

Dinámica de Fluidos Geofísicos

Manuel Pulido
Departamento de Física,
Universidad Nacional del Nordeste
`pulido@unne.edu.ar`

20 Mar 11

Contenidos

1	Ecuaciones de movimiento	4
1.1	Introducción	4
1.1.1	Definición de un fluido	6
1.1.2	Estado de un fluido	6
1.1.3	Sistemas de coordenadas	7
1.1.4	Derivada material	8
1.2	Conservación de la masa	10
1.2.1	Conservación de la masa en un sistema Euleriano	10
1.2.2	Conservación de la masa en un elemento material	11
1.2.3	Definiciones relacionadas a la cinemática de un fluido	13
1.2.4	Razones de estiramiento y rotación	14
1.3	Conservación del momento	15
1.3.1	Fuerzas volumétricas y superficiales	15
1.3.2	Ecuaciones de conservación del momento de un fluido	17
1.4	Conservación de la energía	20
1.4.1	Ecuaciones que gobiernan un fluido	23
1.5	Condiciones en una interfase	24
1.6	Flujo de energía: conservación de la energía total	25
1.7	Invariante para un fluido ideal, estático: Teorema de Bernoulli	26
1.8	Fluidos en reposo: hidrostática	27
1.9	Estabilidad en un gas ideal	27
1.10	Ondas de sonido	30
2	Ajuste bajo gravedad	22
2.1	Ondas de gravedad superficiales	22
2.2	Ecuaciones de ondas pandas	27
2.2.1	Ondas shallow-water generadas por topografía	29
2.3	Ondas en dos fluidos superpuestos	31
2.3.1	Fluidos superpuestos con distintas velocidades: Inestabilidad de Kelvin-Helmholtz	34
2.4	Ondas de gravedad internas	35
2.5	Energía de las ondas de gravedad internas	38
2.6	Derivación de la aproximación de Boussinesq	39
2.7	Propagación de ondas: velocidad de grupo	40

2.8	Interacciones flujo medio-ondas	42
2.9	Mecanismos de generación de las ondas	42

Capítulo 1

Ecuaciones de movimiento

1.1 Introducción

En Mecánica clásica se estudia las leyes que gobiernan el movimiento de partículas y de cuerpos rígidos (sólidos).

¿Cuáles son las leyes de movimiento para los otros dos estados de la materia: líquidos y gases?

La mecánica de los fluidos es el área de la Física que se dedica al estudio de los movimientos de gases y líquidos. En particular en esta materia aplicaremos los conceptos de la mecánica de los fluidos a el océano y la atmósfera. En todo momento nos concentraremos en los aspectos principales de un fluido para luego aplicarlos a casos específicos. Los fluidos geofísicos están caracterizados por un sistema de referencia rotante por lo que existe una fuerza inercial de Coriolis.

La alta complejidad que revisten los problemas físicos de escalas intermedia es que por su propio planteo están compuestos por un gran número de elementos físicos, partículas, con fuertes interacciones entre sí. Otro de los grandes desafíos que tienen estas ramas de la física es que por tener una escala intermedia a menudo es necesario considerar aspectos moleculares o efectos relativistas. Sin embargo en este curso nos concentraremos en los aspectos clásicos de la mecánica de los fluidos por lo que no tendremos en cuenta estos efectos.

Otra dificultad de la mecánica de los fluidos radica en que el sistema de ecuaciones que la describe, las ecuaciones de Navier-Stokes, son altamente no lineales. El problema es muy complejo y no existen soluciones analíticas generales como en otros campos de la física (e.g. electromagnetismo, mecánica cuántica). Para encontrar soluciones a problemas particulares se requieren ingeniosas aproximaciones y/o la utilización de métodos matemáticos no-lineales. Alternativamente existen numerosos esfuerzos que se concentran en el modelado numérico para describir aspectos no lineales de los fluidos.

Las no linealidades de la mecánica de fluidos son intrínsecas al problema, esto motivó investigaciones que se enfocaron en sistemas no lineales simples que se derivan de aproximar las ecuaciones de la mecánica de fluidos. Lorenz fue el primero describiendo el proceso de convección atmosférico que termino en un sistema de 3 ecuaciones ordinarias no lineales, desarrollando en

Lorenz, 1963: Deterministic nonperiodic flow, *Journal of Atmospheric Sciences*, **20**, 130-141.

En este trabajo se encontró un sistema dinámico no lineal muy simple que tiene fuertes sensibilidades a las condiciones iniciales que resultaron en la existencia de una estructura de la solución en el espacio del estado muy compleja, conocida actualmente como el atractor de Lorenz o el efecto mariposa. Este fue el trabajo pionero en el área de investigación en lo que se denomina “caos”.

Existen aun numerosos problemas de la mecánica de fluidos que permanecen abiertos, cubriendo el rango desde cuestiones muy teóricas como la existencia y unicidad de las ecuaciones de Navier-Stokes, el cual ha sido seleccionado por el Clay Mathematics Institute dentro de los 8 problemas actuales mas importantes de la matemática¹. También existen problemas abiertos en el campo de la mecánica de fluidos enfocados en la física tales como la turbulencia y el cambio climático. Estos dos problemas fueron determinados en el año 2000 por el American Institute of Physics como dos de los grandes desafíos de la Física (en un grupo de diez “Grand Challenges”) para el próximo milenio.

Uno de los grandes desafíos de la mecánica de fluidos es la descripción matemática de la turbulencia, que representa un sistema complejo. La Figura 1.1 muestra la vorticidad axial en el desarrollo de vórtices en la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz. La figura demuestra la alta complejidad de las estructuras existentes, ergo la necesidad de técnicas estadísticas y de flujo medio para caracterizar el flujo y también los desafíos en la visualización de los procesos. La Figura 1.2 muestra una forma de caracterizar al flujo turbulento a través del espectro.

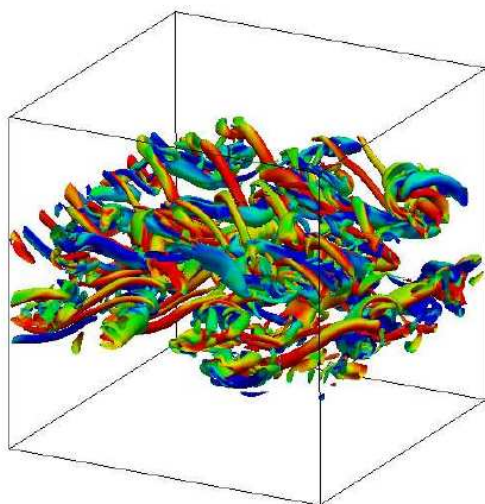


Figura 1.1: Isosuperficies de vorticidad axial durante la etapa inicial del desarrollo de una inestabilidad de Kelvin-Helmholtz.

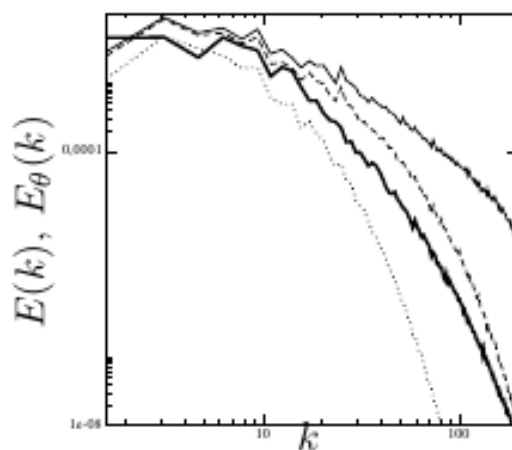


Figura 1.2: Espectros de un escalar en distintas alturas de la cizalla y el espectro de energía cinetica turbulenta (negrita).

Otro aspecto actual de un sistema compuesto por un fluido es describir la evolución de la incerteza del estado. Es decir si las condiciones iniciales y de contorno no son conocidas exactamente como evolucionan. Esto conlleva a interpretar a las variables como distribuciones

¹Paradójicamente tres de los mas reconocidos matemáticos argentinos, Alberto Calderón, Eduardo Zarantonello y Luis Caffarelli, han realizado importantes contribuciones en el área. Luis Caffarelli demostró un importante teorema acerca de la unicidad de soluciones débiles a una versión simplificada de las ecuaciones de Navier-Stokes sin condiciones de contorno y sobre cuan suaves son estas soluciones.

de probabilidad.

Durante el curso de la asignatura se intentará que el estudiante tenga una visión lo suficientemente general que cubra desde los conceptos básicos de la mecánica de fluidos, pasando por ondas en fluidos, fluidos rotantes, inestabilidades, hasta cubrir los conceptos de turbulencia y cambio climático.

1.1.1 Definición de un fluido

Comencemos por la definición de un fluido:

Los fluidos se definen por dos propiedades básicas:

Continuidad: Los fluidos tienen una estructura continua es decir que las cantidades asociadas con la materia tales como la masa y el momento contenidas en un pequeño volumen están esparcidas uniformemente dentro de éste (en lugar de estar concentradas en porciones específicas dentro del volumen).

Deformabilidad: La aplicación de fuerzas a un fluido producirá inevitablemente deformaciones. Esto no significa que el fluido no ofrezca resistencia, puede ofrecerla pero no puede prevenir la deformación.

La hipótesis de continuidad permite que propiedades del fluido tales como la densidad, velocidad, o temperatura sean funciones continuas de la posición y el tiempo por lo que en cada punto espacio-temporal tendremos definidos estos campos.

Los escépticos seguramente dirán que ésta hipótesis asume que la materia es infinitamente divisible, sin embargo dirán los gases y líquidos están compuestos de moléculas y por lo tanto no se puede pensar que formen un material continuo. ¿Deberíamos entonces desechar la hipótesis de continuidad? La respuesta es NO. Dado que las variables que estamos interesados en describir son puramente macroscópicas y de hecho solo están definidas para una gran cantidad de partículas elementales, la hipótesis está plenamente justificada. De hecho, la hipótesis de continuidad ha sido incluso verificada experimentalmente.

En todo momento debemos tener en cuenta que cuando mencionamos a un *elemento de fluido*, en realidad, hacemos referencia a un pequeño volumen que contiene muchas moléculas por lo cual puede considerarse como un continuo. Aun cuando hablamos de una partícula de fluido el concepto de macroscopicamente pequeño pero microscópicamente grande continua siendo aplicable, en otras palabras, una partícula de fluido estará compuesta por un número lo suficientemente grande de moléculas como para que pueda ser considerada que están esparcidas uniformemente en dicha partícula.

1.1.2 Estado de un fluido

¿Cómo determinamos completamente el estado dinámico de un fluido?

Por un lado necesitamos el vector velocidad el cual denotaremos por

$$\mathbf{u} = (u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t))$$

Para determinar el estado termodinámico, sabemos que son necesarias dos variables termodinámicas independientes (ver los libros de texto Sears o Callen), por ejemplo presión p y densidad ρ .

Notar que estamos representando con negritas a vectores espacio-temporales de componentes x , y , y z . Y con itálicas a funciones escalares y las variables espacio-tiempo.

Supongamos entonces una región D simplemente conexa en un espacio 3D que está llena de un fluido y \mathbf{x} es un punto donde se encuentra un elemento de fluido \mathbf{a} al tiempo t . Este elemento de fluido realiza una trayectoria a lo largo del tiempo, el vector velocidad $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ denota a la velocidad del elemento de fluido localizado en \mathbf{x} a tiempo t , este vector es tangente a la trayectoria que traza el elemento de fluido. En cada punto de nuestro dominio tenemos definido un vector velocidad dado por

$$\mathbf{u} = \frac{d\boldsymbol{\zeta}}{dt} \quad (1.1)$$

donde $\boldsymbol{\zeta}$ es el vector desplazamiento, es decir la diferencia $\mathbf{X}(t + \Delta t) - \mathbf{X}(t)$ donde $\mathbf{X}(t)$ es la posición de la partícula que se encuentra en \mathbf{x} en el tiempo t , luego la partícula se desplaza a otra posición $\mathbf{X}(t + \Delta t)$ en el tiempo $t + \Delta t$.

Las variables termodinámicas están relacionadas entre ellas, en particular la ecuación de estado $f(p, T, \rho) = 0$ relaciona la presión, temperatura y densidad. En el caso de un gas ideal la ecuación de estado es $p = \rho RT$ donde R es la constante de los gases. Como se ve en termodinámica, hay un teorema que demuestra que con 2 variables independientes entre sí queda determinado el estado del sistema termodinámico. Las variables termodinámicas también las interpretamos que dependen de x , y , z y t .

El estado del fluido queda determinado entonces por 5 variables. A los fines de determinar la evolución de estas 5 variables necesitamos 5 leyes de conservación. Éstas son la conservación del momento en sus 3 componentes, la conservación de la masa y la conservación de la energía.

Nos proponemos entonces determinar estas leyes de conservación para un fluido. Previamente necesitamos definir los posibles sistemas de coordenadas en los cuales estudiaremos el movimiento.

1.1.3 Sistemas de coordenadas

Supongamos que elegimos una partícula de fluido y le ponemos el rótulo \mathbf{a} de tal manera que la podamos seguir en su movimiento, ésta partícula trazará una trayectoria definida por

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt}\mathbf{X}(\mathbf{a}; t)$$

Si a cada partícula del fluido le ponemos rótulos distintos entonces podríamos seguir a cada una de ellas. En particular, una buena elección del rótulo podría ser la posición inicial en la que se encuentra la partícula, es decir, $\mathbf{a} = \mathbf{X}(t_0)$.

Esto es lo que se denomina una descripción *Lagrangiana* del fluido, es decir seguimos a las partículas a lo largo de su movimiento, en este caso las variables independientes son \mathbf{a} y t mientras la variable dependiente es la posición a un dado tiempo $\mathbf{X}(\mathbf{a}; t)$.

En un típico experimento de laboratorio lo que se hace es tirar una sustancia similar al humo, un trazador, en el fluido que se quiere estudiar la dinámica, y luego se fotografía cada

microsegundo para seguir el movimiento de las partículas del humo con la cámara, es decir, lo que estaríamos viendo es el movimiento en un sistema Lagrangiano del fluido.

En la descripción *Euleriana* el vector velocidad está definido en cada punto para cada instante de tiempo en la forma de un *campo* vectorial $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. En este caso \mathbf{x} y t son las variables independientes y \mathbf{u} es la variable dependiente. Notar que aquí \mathbf{x} se refiere a una posición fija en el espacio, mientras $\mathbf{X}(\mathbf{a}; t)$ se refiere a la posición de la partícula \mathbf{a} en el tiempo t . Un sistema Euleriano, entonces, está fijo en el espacio mientras las partículas de fluido están fluyendo en cada instante de tiempo para un dado punto. Para distintos tiempos se estará describiendo las propiedades de partículas de fluido distintas que ocasionalmente se ubican en la posición \mathbf{x} .

La relación que existe entre estas dos formulaciones es que para un dado tiempo las velocidades en un dado punto donde se localiza una dada partícula deben ser las mismas, *viz.* (*viz=videlicet* significa “es decir”),

$$\frac{d}{dt}\mathbf{X}(\mathbf{a}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x} = \mathbf{X}, t) \quad (1.2)$$

Definimos un *elemento material de fluido* como un conjunto de partículas de fluido que puede ser localizado espacialmente y al que lo podemos seguir durante su trayectoria. El conjunto de partículas que forma el elemento permanecerá dentro del elemento a lo largo de su evolución sin mezclarse con su entorno es decir que asumimos no hay difusión. De esta manera la superficie frontera del elemento de fluido queda bien definida en todo momento².

1.1.4 Derivada material

En general las leyes del movimiento y las relaciones termodinámicas vienen dadas para un elemento material de fluido en un marco Lagrangiano, pero a la vez en muchos problemas resulta mas práctico trabajar en un marco Euleriano. Para relacionar a los marcos de referencia necesitamos una relación entre la razón de cambio de un dado elemento material de fluido a la razón de cambio de un campo expresado en un sistema fijo.

Consideremos una función escalar que depende de \mathbf{x} y de t : $\Psi(\mathbf{x}, t)$, queremos determinar como cambia esta función Euleriana, Ψ , con el tiempo siguiendo el movimiento del fluido. La función Ψ representa alguna propiedad de un elemento material de fluido (*e.g.* masa, energía).

Si en la posición \mathbf{x} tenemos la partícula $\mathbf{X}(\mathbf{a}, t)$, tal que en ese momento $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\mathbf{a}, t)$, entonces el cambio temporal de Ψ a lo largo del movimiento de la partícula viene dado por la derivada temporal total,

$$\frac{d}{dt}\Psi(\mathbf{X}(\mathbf{a}, t), t) = \frac{\partial \Psi}{\partial X_i} \frac{dX_i}{dt} + \partial_t \Psi \quad (1.3)$$

teniendo en cuenta que $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\mathbf{a}, t)$ y que $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{d\mathbf{X}}{dt}$ resulta

$$\frac{d\Psi}{dt}(\mathbf{x}, t) = \partial_t \Psi + \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} u_i \quad (1.4)$$

denotando al operador que nos da el cambio temporal a lo largo del movimiento en un sistema Euleriano por $\frac{D}{Dt}$ tenemos

$$\frac{D\Psi}{Dt} \equiv \partial_t \Psi + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \Psi. \quad (1.5)$$

²En fluidos geofísicos se suele denominar *parcela* al elemento material de fluido, compuesto por aire o agua de mar que no se mezcla con su entorno.

Este operador es llamado “derivada material”, y fue introducido por Stokes. Nótese que hemos denotado a esta derivada por D/Dt para denotar que es el cambio *material* en el tiempo. Llamamos al primer término del RHS (Right Hand Side, término del lado derecho de la ecuación) ∂_t derivada temporal local mientras el segundo término $\mathbf{u} \cdot \nabla$ será denominado término *advectivo* (En algunos textos especialmente los antiguos se le suele denominar término *convectivo* sin embargo aquí nos reservamos el concepto de *convectivo* para denotar a los procesos que resultan de tener un fluido mas liviano debajo de uno mas pesado como veremos mas adelante).

Es posible una derivación alternativa de la derivada material directamente en el sistema Euleriano. Si tenemos en cuenta los cambios de la propiedad $\Psi(\mathbf{x}, t)$ en un lapso δt *a lo largo del movimiento* (en la dirección \mathbf{u}),

$$\delta\Psi = \Psi(\mathbf{x} + \mathbf{u}\delta t, t + \delta t) - \Psi(\mathbf{x}, t) \quad (1.6)$$

expandiendo en una serie de Taylor,

$$\Psi(\mathbf{x} + \mathbf{u}\delta t, t + \delta t) = \Psi(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial\Psi}{\partial x_i} u_i \delta t + \frac{\partial\Psi}{\partial t} \delta t + \sigma(\delta t^2) \quad (1.7)$$

por lo que reemplazando (1.7) en (1.6) resulta

$$\delta\Psi = \left(\partial_t \Psi + \frac{\partial\Psi}{\partial x_i} u_i \right) \delta t \quad (1.8)$$

resultando de esta manera la expresión de la derivada material (1.5).

En el caso que una propiedad tenga derivada material nula, $D_t\Psi = 0$, lo que sucede es que la cantidad no cambia a lo largo del movimiento, es decir no cambia siguiendo a un elemento material. Esto no quiere decir que la cantidad no puede cambiar temporalmente, el cambio temporal que se produce en un punto fijo, $\partial_t\Psi$ en el caso de $D_t\Psi = 0$, es igual al término advectivo $-\mathbf{u} \cdot \nabla\Psi$.

Ejercicio 1.1: Suponga que tenemos una propiedad Ψ en 1D que varía linealmente con la posición $\Psi = Ax$ para un tiempo fijo y además sabemos que $\partial_t\Psi = B$. Calcule el cambio total de Ψ si el fluido tiene una velocidad u constante conocida. ¿Qué condición debe cumplir la velocidad u para que la Ψ se conserve para un elemento material (i.e. la derivada material sea nula)?

1.2 Conservación de la masa

1.2.1 Conservación de la masa en un sistema Euleriano

Dado que sabemos que la masa es una cantidad conservada, queremos determinar cual es la ley de conservación de la masa en un sistema Euleriano.

Supongamos un volumen fijo V_E cuyo contorno es la superficie S_E como se muestra en Fig. 1.3. El sufijo E lo utilizamos para denotar a un volumen Euleriano que esta fijo. Como la masa de los elementos materiales se conserva significa que los cambios de masa en V_E solo se pueden producir por un flujo de masa (elementos materiales) hacia el exterior o desde el exterior. Si pensamos en una “caja” y en movimiento 1D, entonces el cambio de la masa en la “caja” de sección transversal a en un Δt viene dado por el flujo de masa que entró a la caja $\rho_1 u_1 a \Delta t$ menos el que salió de la caja $\rho_2 u_2 a \Delta t$:

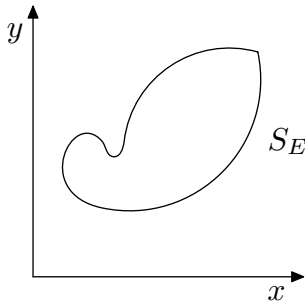


Figura 1.3: Volumen fijo V_E encerrado por la superficie S_E .

$$\Delta M = \rho_1 u_1 a \Delta t - \rho_2 u_2 a \Delta t \quad (1.9)$$

es decir que los cambios de masa vienen dados por el flujo neto de masa que intercambia la caja con su entorno. Generalizando a 3D, el cambio de la masa total en un volumen viene dado por el flujo neto entrante al volumen a través de la superficie que lo delimita:

$$d_t \int_{V_E} \rho dV_E = - \int_{S_E} \rho \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}_E \quad (1.10)$$

El volumen en consideración está fijo (notar que era una hipótesis ya que tomamos un volumen Euleriano) por lo que

$$d_t \int_{V_E} \rho dV_E = \int_{V_E} \partial_t \rho dV_E \quad (1.11)$$

y usando el teorema de la divergencia en el LHS de (1.10) se obtiene

$$\int_{V_E} [\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u})] dV_E = 0$$

Teniendo en cuenta que este volumen fijo V_E es arbitrario

$$\boxed{\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0.} \quad (1.12)$$

Ésta ecuación, (1.12), es la expresión diferencial de la conservación de la masa. Se debe interpretar en forma equivalente a su expresión integral (1.10), el cambio de densidad en un punto se produce por convergencia del flujo de masa.

Dada una distribución de velocidades y una densidad inicial, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ y $\rho(\mathbf{x}, t_0)$, (1.12) nos dice cual será la evolución de ρ . Dada una $\rho(\mathbf{x}, t)$, (1.12) nos restringe o limita las velocidades (aunque no las define).

El procedimiento de subdividir al fluido en cuadrados para casos 2D o en cubos para casos 3D es la forma mas natural de simular computacionalmente a los fluidos. Considerando propiedades

como la masa y determinando el intercambio de la propiedad con los cubos vecinos. En general a este “cubiculado” se le llama malla o grilla.

Definición Fluido incompresible: Un fluido incompresible es aquel cuya densidad del flujo no es afectada por los cambios de la presión; además si la conducción molecular puede despreciarse se satisface la ecuación

$$D_t \rho = 0 \quad (1.13)$$

Es decir que en el caso de un fluido incompresible, la densidad siguiendo el movimiento material no cambia.

Utilizando la definición de derivada material (1.5), la ecuación de conservación de la masa (1.12) puede ser reescrita como

$$\rho^{-1} D_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.14)$$

Entonces se deduce que para un fluido incompresible, (1.13), se satisface la ecuación

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.15)$$

Es decir, para fluidos incompresibles, *viz* fluidos con densidad constante en un elemento material, la divergencia de la velocidad debe ser nula. Si hubiera divergencia no nula se podría producir el vacío o introduciríamos mas masa de la que entra en el volumen del elemento contradiciendo el hecho de que es incompresible.

1.2.2 Conservación de la masa en un elemento material

Si el elemento material está conformado por un conjunto de partículas de fluido que permanecen en todo momento en el elemento material, esto significa que la masa del elemento material debe ser constante

$$\frac{dM}{dt} = 0 \quad (1.16)$$

donde $M = \int_{V_L} \rho dV_L$ es la masa del elemento material, V_L es un volumen Lagrangiano (el conjunto de partículas que conforman el elemento material y que se sigue con el tiempo).

Luego se tiene que

$$\frac{d}{dt} \int_{V_L} \rho dV_L = 0 \quad (1.17)$$

Dado que el volumen evoluciona con el tiempo debemos hacer una transformación de coordenadas de tal manera de transformar este volumen Lagrangiano a un volumen fijo (Euleriano) independiente del tiempo.

Sea $\mathbf{Y}(\mathbf{x}, t)$ la trayectoria del elemento de fluido que se encuentra en \mathbf{x} al tiempo t^3 . Luego

$$\int_{V_L} \rho dV_L = \int_{V_E} \rho(\mathbf{Y}(\mathbf{x}, t), t) J(\mathbf{x}, t) dV_E \quad (1.18)$$

donde J es el Jacobiano de la transformación de un sistema Lagrangiano a un sistema Euleriano (léase variable Y a la variable x). Utilizando (1.18) podemos derivar temporalmente el integrando,

$$\frac{d}{dt} \int_{V_L} \rho dV_L = \int_{V_E} \partial_t \rho(\mathbf{Y}, t) J dV_E + \int_{V_E} \rho \partial_t J dV_E \quad (1.19)$$

³El campo vectorial $\mathbf{Y}(\mathbf{x}, t)$ debe ser interpretado como la posición en un tiempo arbitrario pero fijo, digamos t_0 , que tiene el elemento de fluido que se encuentra en \mathbf{x} al tiempo t .

Notar que $\partial_t \rho(\mathbf{Y}, t) = D_t \rho(\mathbf{x}, t)$ ya que es a lo largo del movimiento.

El volumen del elemento V_L cambia con el tiempo dado que éste es un elemento material. Este volumen no es un volumen fijo en el espacio sino que es un volumen cuya superficie que lo rodea está formado y definido por las mismas partículas de fluido. En este sentido, la superficie que encierra al elemento material no es atravezada por partículas, es decir no existe flujo entrante ni saliente de la superficie S_L .

Ejercicio 1.2: Demostrar que $\partial_t J(\mathbf{x}, t) = J(\mathbf{x}, t) \nabla \cdot \mathbf{u}$. Físicamente esto significa que el cambio del volumen *material* δV_L con el tiempo es $\frac{d\delta V_L}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{u} \delta V_L$. No utilizar al principio de conservación de la masa en la demostración.

Reemplazando en (1.19) el resultado del Ejercicio 1.2.2, $\partial_t J(\mathbf{x}, t) = J(\mathbf{x}, t) \nabla \cdot \mathbf{u}$, resulta que

$$\frac{d}{dt} \int_{V_L} \rho dV_L = \int_{V_E} \partial_t \rho(\mathbf{Y}, t) J dV_E + \int_{V_E} \rho \nabla \cdot \mathbf{u} J dV_E \quad (1.20)$$

Esto nos permite retroceder y transformar a (1.20) de un sistema Euleriano a un sistema Lagrangiano nuevamente,

$$\frac{d}{dt} \int_{V_L} \rho dV_L = \int_{V_L} (D_t \rho(\mathbf{x}, t) + \rho \nabla \cdot \mathbf{u}) dV_L \quad (1.21)$$

Teniendo en cuenta (1.17) y como el volumen material es arbitrario, en el sentido que la cantidad de partículas que definen al elemento de volumen son arbitrarias, aunque el volumen definido evoluciona, resulta que

$$D_t \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.22)$$

esta ecuación es efectivamente la misma ley diferencial que se obtuvo mediante la derivación Euleriana en Sección 1.2.1.

Ejercicio 1.3: Demostrar el teorema de transporte que establece que una propiedad extensiva (e.g. salinidad, energía, momento) cuya cantidad intensiva (por unidad de masa) es $\gamma(\mathbf{x}, t)$ satisface

$$d_t \int_{V_L} \rho \gamma dV_L = \int_{V_L} \rho D_t \gamma dV_L \quad (1.23)$$

teniendo en cuenta que la densidad ρ satisface la ecuación de conservación de la masa.

Ejercicio 1.4: Demostrar usando un marco Lagrangiano que si tenemos una propiedad extensiva (e.g. salinidad, energía, momento) cuya cantidad intensiva es $\gamma(\mathbf{x}, t)$ (e.g. salinidad, energía, momento por unidad de masa) que posee una fuente por unidad de volumen y tiempo, Q , entonces la evolución de dicha cantidad es gobernada por la ley:

$$\rho D_t \gamma = Q \quad (1.24)$$

Ayuda: obtenga primero una expresión integral para el cambio total de la propiedad extensiva en un sistema Lagrangiano.

Ejercicio 1.5: Demostrar usando un marco Euleriano, en forma similar a como se demostró la conservación de la masa en un marco Euleriano en Sección 1.2.1, que la cantidad γ satisface:

$$\partial_t(\rho \gamma) + \nabla \cdot (\rho \gamma \mathbf{u}) = Q \quad (1.25)$$

Ejercicio 1.6: Demostrar que las leyes de conservación para la cantidad intensiva, γ , cuya fuente es Q ,

$$\begin{aligned}\rho D_t \gamma &= Q \quad y \\ \partial_t(\rho\gamma) + \nabla \cdot (\rho\gamma \mathbf{u}) &= Q,\end{aligned}$$

son equivalentes si la masa se conserva.

1.2.3 Definiciones relacionadas a la cinemática de un fluido

Campo constante: Un campo que es independiente del tiempo y de la posición.

Campo uniforme: Un campo que es independiente de la posición pero no necesariamente del tiempo.

Flujo estático (steady flow): Las variables que describen al flujo son independientes del tiempo $\mathbf{u}(\mathbf{x})$. En el caso de ondas en general se denominan ondas estáticas a aquellas en las cuales las cantidades medias (e.g. la envolvente) son independientes del tiempo y por lo tanto los patrones son independientes del tiempo, i.e. no hay propagación. La velocidad y otras variables de estas ondas pueden depender del tiempo.

Ondas estacionarias (stationary waves): son aquellas que tienen velocidad de fase 0 y por lo tanto la frecuencia $\omega = 0$.⁴

Línea de corriente (streamline): En todo momento la línea de corriente es paralela al vector velocidad. Para flujos no-estáticos las líneas de corriente deben calcularse para cada t . La forma de obtenerlas es a través de las relaciones

$$\frac{dx}{u(\mathbf{x}, t)} = \frac{dy}{v(\mathbf{x}, t)} = \frac{dz}{w(\mathbf{x}, t)}.$$

Si el flujo es estático, las trayectorias de los elementos de fluido, $\mathbf{X}(t)$, son equivalentes a las líneas de corriente.

Si seguimos a todas las partículas que forman un área perpendicular a la línea de corriente, éstas forman un *tubo de corriente*, a través de su contorno no hay flujos de fluido (ya que su contorno esta definido por líneas de corriente).

Función de corriente (stream function) En los casos en que tenemos un flujo 2D y el fluido es incompresible; existe una relación entre las componentes de la velocidad, pudiendo entonces expresar a éstas, (u, v) en función de una función escalar Ψ , denominada función de corriente. El campo de velocidad puede ser obtenido por las relaciones:

$$u = \partial_y \Psi, \quad v = -\partial_x \Psi. \quad (1.26)$$

Es decir matemáticamente se tiene inicialmente dos variables dependientes u, v sin embargo éstas están relacionadas entre sí a través de la relación, $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ para fluidos incompresibles,

⁴Hay una aparente contradicción en las definiciones ya que algo estacionario nos da idea de falta de movimiento o propagación en un patrón. En la literatura los términos *stationary* y *steady* se utilizan en forma bastante confusa incluso como sinónimos. En esta monografía se tendrá en cuenta las definiciones, claras y precisas, dadas en el libro de Lighthill.

entonces podemos expresar directamente el problema en una sola variable dependiente Ψ la cual satisface a través de su definición (1.26) trivialmente la relación $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$.

Si reemplazamos estas igualdades en la ecuación de conservación de la masa para un fluido incompresible (recordar que éstos satisfacen que la divergencia de la velocidad es nula),

$$\partial_{xy}\Psi - \partial_{yx}\Psi = 0$$

entonces si Ψ es doblemente diferenciable y viene dada por (1.26) se cumple idénticamente que la divergencia de la velocidad es nula para cualquier Ψ doblemente diferenciable. En otras palabras, dada cualquier función escalar Ψ doblemente diferenciable; ésta satisface la conservación de la masa supuesto la velocidad sea definida por (1.26).

Ejercicio 1.7: Demostrar que las líneas de corriente en un flujo son el conjunto de funciones de corriente constantes, $\psi = cte$.

Ejercicio 1.8: Demostrar que el flujo de masa de un fluido con $\rho = cte$ en un contorno cerrado es nulo. A partir de esta demostración fundamente que la función Ψ únicamente depende de los puntos extremos y no del camino.

Ejercicio 1.9: Regla de Leibnitz de la razón de cambio de una integral. Demuestre que en una dimensión vale que:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \Psi(x, t) dx = \int_{x_1}^{x_2} \partial_t \Psi dx + \frac{dx_2}{dt} \Psi(x_2, t) - \frac{dx_1}{dt} \Psi(x_1, t) \quad (1.27)$$

Ejercicio 1.10: Teorema de transporte de Reynold. Demuestre que si tenemos una propiedad $\Psi(\mathbf{x}, t)$ que esta definida adentro de un volumen $V(t)$ el cual esta cambiando con el tiempo, entonces el cambio temporal de la propiedad total dentro del volumen viene dado por

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \Psi dV(t) = \int_{V(t)} \partial_t \Psi dV(t) + \int_{S(t)} \Psi(\mathbf{x}, t) \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.28)$$

donde \mathbf{u} es la velocidad de los puntos en la frontera del volumen. Para la demostración, comience demostrando el caso unidimensional de un fluido en una caja de límites variables, con velocidades u_I , u_D y luego extienda al resultado a tres dimensiones. El resultado de este teorema puede leerse como, los cambios que se producen en la integral volumétrica de una propiedad tienen dos contribuciones por un lado se deben a los cambios internos de la propiedad, pero también hay una contribución que tiene que ver con la razón de cambio del volumen donde estamos integrando la cantidad. La demostración es puramente cinemática.

1.2.4 Razones de estiramiento y rotación

El tensor gradiente de velocidad puede ser descompuesto por un tensor simétrico y uno anti-simétrico

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = S_{ij} + \frac{1}{2} R_{ij} \quad (1.29)$$

donde el tensor simétrico se denomina tensor de razón de estiramiento

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (1.30)$$

mientras el antisimétrico es el tensor de rotación y viene dado por

$$R_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}. \quad (1.31)$$

El tensor de rotación puede ser expresado en función de la vorticidad, $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$,

$$R_{ij} = -\epsilon_{ijk} \omega_k \quad (1.32)$$

donde ϵ_{ijk} es el tensor de Levi-Civita. Se ha usado que $\boldsymbol{\omega} = \epsilon_{klm} \partial_{x_l} u_m \hat{x}_k$ y $\epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \delta_{im} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jm}$.

Por lo que de esta forma hemos dividido los efectos de cambios en \mathbf{u} en un punto, tensor de gradiente de velocidad, en una componente debido puramente al estiramiento y otra componente debido puramente a la rotación. Si el flujo es irrotacional, $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = 0$, entonces $R_{ij} = 0$. En este caso podemos definir al campo vectorial de la velocidad en función del gradiente de una función escalar $\mathbf{u} = \nabla \phi$, en forma equivalente al potencial del campo eléctrico en el caso estático.

1.3 Conservación del momento

De la segunda ley de Newton surge otra ecuación de conservación para un fluido. Esta ley en mecánica clásica establece que una fuerza neta, $\sum \mathbf{F}$, sobre una partícula produce un cambio de momento, denotado por \mathbf{p} ,⁵ dado por

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum \mathbf{F} \quad (1.33)$$

Veamos como se traduce esta ley de conservación para un fluido. Para esto comencemos analizando la naturaleza de las fuerzas que se ejercen sobre un elemento de fluido. Éstas pueden ser divididas en dos tipos, volumétricas y superficiales.

1.3.1 Fuerzas volumétricas y superficiales

Las *fuerzas volumétricas* son fuerzas de largo alcance que penetran al fluido y afectan a todos los elementos de éste. Ejemplos de estas fuerzas son la fuerza de gravedad, la fuerza electromagnética y las fuerzas ficticias resultantes de sistemas no-inerciales.

Estas fuerzas son proporcionales al tamaño del elemento de fluido, es decir son una propiedad intensiva (por unidad de masa) entonces la fuerza total actuando sobre un elemento de fluido de masa δm es

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \delta m = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \rho \delta V$$

⁵A lo largo de este apunte usaremos el término “momento” para referirnos a la cantidad \mathbf{p} aun cuando en español sea mas correcto el término cantidad de movimiento. Aquí se usa “momento” para facilitar y abreviar los conceptos derivados del “momento” en fluidos, tales como flujo de momento, densidad de momento, etc.

donde ρ es la densidad de masa y δV es el volumen del elemento de fluido. En el caso del campo gravitacional terrestre la fuerza de gravedad por unidad de masa es

$$\mathbf{F} = \mathbf{g}$$

Por otro lado se encuentran las *fuerzas superficiales*, que son fuerzas de corto alcance y deben su existencia a las interacciones moleculares por lo que su intensidad decrece rápidamente con la distancia y solo son apreciables cuando hay contacto entre los elementos. Estas fuerzas son producidas por transporte de momento a través del contorno por moléculas migrantes.

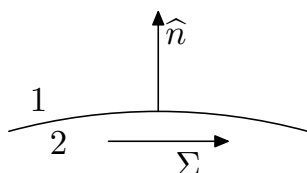


Figura 1.4: Fuerza superficial por unidad de área Σ ejercida por el medio 1 sobre el medio 2.

Si las fuerzas superficiales están afectando al contorno entre dos medios, éstas no pueden penetrar el fluido debido a su naturaleza y por lo tanto sus efectos son solo sentidos por una fina capa alrededor del contorno. En otras palabras, estas fuerzas son proporcionales al área. Entonces la fuerza superficial total viene dada por

$$\Sigma(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{x}, t) \delta s$$

donde Σ es la fuerza superficial por unidad de área y $\hat{\mathbf{n}}$ es el vector normal a la superficie que apunta desde el medio 2 al medio 1. En este caso se interpreta a Σ como la fuerza ejercida por 1 sobre 2.

Tensor de stress

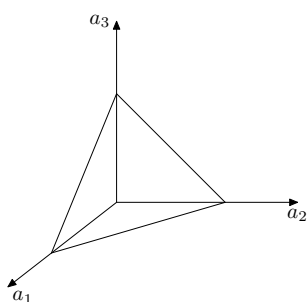


Figura 1.5: Tetraedro cuyas caras tienen como versores normales a \hat{a}_i y a $\hat{\mathbf{n}}$.

La fuerza que apunta en la dirección de $\hat{\mathbf{n}}$ es la opuesta a la de la dirección de $-\hat{\mathbf{n}}$ por lo que

$$\Sigma(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{x}, t) = -\Sigma(-\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{x}, t) \quad (1.34)$$

donde se ha utilizado el principio de acción y reacción. Es decir que $\Sigma(-\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{x}, t)$ es la fuerza ejercida por 2 sobre 1, y por el principio de acción y reacción, ésta es de igual magnitud y sentido inverso a la fuerza ejercida por 1 sobre 2, $\Sigma(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{x}, t)$. Por lo tanto, de (1.34) deducimos que Σ es una función impar de $\hat{\mathbf{n}}$.

Dada una dirección normal podemos armar un tetraedro cuyas caras tienen vectores normales a una terna de versores ortogonales entre sí ($\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3$) y a $\hat{\mathbf{n}}$, como se muestra en la Figura 1.5.

Luego la fuerza superficial que se ejerce sobre el tetraedro es

$$\mathbf{f}_s = \Sigma(\hat{\mathbf{n}})\delta S + \Sigma(-\hat{a}_1)\delta S_1 + \Sigma(-\hat{a}_2)\delta S_2 + \Sigma(-\hat{a}_3)\delta S_3 \quad (1.35)$$

Aplicando la segunda ley de Newton al tetraedro podemos obtener una ecuación de movimiento de la forma:

$$\rho D_t \mathbf{u} \delta V = \rho \mathbf{F} \delta V + \mathbf{f}_s \quad (1.36)$$

Para que esta ecuación valga cuando $\delta V \rightarrow 0$ se necesita que $\mathbf{f}_s = 0$ ya que este término tiende a 0 con δs por lo que tiende mas lentamente que los otros dos. Luego se deduce que

$$\Sigma(\hat{\mathbf{n}})\delta S = \Sigma(\hat{a}_1)\delta S_1 + \Sigma(\hat{a}_2)\delta S_2 + \Sigma(\hat{a}_3)\delta S_3 \quad (1.37)$$

Si se tiene en cuenta que

$$\delta S_i = \hat{a}_i \cdot \hat{n} \delta S = a_{ij} n_j \delta S,^6 \quad (1.38)$$

donde a_{ij} representa la componente j -ésima del versor \hat{a}_i , se deduce de (1.37) que la componente i -ésima de $\Sigma(\hat{n})$ es

$$\Sigma_i(\hat{n})\delta S = \underbrace{(\Sigma_i(\hat{a}_1)a_{1j} + \Sigma_i(\hat{a}_2)a_{2j} + \Sigma_i(\hat{a}_3)a_{3j})}_{\sigma_{ij}} n_j \delta S \quad (1.39)$$

La fuerza total superficial en la dirección i , viene dada por $\sigma_{ij} n_j \delta S$. El término encerrado por la llave en (1.39), σ_{ij} es independiente de los ejes elegidos y por lo tanto es un tensor de segundo rango denominado *tensor de stress*. La componente del tensor de stress σ_{ij} , se considera en la cara del cubo cuya normal es i y el stress (o fuerza) actuando sobre la cara del cubo i considerada esta en la dirección j .

Este tensor de stress es independiente de la dirección normal \hat{n} por lo que se utilizará para expresar las fuerzas superficiales. Como veremos mas adelante sus componentes no son todas independientes, en particular es un tensor simétrico, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. De esta manera existen solo 6 componentes independientes.

1.3.2 Ecuaciones de conservación del momento de un fluido

La razón de cambio del momento de un elemento material de volumen V_L es dada por

$$d_t \int_{V_L} \rho \mathbf{u} dV_L = \int_{V_L} \rho D_t \mathbf{u} dV_L \quad (1.40)$$

donde se ha utilizado el teorema de transporte (Ejercicio 1.2.2).

Como se vio en la sección anterior las fuerzas que producirán cambios de momento son de dos naturalezas:

i) Fuerzas volumétricas cuyo aporte es

$$\int_{V_L} \rho \mathbf{F} dV_L.$$

ii) Fuerzas superficiales en la dirección i caracterizadas por

$$\int_{S_L} \sigma_{ij} n_j ds_L = \int_{V_L} \partial_{x_j} \sigma_{ij} dV_L$$

donde σ_{ij} es el tensor de stress (forzado) y en el RHS hemos usado el teorema de Gauss.

Luego el balance de momento, utilizando la segunda ley de Newton (1.33), viene dado por

$$\int_{V_L} \rho D_t u_i dV_L = \int_{V_L} \rho F_i dV_L + \int_{V_L} \partial_{x_j} \sigma_{ij} dV_L \quad (1.41)$$

⁶En lo que sigue alternaremos la notación de vectores y la notación de subíndices para representar una componente arbitraria. En este último caso se asume que si existe repetición de un subíndice se está denotando implícitamente a la suma de todas las componentes, e.g. $u_i v_i = \sum_{j=1}^N u_j v_j$, ésta es conocida como notación de Einstein. Si se usa letras griegas en índices repetidos $u_\alpha v_\alpha$ significa que debe obviarse y solo es un índice fijo.

Dado que el volumen en (1.41) es arbitrario, se obtiene la forma diferencial

$$\rho D_t u_i = \rho F_i + \partial_{x_j} \sigma_{ij}. \quad (1.42)$$

Una de las fuerzas que contribuyen a \mathbf{F} es debida a la acción de la gravedad. Si consideramos a esta fuerza por unidad de masa constante, como por ejemplo podría ser considerada en el caso que el fluido este en la superficie de la tierra. En este caso se tiene que la fuerza volumétrica es

$$\mathbf{F} = \mathbf{g} \quad (1.43)$$

Definamos el *tensor de stress viscoso* como el tensor de stress menos el promedio de su diagonal,

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_{kk}/3. \quad (1.44)$$

Si el fluido está en reposo el tensor de stress viscoso es nulo, $\sigma'_{ij} = 0$, y el tensor de stress tiene la forma

$$\sigma_{ij} = -\delta_{ij} \sigma_{kk}/3 = -p \delta_{ij} \quad (1.45)$$

donde $p = \sigma_{kk}/3$ es la presión estática del fluido. En principio su origen es puramente mecánico y no es claro como está relacionado a la variable termodinámica p , la cual únicamente puede ser definida cuando tenemos equilibrio termodinámico.

En un fluido en reposo el tensor de stress es isotrópico cualquier conjunto de ejes ortogonales son ejes principales y solo tiene componentes normales, no hay componentes tangenciales.

En general, extendemos el concepto de la presión estática y *definimos* para un fluido en movimiento a la presión p por

$$p \equiv -\frac{1}{3} \sigma_{ii}, \quad (1.46)$$

es decir que la presión en un fluido en movimiento es definida por menos la media del stress normal. De esta manera estamos generalizando el concepto de presión estática en equilibrio termodinámico a fluidos en movimiento.

La forma general de la conservación de momento es entonces

$$\rho D_t u_i = \rho F_i - \partial_{x_i} p + \partial_{x_j} \sigma'_{ij} \quad (1.47)$$

Debemos encontrar una expresión que relacione el tensor de stress viscoso con la velocidad para cerrar las ecuaciones, ya que de lo contrario con σ'_{ij} estaríamos introduciendo nuevas incógnitas. Debemos encontrar la ecuación constitutiva del tensor de stress. Existen dos tipos de movimientos para los cuales σ'_{ij} se debe anular, además del reposo, por un lado para movimiento uniforme, es decir con velocidad constante. En este caso las distintas capas del fluido no se producen fricción entre sí y por lo tanto el tensor σ'_{ij} debe ser nulo. El segundo tipo de movimiento es un fluido rotando como un cuerpo rígido, tampoco hay en este caso movimientos entre sí de los elementos del fluido y por lo tanto no hay fricción.

Si la fricción se anula para un caso de movimiento uniforme esto quiere decir que σ'_{ij} no depende de la velocidad directamente, entonces el primer término que debería influir es el gradiente de la velocidad. En la forma mas general posible se debería tener que:

$$\sigma'_{ij} = A_{ijkl} \partial_{x_l} u_k \quad (1.48)$$

hemos despreciado todas las posibles dependencias de mayor orden en el tensor de stress y solo nos quedamos con la dependencia lineal al gradiente de velocidad, a los fluidos que satisfacen esta aproximación se les denomina *fluidos Newtonianos*.

Si usamos la propiedad que A_{ijkl} debe ser un tensor isotrópico, entonces lo podemos escribir en la forma

$$A_{ijkl} = \eta \delta_{ik} \delta_{jl} + \eta' \delta_{il} \delta_{jk} + \eta'' \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (1.49)$$

Considerando que el tensor de stress viscoso es simétrico, $\sigma'_{ij} = \sigma'_{ji}$, esto implica que A_{ijkl} debería ser simétrico en i, j .

$$\eta \delta_{ik} \delta_{jl} + \eta' \delta_{il} \delta_{jk} + \eta'' \delta_{ij} \delta_{kl} = \eta \delta_{jk} \delta_{il} + \eta' \delta_{jl} \delta_{ik} + \eta'' \delta_{ji} \delta_{kl}$$

considerando que la delta de Kronecker es simétrica se deduce que

$$(\eta - \eta')(\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) = 0$$

de la cual deducimos que $\eta = \eta'$. El tensor de stress viscoso se reduce entonces a

$$\sigma'_{ij} = [\eta \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} + \eta'' \delta_{ij} \delta_{kl}] S_{kl}$$

donde hemos usado que $\partial_{x_l} u_k = S_{kl} + 1/2 R_{kl}$ y considerado que los movimientos de rotación no aportan al tensor de stress viscoso por ser un movimiento de cuerpo rígido. Colapsando las deltas de la ecuación resulta

$$\sigma'_{ij} = \eta (S_{ij} + S_{ji}) + \eta'' \delta_{ij} S_{kk}$$

El tensor S_{ij} es simétrico por definición,

$$\sigma'_{ij} = 2\eta S_{ij} + \eta'' \delta_{ij} S_{kk}$$

o reescribiendo en función del shear,

$$\sigma'_{ij} = \eta (\partial_{x_j} u_i + \partial_{x_i} u_j) + \eta'' \delta_{ij} \partial_{x_k} u_k$$

Si lo escribimos en función del coeficiente de viscosidad aparente o viscosidad de segunda, $\zeta = \eta'' + 2/3\eta$, la ecuación mas general del tensor stress viscoso es de la forma

$$\sigma'_{ij} = \eta (\partial_{x_j} u_i + \partial_{x_i} u_j) + (\zeta - 2/3\eta) \delta_{ij} \partial_{x_k} u_k$$

Como debería ser la diagonal del tensor de stress viscoso, veamos,

$$\sigma'_{ii} = 3\zeta \partial_{x_k} u_k$$

opps que esta sucediendo?

Ejercicio 1.11: Asumiendo que el fluido es isotrópico y por tanto η y ζ no dependen de la posición demuestre que el gradiente del tensor de stress viscoso se reduce a:

$$\partial_{x_j} \sigma'_{ij} = \eta \partial_{x_j x_j}^2 u_i + \left(\frac{1}{3} \eta + \zeta \right) \partial_{x_i} (\partial_{x_k} u_k) \quad (1.50)$$

A partir de esta ecuación, (1.50), asuma ahora que el fluido es incompresible y demuestre que en este caso la expresión del tensor de stress viscoso es

$$\partial_{x_j} \sigma'_{ij} = \eta \nabla^2 u_i \quad (1.51)$$

Utilizando la expresión obtenida en el ejercicio, (1.50), y reemplazando en la ecuación de conservación del momento, (1.47) obtenemos, la archi-conocida ecuación de Navier-Stokes

$$\boxed{\rho D_t u_i = \rho F_i - \partial_{x_i} p + \eta \partial_{x_j x_j}^2 u_i + \left(\frac{1}{3}\eta + \zeta\right) \partial_{x_i} (\partial_{x_k} u_k)} \quad (1.52)$$

Esta es la ecuación de conservación del momento de un fluido mas completa. En general en la atmósfera y el océano el tensor de stress viscoso es despreciable cuando se compara con los otros términos. Sin embargo tiene un rol fundamental en la disipación de energía mecánica. Otro aspecto de la disipación que no puede ser obviado son las consecuencias de la viscosidad en las condiciones de contorno, las cuales serán introducidas en Sección 1.5.

En el caso en que el fluido pueda ser considerado incompresible; usando (1.51) la ecuación de momento resultante se reduce a

$$\boxed{\rho D_t \mathbf{u} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{F}} \quad (1.53)$$

En el caso en que la viscosidad sea despreciable las ecuaciones de momento toman la forma

$$\boxed{\rho D_t \mathbf{u} = -\nabla p + \rho \mathbf{F}} \quad (1.54)$$

esta ecuación se conoce como ecuación de Euler.

Entonces tenemos tres posibles ecuaciones de conservación del momento (1.52) a (1.54); de acuerdo al tipo de fluido y al régimen que se encuentre se optará por una u otra.

1.4 Conservación de la energía

Los cambios en la energía interna de un elemento material de fluido vienen dados por la primera ley de la termodinámica, la cual establece que:

Los cambios en la energía interna $\Delta \varepsilon$ son dados por el trabajo hecho por el entorno sobre el elemento de fluido mas el calor transferido por el medio hacia el elemento

$$\Delta \varepsilon = \delta W + \delta Q. \quad (1.55)$$

Para determinar δW , comencemos por identificar el trabajo hecho por el entorno sobre el elemento de fluido para esto calculemos la razón de trabajo total realizado sobre el elemento material de fluido. Este trabajo por unidad de tiempo está compuesto por el realizado por las fuerzas volumétricas,

$$\int \rho u_i F_i dV \quad (1.56)$$

y el realizado por las fuerzas superficiales

$$\int u_i \sigma_{ij} n_j ds = \int \partial_{x_j} (u_i \sigma_{ij}) dV \quad (1.57)$$

La suma de (1.56) y (1.57) es el trabajo total realizado sobre el sistema por unidad de tiempo, sin embargo no todo este trabajo es invertido en cambiar la energía interna $\Delta\varepsilon$, en realidad una parte de este trabajo se gasta en cambiar la energía cinética del fluido. Para determinar que parte del trabajo se gasta en energía cinética utilizamos las ecuaciones de movimiento. Multiplicando la i -ésima componente de (1.42) por u_i e integrando en volumen se obtiene

$$\int \frac{1}{2} \rho D_t u_i^2 dV = \int (\rho u_i F_i + u_i \partial_{x_j} \sigma_{ij}) dV. \quad (1.58)$$

Luego restando del trabajo total, (1.56)+(1.57), el trabajo que se gasta en cambiar la energía cinética, (1.58), se deduce que la parte del trabajo invertida en cambiar la energía interna es

$$d_t W = \int \sigma_{ij} \partial_{x_j} u_i dV. \quad (1.59)$$

Las transferencias de calor δQ por el entorno sobre el elemento de fluido pueden ser debidas a conducción molecular o radiación. La conducción molecular existe aun cuando el fluido esta en reposo, es un proceso puramente molecular.

El calor entregado por el entorno a través de conducción de calor molecular depende del gradiente de temperatura en la superficie

$$\int \kappa \nabla T \cdot d\mathbf{s} = \int \nabla \cdot (\kappa \nabla T) dV \quad (1.60)$$

donde κ es el coeficiente de conductividad térmica cuyas unidades son $J(Km)^{-1}$.

El gradiente de temperatura es el único término que aporta a las transferencias de calor ya que asumimos que la temperatura es continua en la superficie, *viz* existe un estado de equilibrio, además las contribuciones de derivadas superiores son consideradas despreciables.

La variación de energía interna en el elemento de fluido sumando las contribuciones del término del trabajo (1.59), la conducción molecular, (1.60) y la radiación \mathbf{F}_{rad} viene dada por

$$\frac{d}{dt} \int \rho \varepsilon dV = - \int \rho \varepsilon \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} + \int \{ \sigma_{ij} \partial_{x_j} u_i + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) - \mathbf{F}_{rad} \} dV. \quad (1.61)$$

En forma diferencial,

$$\rho D_t \varepsilon = \sigma_{ij} \partial_{x_j} u_i + \nabla \cdot (\kappa \nabla T - \mathbf{F}_{rad}). \quad (1.62)$$

Utilizando el ejercicio 1.2.2, la evolución de la energía interna se puede expresar como

$$\boxed{\partial_t(\rho \varepsilon) + \nabla \cdot (\rho \varepsilon \mathbf{u}) = \sigma_{ij} \partial_{x_j} u_i + \nabla \cdot (\kappa \nabla T - \mathbf{F}_{rad}).} \quad (1.63)$$

Ésta es la ecuación diferencial mas general de la evolución de la energía interna.

Si la viscosidad del fluido puede ser considerada despreciable $\sigma'_{ij} \approx 0$,

$$\partial_t(\rho \varepsilon) + \nabla \cdot (\rho \varepsilon \mathbf{u}) = -p \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (\kappa \nabla T - \mathbf{F}_{rad}). \quad (1.64)$$

Si además podemos despreciar la conducción molecular y la radiación

$$\partial_t(\rho \varepsilon) + \nabla \cdot (\rho \varepsilon \mathbf{u}) = -p \nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (1.65)$$

La ecuación (1.65) nos dice que la única fuente de energía interna para un fluido ideal es el trabajo de compresión realizado a través de la presión por el entorno sobre el elemento de fluido.

Luego para fluidos incompresibles la energía interna se conserva, todo el trabajo realizado sobre el elemento de fluido es invertido en cambiar la energía cinética.

Este tipo de flujos en los cuales las transferencias de calor pueden ser consideradas despreciables y que además es no-viscoso se denominan flujos isentrópicos ya que la entropía en un elemento material de fluido se conserva. Los fluidos en los cuales la viscosidad y las transferencias de calor son despreciables son llamados *fluidos ideales*.

Nótese que se está mencionando por un lado aproximaciones para ciertos tipos de fluidos y por otro lado aproximaciones para ciertos tipos de flujo, esto no es equivalente, un fluido real puede tener en algún límite ciertas aproximaciones que en otros no son válidas, o en ciertas regiones comportarse de una forma y en otras regiones de otra forma. Por ejemplo en la atmósfera en ciertas capas donde la radiación es absorbida la hipótesis de movimientos adiabáticos no es válida sin embargo en otras capas el movimiento puede ser considerado adiabático por lo que en estos casos es apropiada la denominación de flujos isentrópicos mientras no lo es la denominación de fluido ideal.

Ejercicio 1.12: Partiendo de la primera ley de la termodinámica $\delta\varepsilon = \delta Q - p\delta v$ y asumiendo que el flujo es isentrópico deduzca (1.65).

Temperatura potencial Si asumimos que el movimiento es isentrópico en lugar de utilizar la ecuación de conservación de la energía interna (1.65) se puede utilizar directamente la conservación de la entropía, es decir

$$D_t s = 0 \quad (1.66)$$

donde s es la entropía por unidad de masa. Escribiendo esa ecuación en otra forma

$$\partial_t(\rho s) + \nabla \cdot (\rho s \mathbf{u}) = 0 \quad (1.67)$$

Tanto (1.65) como (1.67) pueden ser utilizadas como ecuaciones de conservación de la energía para fluidos ideales. ¿Hemos entonces cerrado el sistema de ecuaciones?. No. Para esto necesitamos una ecuación de estado que nos relacione ε en el caso de (1.65) o s para (1.67) con ρ y p .

En el caso de la atmósfera es una buena aproximación asumir que ésta es un gas ideal y por lo tanto vale la ecuación de estado:

$$p = \rho RT \quad (1.68)$$

donde R es la constante del gas, la cual se relaciona a la constante universal del gas por $R = R_u/m$; m es el peso molecular promedio del gas. Para aire seco resulta $R = 287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

Por otro lado, en la atmósfera y en el océano se suelen utilizar variables alternativas a la entropía que también son conservadas para movimientos isentrópicos. Si queremos calcular como varía la temperatura en función de la presión para flujo isentrópico escribamos el diferencial de la entropía en función de las variables T y p ,

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T dp \quad (1.69)$$

Teniendo en cuenta las relaciones $c_p = T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p$ y $\left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T = - \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{\rho T}$ se deduce para un proceso isentrópico que

$$0 = c_p d \ln T - R d \ln p \quad (1.70)$$

Si el elemento de fluido es llevado isentropicamente desde T y p a la presión de referencia p_0 , integrando (1.70) la temperatura que tendrá será

$$\theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{R/c_p} \quad (1.71)$$

esta temperatura θ es llamada *temperatura potencial*. De la definición de temperatura potencial se deduce que $ds = 0 \Leftrightarrow d\theta = 0$. Es decir que si el elemento de fluido tiene movimientos isentrópicos, la temperatura potencial de éste permanecerá constante. Incluso la ecuación de conservación de la entropía (1.67) puede ser reemplazada por una ecuación de conservación de la temperatura potencial

$$D_t \theta = 0 \quad (1.72)$$

En el caso de la atmósfera la presión de referencia p_0 suele ser tomada como la presión en la superficie de la tierra $p_0 = 10^3 \text{hPa}$. Para el caso del océano suele ser mas útil utilizar el concepto de densidad potencial, que se define en forma equivalente, es decir es la densidad que el elemento de fluido tendría si es llevado con movimientos isentrópicos y sin cambios en la composición a la presión de referencia.

Si tomamos a (1.72) como ecuación de conservación, entonces la ecuación de estado $\theta(\rho, p)$ será de (1.71) y (1.68),

$$\theta = \frac{p}{\rho R} \left(\frac{p_0}{p} \right)^{R/c_p} \quad (1.73)$$

donde p_0 es solo una constante (no es una variable).

Ejercicio 1.13: Encontrar la relación que existe entre la densidad potencial y la temperatura potencial.

1.4.1 Ecuaciones que gobiernan un fluido

Finalmente hemos cerrado el sistema de ecuaciones. Para un fluido ideal, éstas son: conservación del momento

$$\rho D_t \mathbf{u} = -\nabla p + \rho \mathbf{F} \quad (1.74)$$

conservación de la masa

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1.75)$$

conservación de la energía o de la entropía (i.e. temperatura potencial)

$$D_t \theta = 0 \quad (1.76)$$

y la relación de estado para la temperatura potencial (1.73).

La gran complejidad de estas ecuaciones, aparte del término $\rho \mathbf{u}$, está escondida en el operador D_t ya que este posee términos no-lineales, e.g. $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$, $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta$.

Para el caso general de un fluido en el cual se consideran los efectos de la viscosidad y las transferencias de calor, las ecuaciones que gobiernan a éste son

$$\rho D_t \mathbf{u} = \rho \mathbf{F} - \nabla p + \partial_{x_j} \left\{ \eta \left[(\partial_{x_j} u_i + \partial_{x_i} u_j) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \partial_{x_i} u_i \right] \right\} \quad (1.77)$$

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1.78)$$

$$\partial_t (\rho \varepsilon) + \nabla \cdot (\rho \varepsilon \mathbf{u}) = \sigma_{ij} \partial_{x_j} u_i + \nabla \cdot (\kappa \nabla T - \mathbf{F}_{rad}) \quad (1.79)$$

y la ecuación de esta que relacione $\varepsilon(\rho, p)$.

Para poder resolver estas ecuaciones y que la solución sea única deberíamos discutir cuales son las condiciones de contorno que le tenemos que imponer al fluido, tanto si está limitado por otro fluido como por una superficie sólida.

1.5 Condiciones en una interfase

En el caso que sea un contorno entre un fluido y un sólido, la condición de contorno es que el fluido no puede penetrar el sólido es decir

$$\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}|_s = 0, \quad (1.80)$$

en el caso que el sólido esté quieto la velocidad normal a la superficie del sólido debe ser nula. Si el sólido se está moviendo, la velocidad normal del fluido en la superficie debe ser igual a la del sólido.

En el caso que tengamos dos fluidos no-miscibles, en la interfase que divide a los dos fluidos debemos pedir que sea una superficie material para ambos medios, i.e. la componente normal de la velocidad debe ser continua. Si las perturbaciones verticales de la superficie están definidas por un función escalar $\eta = \eta(t, \mathbf{x})$ se debe cumplir que

$$D_t \eta = \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (1.81)$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ es el versor normal a la superficie.

Las componentes tangenciales de la velocidad dependen del tipo de fluido con el que se está trabajando, si asumimos fluidos no-viscosos no existe ninguna restricción sobre la velocidad paralela a la interfase.

En el caso de fluidos viscosos la velocidad tangencial debe ser continua, de lo contrario existirían forzados muy altos que tenderían a hacer continuas las velocidades, *i.e.*

$$u_{1\parallel} = u_{2\parallel}. \quad (1.82)$$

En cuanto a las variables termodinámicas, la temperatura debe ser continua si existe un estado de equilibrio termodinámico (Si no hay conducción se espera un estado de equilibrio?). También la presión debe ser continua en la superficie de separación entre medios. Es decir,

$$T_1 = T_2, \quad p_1 = p_2. \quad (1.83)$$

Aparece una diferencia importante entre fluidos viscosos y no-viscosos en los contornos. Como puede ser que sobre una superficie solida estática por un lado se esta exigiendo que la velocidad tangencial sea nula mientras en el caso de un fluido ideal la velocidad tangencial puede ser un valor finito. ¿Qué es lo que sucede por ejemplo en la superficie de la tierra en el caso

que en una primera aproximación asumimos la atmósfera como un fluido ideal? En realidad la capa de donde se pasa de tener altas velocidades paralelas es muy poco profunda de hecho se producen altas derivadas que dan lugar a una capa límite turbulenta. Es necesario entonces modelar a través de parametrizaciones las transferencias de momento entre la superficie y el aire.

En el caso de fluidos ideales no viscosos pueden existir discontinuidades en las velocidades tangenciales por lo tanto es conveniente plantear la continuidad de los desplazamientos normales a la superficie (en lugar de las velocidades) ya que notar que las velocidades normales pueden ser discontinuas.

1.6 Flujo de energía: conservación de la energía total

Queremos encontrar una ecuación que describa la evolución de la energía total de un elemento material de fluido, para esto haremos uso de las ecuaciones de Navier-Stokes. La energía total de un elemento de fluido esta compuesta por la energía interna del elemento, la energía potencial y la energía cinética.

Para encontrar la evolución de la energía cinética de un elemento de fluido, multiplicamos la ecuación de momento por \mathbf{u} ,

$$\rho D_t |\mathbf{u}|^2 / 2 = \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{F} + u_i \partial_{x_j} \sigma_{ij} \quad (1.84)$$

El término de la mano izquierda es claramente la energía cinética del sistema por unidad de volumen, mientras en la derecha tenemos un término debido a las fuerzas volumétricas que podría ser expresado como un potencial en el caso que las fuerzas sean conservativas, finalmente el término del tensor de stress tiene dos contribuciones las debida a la viscosidad y a la presión.

Si \mathbf{F} es una fuerza conservativa que solo depende de la posición (e.g. fuerza de la gravedad), luego vale que $\mathbf{F} = -\nabla \Phi$ y $\partial_t \Phi = 0$, usando estas expresiones tenemos,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{F} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \Phi = -D_t \Phi \quad (1.85)$$

Reescribiendo (1.84) obtenemos la evolución de la energía mecánica,

$$\rho D_t (|\mathbf{u}|^2 / 2 + \Phi) = +u_i \partial_{x_j} \sigma_{ij}. \quad (1.86)$$

Sumando (1.86) y la ecuación de evolución de la energía interna (1.62) obtenemos la evolución de la energía total del sistema,

$$\rho D_t (|\mathbf{u}|^2 / 2 + \varepsilon + \Phi) = \partial_{x_j} (u_i \sigma_{ij}) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T - \mathbf{F}_{rad}) \quad (1.87)$$

Cabe aclarar que este tipo de ecuaciones, (1.86), (1.87), no son ecuaciones de pronóstico como lo eran las ecuaciones de conservación del momento que gobiernan la evolución de las variables incógnitas del fluido a estudiar, sino que son ecuaciones de *diagnóstico*. Estas ecuaciones nos dan la evolución de variables que son funciones de las variables incógnitas, sino que son restricciones entre las variables, como en este caso es la energía total del elemento de fluido.

El término de la izquierda (LHS) es la energía total compuesta por la energía cinética, la interna, y la potencial mientras en el RHS se encuentran las fuentes y sumideros de la energía.

Si el fluido es ideal, es decir $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$, $\mathbf{F}_{rad} = 0$ y $\kappa \approx 0$, se cumple que

$$\rho D_t(|\mathbf{u}|^2/2 + \varepsilon + \Phi) = -\nabla \cdot (p\mathbf{u}) \quad (1.88)$$

En el caso de un fluido ideal, la única fuente de energía es la razón de trabajo realizado por la presión.

Definiendo a la energía total por unidad de volumen $E_T = \rho(|\mathbf{u}|^2/2 + \Phi + \varepsilon)$ se tiene que

$$\partial_t E_T + \nabla \cdot [\mathbf{u}(E_T + p)] = 0 \quad (1.89)$$

Notar la presencia de un término fuente o sumidero en esta ecuación (1.89).

1.7 Invariante para un fluido ideal, estático: Teorema de Bernoulli

En un elemento de fluido la energía total no se conserva como hemos deducido en la anterior sección, esto sucede aun cuando el fluido es ideal como quedo plenamente establecido en (1.88), donde tenemos un término fuente de energía. Cabe preguntarse si existe algun tipo de cantidad que sea conservada. Buscamos una integral de movimiento, es decir una cantidad que sea conservada, en forma equivalente a la energía mecánica en un problema de mecánica clásica de fuerzas conservativas. Para obtener una integral de movimiento necesitamos expresar al término de la presión en (1.88) como una derivada material (multiplicada por la densidad), de esta forma tendríamos una cantidad que se conserva.

Utilizando la conservación de la masa podemos derivar,

$$\nabla \cdot (p\mathbf{u}) = \rho[D_t(p/\rho) - \rho^{-1}\partial_t p] \quad (1.90)$$

Reemplazando, (1.90) en (1.88) se obtiene que

$$\rho D_t(|\mathbf{u}|^2/2 + \varepsilon + \Phi + p/\rho) = \partial_t p \quad (1.91)$$

Si asumimos que p es estático tal que $\partial_t p = 0$ luego

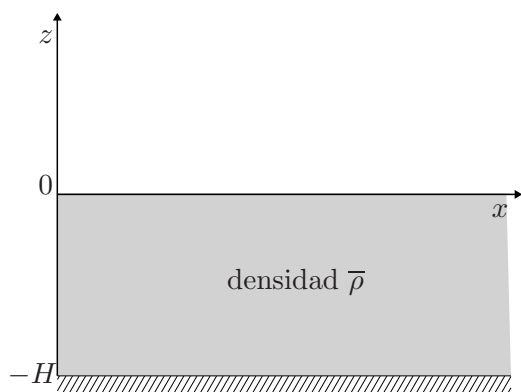
$$\boxed{D_t(1/2|\mathbf{u}|^2 + \varepsilon + \Phi + p/\rho) = 0} \quad (1.92)$$

esta cantidad es conservada a lo largo de la trayectoria de un elemento material de fluido. Se conoce a (1.92) como ecuación de Bernoulli, y a la cantidad que se conserva se la denomina función de Bernoulli. Como en el caso de un flujo estático las trayectorias y las líneas de corriente son equivalentes entonces la cantidad es constante en las líneas de corriente.

El hecho que existe una cantidad que se conserve, significa que uno puede analizar distintas regiones del fluido a lo largo de una línea de corriente y deducir como se intercambian los distintos términos que componen la cantidad conservada, es decir intercambios de energía cinética, interna, o potencial o $p\rho$.

La constante no es necesariamente la misma para distintas líneas de corriente. En el caso de flujo potencial es la misma para todas las líneas.

1.8 Fluidos en reposo: hidrostática



Supongamos un estanque extenso de profundidad H que se encuentra lleno de un fluido de densidad constante ρ y que se encuentra en reposo como se muestra en Figura 1.6^a. La superficie libre del fluido está sometida a una presión “atmosférica” o de entorno constante, $p = p_a$.

^aNo necesitamos asumir que el fluido es no-viscoso ya que en estado de reposo la única fuerza superficial es la presión, las fuerzas del tensor de stress tangenciales son nulas.

Figura 1.6: Problema de una capa de fluido con superficie libre. La superficie libre tiene una presión de $p(\eta) = p_a$.

De las ecuaciones de Euler se obtiene que en reposo existe un balance de fuerzas, entre el gradiente de presión y la fuerza de la gravedad:

$$0 = -\nabla p + \rho \mathbf{g}. \quad (1.93)$$

Dado que $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{k}}$,

$$\partial_z p = -\rho g. \quad (1.94)$$

Integrando esta ecuación entre $z = 0$ y z para el fluido de densidad constante en reposo se obtiene la presión a una profundidad z

$$p = -\rho g z + p_a. \quad (1.95)$$

Es decir que la presión aumenta en forma lineal con la profundidad. Notar que la presión es siempre positiva (z es negativo en (1.95)) y puede ser interpretada como el peso de la columna de fluido localizada por encima del elemento de fluido en consideración⁷.

Ejercicio 1.14: Suponga que tenemos un fluido en reposo que se encuentra bajo la acción de la gravedad, cuya ecuación de estado es la de un gas ideal. Asuma además que el fluido está a una temperatura constante T_0 , determine como varía la presión y la densidad del fluido con la altura.

1.9 Estabilidad en un gas ideal

Hemos visto en la sección anterior que cuando un fluido está en reposo existe un equilibrio de fuerzas entre el gradiente vertical de presión y la fuerza de gravedad, sin embargo esto no nos asegura que el equilibrio sea estable, no sabemos lo que sucederá si desplazamos verticalmente

⁷Esta analogía con el peso de la columna solo es válida en el caso hidrostático y no debe extenderse a situaciones con movimientos de fluidos excepto cuando la ecuación hidrostática sea válida, e.g. ecuaciones de ondas planas.

hacia arriba (o hacia abajo) a nuestro elemento material de fluido, dependiendo de como sea el peso del elemento comparado con la fuerza de flotación del entorno puede que este continúe ascendiendo, flujo inestable (estable) o descienda, flujo estable (inestable).

Es decir que la estabilidad consiste en la comparación a través del principio de Arquímedes del peso del elemento de fluido con el peso del fluido que ha sido desplazado, al cual denominaremos entorno. Supongamos que llevamos un elemento de fluido de la posición z a la posición $z + \delta z$, la aceleración del elemento de fluido en la posición $z + \delta z$ viene dada por

$$\rho_p(z)V \frac{d^2 \delta z}{dt^2} = -\rho_p(z + \delta z)Vg + \rho_e(z + \delta z)Vg \quad (1.96)$$

donde ρ_p es la densidad del elemento de fluido (también denominado parcela), ρ_e es la densidad del entorno y V es el volumen del elemento de fluido.

Entonces si $(-\rho_p(z + \delta z) + \rho_e(z + \delta z)) > 0$ el elemento continuará su ascenso, esto significa que el equilibrio es inestable. Si por el contrario la densidad del elemento de fluido es mayor a la del entorno, éste tenderá a volver a su posición de equilibrio y en este caso el equilibrio es estable.

Desarrollando en Taylor a las densidades, la del entorno es

$$\rho_e(z + \delta z) = \rho_e(z) + \partial_z \rho_e(z) \delta z \quad (1.97)$$

mientras la densidad de la parcela es

$$\rho_p(z + \delta z) = \rho_p(z) + \partial_z \rho_p(z) \delta z \quad (1.98)$$

donde hemos tenido en cuenta que $\rho_p(z) = \rho_e(z)$, la parcela tenía la densidad de su entorno en la posición original.

Reescribiendo (1.96) y manteniendo solo hasta el primer orden en δz obtenemos,

$$\frac{d^2 \delta z}{dt^2} = \frac{\partial_z \rho_e - \partial_z \rho_p}{\rho_e} g \delta z \quad (1.99)$$

Notar que las cantidades se encuentran todas evaluadas a la altura z .

Tenemos entonces que encontrar como varía la densidad del entorno con la altura, y la del elemento de fluido con la altura. Si asumimos que el elemento de fluido es ascendido lo suficientemente rápido como para que no haya conducción de calor con el entorno entonces el proceso es adiabático y podemos determinar $\partial_z \rho_p$ en función de los cambios de temperatura con la altura en un proceso adiabático. Equivalentemente, la variación de la densidad del entorno con la altura $\partial_z \rho_e$ en un estado de equilibrio hidrostático también la podemos expresar en función de la variación de la temperatura.

Si el elemento de fluido realiza un proceso isentrópico se cumple que

$$0 = \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T dp + \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p dT \quad (1.100)$$

Utilizando conocidas relaciones termodinámicas (releer deducción de (1.70)) se obtiene

$$0 = c_v \frac{dp}{p} - c_p \frac{d\rho}{\rho} \quad (1.101)$$

Derivando con respecto a z , (1.101), y teniendo en cuenta que el elemento de fluido estaba en equilibrio mecánico $p_p = p_e$ y además como el entorno estaba en equilibrio hidrostático

$$\frac{1}{\rho_e} \frac{d\rho_p}{dz} = -\frac{c_v}{c_p} \frac{g}{RT_e} \quad (1.102)$$

De esta manera hemos obtenido como cambia la densidad del elemento de fluido con la altura en función de la temperatura. Por otro lado, para expresar la densidad del entorno en función de la temperatura usamos que

$$d\rho_e = \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T dp \quad (1.103)$$

Usando la relación de gas ideal se deriva que

$$\frac{1}{\rho_e} \frac{d\rho_e}{dz} = -\frac{1}{T_e} \frac{dT_e}{dz} + \frac{1}{p_e} \frac{dp_e}{dz}. \quad (1.104)$$

Luego, usamos equilibrio hidrostático,

$$\frac{1}{\rho_e} \frac{d\rho_e}{dz} = -\frac{1}{T_e} \frac{dT_e}{dz} - \frac{g}{RT_e}. \quad (1.105)$$

Hemos obtenido las relaciones entre las densidades y las temperaturas (1.102) y (1.105) reemplazando en (1.99) obtenemos

$$\frac{d^2 \delta z}{dt^2} = -\frac{g}{T_e} \left(\frac{dT_e}{dz} + \frac{g}{c_p} \right) \delta z. \quad (1.106)$$

Tenemos una relación que nos dice directamente del perfil vertical de temperatura si el gas ideal estará en equilibrio estable o no,

$$\frac{dT_e}{dz} < -\frac{g}{c_p} \quad \rightarrow \quad \text{Inestable}$$

$$\frac{dT_e}{dz} > -\frac{g}{c_p} \quad \rightarrow \quad \text{Estable}$$

Para el aire ($c_p = 1\text{J(gK)}^{-1}$) se tiene que $\frac{g}{c_p} = 9.8\text{K/km}$ es decir que si la temperatura desciende con la altura de manera mas abrupta que 9.8K/km la atmósfera estará inestable convectivamente. De lo contrario si el perfil de temperatura desciende mas moderadamente será estable y en este caso de (1.106) se observa que se producirán oscilaciones verticales cuya frecuencia cuadrada viene dada por

$$N^2 = \frac{g}{T_e} \left(\frac{dT_e}{dz} + \frac{g}{c_p} \right) \quad (1.107)$$

Ésta, N^2 , es denominada frecuencia de flotación o frecuencia de Brunt-Väisälä. Las oscilaciones que se generan son denominadas ondas de gravedad ya que es generada a través de esta fuerza, es la aceleración de la gravedad la que tiende a volver a la parcela hacia su posición de equilibrio cuando ésta es desplazada verticalmente.

1.10 Ondas de sonido

Veamos que sucede cuando realizamos pequeñas perturbaciones en un fluido ideal cuya única fuerza sobre los elementos de fluido son los gradientes de presión, es decir sin considerar la acción de la gravedad. El conjunto de ecuaciones que se deben satisfacer es

$$\rho D_t \mathbf{u} = -\nabla p \quad (1.108)$$

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1.109)$$

$$D_t \theta = 0 \quad (1.110)$$

La ultima ecuación (1.110) es rescrita usando que

$$\theta = \frac{p}{\rho R} \left(\frac{p_0}{p} \right)^{R/c_p} \quad (1.111)$$

Aplicando el operador derivada material D_t en (1.111) resulta

$$\frac{1}{\theta} D_t \theta = 0 = \frac{1}{\gamma p} D_t p - \frac{1}{\rho} D_t \rho \quad (1.112)$$

donde se uso que $c_p = c_v + R$ y $\gamma = c_p/c_v = 1/\kappa$.

Método perturbativo

Consideremos un parámetro de pequeñez $\epsilon \ll 1$ entonces las variables dependientes pueden ser representadas por

$$\Psi = \Psi_0 + \epsilon \Psi_1 + \epsilon^2 \Psi_2 + \dots \quad (1.113)$$

donde Ψ es p , \mathbf{u} , ρ .

La solución propuesta debe ser reemplazada en el sistema de ecuaciones y luego vamos a obtener un sistema de ecuaciones en el orden 0, un sistema de ecuaciones en orden ϵ y así sucesivamente. Generalmente, se asume que el orden 0 es una solución simple, e.g. Ψ_0 es una constante.

Asumimos que el estado que se quiere determinar son pequeñas perturbaciones a un estado básico que es constante (\mathbf{u}_0 , ρ_0 , p_0 son independientes de la posición y el tiempo),

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1(x, y, z, t) \quad (1.114)$$

$$\rho(x, y, z, t) = \rho_0 + \rho_1(x, y, z, t) \quad (1.115)$$

$$p(x, y, z, t) = p_0 + p_1(x, y, z, t) \quad (1.116)$$

Expresando en (1.108), todas las variables como suma de (1.114)

$$(\rho_0 + \rho_1)[\partial_t + (\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1) \cdot \nabla](\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1) = -\nabla(p_0 + p_1). \quad (1.117)$$

Teniendo en cuenta que las cantidades del estado básico son constantes independientes de la posición y el tiempo resulta

$$(\rho_0 + \rho_1)[\partial_t + (\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1) \cdot \nabla]\mathbf{u}_1 = -\nabla p_1. \quad (1.118)$$

Realizando el procedimiento de linealización, en los términos con suma de estado básico mas perturbación que estan multiplicados por una perturbación nos quedamos solo con el estado básico (es decir despreciamos los términos cuadráticos de las perturbaciones),

$$\rho_0[\partial_t + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla]\mathbf{u}_1 = -\nabla p_1, \quad (1.119)$$

denotamos al operador derivada material del estado básico $D_{0t} = \partial_t + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla$, entonces la ecuación de conservación de momento para la perturbación de la velocidad es

$$\rho_0 D_{0t} \mathbf{u}_1 = -\nabla p_1. \quad (1.120)$$

Siguiendo el mismo procedimiento en (1.109) obtenemos la ecuación de conservación de la masa, para las perturbaciones de la densidad,

$$D_{0t} \rho_1 + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0. \quad (1.121)$$

En el caso que hubieramos asumido un fluido incompresible $\rho_1 = 0$, lo que resulta de (1.121) es que la divergencia de la perturbación de velocidad es nula.

Linealizando y eliminando \mathbf{u}_1 de (1.120) y (1.121) resulta

$$\rho_0 D_{0tt} \rho_1 - \nabla^2 p_1 = 0 \quad (1.122)$$

Linealizando la ecuación de conservación de la entropía (1.112)

$$D_{0t} p_1 - \gamma p_0 / \rho_0 D_{0t} \rho_1 = 0 \quad (1.123)$$

estas perturbaciones de presión producidas por la compresión/expansión adiabática son esenciales para producir las ondas de sonido.

Eliminando ρ_1 entre las dos ecuaciones resultantes obtenemos una ecuación para las perturbaciones de presión

$$D_{0tt}^2 p_1 - \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \nabla^2 p_1 = 0. \quad (1.124)$$

Esta es la ecuación de ondas. Si proponemos una solución ondulatoria

$$p_1 = A \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)] \quad (1.125)$$

Reemplazando la solución propuesta en la ecuación (1.124) resulta la relación de dispersión

$$-(-\omega + \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{k})^2 + \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \mathbf{k} = 0 \quad (1.126)$$

dividiendo por el módulo del vector número de onda obtenemos la expresión para la velocidad de fase

$$c = \mathbf{u}_0 \cdot \hat{\mathbf{k}} \pm (\gamma p_0 / \rho_0)^{1/2}. \quad (1.127)$$

Claramente tenemos ondas no dispersivas que se propagan a una velocidad de fase constante (independiente del número de onda). La velocidad del sonido, relativa al flujo, es $c_s = (\gamma p_0 / \rho_0)^{1/2}$. En la atmósfera asumiendo un gas diatómico $\gamma = 7/5$, $T_0 = 300K$ nos da una velocidad de sonido de referencia de $350m/s$.

Las magnitudes involucradas con la propagación del sonido en la atmósfera son muy pequeñas. Una conversación alta produce unos 70 decíbeles y esto corresponde a una variación de la presión de $0.06Pa$ mientras las variaciones de presión relacionada al tiempo en la atmósfera son del orden de los 10^3Pa . Por lo que en general la producción de sonido se considera despreciable cuando estudiamos los movimientos de la atmósfera y el océano.

Ejercicio 1.15: Deduzca la ecuación de estabilidad para un gas ideal bajo la acción de la gravedad utilizando la ecuación de momento vertical y la conservación de la temperatura potencial. Asuma que hay pequeñas perturbaciones (método perturbativo) a un estado básico en reposo. Asuma además que las perturbaciones de la presión son despreciables. Ayuda. Recordar que las ρ_0 y p_0 para el caso de un gas ideal bajo la acción de la gravedad dependen de la altura.

Capítulo 2

Ajuste bajo gravedad

La forma general de resolución de un problema de dinámica de fluidos que emplearemos es realizando pequeñas perturbaciones a un fluido que se encontraba en equilibrio y estudiar como el fluido evoluciona hacia un nuevo estado de equilibrio.

Que hay detrás de este esquema de pensamiento:

- los fluidos permanecen en estado de equilibrio excepto que agentes externos lo perturben.
- la respuesta del fluido al agente externo (perturbación, forzado etc.) es evolucionar hacia un nuevo estado de equilibrio.

Por otro lado vamos a asumir que la perturbación generada por el agente externo es “pequeña” y de esta manera podemos *linealizar* es decir despreciar los términos no lineales que aparecen en las ecuaciones.

2.1 Ondas de gravedad superficiales

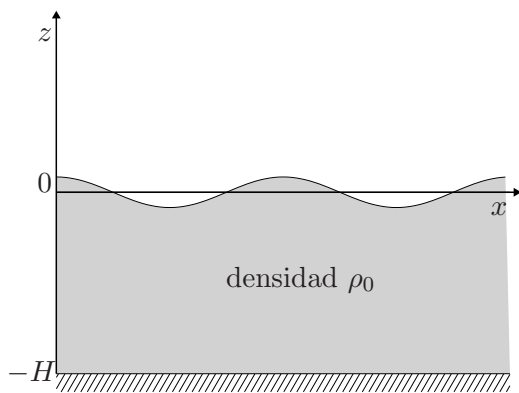


Figura 2.1: Problema de una capa de fluido con superficie libre. La superficie libre tiene una presión de $p(\eta) = p_a$.

Consideremos el sistema representado en Fig. 2.1, *viz* un estanque extenso de profundidad H que se encuentra lleno de un fluido no viscoso de densidad constante ρ_0 . Inicialmente el fluido esta en reposo y repentinamente es alterado por un factor externo, e.g. tiramos una piedra. El sistema de coordenadas se ubica tal que el plano $x-y$ para $z = 0$ coincide con la interface definida en el estado de equilibrio hidrostático, por lo que el fondo del estanque esta localizado en $z = -H$. La fuerza de la gravedad por unidad de masa g actua en la dirección z negativa, $\mathbf{g} = -g\hat{k}$.

Las preguntas son: ¿como responderá el fluido, que tipos de movimientos se establecerán?, ¿se

logrará obtener un nuevo tipo de equilibrio?, ¿es el nuevo equilibrio estable?. Es decir queremos determinar cual será el proceso de ajuste que llevará al fluido del estado alterado en que se encuentra a un estado de equilibrio. Dado que la fuerza restauradora que será la encargada de establecer este equilibrio es la fuerza de gravedad el proceso se denomina ajuste bajo gravedad.

La observación de este fenómeno nos indica por un lado que el fluido responde a la perturbación a través de ondas que eliminan la energía cinética o potencial introducida a través de su propagación hacia el infinito (suponemos los contornos muy lejos para evitar reflexión), para obtener luego de este proceso un nuevo estado de equilibrio hidrostático. En el caso en que la interface tenga una distribución inicial, el nuevo estado del fluido será uno en el cual la energía potencial extra se habrá distribuido en toda la superficie del estanque. Tratemos de formular el problema matemáticamente y de encontrar su evolución.

Dado que se asume que la densidad del fluido es constante, ρ_0 , las ecuaciones que gobiernan la evolución del fluido son, conservación del momento y ecuación de continuidad,

$$\rho_0 D_t \mathbf{u} = -\nabla p + \rho_0 \mathbf{g} \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.2)$$

De esta manera el sistema de ecuaciones esta cerrado, tenemos cuatro ecuaciones con cuatro variables independientes incógnitas (p, \mathbf{u}). Al considerar la densidad constante, y asumirla como dato del problema, hemos eliminado la termodinámica y tenemos un problema puramente dinámico.

Las condiciones de contorno serán dadas por la continuidad de la velocidad vertical del fluido tanto en el contorno inferior como en el superior y la continuidad de la presión en el contorno superior. Entonces, en el contorno inferior

$$w(z = -H) = 0 \quad (2.3)$$

en la superficie libre

$$w(z = \eta) = D_t \eta \quad (2.4)$$

donde $\eta(x, y, t)$ es la superficie que define la interface. Esta es la condición para que las partículas que están en la interface permanezcan allí (dado que de lo contrario existiría vacío y por definición la interface es donde se ubica la superficie libre del fluido).

La presión en la condición de contorno inferior puede tomar cualquier valor ya que se encuentra ante una pared rígida, mientras en el contorno superior tenemos que la presión debe ser igual a la presión “ambiente”,

$$p(\eta) = p_a \quad (2.5)$$

Tanto el sistema de ecuaciones diferenciales como la condición de contorno son no-lineales y no existe una solución analítica conocida. Mas aun, no se sabe si tal solución existe y si es suave.

Pero dado que estabamos en estado de reposo y lo que hicimos fue producir una pequeña perturbación al estado de reposo esperamos entonces que la solución sea una pequeña perturbación a la solución que existía, léase al equilibrio hidrostático.

Asumimos que la perturbación es pequeña, explícitamente la hipótesis es que los desplazamientos verticales de la interface son mucho menores a la profundidad del fluido, $\eta = \epsilon \eta_1 \ll H$,

entonces escribimos a los campos en potencias de un parámetro de pequeñez ϵ . Este método perturbativo nos permite desarrollar la ecuación en distintos órdenes por lo que se obtiene así un sistema de ecuaciones para cada orden. Las ecuaciones de orden 0, en este método, se denominan *estado básico*, este es el estado que existía antes que el sistema fuera perturbado. Las ecuaciones en primer orden son denominadas ecuaciones lineales y por ende el método de obtención de las ecuaciones de primer orden se llama linealización.

Reemplazando soluciones de la forma (1.113) en (2.1), (2.2) obtenemos una serie de ecuaciones para cada orden en ϵ . Las ecuaciones para el orden 0, en un problema, donde *el estado básico* es estático ($\psi_0(\mathbf{x}, t) = \psi_0(\mathbf{x})$), son

$$\rho_0(\mathbf{u}_0 \cdot \nabla)\mathbf{u}_0 = -\nabla p_0 + \rho_0 \mathbf{g} \quad (2.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0 \quad (2.7)$$

Denominamos entonces estado básico a la solución de las ecuaciones de orden cero.

Las ecuaciones que deben satisfacer las variables de orden 1 son

$$\rho_0(\partial_t \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \mathbf{u}_0) = -\nabla p_1 \quad (2.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0 \quad (2.9)$$

Notar que las ecuaciones perturbadas de primer orden son lineales, es por esto que la obtención de las ecuaciones perturbadas se suele llamar linealización, y aquí radica la gran simplificación que nos da el método perturbativo hemos evitado las no linealidades, por supuesto el método es válido en tanto y en cuanto $u_0 \gg \epsilon u_1$ o mas específicamente $\mathbf{u}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \mathbf{u}_0 \gg \epsilon \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \mathbf{u}_1$.

?

Dado que las condiciones de contorno están evaluadas en la interfase $z = \eta$ para obtener el primer orden o término lineal es necesario realizar un desarrollo de Taylor alrededor de la posición de equilibrio hidrostático de la interfase, $z = 0$. Por lo que la velocidad vertical se expresa como

$$w(z = \eta) = w(z = 0) + \eta \partial_z w|_{z=0} + \sigma(\eta^2) = \epsilon w_1(z = 0) + \epsilon^2 \eta_1 \partial_z w_1 + \sigma(\eta^2) \quad (2.10)$$

Es decir que en primer orden estamos evaluando a la velocidad en la posición de equilibrio. Luego si exigimos continuidad de la velocidad vertical perturbada, orden 1 del desarrollo,

$$w_1(z = 0) = \partial_t \eta_1 \quad (2.11)$$

Como el problema nos dice que teníamos un estado de reposo, el estado del sistema hasta orden ϵ puede ser descrito por

$$\mathbf{u} = \epsilon \mathbf{u}_1 + \sigma(\epsilon^2), \quad p = p_0(z) + \epsilon p_1 + \sigma(\epsilon^2), \quad \rho = \rho_0 \quad (2.12)$$

donde $\mathbf{u}_0 = 0$, y por lo tanto existía equilibrio hidrostático

$$-\partial_z p_0 - \rho_0 g = 0 \quad (2.13)$$

si integramos en altura (2.13),

$$p_0(z) - p_a = - \int_0^z \rho_0 g dz' \quad (2.14)$$

luego se tiene que

$$p_0(z) = p_a - \rho_0 g z \quad (2.15)$$

es decir que para el estado básico la presión en una dada profundidad z (negativo) viene dada por el peso de la columna de fluido encima de esa altura (por unidad de área), mas la presión exterior.

Las ecuaciones perturbadas correspondientes al primer orden del desarrollo en ϵ representarán el disturbio al estado básico. Las ecuaciones resultantes a primer orden son (notando que e.g. $D_t \mathbf{u} = \partial_t \epsilon \mathbf{u}_1 + \epsilon^2 (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) \mathbf{u}_1 + \dots = \epsilon \partial_t \mathbf{u}_1 + \sigma(\epsilon^2)$)

$$\rho_0 \partial_t \mathbf{u}_1 = -\nabla p_1 \quad (2.16)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0 \quad (2.17)$$

Aplicando el operador divergencia a (2.16) y usando (2.17) se obtiene una ecuación para la presión perturbada:

$$\nabla^2 p_1 = 0 \quad (2.18)$$

es decir que las perturbaciones de la presión satisfacen la ecuación de Laplace.

Lamentablemente (2.18) no nos permite obtener la evolución temporal de p . La información sobre la evolución temporal deberá ser obtenida a través de las condiciones de contorno.

Proponemos ahora una solución para p_1 que sea solución de (2.18), para esto nos vamos a restringir a un fluido 2D (alcanza con asumir simetría a lo largo del eje y , es decir los campos iniciales son independientes de la variable y). Como en la coordenada horizontal x no existen condiciones de contorno, asumimos un estanque extenso, pero si tenemos condiciones de contorno en la vertical, proponemos soluciones del tipo:

$$p_1(x, z, t) = \hat{p}_1(z, t) \exp(-ikx) \quad (2.19)$$

Reemplazando (2.19) la ecuación resultante es

$$\partial_{zz}^2 p_1 - k^2 p_1 = 0 \quad (2.20)$$

Luego las soluciones que proponemos, considerando que tenemos condiciones de contorno en $z = -H$, son

$$\hat{p}_1(z, t) = \hat{p}_A(t) \cosh(k(z + H)) + \hat{p}_B(t) \sinh(k(z + H)) \quad (2.21)$$

Como condición de contorno tenemos que la presión del fluido en la interfase libre debe ser igual a la presión del entorno:

$$p(z = \eta) = p_a. \quad (2.22)$$

Desarrollando en Taylor el RHS $p(z = \eta) = p(z = 0) + \eta \partial_z p(z = 0) + \sigma(\eta^2)$, notando que $p(z = 0) = p_0(z = 0) + \epsilon p_1(z = 0)$, donde $p_0(z = 0) = p_a$ y utilizando equilibrio hidrostático (2.13) obtenemos

$$p_1 = \rho_0 g \eta_1. \quad (2.23)$$

La otra condición en la interfase es $w_1(z = 0) = \partial_t \eta_1$ donde hemos mantenido solo el primer orden en $w_1(z = \eta_1)$ para ser consistentes con el segundo miembro. La condición de contorno inferior es $w_1(z = -H) = 0$.

Dado que la conservación de momento nos relaciona w con p , i.e. $\rho_0 \partial_t w_1 = -\partial_z p_1$, y que como $w_1(z = -H) = 0$ se debe cumplir que $\partial_z p_1(z = -H) = 0$, entonces $\hat{p}_B(t) = 0$.

En la superficie de arriba, de (2.23) se tiene que

$$\hat{p}_A(t) = \frac{\rho_0 g}{\cosh(kH)} \eta_1. \quad (2.24)$$

Esto nos determina la presión en función de la altura

$$\hat{p}_1(z, t) = \rho_0 g \hat{\eta}_1(t) \frac{\cosh[k(z + H)]}{\cosh(kH)}. \quad (2.25)$$

Hemos determinado las dependencias en altura de la solución, lo único que nos falta determinar son las dependencias temporales. Como hemos supuesto que es un problema de condiciones iniciales en el cual perturbamos inicialmente la interfase y luego dejamos que esta (y el fluido) evolucionen libremente, veamos como depende la ecuación que gobierna la evolución temporal de la interfase. En la interfase como condición de frontera y usando conservación de momento tenemos $\rho_0 \partial_{tt} \eta_1 = -\partial_z p_1(z = 0)$, reemplazando en esta ecuación la presión de (2.25) se tiene la ecuación diferencial para la evolución de la interfase

$$\partial_{tt}^2 \hat{\eta}_1 = -gk \tanh(kH) \hat{\eta}_1, \quad (2.26)$$

se propone entonces una solución oscilatoria

$$\hat{\eta}_1(t) = \tilde{\eta}_1 \exp(i\omega t) \quad (2.27)$$

Para que esta función sea solución de (2.26) debe existir una relación entre el número de onda y la frecuencia, que comúnmente se denomina relación de dispersión, esta es de la forma

$$\omega^2 = gk \tanh(kH). \quad (2.28)$$

Esta relación, (2.28), fue obtenida por Laplace, y nos da información sobre la propagación de las ondas superficiales. Notar que la frecuencia no depende linealmente del número de onda, es decir que la velocidad de fase $c = \omega/k$ depende del número de onda, en decir que las ondas superficiales que hemos obtenido son dispersivas.

La relación de dispersión tiene dos comportamientos límites en función del parámetro kH

$$kH \rightarrow \infty \quad \tanh(kH) \approx 1 \Rightarrow \omega^2 = kg \quad (2.29)$$

Éste es el límite de aguas profundas, u onda corta, notar que en este límite tenemos (seguimos obteniendo) ondas dispersivas.

En el límite de aguas poco profundas, pandas, $kH \rightarrow 0$ vale que $\tanh(kH) \approx kH$ la relación de dispersión aproximada es

$$\omega^2 = gHk^2 \quad (2.30)$$

En el límite $kH \rightarrow 0$ las ondas no son dispersivas, es decir para cualquier número de onda la velocidad de fase es independiente de k , $c = \sqrt{gH}$. En el caso del océano si tenemos una profundidad de 1 km, asumiendo que valdría la aproximación de aguas profundas, la velocidad de fase es 100 m/s!, y además son ondas no dispersivas por lo cual se propagarán grandes distancias sin desparramar la energía inicial.

Ejercicio 2.1: Dadas las soluciones realizar un desarrollo de Taylor en función de kH y ver como es el comportamiento de u , w y η para el límite $kH \rightarrow 0$. Luego analice las ecuaciones en este límite y deduzca que términos serán despreciables.

Ejercicio 2.2: Supongamos un viento (muy) repentino que produce un forzado en la superficie libre de un estanque extenso que inicialmente estaba en reposo. El forzado del viento produce una perturbación inicial de la interfase de la forma $\eta = \eta(x, t_0)$. Determine cual será la evolución de la presión y la velocidad. Utilice teoría de Fourier.

2.2 Ecuaciones de ondas pandas

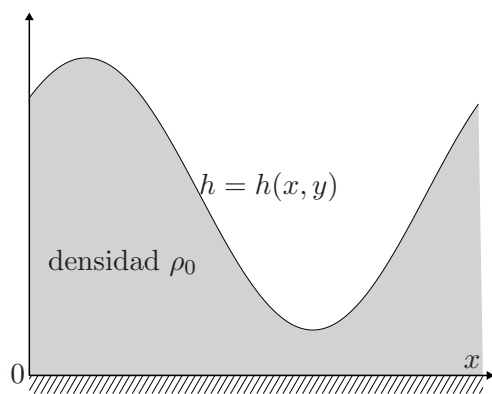


Figura 2.2: Problema de una capa de fluido con superficie libre. La superficie libre tiene una presión de $p(h) = p_a$. El origen se toma en el fondo del estanque.

Ahora trataremos de derivar el sistema de ecuaciones para el caso en que al plantear el problema podemos asumir que tenemos ondas largas o la profundidad del fluido es pequeña. Para este caso se obtuvo en la sección anterior que teníamos ondas no dispersivas. El sistema de ecuaciones que se derivará es el denominado ecuaciones de ondas pandas, el cual está basado en la aproximación hidrostática, pero en ningún momento asumiremos que el disturbio es pequeño, por lo que esperamos obtener las ecuaciones no-lineales.

En el límite de kH pequeño se puede observar de (2.25) que p_1 será una constante independiente de z es decir que el orden 0 del desarrollo en series de kH se obtiene que:

$$\partial_z p_1 = \rho_0 g \frac{\eta_1}{H} (kH)^2 + \sigma [(kH)^3] \quad (2.31)$$

Mientras es recién el orden kH (primer orden de pequeñez) en el que la velocidad vertical se iguala con la derivada vertical de la presión (que corresponde al orden $(kH)^2$ en la presión).

Es decir que *la aproximación de ondas pandas corresponde a tomar equilibrio hidrostático.*

Dado que el disturbio no es necesariamente pequeño, no haremos la aproximación lineal y por lo tanto medimos la profundidad del fluido, $h(x, y, t)$ (la altura de la interfase) desde el fondo del estanque como se muestra en Fig. 2.2. Nótese que eliminamos por completo el uso de la profundidad H un concepto que era necesario para el desarrollo en órdenes.

En estado hidrostático cuando tenemos un disturbio de la interfase, no necesariamente pequeño, la presión viene dada por

$$p = p_a + \rho_0 g (h - z). \quad (2.32)$$

Luego el gradiente horizontal de presión ($p = f(z) + \rho_0 g h(x, y, t)$) viene dado por

$$\nabla_H p = \rho_0 g \nabla_H h. \quad (2.33)$$

El suscripto H representa a gradientes horizontales, en x y y .

La relación entre p y h en (2.33) permite eliminar el término del gradiente de presión en la ecuación de momento horizontal, resultando

$$D_t \mathbf{u} = -g \nabla_H h. \quad (2.34)$$

La ecuación de conservación de la masa dado que el fluido es incomprensible es $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, integrando en altura desde $z = 0$ hasta $z = h$ resulta

$$w(h) - w(0) = -h \nabla_H \cdot \mathbf{u} \quad (2.35)$$

donde hemos usado que la velocidad horizontal es independiente de la altura, aproximación equivalente a la realizada para la presión en (2.32); esto se deduce de (2.34) ya que el lado derecho es independiente de z . Reemplazando por las condiciones de contorno,

$$D_t h + h \nabla_H \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.36)$$

El sistema de ecuaciones resultante para un fluido en la aproximación shallow-water es

$$\begin{cases} D_t \mathbf{u} = -g \nabla h \\ \partial_t h + \nabla \cdot (h \mathbf{u}) = 0 \end{cases} \quad (2.37)$$

donde se asume todas las variables solo dependen de x, y, t y la velocidad correspondiente es $\mathbf{u} = (u, v)$ solo la componente horizontal.

Mucho de los fenómenos físicos observados en sistemas mas complejos tienen su contrapartida en el de ondas pandas, por lo cual para estudiar procesos complicados el primer sistema a estudiar son las shallow-water equations. En particular para estudiar efectos no lineales. Otra utilidad de este sistema de ecuaciones se debe a que en general para modelar la atmósfera se divide la atmósfera en capas verticales, cada una de estas capas puede ser modelada por la shallow-water equations, ya que se las suele considerar de densidad constante y de poca profundidad (entre 1 km hasta 100m en los modelos de alta resolución).

Ejercicio 2.3: Linealizar el sistema de ecuaciones de ondas pandas alrededor de un estado en reposo con $h = h_0$, encontrar la velocidad de fase de las ondas. Notar que hemos logrado pasar las dependencias temporales del sistema de las ecuaciones de contorno a las ecuaciones mismas.

Ejercicio 2.4: Supongamos que tenemos un estanque cuya profundidad viene dada por $H(x) = -H_1 + H_2 \tanh(x/L)$.

- Determine las soluciones de perturbaciones lineales asumiendo que en $x \rightarrow -\infty$ la interfase viene dada por $\eta = \eta_0 \exp i(\omega t - kx)$.
- ¿Que es lo que sucede para un estanque con $H_1 = H_2$?

- Determine las soluciones de perturbaciones lineales si la profundidad del estanque $H(x) = -H_1 + H_2 \tanh(x/L)$ es aproximada por tres líneas rectas, con $H = -H_1 - H_2$ para $x < -L$, y $H = -H_1 + H_2$ para $x > L$ asumiendo que en $x \rightarrow -\infty$ la interfase viene dada por $\eta = \eta_0 \exp i(\omega t - kx)$.
- Saque conclusiones físicas de las diferencias que encuentra en las soluciones para $x \gg L$ en comparación con $x \ll -L$. ¿Qué es lo que esta sucediendo con el (pseudo)momento transportado por la onda? ¿Qué es lo que esta sucediendo con la energía de la onda?

2.2.1 Ondas shallow-water generadas por topografía

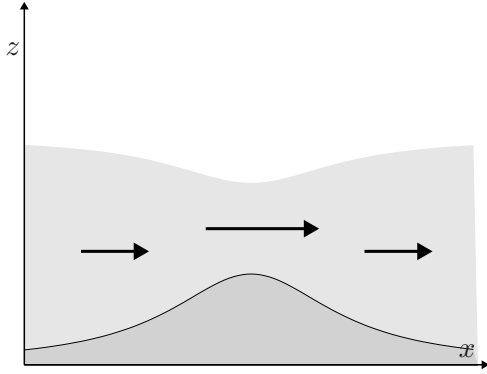


Figura 2.3: Problema de una capa de fluido que encuentra un obstáculo para el caso subcrítico $Fr < 1$.

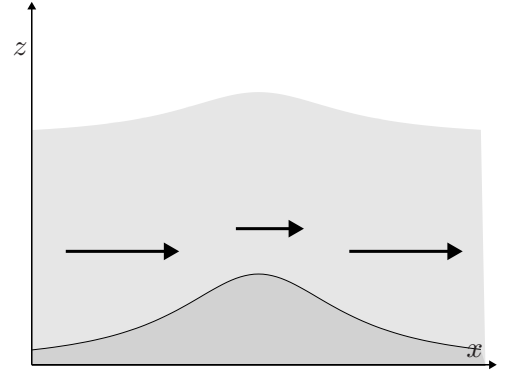


Figura 2.4: Problema de una capa de fluido que encuentra un obstáculo para el caso supercrítico $Fr > 1$.

Uno de los mecanismos mas importantes de generación de ondas es cuando un flujo básico barre un obstáculo $h_c(x)$ como se muestra en la figura 2.3. Supongamos en primera medida que el flujo básico es u_0 estático y tenemos un fluido de densidad constante ρ_0 y analicemos las perturbaciones lineales generadas sobre la superficie. Estos fenómenos son comunes de observar en rios o canales con fondo irregular.

Asumiendo la aproximación shallow-water podemos integrar en altura la ecuación de conservación de la masa, de manera similar al análisis en sección 2.2, en este caso la integración vertical tiene como condiciones de contorno a $w(-H + h_c) = D_t h_c$ y $w(\eta) = D_t \eta$. Luego si integramos en altura $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, se tiene que

$$\int_{-H+h_c}^{\eta} \partial_z w dz' = - \int_{-H+h_c}^{\eta} (\partial_x u + \partial_y v) dz' \quad (2.38)$$

resultando

$$D_t \eta - D_t h_c = w(\eta) - w(-H + h_c) = -(\eta - (-H + h_c))(\partial_x u + \partial_y v) \quad (2.39)$$

Asumiendo que la altura del obstáculo h_c es pequeña comparada con la profundidad H podemos linealizar. Si el flujo básico es estático esperamos que las ondas generadas también sean estáticas esto implica que todas las derivadas parciales con el tiempo sean 0, asumimos

además que el obstáculo solo depende de x , $h_c(x)$. Las ecuaciones de las perturbaciones de (2.37) serán

$$u_0 \partial_x u_1 = -g \partial_x \eta, \quad (2.40)$$

$$u_0 \partial_x (\eta - h_c) + H \partial_x u_1 = 0. \quad (2.41)$$

Resultando la perturbación de la interfase

$$\eta(x) = -\frac{Fr^2}{1 - Fr^2} h_c(x) \quad (2.42)$$

donde $Fr \equiv \frac{u_0}{c_{sw}}$ es el número de Froude, con $c_{sw} = \sqrt{gH}$.

Entonces en la superficie se producirá una perturbación que es proporcional a la altura del obstáculo.

La velocidad de las ondas estáticas viene dada por

$$u_1 = \frac{h_c}{H} \frac{u_0}{1 - Fr^2}. \quad (2.43)$$

Existe dos casos cualitativamente distintos, $Fr > 1$ denominado caso supercrítico en el cual el fluido viene con una dada energía cinética y esta energía cinética es transformada en energía potencial al subir sobre el obstáculo para luego de pasar el obstáculo recuperar la energía cinética inicial. El otro caso es el denominado subcrítico $Fr < 1$ el fluido transforma parte de la energía potencial antes del obstáculo en energía cinética sobre el obstáculo y por lo tanto acelerandose y disminuyendo la profundidad para luego recuperar la energía potencial inicial.

El caso en el cual $Fr \approx 1$ no puede ser analizado en el límite lineal y se deben considerar los términos no-lineales (Durrán, 1990), dando lugar a un fenómeno muy conocido y analizado por su comportamiento no lineal, denominado salto hidráulico.

Si consideramos el caso no-lineal las ecuaciones son

$$u \partial_x u + g \partial_x h = 0 \quad (2.44)$$

$$\partial_x [u(h - h_c)] = 0 \quad (2.45)$$

donde h es la profundidad del fluido medida desde el suelo plano (lo que antes era el plano $-H$).

Multiplicando por u la ecuación de momento (2.44) y usando (2.45) se obtiene

$$[u^2 - g(h - h_c)] \partial_x u = -g u \partial_x h_c \quad (2.46)$$

Definiendo la velocidad de fase como $c^2 \equiv g(h - h_c)$ (notar que $h - h_c$ es la profundidad del fluido) se obtiene

$$\partial_x u = \frac{gu}{c^2(1 - Fr^2)} \partial_x h_c \quad (2.47)$$

donde el número de Froude es $Fr = u/c$.

En función de la altura resulta:

$$\partial_x h = \frac{-u^2}{c_{sw}^2(1 - Fr^2)} \partial_x h_c \quad (2.48)$$

Luego notar que cuando tenemos un flujo subcrítico $Fr < 1$ pero cercano al caso crítico cuando nos arrimamos al obstáculo $h - h_c$ decrece mientras u crece, es decir que Fr esta creciendo y en algun momento puede resultar mayor que 1, en este caso tenemos que el flujo

transformó energía potencial a energía cinética antes del obstáculo a través del mecanismo ya mencionado, pero en lugar de recuperar la energía potencial al momento en que la altura del obstáculo comienza a disminuir. Dado que el flujo ha cambiado a supercrítico sigue existiendo una conversión de energía potencial a cinética por lo cual tenemos velocidades muy altas en el lee side (sotavento) del obstáculo y además la profundidad del fluido es muy pequeña para luego después del obstáculo volver a la situación normal, esto es lo que se denomina un *salto hidráulico*.

Este salto hidráulico se produce cuando hay una transición entre el flujo subcrítico a supercrítico.

Este es un comportamiento muy común en represas hidráulicas o canales, y además uno de los mecanismos que se ha propuesto para explicar los fuertes vientos que son observados en distintos lugares del planeta en el lee-side de las montañas, cuyos vientos son denominados bora (Yugoslavia), foehn (Francia), chinook (Estados Unidos) y zonda (Cuyo, Argentina).

2.3 Ondas en dos fluidos superpuestos

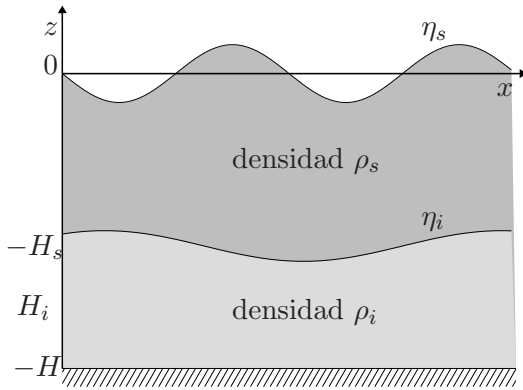


Figura 2.5: Problema de dos fluidos superpuestos con densidades ρ_s y ρ_i y con una superficie libre. La superficie libre tiene una presión de $p(\eta) = p_a$. La diferencia de forma entre la superficie y la interfase es al solo efecto del planteo del problema (en realidad η_s está ligado a η_i) en forma proporcional.

En la capa de abajo, tenemos la columna de fluido con ρ_i y toda la columna con fluido ρ_s que tiene una profundidad de $H_s + \eta_s - \eta_i$, por lo que la presión es

$$p = p_a + \rho_s g(H_s + \eta_s - \eta_i) + \rho_i g(\eta_i - z - H_s). \quad (2.50)$$

Derivando con respecto a x (2.49) y (2.50) y reemplazando en las ecuaciones linealizadas de momento horizontal para el fluido superior y el inferior se obtiene

$$\partial_t u_s = -g \partial_x \eta_s \quad (2.51)$$

Supongamos ahora que tenemos dos fluidos superpuestos de densidades ρ_s y ρ_i como se muestra en la Fig. 2.5. Notar que denotamos por subíndices s e i a las variables que corresponden a la capa superior e inferior respectivamente. Queremos resolver como responde este sistema a un forzado externo para esto usaremos las ecuaciones de aguas pandas.

En la capa superior la presión en la aproximación hidrostática viene dada por

$$p = p_a + \rho_s g(\eta_s - z) \quad (2.49)$$

donde p_a es la presión ambiente que se asume una constante.

$$\partial_t u_i = -g' \partial_x \eta_i - g \partial_x \eta_s \quad (2.52)$$

donde hemos asumido que $\rho_i \approx \rho_s$ y $g' = \frac{\rho_i - \rho_s}{\rho_i} g \ll g$ se denomina gravedad reducida, notar que los movimientos en la interfase interna sienten una gravedad g' . Asumimos simetría en y (las perturbaciones son independientes de esta variable).

La ecuación de conservación de la masa en la capa de arriba resulta de integrar en altura entre η_s y $-H_s + \eta_i$

$$\partial_t (\eta_s - \eta_i) + H_s \nabla \cdot \mathbf{u}_s = 0 \quad (2.53)$$

en la capa baja integrando entre $-H_s + \eta_i$ y $-H$ se obtiene

$$\partial_t \eta_i + H_i \nabla \cdot \mathbf{u}_i = 0 \quad (2.54)$$

Eliminando u_s y u_i , derivando en t 2.53 y 2.54 y en x 2.51 y 2.52, nos da

$$\partial_{tt}^2 \eta_s = (c_s^2 + c_i^2) \partial_{xx}^2 \eta_s + c_i'^2 \partial_{xx}^2 \eta_i \quad (2.55)$$

$$\partial_{tt}^2 \eta_i = +c_i^2 \partial_{xx}^2 \eta_s + c_i'^2 \partial_{xx}^2 \eta_i \quad (2.56)$$

donde $c_s^2 = gH_s$, $c_i^2 = gH_i$ y $c_i'^2 = g'H_i$.

Proponemos soluciones de la $\eta_s = \hat{\eta}_s(t) \exp i(\omega t - kx)$ y como tenemos un sistema de ecuaciones lineales acopladas pensamos en un problema de autovalores y autovectores, en cuyo caso el determinante debe anularse

$$\det \begin{vmatrix} c^2 - (c_s^2 + c_i^2) & -c_i'^2 \\ -c_i^2 & c^2 - c_i'^2 \end{vmatrix} \quad (2.57)$$

Luego la ecuación característica resultante es

$$[c^2 - (c_s^2 + c_i^2)](c^2 - c_i'^2) - c_i'^2 c_i^2 = 0 \quad (2.58)$$

Dado que $c_s^2, c_i^2 \gg c_i'^2$ se tiene

$$c^4 - (c_s^2 + c_i^2)c^2 + c_s^2 c_i'^2 = 0 \quad (2.59)$$

Las raíces de esta ecuación son

$$c^2 \approx \begin{cases} c_s^2 + c_i^2 = gH \\ \frac{c_s^2 c_i'^2}{c_s^2 + c_i^2} = \frac{g'H_s H_i}{H_s + H_i} \end{cases} \quad (2.60)$$

Existen dos modos cualitativamente distintos, un modo lento y un modo rápido, además cada uno de estos modos permite velocidades de propagación en ambos sentidos.

Calculemos ahora como son los desplazamientos para cada uno de estos modos. En el caso del modo rápido, de (2.56) con $c^2 = c_s^2 + c_i^2$ se tiene

$$\eta_i = \frac{c_i^2}{c_s^2 + c_i^2} \eta_s \quad (2.61)$$

esto es lo que se podría esperar para shallow water con condición de contorno interior $w = 0$ y lineal hasta la superficie externa. El modo rápido es simplemente lo que esperaríamos de una sola capa de fluido de densidad uniforme, este modo es denominado *barotrópico*.

El modo “nuevo” que esta apareciendo es el modo lento, en este caso los desplazamientos en la interfase de (2.55) reemplazando el c^2 por la segunda raíz, $c^2 = \frac{c_s^2 c_i'^2}{c_s^2 + c_i'^2}$ vienen dados por

$$\eta_i = \frac{c_s^2 + c_i'^2}{c_i'^2} \eta_s \quad (2.62)$$

La señal en la interfase esta amplificada con respecto a la señal en la superficie la cual es casi imperceptible si la diferencia de densidades es pequeña. Al modo lento se lo suele denominar modo *baroclínico*.

Ejercicio 2.5: Plantear un sistema de ecuaciones que tenga 3 capas de fluidos. ¿Cuántos modos tiene este sistema? ¿Qué tipo de modos nuevos aparecen? ¿son barotrópicos o baroclínicos?

Ejercicio 2.6: Extender el problema anterior a un sistema de n capas. ¿Puede hacer algun comentario sobre la aplicación de este sistema a modelos numéricos de la atmósfera?. Cada nuevo modo lento que aparece representa el movimiento de una sola capa y los desplazamientos en las otras capas son pequeños.

Ejercicio 2.7: Suponga dos fluidos superpuestos de densidades constantes $\rho_2 > \rho_1$, ambos fluidos se mueven con una velocidad u_0 , estos fluidos tienen cada uno una profundidad de H y como contorno inferior existe una superficie en forma de obstáculo $h_c(x)$ mientras sobre estos se encuentra un techo plano rígido. Resolver el sistema de ecuaciones resultante, ¿que tipo de modos son generados?, ¿cuál es el efecto del contorno superior?, ¿cómo sería el modo equivalente en el caso de que no existiera contorno superior?.

2.3.1 Fluidos superpuestos con distintas velocidades: Inestabilidad de Kelvin-Helmholtz

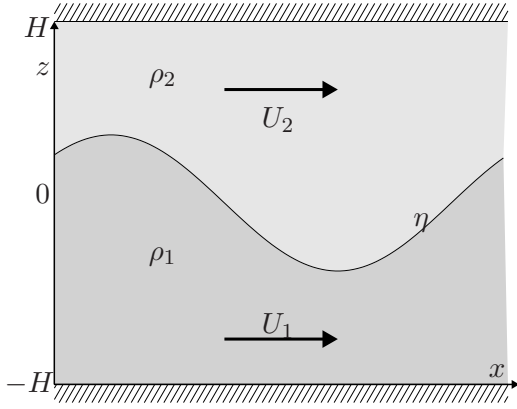


Figura 2.6: Problema de dos fluidos superpuestos con densidades ρ_1 y ρ_2 y con un techo. La capa de arriba tiene una velocidad U_2 y la de abajo U_1 .

Consideremos dos fluidos superpuestos con densidades constantes ρ_1 y ρ_2 en cada capa se tienen velocidades constantes U_1 y U_2^a . Como se muestra en Fig. 2.6. El estado básico en la vertical el balance hidrostático mientras en la horizontal notar que las velocidades constantes son posibles soluciones triviales de las ecuaciones. En este sentido las ecuaciones de conservación del momento horizontal se sigue cumpliendo trivialmente. Los fluidos están confinados en una cañería rectangular, por lo que no existe la superficie libre.

La presión total en la capa de arriba viene dada por

$$p = p_T(x, t) + \rho_2 g(H - z) \quad (2.63)$$

donde p_T es la presión en el techo, nótese que ésta puede variar horizontal y temporalmente y debe ser considerada una variable más del sistema como si tuviéramos una interfase ahí.

^aNotar que se tienen velocidades tangenciales distintas las cuales son solo posibles en un fluido donde la viscosidad puede ser despreciada, esto solo puede ser considerado como un caso límite en el cual las velocidades cambian en una pequeña capa.

En la capa de abajo, usando que la presión es continua en la interfase η , se tiene

$$p = p_T(x, t) + \rho_1 g(H - \eta) + \rho_2 g(\eta - z) \quad (2.64)$$

Las ecuaciones en la capa de arriba son

$$\rho_1 D_{1t} u_1 = -\partial_x p_T \quad (2.65)$$

donde $D_{1t} = \partial_t + U_1 \partial_x$

$$D_{1t} \eta = H \partial_x u_1 \quad (2.66)$$

Las ecuaciones de abajo son dadas por

$$\rho_2 D_{2t} u_2 = -\partial_x p_T - (\rho_1 - \rho_2) g \partial_x \eta \quad (2.67)$$

$$D_{2t} \eta = -H \partial_x u_1 \quad (2.68)$$

Notar que como las velocidades horizontales son distintas entonces $w_1(\eta) \neq w_2(\eta)$ lo que si es cierto es que los desplazamientos verticales en la interfase son iguales, *viz* $\zeta_1 = \zeta_2 = \eta$.

Eliminando u_1 de las ecuaciones arriba (2.65) y (2.66) se obtiene

$$\rho_1 D_{1t}^2 \eta = -H \partial_{xx}^2 p_T \quad (2.69)$$

Equivalentemente, eliminando u_2 de las ecuaciones de la capa de abajo (2.67) y (2.68) para luego eliminar p_T entre las ecuaciones resultantes se obtiene

$$\rho_2 D_{2tt}^2 \eta + \rho_1 D_{1tt}^2 \eta - (\rho_2 - \rho_1) g H \partial_{xx}^2 \eta = 0. \quad (2.70)$$

Proponemos como soluciones

$$\eta = \hat{\eta} e^{i(\omega t - kx)} \quad (2.71)$$

En lugar de determinar la relación de dispersión para ω es costumbre en estos problemas determinar las posibles velocidades de fase del disturbio,

$$c = \frac{\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2}{\rho_1 + \rho_2} \pm \sqrt{\frac{\Delta \rho}{\rho_1 + \rho_2} c_{sw}^2 - \frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} (U_1 - U_2)^2} \quad (2.72)$$

Lo interesante de esta “relación de dispersión” es que pueden aparecer casos en los cuales la velocidad de fase (o la frecuencia) puede ser imaginaria esto significa que tendremos una exponencial real que puede crecer con el tiempo! Esto es una inestabilidad, cualquier pequeño disturbio puede generar ondas y luego éstas comenzarán a crecer sacando energía del flujo medio. Si consideráramos que la energía cinética del flujo básico es finita y por lo tanto la velocidad del flujo medio puede cambiar entonces probablemente la diferencia entre las velocidades de las capas debería disminuir a medida que se radían ondas.

La condición para que exista inestabilidad viene dada para cuando el argumento de la raíz es negativo es decir,

$$(U_1 - U_2)^2 > \frac{\rho_2^2 - \rho_1^2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} \frac{gH}{\rho_1 \rho_2} \quad (2.73)$$

En el caso en que $\rho_1 > \rho_2$ por supuesto también tendremos una inestabilidad pero en este caso estamos hablando de la inestabilidad convectiva.

2.4 Ondas de gravedad internas

Hasta el momento hemos analizado las ondas que se producen en un fluido de densidad constante, un líquido como el agua o el aceite, vimos que se producen ondas en la superficie que decaen con la profundidad y se propagan horizontalmente. En el caso de dos fluidos superpuestos cada uno con densidad constante, como agua y aceite, se producen ondas en cada una de las interfases. Este problema se puede extender a un problema de n capas de fluidos con densidades diferentes (decrecientes en altura), tal que aparecen modos de oscilación en cada una de las interfases. Cuando la profundidad de cada capa tiende a cero mientras n tiende a infinito, por lo que esperamos tener infinitos modos.

Supongamos ahora que tenemos un gas ideal a temperatura constante T_0 ante la presencia de la gravedad, en ese caso hemos demostrado que si el fluido se encuentra en reposo, la ecuación hidrostática puede ser resuelta en combinación con la ecuación del gas ideal y se deduce que tanto la presión como la densidad decaen en altura exponencialmente con una escala de altura dada por $H = RT_0/g$. En este caso podemos plantear un problema de perturbaciones pequeñas, tal que podamos linealizar, a un estado básico en reposo con la densidad y la presión que dependen continuamente de z , $\rho_0(z) = \rho_r e^{-z/H}$ y $p_0(z) = p_r e^{-z/H}$, donde ρ_r y p_r son la

densidad y la presión a la altura de referencia $z = 0$ (e.g. en el caso de la atmósfera la superficie de la tierra). En este caso decimos que el fluido está continuamente estratificado (es decir que está formado por estratos/capas que varían en forma suave su composición). Para reducir una variable vamos a asumir que las perturbaciones son independientes de la variable y . El sistema de ecuaciones que deben satisfacer las perturbaciones es

$$\rho_0 \partial_t u_1 = -\partial_x p_1 \quad (2.74)$$

$$\rho_0 \partial_t w_1 = -\partial_z p_1 - \rho_1 g \quad (2.75)$$

$$\partial_t \rho_1 + \rho_0 \nabla \cdot \vec{u}_1 + w_1 \partial_z \rho_0 = 0 \quad (2.76)$$

$$\partial_t \theta_1 + w_1 \partial_z \theta_0 = 0 \quad (2.77)$$

Necesitamos además la relación entre las variables termodinámicas, como estamos trabajando con la temperatura potencial necesitamos una relación entre ρ_1 , p_1 y θ_1 . A partir de la expresión de θ ,

$$\theta = T \left(\frac{p}{p_r} \right)^{R/c_p} \quad (2.78)$$

podemos derivar que sus variaciones en función de ρ y p usando el método perturbativo

$$\frac{\partial_t \theta_1}{\theta_0} = \frac{\partial_t \rho_1}{\rho_0} + \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial_t p_1}{\rho_0} \quad (2.79)$$

donde como hemos visto en Sección (1.10), $c_s = (\gamma p_0 / \rho_0)^{1/2}$ es la velocidad de propagación del sonido.

El conjunto de ecuaciones que hemos obtenido contiene dos tipos de ondas, por un lado las ondas de sonido debido a la compresión del gas y por otro lado las ondas internas debido a la flotación, es de interés encontrar una aproximación consistente que nos permita filtrar las ondas de sonido en las ecuaciones para quedarnos solo con las denominadas ondas de gravedad internas (los modos internos que encontramos en el caso de los fluidos superpuestos).

Una de las aproximaciones más utilizadas en la derivación de las ondas de gravedad internas es la denominada aproximación de Boussinesq cuya derivación más estricta en términos de una expansión asintótica es dada en Spiegel and Veronis (1960). La aproximación de Boussinesq elimina dos efectos del conjunto de ecuaciones (2.74)-(2.77) y (2.79), filtra las ondas de sonido y no considera las variaciones de la densidad del estado básico con la altura. Entonces las premisas sobre las cuales podemos tomar la aproximación de Boussinesq son: para ondas que se propagan lentamente $c \ll c_s$ y para ondas con longitudes de onda verticales mucho menores a la escala de altura del gas H . Esencialmente en esta aproximación de Boussinesq estamos considerando que la densidad del fluido es una constante excepto en el término que da lugar a la fuerza de flotación $-\rho_1 g$ en la ecuación de conservación de momento vertical, despreciando las variaciones verticales de ρ_0 y despreciando las variaciones temporales de ρ_1 . En este caso la única forma de producir perturbaciones de la ρ_1 es a través de perturbaciones en la temperatura potencial pero no por perturbaciones en la p_1 , es decir que eliminamos el término que depende de p_1 en (2.79). Como resultado de esta aproximación se tiene que el fluido es incompresible (excepto por el término de flotación en la ecuación de momento)- satisface que la divergencia de las velocidades perturbadas es nula. El conjunto de las ecuaciones perturbadas en la aproximación de Boussinesq es

$$\rho_0 \partial_t u_1 = -\partial_x p_1 \quad (2.80)$$

$$\rho_0 \partial_t w_1 = -\partial_z p_1 - \rho_1 g \quad (2.81)$$

$$\partial_x u_1 + \partial_z w_1 = 0 \quad (2.82)$$

$$\partial_t \theta_1 + w_1 \partial_z \theta_0 = 0 \quad (2.83)$$

con la restricción

$$\frac{\partial_t \theta_1}{\theta_0} = -\frac{\partial_t \rho_1}{\rho_0} \quad (2.84)$$

Luego de (2.83) en (2.81) usando que $N_0^2 = g\theta_0^{-1}\partial_z \theta_0$,

$$\partial_{tt}^2 w_1 = -\partial_{zt}^2 \frac{p_1}{\rho_0} - N_0^2 w_1. \quad (2.85)$$

Mientras de (2.82) en (2.80) se obtiene

$$\partial_{tz}^2 w_1 = \partial_{xx}^2 \frac{p_1}{\rho_0} \quad (2.86)$$

La ecuación diferencial resultante para la perturbación de velocidad vertical viene dada por

$$\partial_{tt}^2 (\partial_{zz}^2 + \partial_{xx}^2) w_1 + N_0^2 \partial_{xx}^2 w_1 = 0 \quad (2.87)$$

Asumiendo que N_0 es constante (independiente de z) o estrictamente asumiendo que la escala de las variaciones verticales de N_0 son mucho menores que la escala vertical de las ondas (longitud de onda vertical) tenemos que (2.87) es una ecuación de coeficientes constantes. Por lo que proponemos como soluciones ondas planas, dado que los coeficientes de la ecuación son todos constantes, de hecho esto se podría haber realizado en el sistema de ecuaciones (2.80)-(2.83),

$$w_1 = \hat{w}_1 \exp i(\omega t - kx - mz). \quad (2.88)$$

Para que estas ondas planas sean solución de (2.87) se debe cumplir la relación de dispersión

$$\omega^2 = \frac{N_0^2 k^2}{k^2 + m^2}. \quad (2.89)$$

La relación de dispersión de las ondas de gravedad internas, (2.89), tienen diferencias sustanciales con respecto a las ondas superficiales, ya que no depende de la magnitud del número de onda pero depende del coseno del ángulo que el vector número de onda \mathbf{k} forma con el eje horizontal, llamando ϕ a este ángulo, se tiene

$$\omega = N_0 \cos \phi. \quad (2.90)$$

Otras de las propiedades que poseen las ondas de gravedad internas que son ondas transversales, como lo son las ondas superficiales. Esto puede verse de (2.82) usando las dependencias en x, z de las soluciones se deduce que

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.91)$$

La dirección de oscilación de las parcelas (el movimiento del fluido) es perpendicular a la dirección de propagación de la fase de las ondas.

Para ver en qué dirección se están propagando las ondas-la dirección de propagación de la energía de estas ondas- calculemos el vector velocidad de grupo. En la sección (2.7) veremos

como la velocidad de grupo es la velocidad con la que se propaga la información de las ondas y por lo tanto la velocidad de propagación de la energía. La velocidad de grupo es

$$\mathbf{c}_g = \nabla_k \omega = \frac{N_0 m}{(k^2 + m^2)^{3/2}} (m, -k) \quad (2.92)$$

Es decir que el vector velocidad de grupo es perpendicular a \mathbf{k}

$$\mathbf{c}_g \cdot \mathbf{k} = 0 \quad (2.93)$$

Aunque resulte anti-intuitivo la dirección de las oscilaciones de las parcelas son paralelas a la velocidad de grupo, no confundir con la transversalidad del vector número de onda con el vector velocidad.

Dado que la velocidad de grupo vertical es

$$c_{gz} = -\frac{\omega}{k^2 + m^2} m \quad (2.94)$$

se tiene que la velocidad de grupo vertical tiene el signo opuesto a la velocidad de fase vertical $c_z = \omega/m$, es decir que mientras la fase de las OGI's se propaga hacia abajo la energía se propaga hacia arriba.

Si tenemos una fuente de ondas de gravedad radiando a una frecuencia fija ω en el centro de un fluido estratificado las ondas *no* se propagan en todas las direcciones sino que se propagarán en las direcciones $\pm\phi$ con respecto a la vertical donde $\phi = \cos^{-1} \omega/N_0$.

Es importante notar que los términos no lineales advectivos que han sido despreciados por la linealización de las ecuaciones, *e.g.* $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ son nulos de hecho debido a la transversalidad de las ondas, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{k} = 0$.

Ejercicio 2.8: Comenzando del sistema de ecuaciones para las OGI's y proponiendo la aproximación hidrostática, como se aplicó en el caso de las ecuaciones shallow water, también para las variables perturbadas obtenga la relación de dispersión. Compare con la relación de dispersión derivada de la aproximación de Boussinesq. ¿Que se debe asumir en la relación de dispersión para obtener la aproximación hidrostática? relacionar este resultado con las aproximaciones asumidas en las ecuaciones shallow-water.

2.5 Energía de las ondas de gravedad internas

Para encontrar como evoluciona la energía ondulatoria de OGI's partimos directamente de las ecuaciones, multiplicando la ecuación de momento horizontal, (2.80), por u_1 y la ecuación de momento vertical, (2.81), por w_1 y luego sumando se obtiene

$$\partial_t \left[\frac{\rho_0}{2} (u_1^2 + w_1^2) \right] + \rho_1 w_1 g = -\nabla \cdot (p_1 \mathbf{u}) \quad (2.95)$$

Luego notando que los desplazamientos verticales linealizados son $w_1 = \partial_t \zeta$, usando (2.83) obtenemos

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = -\frac{\theta_1}{\theta_0} = \frac{N_0^2}{g} \zeta \quad (2.96)$$

reemplazando en (2.95) y sumando el término nulo $p_1 \nabla \cdot \mathbf{u}_1$

$$\partial_t \left[\frac{\rho_0}{2} (\overline{u_1^2 + w_1^2}) + \frac{\rho_0 N_0^2}{2} \overline{\zeta^2} \right] = -\nabla \cdot (\overline{p_1 \mathbf{u}_1}) \quad (2.97)$$

Donde hemos promediado a los campos en la fase, la idea de la promediación es eliminar las dependencias con la fase y obtener solo dependencias con la envolvente. Nótese de todas maneras que esta ecuación es válida también sin la promediación en la fase, sin embargo los terminos no podrian ser identificados con los conceptos de densidad de energía y flujo de energía.

La densidad de energía ondulatoria, que denotaremos por W_r esta dividida en dos partes la energía cinética, $\frac{\rho_0}{2} (\overline{u_1^2 + w_1^2})$ y la energía potencial $\frac{\rho_0 N_0^2}{2} \overline{\zeta^2}$. Los cambios en la energía ondulatoria estan relacionados al trabajo hecho por la presión externa, término LHS de (2.97). Este término, $\mathbf{I} = \overline{p_1 \mathbf{u}_1}$ puede interpretarse como un flujo de energía ondulatoria.

El teorema de equipartición (Lighthill, 1978) demuestra que la energía potencial y la energía cinética en ondas de gravedad internas son iguales. Este teorema es válido para cualquier sistema dinámico no-rotante con pequeñas oscilaciones.

Ejercicio 2.9: Demostrar que si tenemos una onda de gravedad monocromática, definida por (2.88), las densidades de energía cinética y potenciales son iguales para este caso. Es decir que la energía mecánica de una onda de gravedad interna esta equiparticionada entre la energía cinemática y la potencial. ¿Es necesario realizar la promediación en la fase para obtener este resultado?.

La ecuación de la energía (2.97) puede reescribirse en la forma

$$\partial_t W_r + \nabla \cdot \mathbf{I} = 0 \quad (2.98)$$

Para que esta pueda ser interpretada como una ecuación de conservación de la energía se debería escribir al flujo de energía \mathbf{I} como el producto de una velocidad por la densidad de energía, de esta forma la densidad de energía satisfacería una ecuación equivalente a la que satisface, la densidad de masa.

Bajo la hipótesis de un paquete ondulatorio, la cual veremos en la próxima unidad, se demuestra que el término de flujo de energía es posible expresarlo en la forma

$$\mathbf{I} = \overline{p_1 \mathbf{u}_1} = W_r \mathbf{c}_g \quad (2.99)$$

Por lo que la densidad de energía es una cantidad que se *conserva* de la misma forma que lo hace la densidad de masa, sin embargo la velocidad de propagación, o transporte, de la energía es la velocidad de grupo.

En la próxima unidad veremos como es la evolución de un disturbio el cual inicialmente puede ser una función arbitraria, demostraremos como si miramos a tiempos largos lo que encontraremos son ondas con número de onda y frecuencias bien definidas, es decir veremos la forma en que opera el proceso de dispersión.

2.6 Derivación de la aproximación de Boussinesq

La aproximación de Boussinesq solo tiene en cuenta las variaciones de la densidad cuando éstas estan multiplicadas por g y desprecia las variaciones de la densidad en todos los otros términos

de las ecuaciones. Esto también en principio incluye los cambios en la vertical en la densidad por hidrostática, los cuales son despreciados, por lo que la ecuación de conservación de la masa se reduce a (la de un fluido incompresible),

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0. \quad (2.100)$$

es muy importante tener en cuenta que esta ecuación es solo aproximada y lo que hemos hecho es despreciar el término $D_t \rho / \rho$ en la ecuación de conservación. En el caso de la ecuación de momento,

$$\rho D_t \vec{u} = -\nabla p + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{u} \quad (2.101)$$

Asumiendo que ρ_0 y p_0 es la densidad y la presión en estado hidrostático estas satisfacen

$$-\nabla p_0 + \rho_0 \vec{g} = 0 \quad (2.102)$$

Si pensamos que el estado de sistema viene dado por

$$p = p_0 + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad \vec{u} = 0 + \vec{u}' \quad (2.103)$$

se tiene en forma completa sin aproximaciones

$$(\rho_0 + \rho') D_t \vec{u}' = -\nabla p_0 - \nabla p' + \rho_0 \vec{g} + \rho' \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{u}' \quad (2.104)$$

si usamos estado hidrostático se reduce a

$$(\rho_0 + \rho') D_t \vec{u}' = -\nabla p' + \rho' \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{u}' \quad (2.105)$$

entonces tomar la aproximación de Boussinesq en la ecuación de momento es equivalente a linealizar las ecuaciones (considerar que las perturbaciones son pequeñas tal que el producto de perturbaciones es despreciable en comparación con la perturbación), es decir consideramos que el término $\rho' D_t \vec{u}'$ es despreciable.

La ecuación de conservación de la energía se reduce a

$$D_t^0 T' + w' \left(\partial_z T_0 \frac{g}{c_p} \right) = \kappa \nabla^2 T' + \frac{Q'}{\rho_0}, \quad (2.106)$$

donde $\kappa = k / (\rho_0 c_p)$.

2.7 Propagación de ondas: velocidad de grupo

Supongamos que tenemos una ecuación diferencial lineal de orden N y queremos resolver un problema de condiciones iniciales a través de la integral de Fourier. Para esto expresamos a la solución general en función de una suma en k ¹:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_n(k) \exp[i\omega_n t - kx] dk \quad (2.107)$$

¹Los problemas de condiciones iniciales es conveniente expresarlos como una integral en k , k variable independiente, mientras los de condiciones de contorno es conveniente tener a ω como variable independiente

donde ω_n son las n raíces de la relación de dispersión.

Para determinar los $u_n(k)$ es necesario imponer las condiciones iniciales.

Si la ecuación diferencial es de segundo orden representando ondas que se mueven hacia la izquierda y hacia la derecha, y como datos conocemos:

$$u(x, 0) = f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_1(k) \exp[ikx] dk \quad (2.108)$$

$$\partial_t u(x, 0) = f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_2(k) \exp[ikx] dk \quad (2.109)$$

Multiplicando por $\exp(ikx)$ e integrando en x a ambos lados de (2.108) y (2.109) y usando que $\delta(k - k') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k')x} dx$ se obtiene

$$\hat{u}_1 = \frac{-i\hat{f}_2 - \omega_2 \hat{f}_1}{\omega_1 - \omega_2} \quad (2.110)$$

$$\hat{u}_2 = \frac{i\hat{f}_2 - \omega_1 \hat{f}_1}{\omega_1 - \omega_2} \quad (2.111)$$

Asumiendo que $\omega_1 = \omega(k)$ y $\omega_2 = -\omega(k)$ resulta

$$\hat{u}_1 = \frac{1}{2} \left(\hat{f}_1 - i \frac{\hat{f}_2}{\omega} \right) \quad (2.112)$$

$$\hat{u}_2 = \frac{1}{2} \left(\hat{f}_1 + i \frac{\hat{f}_2}{\omega} \right) \quad (2.113)$$

Hagamos un desarrollo de Taylor alrededor de k_0 para la relación de dispersión

$$\omega_1 = \omega(k_0) + \partial_k \omega(k_0)(k - k_0) + \dots \quad (2.114)$$

para esto asumimos que la relación de dispersión es una función “suave” alrededor de k_0 .

Teniendo en cuenta solo uno de los términos de (2.107), las cuentas son equivalentes para el otro, y si aplicamos a éste el desarrollo en la integral de Fourier, para esto se debe asumir que $u_1(k)$ esta concentrado en k_0 ².

$$u(x, t) = \exp[i\omega_0 t - k_0 x] \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_1(k) \exp[-i(k - k_0)(x - \partial_k \omega(k_0)t)] dk \quad (2.115)$$

Como estamos asumiendo que la transformada de Fourier de f_1 esta concentrada en k_0 la función puede ser escrita como $f_1(x) = A(x)e^{ik_0 x}$ donde $A(x)$ es una función suave con transformada de Fourier concentrada en $k = 0$, mientras la $f_2 = 0$.

Luego deberíamos notar que la integral corresponde a la integral dada como condición inicial pero la trasladamos en el espacio de Fourier de tal manera que el número de onda principal este en el origen (recordar que una transformada de una gaussiana centrada en $k=0$ es una gaussiana mientras que una gaussiana centrada en $k = k_0$ es función periódica modulada por una gaussiana. Luego resulta que:

²Como se relaciona esto al hecho que se pide que el paquete de ondas sea lo suficiente localizado en el espacio físico pero debe contener varias longitudes de onda?

$$u(x, t) = A(x - \partial_k \omega(k_0)t) \exp[i\omega_0 t - k_0 x] \quad (2.116)$$

es decir que si se cumplen condiciones de regularidad y el paquete esta lo suficientemente localizado en el espacio de Fourier, la propagación del paquete puede ser expresada como una envolvente que se mueve con la velocidad de grupo por una función periódica que contiene la información de la fase. De esta manera la envolvente conserva su forma a lo largo del movimiento para un dado k_0 fijo, esto es consecuencia de tomar solo el primer orden en la relación de dispersión y por lo tanto despreciar los efectos dispersivos que aparecen en los órdenes superiores.

La velocidad con que se mueve la envolvente del disturbio la llamamos velocidad de grupo y resulta que

$$c_g = \partial_k \omega \quad (2.117)$$

Para que en la integral la frecuencia se pueda aproximar por los dos primeros términos del desarrollo de Fourier debe cumplirse que

$$\frac{\partial_t A}{A\omega(k_0)} \ll 1 \quad \frac{\partial_x A}{Ak_0} \ll 1 \quad (2.118)$$

2.8 Interacciones flujo medio-ondas

Ejercicio 2.10: Suponer ondas de gravedad internas en la aproximación hidrostática que se propagan en un flujo medio que depende de la altura $u_0(z)$.

1. Utilizar la aproximación WKB para encontrar las soluciones.
2. Encontrar la relación de dispersión, deducir como es la refracción.
3. ¿Cómo es la perturbación horizontal y la vertical cuando hay refracción hacia números de ondas verticales mayores?.
4. ¿Qué sucede con la solución en el caso en que la velocidad de fase horizontal de las ondas es igual a la del flujo medio $c_x = u_0(z)$?

2.9 Mecanismos de generación de las ondas

Los mecanismos de generación pueden ser divididos en tres categorías:

- Generación de ondas por forzado en las condiciones de contorno, por ejemplo ondas generadas por una membrana que vibra.
- Generación de ondas por interacción en el flujo medio, en este grupo incluimos a todas las ondas generadas por inestabilidades del flujo básico. Generación de ondas por términos de forzado de momento o fuentes calóricas provenientes de otras escalas (una tormenta como generadora de ondas de montaña, etc).
- Generación de ondas por no linealidades (e.g. otras ondas), interacción de triadas resonantes.

Ejercicio 2.11: Considere un viento medio que depende de la altura $u_0(z)$ que barre un obstáculo $h_c(x)$ generando ondas internas en un fluido estratificado $\rho_0(z)$ con frecuencia de flotación constante N_0 . Exprese las características de las ondas en función del parámetro de Scorer que se define por $l^2 \equiv \frac{N_0^2}{u_0^2} - \frac{1}{u_0} \frac{d^2 u_0}{dz^2}$. Determine los parámetros de propagación de las ondas internas: relación de dispersión, velocidad de fase, de grupo, etc.