

Capítulo 4

Multipolos

4.1 Expansión multipolar en coordenadas rectangulares

Si estamos en un problema sin condiciones de contorno en el cual existe una densidad de carga que esta *concentrada en una región* y observamos desde muy lejos el campo eléctrico que produce esta distribución de cargas, ¿cuál será la forma del campo eléctrico?. Uno podría pensar que si estamos muy lejos podríamos aplicar en forma aproximada una superficie Gaussiana esférica y por lo tanto el teorema de Gauss nos dice que el comportamiento del campo eléctrico a primer orden será dominado por el término de una carga puntual ubicada en el centro de la distribución de carga con carga total igual a la integral de la distribución de carga. Pero que sucede si la carga neta adentro de V es 0, es esperable que tengamos potencial eléctrico lejos de la distribución de carga?. En este capítulo buscamos generalizar esta metodología a fin de obtener las contribuciones de los términos de orden superior.

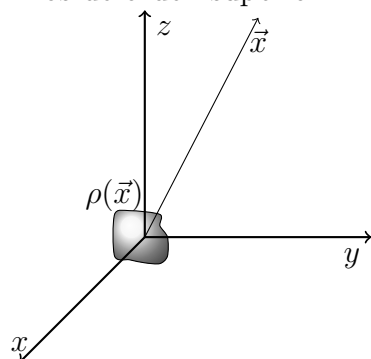


Figura 4.1: Distribución de carga $\rho(\vec{x})$ que se encuentra localizada en el espacio. Si la distrución se encuentra restringida a una esfera de radio R entonces asumimos que el punto de observación satisface $|\vec{x}| \gg R$.

Veamos primero, el potencial y campo eléctrico que genera un dipolo ubicado en el origen de coordenadas y el punto de observación esta lejos del origen. Supongamos el dipolo esta formado por dos cargas puntuales q y $-q$ con una distancia d entre ellas, el potencial eléctrico viene dado por

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}q \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_+|} - \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_-|} \right) \quad (4.1)$$

Luego por el teorema del coseno, si γ es el ángulo entre el dipolo (vector que va desde la carga negativa hacia la positiva) y el vector \vec{x} ,

$$|\vec{x} - \vec{x}_+|^{-1} = [r^2 - rd \cos \gamma + (d/2)^2]^{-1/2} \quad (4.2)$$

mientras para la carga negativa se tiene

$$|\vec{x} - \vec{x}_-|^{-1} = [r^2 - rd \cos(\pi - \gamma) + (d/2)^2]^{-1/2} = [r^2 + rd \cos(\gamma) + (d/2)^2]^{-1/2} \quad (4.3)$$

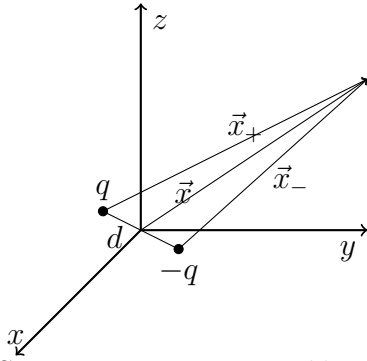


Figura 4.2: Dos cargas de la misma magnitud y signos opuestos se encuentran separadas por una distancia d . Se quiere obtener la expresión del potencial eléctrico para un punto de observación \vec{x} , tal que $|\vec{x}| \gg d$.

Si asumimos que $r \gg d$ luego podemos realizar una expansión en d/r y quedarnos con los dos primeros órdenes de la expansión,

$$|\vec{x} - \vec{x}_\pm|^{-1} = r^{-1} [1 \mp d/r \cos \gamma + (d/2r)^2]^{-1/2} \approx \frac{1}{r} \left(1 \pm \frac{d}{2r} \cos \gamma \right). \quad (4.4)$$

Luego el potencial viene dado por

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd \cos \gamma}{r^2} \quad (4.5)$$

vemos como la contribución de las cargas se anula, y aparece un término que decae como r^{-2} que tiene que ver con la magnitud y la distancia entre las cargas (qd).

En el caso general de una distribución de carga *localizada*, el potencial viene dado por

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' \quad (4.6)$$

Por lo que debemos encontrar la expansión en series de potencias de $|\vec{x} - \vec{x}'|$ para el caso en que $|\vec{x}| \gg |\vec{x}'|$. El desarrollo de Taylor de una función arbitraria $f(\vec{x})$ alrededor de \vec{x}_0 es

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + (\Delta \vec{x} \cdot \nabla) f|_{\vec{x}_0} + \frac{1}{2} \Delta x_i \Delta x_j \partial_{x_i x_j}^2 f|_{\vec{x}_0} \quad (4.7)$$

El desarrollo de $|\vec{x} - \vec{x}'|^{-1}$ alrededor de $|\vec{x}'| = 0$ nos da

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{|\vec{x}|} - \vec{x}' \cdot \nabla \frac{1}{|\vec{x}|} + \frac{1}{|\vec{x}|} (\vec{x}' \cdot \nabla)^2 \frac{1}{|\vec{x}|} \dots \quad (4.8)$$

$$= \frac{1}{|\vec{x}|} + \frac{\vec{x}' \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|^3} + \frac{1}{2|\vec{x}|^5} \vec{x} \cdot (3\vec{x}' \vec{x}' - \mathbf{1} |\vec{x}'|^2) \cdot \vec{x} + \dots \quad (4.9)$$

Luego se reemplaza esta expansión en la expresión para el potencial (4.6),

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{|\vec{x}|} + \frac{\vec{x} \cdot \vec{p}}{|\vec{x}|^3} + \frac{1}{2|\vec{x}|^5} \vec{x} \cdot \mathbf{Q} \cdot \vec{x} + \dots \right), \quad (4.10)$$

donde los primeros momentos de la distribución de carga vienen definidos por

$$q = \int \rho(\vec{x}') dV' \quad (4.11)$$

$$\vec{p} = \int \rho(\vec{x}') \vec{x}' dV' \quad (4.12)$$

$$\mathbf{Q} = \int \rho(\vec{x}') (3\vec{x}'\vec{x}' - \mathbf{1}|\vec{x}'|^2) dV'. \quad (4.13)$$

La primera ecuación q describe a la carga total del sistema, \vec{p} describe al momento dipolar, y \mathbf{Q} es el momento cuadrupolar.

Teniendo en cuenta las componentes de la matriz \mathbf{Q} , el momento cuadrupolar, el potencial eléctrico (4.10) se escribe como

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{|\vec{x}|} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|^3} + \frac{1}{2} \sum_{ij} Q_{ij} \frac{x_i x_j}{|\vec{x}|^5} + \dots \right] \quad (4.14)$$

Veamos las primeras dependencias del potencial y el campo eléctrico en función de los términos de la expansión. En el caso de un término monopolar el potencial y el campo eléctrico es:

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}, \quad (4.15)$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\vec{x}}{|\vec{x}|^3}, \quad (4.16)$$

donde estamos interpretando a q como el coeficiente del término monopolar. Si miramos desde lejos una distribución de carga, el término dominante será el monopolar y el campo tiene la forma de una carga puntual con carga igual a la carga total de la distribución $q = \int \rho dV$. Es un campo divergente desde el origen para $q > 0$ o convergente al origen $q < 0$.

Calculando el gradiente del término dipolar del potencial eléctrico

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{x}}{r^2} \quad (4.17)$$

se determina el campo eléctrico dipolar resultando

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\hat{r}(\vec{p} \cdot \hat{r}) - \vec{p}}{r^3}. \quad (4.18)$$

Ejercicio 4.1: Encuentre y grafique el campo eléctrico producido por un dipolo \vec{p} alineado con el eje vertical. Compare con el campo eléctrico producido por dos cargas ubicadas en el eje z a una distancia d .

4.2 Expansión multipolar en coordenadas esféricas

Supongamos entonces una distribución de carga localizada, la cual se encuentra concentrada dentro de una esfera de radio a alrededor del origen. Dado que no existen condiciones de contorno la solución general del problema es dada por

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV'. \quad (4.19)$$

Expresemos al término de la distancia entre punto fuente y observación $\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$ como una función de armónicos esféricos, como fue demostrado en (??),

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{(l+1)}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (4.20)$$

Pero dada la hipótesis que el punto de observación esta muy lejos y la carga esta concentrada entonces $|\vec{x}| > |\vec{x}'|$ resultando en

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r'^l}{r^{(l+1)}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (4.21)$$

Reemplazando (4.21) en la (4.6) se obtiene

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^{l+1}} \int Y_{lm}^*(\theta', \phi') r'^l \rho(\vec{x}') dV' \quad (4.22)$$

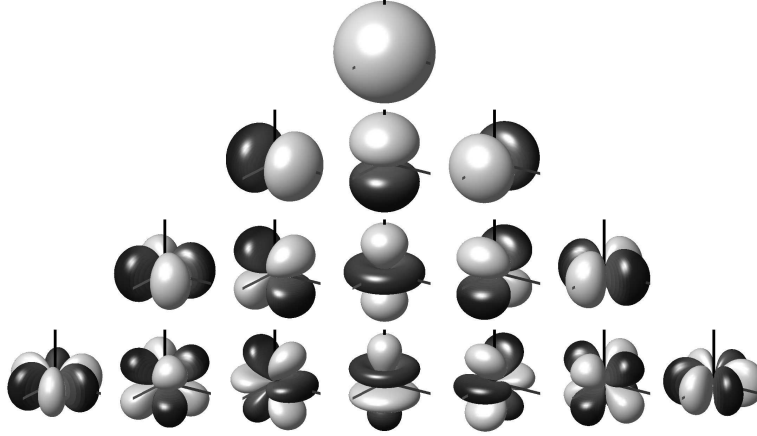
Por lo que tenemos en el término de la integral expresado las características particulares de la distribución de carga

$$q_{lm} = \int Y_{lm}^*(\theta', \phi') r'^l \rho(\vec{x}') dV' \quad (4.23)$$

los q_{lm} se coeficientes constantes y se denominan momentos multipolares. Estos coeficientes definen la contribución de la distribución de carga para cada uno de los órdenes. Luego la solución en series de potencias de r^{l+1} , distancia al origen, viene dada por

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{q_{lm}}{2l+1} \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^{l+1}} \quad (4.24)$$

dado que asumimos que estamos lejos comparado con la distribución de carga y los términos decaen con potencias negativas crecientes entonces el término de la serie dominante será el primero con q_{lm} distinto de cero.



Los primeros armónicos esféricos hasta $l = 3$.

Se concluye que la forma mas simple de realizar el desarrollo en serie de potencias es en coordenadas esféricas donde naturalmente aparecen los términos de la distancia a la distribución de cargas.

4.3 Distribución multipolar de la energía de una distribución de cargas en un campo externo

En el caso de la energía de interacción entre una distribución de cargas y un campo eléctrico externo la energía viene dada por

$$W = \int \rho(\vec{x}) \Phi_{ext}(\vec{x}) dV \quad (4.25)$$

notar la ausencia del término $1/2$ dado que es energía de interacción. Ubicamos a la distribución de cargas localizada alrededor del origen y ante la presencia de un potencial externo (con cargas lejanas y desconocidas).

La expansión del potencial eléctrico externo en el origen viene dado por

$$\Phi_{ext}(\vec{x}) = \Phi_{ext}(0) - \vec{x} \cdot \vec{E}_{ext}(0) - \frac{1}{6} \sum_i \sum_j (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \partial_{x_i} E_j(0) + \dots \quad (4.26)$$

Dada la equivalencia entre (4.25) y (4.6) la expansión resultante es equivalente si se intercambia la expansión de $|\vec{x} - \vec{x}'|$ por $\Phi(\vec{x})$,

$$W = q\Phi_{ext}(0) - \vec{p} \cdot \vec{E}_{ext}(0) - \frac{1}{6} \sum_i \sum_j Q_{ij} \partial_{x_i} E_j(0) + \dots \quad (4.27)$$

Es interesante notar que la carga interactúa con el potencial, el dipolo con el campo y el cuadrupolo con el gradiente del campo. Esto es de interés para las áreas de resonancia magnética dipolar o eléctrica cuadrupolar. Si aplicamos gradientes de campos eléctricos a la materia se pueden estudiar las características de los momentos cuadrupolares de los núcleos, mientras aplicando campos magnéticos (ya lo veremos) se pueden estudiar las características dipolares.

La energía de interacción entre dos dipolos \vec{p}_1, \vec{p}_2 se determina teniendo en cuenta el campo eléctrico generado por un dipolo, (4.28),

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\hat{r}(\vec{p}_1 \cdot \hat{r}) - \vec{p}_1}{r^3} \quad (4.28)$$

luego la energía de interacción tendrá como término dominante el segundo de (4.27) es decir $W_{12} = -\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1(0)$ resultando en

$$W_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-3(\vec{p}_2 \cdot \hat{n}) \cdot (\vec{p}_1 \cdot \hat{n}) + \vec{p}_2 \cdot \vec{p}_1}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^3}. \quad (4.29)$$