condiciones de contorno de Neumann se debe notar que no podemos tomar $\partial_n' G_N(\vec{x},\vec{x}') = 0$ ya que si integramos en un volumen la ecuación diferencial para la función de Green (2.71) resulta

$$\int_V \nabla^2 G(\vec{x},\vec{x}')\mathrm{d}V' = -4\pi \int_V \delta(\vec{x}-\vec{x}')\mathrm{d}V' \tag{2.73}$$

Usando el teorema de la divergencia resulta que

$$\oint_S \partial_n' G \mathrm{d}s' = -4\pi \tag{2.74}$$

es decir no podríamos tomar la condición trivial, pero si podemos tomar que la derivada normal sea una constante en la superficie, $\partial_n' G_N = -\frac{4\pi}{S}$ para $\vec{x}'$ en S. La solución para condiciones de contorno de Neumann resultante es:

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{x}')G_N(\vec{x},\vec{x}')\mathrm{d}V' + \frac{1}{4\pi}\oint_S \partial_n' \Phi G_N \mathrm{d}s' + S^{-1}\oint \Phi(\vec{x}')\mathrm{d}s' \tag{2.75}$$

donde el último término es una constante.

2.6.3 Conductores

Se define por conductor a un material en el cual las cargas se pueden mover libremente en la superficie y el interior.

Algunas propiedades del conductor que pueden ser derivadas a partir de la definición son:

- La carga en exceso del conductor se encuentra en la superficie. Si estuvieran en el interior cargas del mismo signo se van a repeler, la superficie que detiene esta repulsión es la superficie externa del conductor donde las cargas se van a distribuir de tal manera que se equilibren las fuerzas (de lo contrario habria movimiento).

- El campo eléctrico es nulo en el interior. Utilice el teorema de Gauss para demostrar esta propiedad.
- La superficie del conductor es una superficie equipotencial.
- El campo eléctrico en la superficie del conductor es $E_n = \sigma/(2\epsilon_0)$.

2.7 Energía potencial electrostática

Veremos dos formas para encontrar la energía, primero partiremos de las ecuaciones de Maxwell dependientes del tiempo y derivaremos la ecuación de conservación de la energía general, luego derivaremos el caso electrostático a partir del método constructivo, cuanto trabajo debemos invertir para armar una dada distribución de carga.

En general la conservación de la energía debe ser derivada de las ecuaciones que gobiernan el proceso físico. Es decir que trabajando con las ecuaciones de Maxwell debemos ser capaces de encontrar la forma de la energía.

Usando las ecuaciones de evolución de los campos:

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2}\partial_t \vec{E} = \mu_0 \vec{J} \tag{2.76}$$

$$\nabla \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0 \tag{2.77}$$

Como queremos tener la evolución de la magnitud de los campos al cuadrado multiplicamos via producto interior a (2.76) por $\vec{E}/\mu_0$

$$-\mu_0^{-1}\vec{E}\cdot\nabla\times\vec{B} + \epsilon_0\frac{1}{2}\partial_t|\vec{E}|^2 = -\vec{E}\cdot\vec{J} \tag{2.78}$$

y a (2.77) por $\vec{B}/\mu_0$

$$\mu_0^{-1}\vec{B}\cdot\nabla\times\vec{E} + \mu_0^{-1}\frac{1}{2}\partial_t|\vec{B}|^2 = 0 \tag{2.79}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos

$$\frac{1}{2}\left(\epsilon_0\partial_t|\vec{E}|^2 + \frac{1}{\mu_0}\partial_t|\vec{B}|^2\right) + \frac{1}{\mu_0}(-\vec{E}\cdot\nabla\times\vec{B} + \vec{B}\cdot\nabla\times\vec{E}) = -\vec{E}\cdot\vec{J} \tag{2.80}$$

Del cual resulta que

$$\partial_t\left[\frac{1}{2}\left(\epsilon_0|\vec{E}|^2 + \frac{1}{\mu_0}|\vec{B}|^2\right)\right] + \frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{B}) = -\vec{E}\cdot\vec{J} \tag{2.81}$$

Esta es la forma de una ecuación de conservación, por un lado tenemos el término del cambio temporal de la densidad de energía, luego esta el término del flujo de energía, cuanta energía ingresa o se va del punto en consideración y finalmente tenemos las fuentes.

Denotamos entonces a:

- densidad de energía electromagnética: $w = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0|\vec{E}|^2 + \frac{1}{\mu_0}|\vec{B}|^2\right)$,
- flujo de energía: $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B}$, vector de Poynting.
- $-\vec{E} \cdot \vec{J}$ fuente de energía electromagnética.

En el caso de campos electrostáticos la energía es constante:

$$\partial_t w = \partial_t \left[\frac{1}{2}\left(\epsilon_0|\vec{E}|^2 + \frac{1}{\mu_0}|\vec{B}|^2\right)\right] = 0 \tag{2.82}$$

La densidad de energía electrostática viene dada por

$$w = \frac{1}{2}\epsilon_0|\vec{E}|^2 \tag{2.83}$$

la cual es constante temporalmente. La energía electrostática de un sistema será dada por

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}\int |\vec{E}|^2 \mathrm{d}V \tag{2.84}$$

2.7.1 Trabajo requerido para mover una carga en un campo eléctrico

En electrostática el campo eléctrico es conservativo (como se demuestra que es conservativo? recordar la definición), por lo que la energía electrostática de un sistema debería ser igual al trabajo requerido para armar el sistema. Calculemos entonces el trabajo necesario para transportar una carga de prueba en un campo eléctrico externo desde un punto A hasta B.

Por definición el trabajo viene dado por

$$W = -\int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \tag{2.85}$$

donde $\vec{F}$ es la fuerza que debemos ejercer en un camino entre A y B (¿porqué no es relevante la trayectoria?) . El signo es debido a que estamos considerando el trabajo hecho sobre la carga en contra de la acción del campo eléctrico. Si tenemos una carga de prueba q en un campo eléctrico $\vec{E}$ *externo*, la fuerza es $\vec{F} = q\vec{E} = -q\nabla\Phi$, por lo tanto se tiene

$$W = -q\int_A^B \nabla\Phi \cdot \mathrm{d}\vec{l} = q\int_A^B \mathrm{d}\Phi = q(\Phi_B - \Phi_A). \tag{2.86}$$

Notar que el trabajo realizado solo depende de los puntos finales pero no del camino realizado, una propiedad característica de las fuerzas conservativas. La independencia del camino se debe a que si hacemos un camino cerrado tenemos que

$$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0 \tag{2.87}$$

entonces la independencia del camino se debe a que el campo eléctrico es irrotacional, $\nabla \times \vec{E} = 0$.

Si traemos a una carga desde el infinito donde asumimos que el potencial eléctrico es 0 hasta el punto $\vec{x}$, el trabajo realizado se puede expresar por

$$W = q\Phi(\vec{x}). \tag{2.88}$$

La energía potencial de la carga de prueba en el campo es entonces dada por (2.88).

2.7.2 Energía potencial de N cargas en el vacío

Si queremos determinar cual es la energía potencial de un sistema de N cargas q_i ubicadas en $\vec{x}_i$, lo que haremos es comenzar a armar al sistema trayendo las cargas desde el infinito y calculando el trabajo que necesitamos realizar para colocarla en su posición final. La primera carga no requiere de trabajo ya que no existe campo eléctrico. Al traer la segunda carga tenemos el campo que produce la primera por lo que existirá una fuerza y el trabajo requerido es dado por (2.88):

$$W_2 = q_2\Phi_1(\vec{x}_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} \tag{2.89}$$

donde hemos asumido que las cargas están fijas y no existe interacción al traer las cargas. Cuando traigamos la carga q_3 el trabajo que tenemos que realizar es

$$W_3 = q_3\Phi_1(\vec{x}_3) + q_3\Phi_2(\vec{x}_3) \tag{2.90}$$

Entonces generalizando el trabajo que tenemos que realizar para traer a la carga q_i es:

$$W_i = q_i\Sigma_{j=1}^{i-1}\Phi_j(\vec{x}_i) \tag{2.91}$$

donde $\Sigma_{j=1}^{i-1}\Phi_j(\vec{x}_i)$ es el potencial eléctrico que ya estan colocadas en al configuración final.

El potencial generado por las $i-1$ cargas en $\vec{x}_i$ viene dado por

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|}. \tag{2.92}$$

Por lo que el trabajo para traer a la carga q_i es

$$W_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|}. \tag{2.93}$$

Sumando entonces para las N cargas

$$W = \sum_{i=2}^{N}\frac{q_i}{4\pi\epsilon_0}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|}. \tag{2.94}$$

Dado que las contribuciones son simétricas podríamos sumar directamente a todas excepto las mismas cargas y luego se multiplica por un medio,

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i=1, i\neq j}^{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{q_i q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|}. \tag{2.95}$$

Si tenemos una distribución de cargas continua, usamos (2.95) con $q_i \to \rho(\vec{x})\mathrm{d}V$ y las sumas son reemplazadas por integrales quedando,

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int\!\!\int \frac{\rho(\vec{x})\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \mathrm{d}V \mathrm{d}V'. \tag{2.96}$$

La integral en V' puede ser interpretada como el potencial generado por $\rho(\vec{x}')$,

$$W = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{x})\Phi(\vec{x})\, \mathrm{d}V. \tag{2.97}$$

Si queremos expresar en función del campo eléctrico a la energía potencial usamos la ecuación de Poisson para eliminar la densidad de carga de (2.97),

$$W = -\frac{\epsilon_0}{2} \int \nabla^2\Phi(\vec{x})\Phi(\vec{x})\, \mathrm{d}V. \tag{2.98}$$

Para obtener las dependencias con el campo eléctrico, se debe notar que (2.98) tiene una derivada segunda y una funcion escalar y queremos tener una expresión en derivadas primeras. Entonces, lo que debemos usar es el equivalente a la integración por partes pero en varias dimensiones, la cual viene dada por:

$$\int \nabla \cdot (\Phi\nabla\Phi)\mathrm{d}V = \int \Phi\nabla^2\Phi\mathrm{d}V + \int \nabla\Phi \cdot \nabla\Phi\mathrm{d}V \tag{2.99}$$

de aquí se deduce usando teorema de Gauss que

$$\int \Phi\nabla^2\Phi\mathrm{d}V = \int \Phi\nabla\Phi \cdot \mathrm{d}\vec{s} - \int |\nabla\Phi|^2\mathrm{d}V, \tag{2.100}$$

es decir que lo que en una dimensión corresponde a evaluación en los extremos aquí corresponde a una integral de superficie. Esta integral de superficie es igual a 0 para $r \to \infty$, dado que en el límite $\Phi \to r^{-1}$, $|\nabla\Phi| \to r^{-2}$ y el $|\mathrm{d}\vec{s}| \to r^{-2}$. La energía electrostática (2.96) puede ser entonces expresada como

$$W = -\frac{\epsilon_0}{2} \left(\nabla\Phi\, \Phi|_V - \int_V |\nabla\Phi|^2\mathrm{d}V \right). \tag{2.101}$$

Como sabemos que Φ decae como r^{-1} y es 0 en el infinito, se tiene que $\nabla\Phi\, \Phi|_V = 0$, luego

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V |\nabla\Phi|^2\mathrm{d}V = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V |\vec{E}|^2\mathrm{d}V. \tag{2.102}$$

Esta es la expresión de energía es equivalente a la que encontramos para el caso electrostático en el desarrollo general para campos variables en el tiempo.

Ejercicio 2.4: Si tenemos una distribución de carga superficial σ en un conductor plano cual es el campo eléctrico sobre cada lado de la superficie. Determine la densidad de energía potencial electrostática del sistema. Compare con la energía de una distribución superficial de carga σ.

Utilicemos el teorema de Gauss para determinar como es el campo en las cercanías de la superficie cargada, pongamos un cilindrito bien pegado a la superficie, dado que solo contribuyen las dos superficies circulares (caras) del cilindro, una dentro del conductor y la otra pegada por fuera de este, se tiene:

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \hat{n} \int \mathrm{d}s = \frac{1}{\epsilon_0}\sigma \int \mathrm{d}s \tag{2.103}$$

donde el positivo corresponde a la cara externa, i.e. $\vec{E}_2$, luego se tiene

$$\Delta E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \tag{2.104}$$

Es decir, la componente normal del campo eléctrico tiene una discontinuidad en la superficie que posee la densidad de carga superficial, como $\vec{E}_1 = 0$ entonces,

$$\vec{E}_2 \cdot \hat{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \tag{2.105}$$

La componente tangencial del campo eléctrico es:

$$\begin{aligned}
\int \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} &= 0 && (2.106)\\
(\hat{t} \times \hat{n}) \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) &= 0 && (2.107)\\
\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) &= 0 && (2.108)\\
& && (2.109)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la componente tangencial es continua e igual a 0.

Finalmente veamos como es la densidad de energía de este sistema,

$$w = \frac{\epsilon_0}{2}|\vec{E}|^2 = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \tag{2.110}$$

En el caso de una distribución superficial de carga, el campo eléctrico estará en ambos lados de la superficie por lo que es la mitad $E_2 \cdot \hat{n} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$, mientras la energía es un cuarto del caso del plano conductor, i.e. $w = \frac{\sigma^2}{8\epsilon_0}$.

Ejercicio 2.5: Determinar la energía almacenada en un capacitor de placas paralelas. Apliquemos la ley de Gauss asumiendo no hay cargas afuera del conductor,

$$\begin{aligned}
\int \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} &= \frac{q}{\epsilon_0} && (2.111)\\
(\vec{E}_{int} - 0) \cdot \hat{n}\, S &= \frac{q}{\epsilon_0} && (2.112)
\end{aligned}$$

Luego el campo en el interior:

$$\vec{E}_{int} \cdot \hat{n} = \frac{q}{\epsilon_0 S} \tag{2.113}$$

Entonces la energía por unidad de volumen almacenada es

$$w = \epsilon_0 E^2 = \frac{q^2}{\epsilon_0 S^2} \tag{2.114}$$

La diferencia de potencial es:

$$\Delta\Phi = -\int_0^d \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -E_{int} d \tag{2.115}$$

La capacidad es

$$C = \frac{q}{\Delta\Phi} = \epsilon_0 \frac{S}{d} \tag{2.116}$$