Der Große Fermatsche Satz

Pierre de Fermat war ein französischer Mathematiker und Jurist. Sein berühmtester und für die längste Zeit unbewiesener Satz besagt, dass die diophantinische Gleichung $a^n+b^n=c^n$ mit $a,b,c\in\mathbb{N}$ für keine natürliche Zahl $n>2$ erfüllt ist.

Auf den Rand seiner Ausgabe der *Arithmetika* von Diophant notierte Fermat den Satz:

> “Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duas ejusdem nominis fas est dividere: cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.”
>
> „Es ist jedoch nicht möglich, einen Kubus in 2 Kuben, oder ein Biquadrat in 2 Biquadrate und allgemein eine Potenz, höher als die zweite, in 2 Potenzen mit ebendemselben Exponenten zu zerlegen: Ich habe hierfür einen wahrhaft wunderbaren Beweis entdeckt, doch ist dieser Rand hier zu schmal, um ihn zu fassen.“

Wie mag dieser Beweis wohl ausgesehen haben? Vielleicht meinte Fermat ja die folgende, geometrische Herangehensweise an das Problem…

Kuben sind (auch) sechskantige Pyramiden

Jeder Kubus mit einem Volumen aus den natürlichen Zahlen lässt sich auch als sechskantige Pyramide vorstellen. Jede Schicht dieser Pyramide besteht dabei, beginnend mit 1 ganz oben, aus einer Anzahl von Elementen, die der Differenz der Anzahl der vorherigen Elemente zur nächsten Kubikzahl entspricht.

Die Pyramide für $2^3=8$ besteht also aus den zwei Schichten mit $1+7$ Elementen, die Pyramide für $3^3=27$ aus $1+7+19$ Elementen, die für $4^3=64$ aus $1+7+19+37$ Elementen, usw.

Dabei sind in jeder Schicht offensichtlich immer Vielfache von 6 Elementen um das mittlere Element angeordnet: $1=1+0\times6$, $7=1+1\times6$, $19=1+3\times6$, $37=1+6\times6$, usw.

Die Zahlenfolge $1,7,19,37,\ldots$ ist auch bekannt als die Folge der *Sechskantzahlen* oder *Zentrischen Hexagonalen Zahlen*.

Addition zweier sechskantiger Pyramiden

Die Addition zweier solcher aus den gedachten Elementen bestehenden Pyramiden, kann man sich auch als ein *Überstülpen* der größeren über die kleinere (oder gleich große) der beiden denken, wobei die inneren Elemente der größeren Pyramid nach oben verschoben werden. Bei der Addition der größeren Pyramide zur kleinsten Kubikzahl 1 ist das Ergebnis danach eine Pyramide, auf der obenauf ein einzelnes Element liegt. Die Addition zur Pyramide der nächst größeren Kubikzahl (8) führt dazu, dass auf der größeren Pyramide *eine Art Hut* liegt, der aus den nach oben verschobenen Elementen besteht – vielleicht hilft das *Fang-den-Hut* Spiel bei der Vorstellung. Dieser *Hut* kann jedoch niemals ganz bis zur untersten Schicht der größeren Pyramide reichen, denn wir addieren ja die kleinere (oder gleich große) Pyramide *unter* die größere.

Da nun aber jede Kubikzahl als eine reguläre und komplette sechskantige Pyramide darstellbar ist, kann folglich keine Addition zweier solcher Pyramiden nicht wieder eine reguläre und komplette Pyramide, und damit auch keine Kubikzahl ergeben.

Potenzen größer als Drei

Nun gilt die gerade durchgeführte geometrische Betrachtung des Problems aber für jede Potenz größer als 3. Auch jede vierte Potenz kann als eine Pyramide aus Elementen angesehen werden, deren Schichten jeweils eine Anzahl von Elementen enthalten, die der Differenz der Anzahl der vorherigen Elemente zur nächstgrößeren vierten Potenz entspricht. Der Anfang der Folge dieser Differenzen ist: $1, 15, 65, 175, \ldots$. Diese Zahlenfolge ist auch bekannt als die Folge der *Rhombischen Dodekahedralen Zahlen*.

Auch diese Art von Pyramiden kann man addieren, indem man die größere über die kleinere (oder gleich große) stülpt und dabei die inneren Elemente zu einem *Hut* auf der Pyramide verschiebt. Man erhält also Ergebnisse, die ganz den Ergebnissen bei sechskantigen Pyramiden entsprechen.

Bonn im November 2019, Jürgen Buchmüller <pullmoll@t-online.de>