No (rectangular parallelepiped) body is perfect

"All in all I'm just another brick in the wall."

Wydane przez Jürgen Buchmüller <pullmoll@t-online.de>, Bonn, Niemcy, 2021-01-22

To jest kolejna moja próba wyjaśnienia, dlaczego uważam, że nie istnieje idealny prostopadłościan. Prostopadłościan jest prostopadłościennym równoległościanem, w którym wszystkie długości krawędzi i przekątnych są liczbami całkowitymi. Zobacz rys.1 na następnej stronie.

1. Co to jest idealny prostopadłościan?

Prostopadłościan doskonały to równoległościan prostokątny, w którym nie tylko długości wszystkich krawędzi i wszystkich przekątnych ścian, ale także długość przekątnej przestrzeni są liczbami całkowitymi.

Wieloletnie (komputerowe) poszukiwania rozwiązania nie przyniosły rezultatu i do dziś nie ma ani dowodu, ani dezaprobaty dla istnienia idealnego prostopadłościanu.

2. Co to są trójkąty pitagorejskie?

Pitagoras dał dowód na to, że dobrze znany $a^2+b^2=c^2$.

Trójka liczb a , b , c i jest **Trójką Pitagorejską** (*PT*). Liczby w tym trójkącie są długościami **dwóch katet** i **przeciwprostokątnej** trójkąta prostokątnego.

Jeżeli te trzy liczby nie mają wspólnego dzielnika, to taka trójka jest **Pierwotną Trójką Pitaogrejską** (*PPT*). Jej liczby są wzajemnie pierwsze.

3. Dwa aksjomaty dla trójki pitagorejskiej

A1 W każdym *PPT* jedna kateta jest nieparzysta, druga kateta jest parzysta, a przeciwprostokątna jest nieparzysta.

A2 Każdy *PT* jest w dokładnie jeden sposób wielokrotnością *PPT* i czynnika całkowitego.

4. Trójkąty wierzchołkowe prostopadłościanu

Trzy punkty *PT* na ścianach prostopadłościanu to a,b,d , a,c,e , b,c,f . Są one wielokrotnościami trzech *PPT* a_1,b_1,d_1 , a_2,c_1,e_1 , b_2,c_2,f_1 i współczynnik $F\in\mathbb{N}$ i w ten sposób

$$a=F_1a_1 \quad b=F_1b_1 \quad d=F_1d_1$$

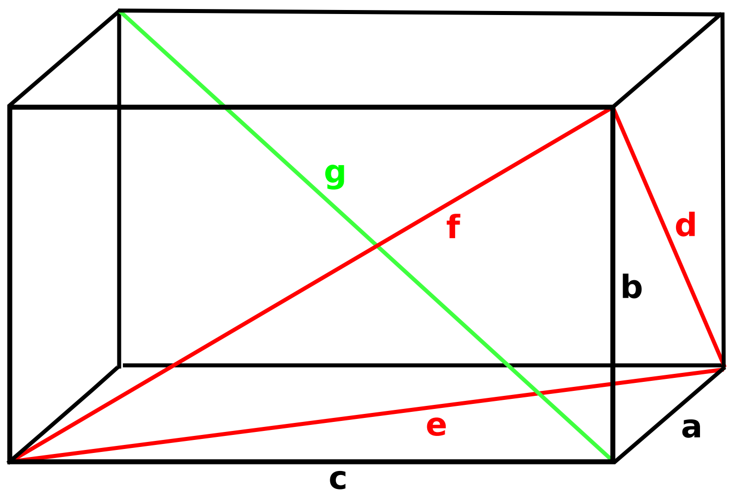
$$a=F_2a_2 \quad c=F_2c_1 \quad e=F_2e_1$$

$$b=F_3b_2 \quad c=F_3c_2 \quad f=F_3f_1$$

Patrz Rys. 2 i Rys. 3 na następnej stronie.

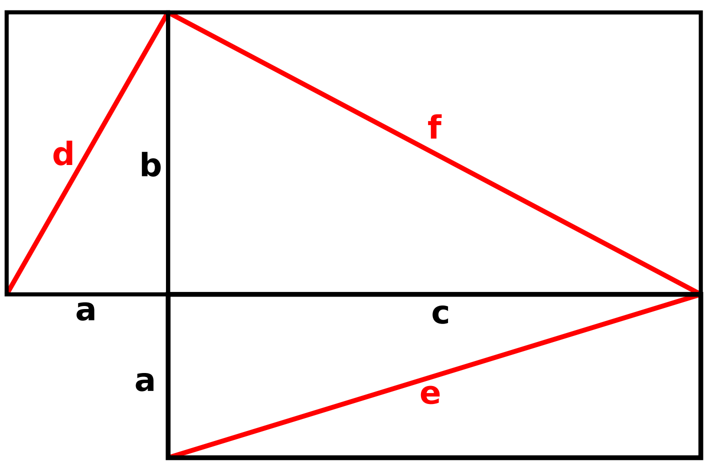
Rys. 1

Prostopadłościan w 3D



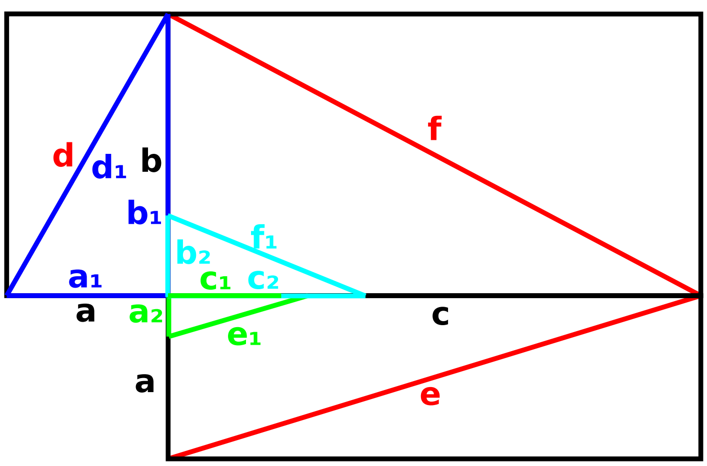
Rys. 2

Spłaszczenie powierzchni prostopadłościanu



Rys. 3

Czoła prostopadłościanów z ich *PPT*



5. Lemmat

Krawędzie każdego prostopadłościanu są każdorazowo wielokrotnością dwóch katetyk dwóch różnych z trzech PPT na ścianach. Są to trzy krotki $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, $c_1 c_2$. W każdym prostopadłościanie jedna z tych krotek ma dwie liczby nieparzyste, jedna ma dwie liczby parzyste, a trzecia ma jedną liczbę nieparzystą i jedną parzystą (OO, EE, OE). Jedyny inny możliwy układ to (OE, OE, OE).

6. Dowód

Załóżmy, że istnieje najmniejsze rozwiązanie prostopadłościanu, w którym trzy krotki $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, $c_1 c_2$ mają po jednej liczbie nieparzystej i parzystej (OE, OE, OE). W rezultacie każda z krawędzi prostopadłościanu a , b , c i oraz przekątne ściany d , e , f i długości będą miały wspólny czynnik 2. Oznacza to, że najmniejsze rozwiązanie prostopadłościanu będzie równo podzielne przez 2, a wynikiem będzie jeszcze mniejszy prostopadłościan. Jest to absurdalne, więc założenie musi być błędne.

7. Konsekwencja dla istnienia prostopadłościanu doskonałego

Bezpośrednią konsekwencją tego lematu i dowodu jest to, że idealny prostopadłościan nie może istnieć. Jedna z jego krawędzi jest wielokrotnością liczby nieparzystej - na dwa sposoby. Przekątna przeciwległej ściany jest zawsze wielokrotnością liczby nieparzystej, ponieważ jest przeciwprostokątną prostopadłościanu. Zgodnie z aksjomatem A1 nie istnieje *PPT* z dwiema nieparzystymi katetami, a więc zgodnie z aksjomatem A2 nie istnieje *PT*, w którym przekątna powierzchni byłaby hipotensją liczby całkowitej.

Konsekwencję tę można również określić jako:

Jeśli A , B , C są krawędziami, D , E , and F są dwusiecznymi ścian, a G est przekątną przestrzenną prostopadłościanu doskonałego, to układ czterech równań diofantycznych

$$A^2+B^2=D^2$$

$$A^2+C^2=E^2$$

$$B^2+C^2=F^2$$

$$A^2+B^2+C^2=G^2$$

nie ma rozwiązania.

Dodatek A. Najmniejszy nie doskonały prostopadłościan

Najmniejszy prostopadłościan ma krawędzie o długościach $a=44$ $b=117$ $c=240$

Przekątna ściany pomiędzy krawędziami a i b wynosi

$$d=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{44^2+117^2}=\sqrt{1936+13689}=\sqrt{15625}=125$$

Przekątna ściany pomiędzy krawędziami a i c wynosi

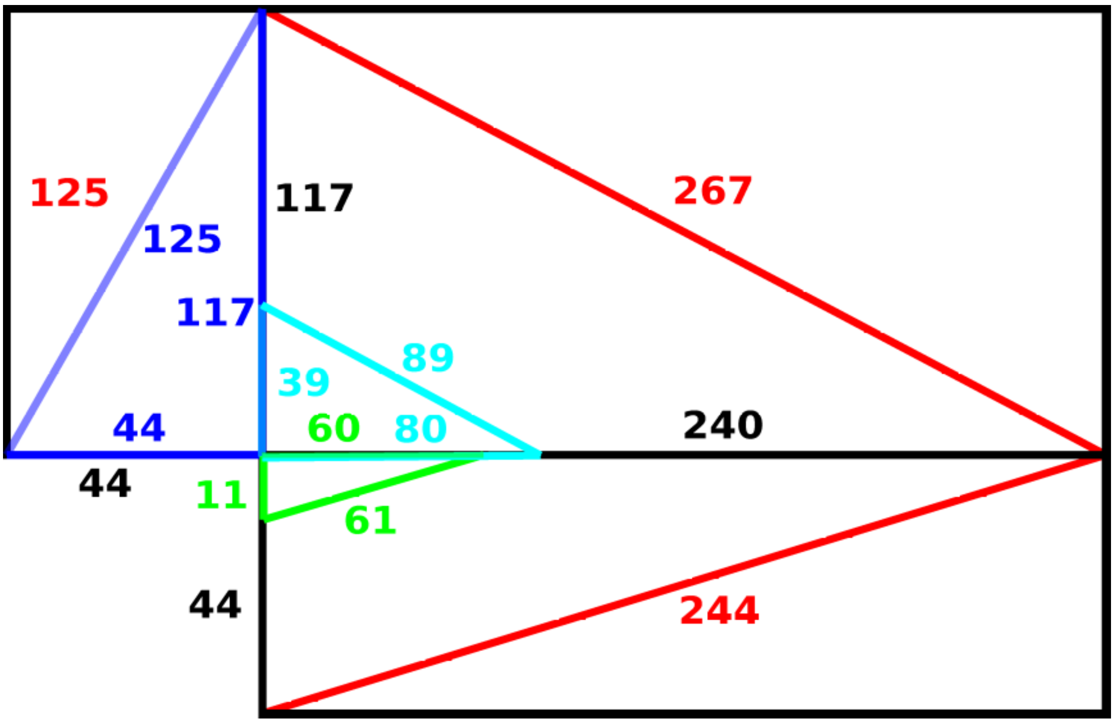
$$e=\sqrt{a^2+c^2}=\sqrt{44^2+240^2}=\sqrt{1936+57600}=\sqrt{59536}=244$$

Przekątna ściany pomiędzy krawędziami b i c wynosi

$$f=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{117^2+240^2}=\sqrt{13689+57600}=\sqrt{71289}=267$$

Długość przekątnej przestrzeni wynosi

$$g=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{44^2+117^2+240^2}=\sqrt{1936+13689+57600}=\sqrt{73225}=267.601182\ldots$$



Powodem tego, że przekątna powierzchni nie jest liczbą całkowitą, jest układ *PPT*, które są podstawą dla trzech *PT*. Zawsze jedna krawędź prostopadłościanu jest wielokrotnością dwóch nieparzystych katet dwóch *PPT* i dlatego nie może być katetą parzystą *PPT*, gdzie drugą katetą jest przekątna czołowa na przeciwległym *PT*, która i tak jest zawsze wielokrotnością liczby nieparzystej.