

No (rectangular parallelepiped) body is perfect

“ALL IN ALL I'M JUST ANOTHER BRICK IN THE WALL.”

Wydane przez Jürgen Buchmüller <pullmoll@t-online.de>, Bonn, Niemcy, 2021-01-22

To jest kolejna moja próba wyjaśnienia, dlaczego uważam, że nie istnieje idealny prostopadłościan. Prostopadłościan jest prostopadłościennym równoległościanem, w którym wszystkie długości krawędzi i przekątnych są liczbami całkowitymi. Zobacz rys.1 na następnej stronie.

1. Co to jest idealny prostopadłościan?

Prostopadłościan doskonały to równoległościan prostokątny, w którym nie tylko długości wszystkich krawędzi i wszystkich przekątnych ścian, ale także długość przekątnej przestrzeni są liczbami całkowitymi.

Wieloletnie (komputerowe) poszukiwania rozwiązania nie przyniosły rezultatu i do dziś nie ma ani dowodu, ani dezaprobaty dla istnienia idealnego prostopadłościanu.

2. Co to są trójkąty pitagorejskie?

Pitagoras dał dowód na to, że dobrze znany $a^2 + b^2 = c^2$.

Trójka liczb a , b , c i jest **Trójką Pitagorejską** (*PT*). Liczby w tym trójkącie są długościami **dwóch katet** i **przeciwprostokątnej** trójkąta prostokątnego.

Jeżeli te trzy liczby nie mają wspólnego dzielnika, to taka trójka jest **Pierwotną Trójką Pitagorejską** (*PPT*). Jej liczby są wzajemnie pierwsze.

3. Dwa aksjomaty dla trójki pitagorejskiej

A1 W każdym *PPT* jedna kateta jest nieparzysta, druga kateta jest parzysta, a przeciwprostokątna jest nieparzysta.

A2 Każdy *PT* jest w dokładnie jeden sposób wielokrotnością *PPT* i czynnika całkowitego.

4. Trójkąty wierzchołkowe prostopadłościanu

Trzy punkty *PT* na ścianach prostopadłościanu to a, b, d , a, c, e , b, c, f . Są one wielokrotnościami trzech *PPT* a_1, b_1, d_1 , a_2, c_1, e_1 , b_2, c_2, f_1 i współczynnik $F \in \mathbb{N}$ i w ten sposób

$$a = F_1 a_1 \quad b = F_1 b_1 \quad d = F_1 d_1$$

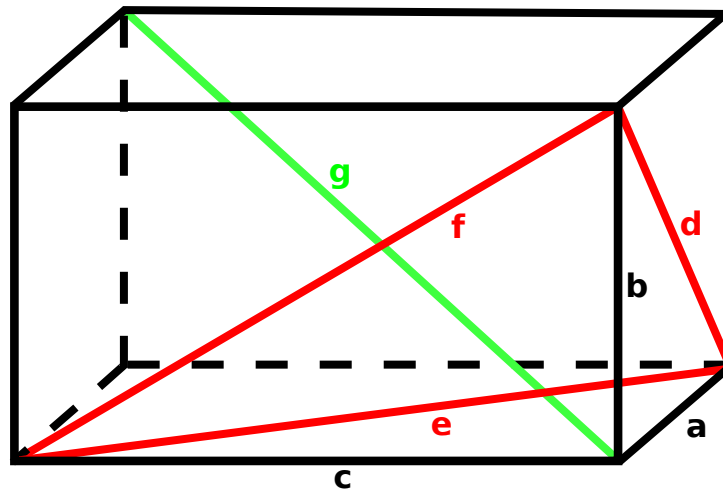
$$a = F_2 a_2 \quad c = F_2 c_1 \quad e = F_2 e_1$$

$$b = F_3 b_2 \quad c = F_3 c_2 \quad f = F_3 f_1$$

Patrz Rys. 2 i Rys. 3 na następnej stronie.

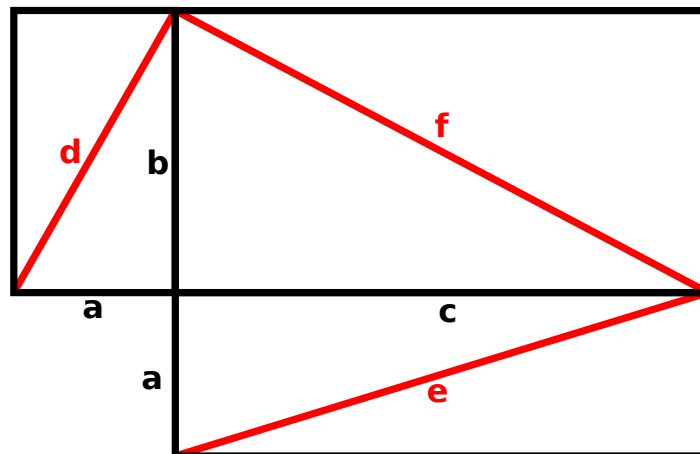
Rys. 1

Prostopadłościan
w 3D



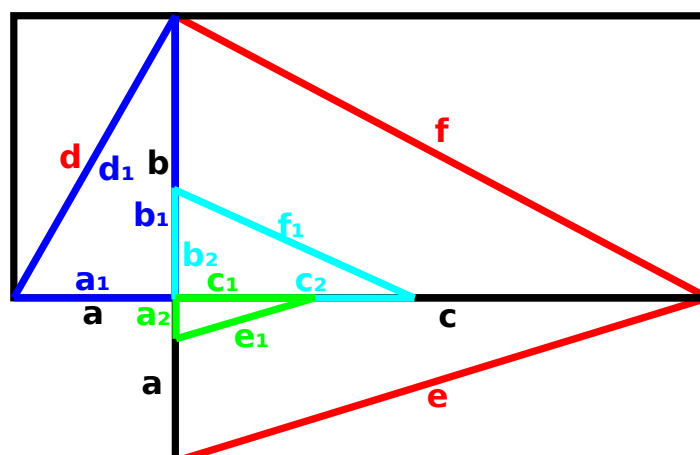
Rys. 2

Spłaszczenie
powierzchni
prostopadłościanu



Rys. 3

Czoła
prostopadłościanów
z ich *PPT*



5. Lemmat

Krawędzie każdego prostopadłościanu są każdorazowo wielokrotnością dwóch katetyk dwóch różnych z trzech PPT na ścianach. Są to trzy krotki $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, $c_1 c_2$. W każdym prostopadłościanie jedna z tych krotek ma dwie liczby nieparzyste, jedna ma dwie liczby parzyste, a trzecia ma jedną liczbę nieparzystą i jedną parzystą (OO, EE, OE). Jedyny inny możliwy układ to (OE, OE, OE).

6. Dowód

Założmy, że istnieje najmniejsze rozwiązanie prostopadłościanu, w którym trzy krotki $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, $c_1 c_2$ mają po jednej liczbie nieparzystej i parzystej (OE, OE, OE). W rezultacie każda z krawędzi prostopadłościanu a , b , c i oraz przekątne ścian d , e , f i długości będą miały wspólny czynnik 2. Oznacza to, że najmniejsze rozwiązanie prostopadłościanu będzie równo podzielne przez 2, a wynikiem będzie jeszcze mniejszy prostopadłościan. Jest to absurdalne, więc założenie musi być błędne.

7. Konsekwencja dla istnienia prostopadłościanu doskonałego

Bezpośrednią konsekwencją tego lematu i dowodu jest to, że idealny prostopadłościan nie może istnieć. Jedną z jego krawędzi jest wielokrotnością liczby nieparzystej - na dwa sposoby. Przekątna przeciwległej ścian jest zawsze wielokrotnością liczby nieparzystej, ponieważ jest przeciwprostokątną prostopadłościanu. Zgodnie z aksjomatem A1 nie istnieje PPT z dwiema nieparzystymi katetami, a więc zgodnie z aksjomatem A2 nie istnieje PT, w którym przekątna powierzchni byłaby hipotensją liczby całkowitej.

Konsekwencję tę można również określić jako:

Jeśli A , B , C są krawędziami, D , E , and F są dwusiecznymi ścian, a G est przekątną przestrzenną prostopadłościanu doskonałego, to układ czterech równań diofantycznych

$$A^2 + B^2 = D^2$$

$$A^2 + C^2 = E^2$$

$$B^2 + C^2 = F^2$$

$$A^2 + B^2 + C^2 = G^2$$

nie ma rozwiązania.

Dodatek A. Najmniejszy nie doskonały prostopadłościan

Najmniejszy prostopadłościan ma krawędzie o długościach $a=44$ $b=117$ $c=240$

Przekątna ściany pomiędzy krawędziami a i b wynosi

$$d = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{44^2 + 117^2} = \sqrt{1936 + 13689} = \sqrt{15625} = 125$$

Przekątna ściany pomiędzy krawędziami a i c wynosi

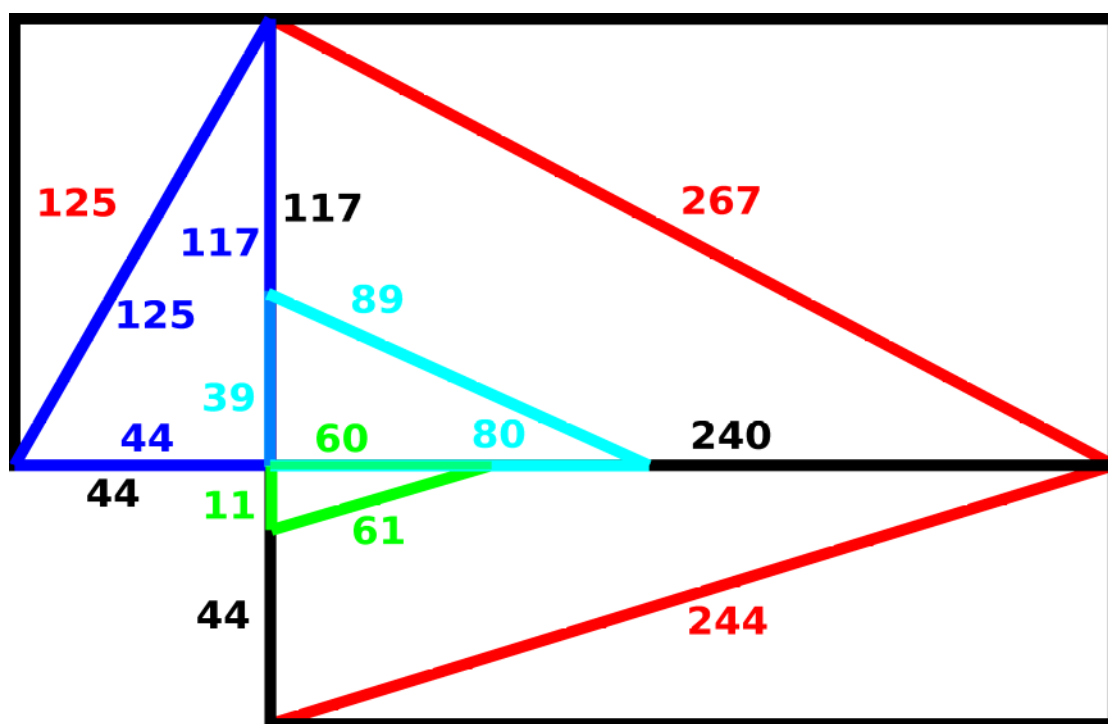
$$e = \sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{44^2 + 240^2} = \sqrt{1936 + 57600} = \sqrt{59536} = 244$$

Przekątna ściany pomiędzy krawędziami b i c wynosi

$$f = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{117^2 + 240^2} = \sqrt{13689 + 57600} = \sqrt{71289} = 267$$

Długość przekątnej przestrzeni wynosi

$$g = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{44^2 + 117^2 + 240^2} = \sqrt{1936 + 13689 + 57600} = \sqrt{73225} = 267.601182\dots$$



Powodem tego, że przekątna powierzchni nie jest liczbą całkowitą, jest układ *PPT*, które są podstawą dla trzech *PT*. Zawsze jedna krawędź prostopadłościanu jest wielokrotnością dwóch nieparzystych katet dwóch *PPT* i dlatego nie może być katetą parzystą *PPT*, gdzie drugą katetą jest przekątna czołowa na przeciwnym *PT*, która i tak jest zawsze wielokrotnością liczby nieparzystej.