兩樣本t檢定及信賴區間

假設$X_1,X_2,\ldots,X_m$為抽自某一常態分布母體的隨機樣本，母體平均數和變異數數分別為μ_1和σ_1^2；$Y_1,Y_2,\ldots,Y_n$為抽自另一常態分布母體的隨機樣本，母體平均數和變異數分別為μ_2和σ_2^2，$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$未知，且$X_1,X_2,\ldots,X_m$和$Y_1,Y_2,\ldots,Y_n$為互相獨立；則

$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{s_p\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}$$

的分布為自由度$m+n-2$的t分布

其中$s_p=\sqrt{s_p^2}$，而$s_p^2=\dfrac{(m-1)s_1^2+(n-1)s_2^2}{m+n-2}$ pooled estimator (合併估計式，也可稱為混合估計式) 。

兩常態分布體變異數σ_1^2和σ_2^2均未知但相等 時，在α標準下，有關平均數差μ_1-μ_2的兩樣本t檢定之檢定規則為

1. H_0：μ_1-μ_2=μ_0對應H_1：μ_1-μ_2>$_0$，μ_0代表某固定實數

檢定規則：$\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{s_p\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}} > t_{m+n-2,\alpha}$ 時，否定H_0

2. H_0：μ_1-μ_2=μ_0對應H_1：μ_1-μ_2<μ_0，μ_0代表某固定實數

檢定規則：$\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{s_p\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}} < -t_{m+n-2,\alpha}$時，否定$H_0$

3. H_0：μ_1-μ_2=μ_0對應H_1：μ_1-μ_2≠μ_0，μ_0代表某固定實數

檢定規則：$\left|\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{s_p\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}\right| \geq t_{m+n-2,\frac{\alpha}{2}}$ 時，否定H_0

例**9.2-1**

有學者想要了解，不同性別的人對酒精成癮的狀況是否不同，於是設計了某種評量方式，得到以下樣本數據：

性別	樣本大小	樣本平均數	樣本標準差
男	22	19.93	7.34
女	20	16.26	7.28

假設兩個母體都接近常態分布，且變異數相等，利用兩樣本t檢定，$\alpha=0.05$，判斷以下兩種假設何者正確：

$$H_0：\mu_1-\mu_2=0 \text{ 對應 } H_1：\mu_1-\mu_2\neq 0$$

例9.2-1

性別	樣本大小	樣本平均數	樣本標準差
男	22	19.93	7.34
女	20	16.26	7.28

假設兩個母體都接近常態分布，且變異數相等，利用兩樣本t檢定，α=0.05，判斷以下兩種假設何者正確：

$$H_0：\mu_1-\mu_2=0 \text{對應} H_1：\mu_1-\mu_2\neq 0$$

解：這是雙尾檢定，且$m+n-2=40$，查表可得$t_{40,0.025}=2.021$

$$s_p^2=\frac{21\times 7.34^2+19\times 7.28^2}{40}=53.459, s_p=7.312$$

$$\left|\frac{\bar{X}-\bar{Y}-\mu_0}{s_p\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}\right|=\left|\frac{19.93-16.26}{7.312\sqrt{\frac{1}{22}+\frac{1}{20}}}\right|=1.625<2.021$$

所以沒有足夠證據能夠說，不同性別的人對酒精成癮的狀況有差別。

例9.2-2

為了研究某種全素餐的減肥效應，主持實驗者把32位參與實驗的超重女性隨機分成兩組，每組各16人。一段時間之後，全素餐這組平均減重5.8公斤，標準差3.1公斤；一般減肥餐組平均減重3.8公斤，標準差2.8公斤。假設兩個母體都接近常態分布，且變異數相等(兩組標準差接近，也支持這項假設)。利用兩樣本t檢定，$\alpha=0.05$，判斷是否可以做出結論：全素減肥餐平均減重比一般減肥餐的平均減重，超過不只1公斤？

令μ_1代表全素減肥餐的平均減重，

μ_2代表一般減肥餐的平均減重

例9.2-2

32位參與實驗的超重女性隨機分成兩組，每組各16人。
全素餐這組平均減重5.8公斤，標準差3.1公斤；
一般減肥餐組平均減重3.8公斤，標準差2.8公斤。
假設兩個母體都接近常態分布，且變異數相等，α=0.05，判斷是否可以做出結論：全素減肥餐平均減重比一般減肥餐的平均減重，超過不只1公斤？

解：令μ_1代表全素減肥餐的平均減重，
μ_2代表一般減肥餐的平均減重
檢定

$$H_0：\mu_1-\mu_2=1 \text{對應} H_1：\mu_1-\mu_2>1$$

$$t_{m+n-2,\,\alpha}=t_{16+16-2,0.05}=t_{30,0.05}=1.697$$

$$s_p^2=\frac{15\times 3.1^2+15\times 2.8^2}{30}=8.725$$

$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}-\mu_0}{s_p\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}=\frac{5.8-3.8-1}{2.954\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}}}=0.957<1.697$$

沒有足夠證據否定H_0。也就是說，以這次的實驗數據來判斷的話，不能夠說：全素減肥餐平均的減重，比起一般減肥餐的平均減重超過不只1公斤。

兩常態分布母體變異數σ_1^2和σ_2^2均未知但相等，$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$時，平均數差$\mu_1$-$\mu_2$的(1-α)100%信賴區間為

$$\left(\bar{X} - \bar{Y} - t_{m+n-2,\frac{\alpha}{2}} \cdot s_p \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}},\ \bar{X} - \bar{Y} + t_{m+n-2,\frac{\alpha}{2}} \cdot s_p \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}\right)$$

例9.2-3

根據例9.2-1的數據，求μ_1-μ_2的95%信賴區間；並參考例9.2-1的結論，在計算信賴區間之前，事先判斷該信賴區間是否會包含0。

解：

$$(\bar{X}-\bar{Y}-t_{m+n-2,\frac{\alpha}{2}}\cdot s_p\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}},\bar{X}-\bar{Y}+t_{m+n-2,\frac{\alpha}{2}}\cdot s_p\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}})$$

$$=(19.93-16.26-2.021\times 7.312\sqrt{\frac{1}{22}+\frac{1}{20}},19.93-16.26+2.021\times 7.312\sqrt{\frac{1}{22}+\frac{1}{20}})$$

$$=(-0.896,8.236)$$

結論是無法否定H_0，因此0一定會落在μ_1-μ_2的95%信賴區間內。