Electromagnetismo 2025

Guía 1: Repaso de cálculo vectorial

19 de marzo, 2025

Problema 1: Haciendo uso de la notacion de Einstein y de las cantidades δ_{ij} (delta de Kronecker), y ϵ_{ijk} (tensor de Levi-Civita) demostrar las siguientes identidades:

(a) $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$

(b) $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$

(c) $\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$

(d) $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$

(e) $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$

(f) Demostrar que $\epsilon_{ijk}\, \epsilon_{lmk} = \delta_{il}\, \delta_{jm} - \delta_{im}\, \delta_{jl}$

(g) $\nabla \times (\phi \vec{A}) = \nabla \phi \times \vec{A} + \phi \nabla \times \vec{A}$

(h) $\nabla(\phi\psi) = \psi\, \nabla\phi + \phi\, \nabla\psi$

(i) $\nabla \cdot (\phi \vec{A}) = \phi \nabla \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \nabla \phi$

(j) $\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A}$

Ayudas varias: La definición de la delta de Kronocker es:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \tag{1}$$

La definición del tensor de Levi-Civita es

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si ijk es una permutación par de 123} \\ 0 & \text{si se repite un índice} \\ -1 & \text{si ijk es una permutación impar de 123} \end{cases} \tag{2}$$

El producto vectorial se expresa por: $(\vec{A} \times \vec{B})_i = \epsilon_{ijk} \hat{u}_i A_j B_k$. El producto de tensores de Levi-Civita se puede expresar en función de deltas de Kroneker,

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} \tag{3}$$

Problema 2: Si $\vec{r}$ es el vector posición del punto (x, y, z), i.e. $\vec{r} = x_i\hat{x}_i$ demuestre:

(a) $\nabla \cdot \vec{r} = 3$

(b) $\nabla \times \vec{r} = 0$

(c) $\nabla(1/r) = -\vec{r}/r^3$

(d) $\nabla \cdot (\vec{r}/r^3) = 0$

(e) $\nabla(\vec{r} \cdot \vec{k}) = \vec{k}$, donde $\vec{k} = $ cons.

Problema 3: Si la divergencia de un campo vectorial en un punto dado es distinta de cero, ¿Qué representa ese valor en ese punto para el campo? Buscar algún ejemplo.

Problema 4: ¿Cómo se relaciona la circulación del campo con la magnitud y el signo del rotacional en ese punto? ¿Que puede decir de la dirección? Buscar algún ejemplo.

Problema 5: Mediante el uso del teorema de Gauss, demuestre las siguientes identidades integrales que son de uso frecuente en el electromagnetismo:

(a) $\oint_S \phi \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_V [\phi(\nabla \cdot \vec{A}) + \vec{A} \cdot \nabla\phi]\, \mathrm{d}V$

(b) $\oint_S \phi\, \mathrm{d}\vec{s} = \int_V \nabla\phi\, \mathrm{d}V$ use un campo de la forma $\vec{F} = \phi(\vec{x})\vec{k}$ donde $\vec{k} = $ cte

(c) $\oint_S \vec{r}\vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_V [\vec{r}(\nabla \cdot \vec{A}) + \vec{A}]\, \mathrm{d}V$

(d) $\oint_S \phi\nabla\psi \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_V [\phi\nabla^2\psi + \nabla\phi \cdot \nabla\psi]\, \mathrm{d}V$ conocida por 1ra. identidad de Green.

(e) $\oint_S (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi) \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_V (\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi)\, \mathrm{d}V$ conocida por 2da. identidad de Green.

Problema 6: Demuestre las siguientes propiedades de la distribución delta:

(a) La función $\delta(x)$ es par, $\delta(x) = \delta(-x)$

(b) $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$

(c) $\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|}(\delta(x-a) + \delta(x+a))$

(d) $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, \delta(g(x))\, \mathrm{d}x = \sum_i \frac{F(x_i)}{|g'(x_i)|}$ donde los x_i son los ceros de la función $g(x)$

(e) $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, \frac{d^n\delta(x)}{dx^n}\, \mathrm{d}x = (-1)^n \left.\frac{d^nF(x)}{dx^n}\right|_{x=0} \qquad n \geq 0$

Problema 7: Demuestre que:

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta(\vec{r})$$

Problema 8: Utilizando la segunda identidad de Green demuestre que:

$$\phi(0) = -\frac{1}{4\pi}\left[\int_V \frac{\nabla^2\phi}{r}\mathrm{d}V + \oint_S \left(\phi\partial_n(1/r) - \frac{\partial_n\phi}{r}\right)\mathrm{d}s\right]$$

Problema 9: Demuestre el siguiente teorema: "Dado un campo vectorial $\vec{B}$ tal que $\nabla \cdot \vec{B}$ y $\nabla \times \vec{B}$ son funciones/campos acotados, continuos, que admiten las primeras derivadas parciales continuas en todo el espacio y tienden a cero como r^{-3} para $r \to \infty$, existe siempre la descomposición:

$$\vec{B} = \nabla\phi + \nabla \times \vec{A}$$

en un campo irrotacional y otro solenoidal."

Problema 10: Sean $q_i = q_i(x, y, z)$ las ecuaciones de coordenadas curvilíneas ortogonales arbitrarias. Demuestre:

(a) El diferencial de volumen $\mathrm{d}V = h_1 h_2 h_3 \mathrm{d}q_1 \mathrm{d}q_2 \mathrm{d}q_3$ en donde $h_i^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2$

(b) El cuadrado del diferencial de longitud es: $\mathrm{d}l^2 = \sum h_i^2 \mathrm{d}q_i^2$

(c) Las componentes del gradiente de una función ϕ valen $(\nabla\phi)_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial\phi}{\partial q_i}$

(d) La divergencia de un campo vectorial $\vec{A}$ vale:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial(h_2 h_3 A_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial(h_1 h_3 A_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial(h_1 h_2 A_3)}{\partial q_3}\right]$$