No (rectangular parallelepiped) body is perfect

"All in all I'm just another brick in the wall."

Veröffentlicht von Jürgen Buchmüller <pullmoll@t-online.de> Bonn, Deutschland, 2021-01-22

Dies ist ein weiterer Versuch von mir zu erklären, warum ich glaube, dass es keinen perfekten Quader gibt. Ein Quader ist ein rechtwinkliges Parallelepiped, bei dem alle Kanten- und alle Flächendiagonalenlängen ganzzahlig sind. Siehe Abb.1 auf der nächsten Seite.

1. Was ist ein perfekter Quader?

Ein perfekter Quader ist ein rechtwinkliges Parallelepiped, bei dem nicht nur alle Kanten- und alle Flächendiagonalenlängen, sondern auch die Länge der Raumdiagonalen ganzzahlig sind.

Viele Jahre der (computergestützten) Suche nach einer Lösung brachten kein Ergebnis und es gibt bis heute weder einen Beweis noch einen Gegenbeweis für die Existenz eines perfekten Quaders.

2. Was sind Pythagoreische Tripel?

Pythagoras lieferte den Beweis für die wohlbekannte Gleichung $a^2+b^2=c^2$.

Das Tripel der Zahlen a , b und c ist ein **Pythagoreisches Tripel** (*PT*). Die Zahlen im Tripel sind die Längen der **beiden Katheten** und der **Hypotenuse** eines rechtwinkligen Dreiecks.

Falls die drei Zahlen keinen gemeinsamen Teiler haben, ist dieses Tripel ein **Primitives Pythaogreisches Tripel** (*PPT*). Seine Zahlen sind wechselseitig prim.

3. Zwei Axiome für pythagoreische Tripel

A1 In jedem *PPT* ist eine Kathete ungerade, die andere gerade und die Hypotenuse ist ungerade.

A2 Jedes *PT* ist in genau einer Weise das ganzzahlige Vielfache eines *PPT*.

4. Die Flächendreiecke des Quaders

Die drei *PT* auf den Flächen des Quaders sind a,b,d , a,c,e und b,c,f . Sie sind Vielfache der drei *PPT* a_1,b_1,d_1 , a_2,c_1,e_1 und b_2,c_2,f_1 mit einem Faktor $F\in\mathbb{N}$ auf folgende Art

$$a=F_1a_1 \quad b=F_1b_1 \quad d=F_1d_1$$

$$a=F_2a_2 \quad c=F_2c_1 \quad e=F_2e_1$$

$$b=F_3b_2 \quad c=F_3c_2 \quad f=F_3f_1$$

Siehe Abb. 2 und Abb. 3 auf der folgenden Seite.

Fig. 1

Cuboid in 3D

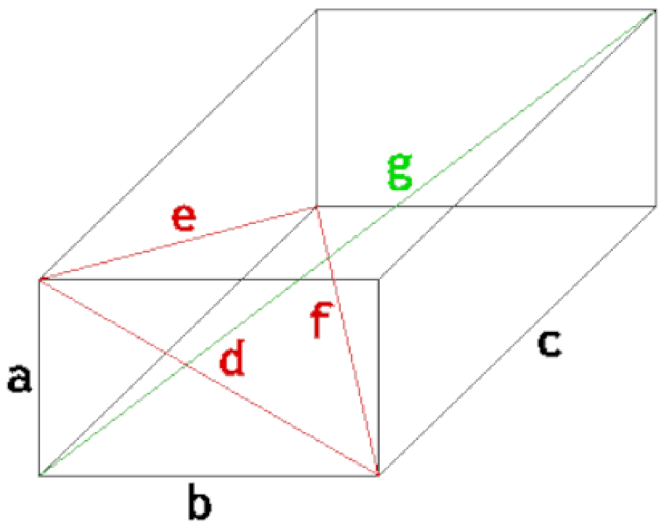


Fig. 2

Cuboid faces flattened

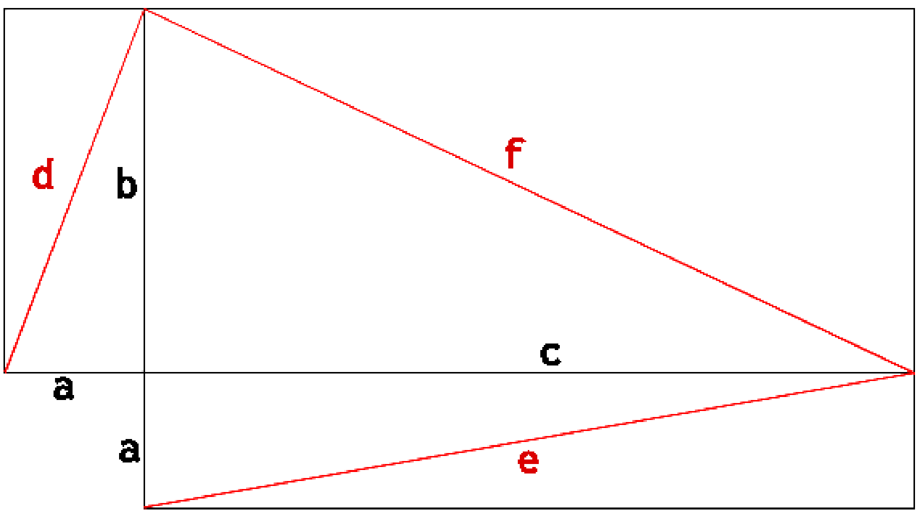
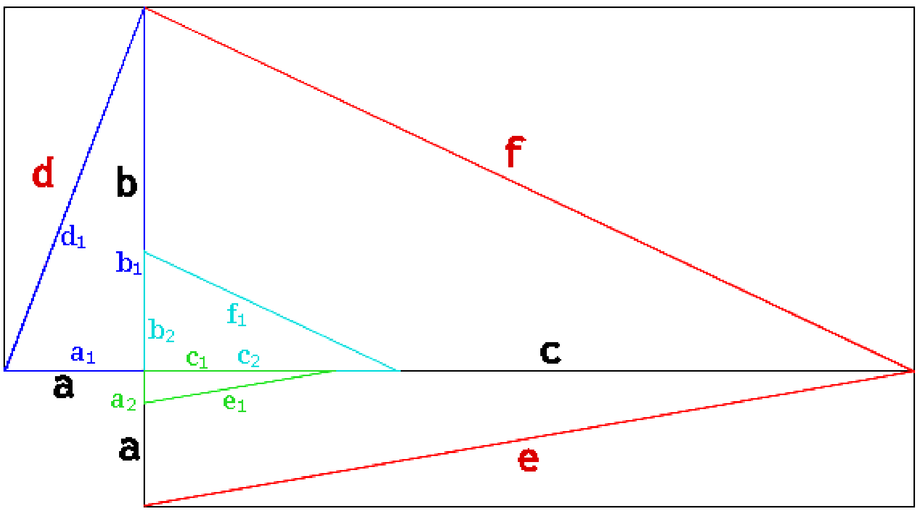


Fig. 3

Cuboid faces with their PPT



5. Lemma

Die Kanten jedes Quaders sind jeweils die Vielfachen von zwei Katheten von zwei verschiedenen der drei *PPT* auf den Flächen. Dies sind die drei Tupel $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, $c_1 c_2$. In jedem Quader hat eines der Tupel zwei ungerade Zahlen, eines hat zwei gerade Zahlen und das dritte hat eine ungerade und eine gerade Zahl (OO, EE, OE). Die einzig andere Möglichkeit der Anordnung ist (OE, OE, OE).

6. Beweis

Angenommen, es existiert eine kleinste Lösung für einen Quader, bei dem die drei Tupel $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, $c_1 c_2$ jeweils eine ungerade und eine gerade Zahl haben (OE, OE, OE). Damit hätten die Längen aller Kanten des Quaders a , b und c sowie die Flächendiagonalen d , e und f den gemeinsamen Faktor 2. Das bedeutet, dass diese kleinste Lösung für einen Quader durch 2 teilbar wäre und das Ergebnis ein noch kleinerer Quader wäre. Das ist absurd und daher muss die Annahme falsch sein.

7. Konsequenz für die Existenz eines perfekten Quaders

Als direkte Konsequenz aus diesem Lemma und dem Beweis kann kein perfekter Quader existieren. Eine seiner Kanten ist das Vielfache einer ungeraden Zahl - auf zwei Arten. Die gegenüberliegende Flächendiagonale ist immer ein Vielfaches einer ungeraden Zahl, weil sie die Hypotenuse eines *PT* ist. Nach Axiom A1 gibt es kein *PPT* mit zwei ungeraden Katheten und damit gibt es nach Axiom A2 kein *PT*, bei dem die Raumdiagonale die ganzzahlige Hypotenuse sein könnte.

Diese Konsequenz kann auch wie folgt angegeben werden:

Die diophantische Gleichung $A^2+B^2+C^2=D^2$ hat keine Lösung wenn A , B , C die Seitenlängen eines Quaders sind.

Anhang A. Der kleinste nicht perfekte Quader

Der kleinste nicht-perfekte Quader hat die Kantenlängen $a=44 \quad b=117 \quad c=240$

Die Flächendiagonale zwischen den Kanten a und b ist

$$d=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{44^2+117^2}=\sqrt{1936+13689}=\sqrt{15625}=125$$

Die Flächendiagonale zwischen den Kanten a und c ist

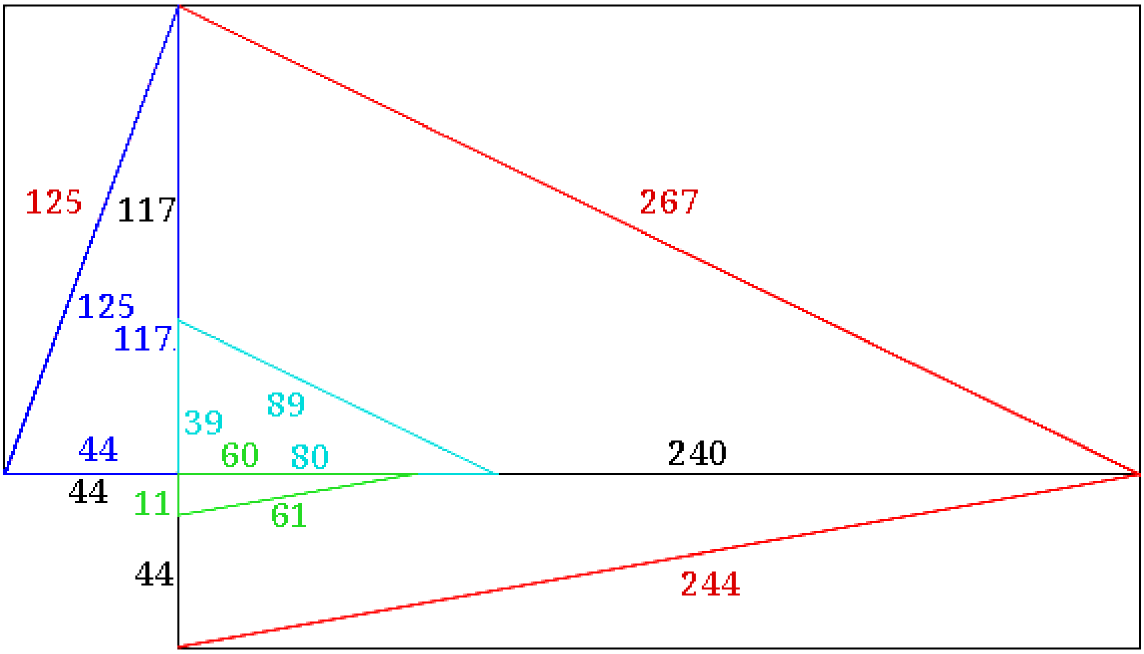
$$e=\sqrt{a^2+c^2}=\sqrt{44^2+240^2}=\sqrt{1936+57600}=\sqrt{59536}=244$$

Die Flächendiagonale zwischen den Kanten b und c ist

$$f=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{117^2+240^2}=\sqrt{13689+57600}=\sqrt{71289}=267$$

Die Länge der Raumdiagonalen ist

$$g=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{44^2+117^2+240^2}=\sqrt{1936+13689+57600}=\sqrt{73225}=267.601182\ldots$$



Der Grund, dass die Raumdiagonale keine ganze Zahl ist, liegt in der Anordnung der *PPT*, welche die Basis für die drei *PT* sind. Jeweils eine Kante des Quaders ist das Vielfache von zwei ungeraden Katheten zweier *PPT* und kann somit nicht die gerade Kathete des *PPT* sein in welchem die andere Kathete die Flächendiagonale des gegenüberliegenden *PPT* ist, die ohnehin immer das Vielfache einer ungeraden Zahl ist.