Über die Unmöglichkeit des perfekten Euler-Ziegels.

1. Pythagoräische Tripel für teilerfremde Katheten.

Bei einem *primitiven Pytagoräischen Tripel* (**pPT**) sind die Kathetenlängen teilerfremd, d.h. sie sind zueinander prim. In einem solchen Tripel sind die beiden kleineren Zahlen die Längen der Katheten. Eine dieser Längen ist gerade, die andere ist ungerade. Die größte Zahl ist die Länge der Hypotenuse und sie ist ungerade. Das kleinste **pPT** besteht aus den Zahlen 3, 4, 5.

2. Pythagoräische Tripel allgemein.

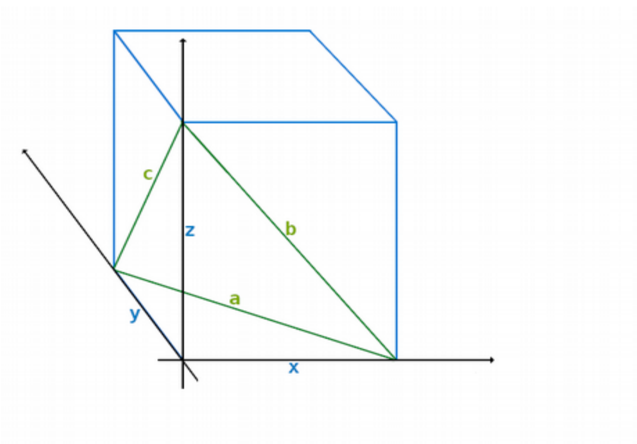
Die Seitenlängen jedes rechtwinkligen Dreiecks entsprechen einem allgemeinen *Pythagoräischen Tripel* (**PT**).

3. Bildungsregel für PT.

Jedes **PT** ist auf eindeutige Weise das Produkt eines **pPT** und eines ganzzahligen Faktors $f \in \mathbb{Z}$.

4. Der Euler-Ziegel.

Ein Euler-Ziegel ist ein Ziegel, bei welchem die Seitenlängen *x, y, z* und die Längen der Diagonalen *a, b, c* der Flächendreiecke ganze Zahlen sind. Die Seitenlängen der Flächendreiecke ⊿*xya*, ⊿*xzb* und ⊿*yzc* sind also **PT** und es existieren folglich auch die drei **pPT** ⊿$x_a y_a a_a$, ⊿$x_b z_b b_b$ und ⊿$y_c z_c c_c$. Die tiefgestellten Indizes *a*, *b*, und *c* bezeichnen dabei jeweils das **pPT**, aus welchem das **PT** als Vielfaches durch Multiplikation mit einem der Faktoren f_a, f_b, f_c entsteht.



N.B.
Der kleinste Euler-Ziegel hat *x=44, y=117, z=240*.
Daher sind *a=125, b=244, c=267*.

Die **PT** sind ⊿xya = *44, 117, 125,* ⊿xzb = *44, 240, 244* und ⊿yzc = 117, 240, 267.

Seine **pPT** sind mit $f_a=1$; ⊿$x_a y_a a_a$ = *44, 117, 125,* mit $f_b=4$;⊿$x_b z_b b_b$ = *11, 60, 61* und mit $f_c=3$; ⊿$y_c z_c c_c$ = *39, 80, 89.*

5. Mögliche *Konfigurationen.*

Es existieren genau zwei mögliche *Konfigurationen*, in welchen die Katheten der **pPT** der Flächendreiecke an den Kanten eines Euler-Ziegels zueinander angeordnet sein können.

5.1. Alle pPT *regulär* zueinander.

Es liegt jeweils die ungerade Kathete eines **pPT** mit der geraden Kathete des nächsten **pPT** aneinander. Die Katheten der drei **pPT** sind also an den Kanten *x, y, z* des Euler-Ziegels jeweils gerade zu ungerade angeordnet: x_a an x_b, y_a an y_c und z_b an z_c.

5.2. Eines der pPT ist *gedreht.*

Eines der **pPT** der Flächendreiecke ist *gedreht*, es liegen also die Katheten der drei **pPT** an den Kanten des Euler-Ziegels zum Beispiel wie folgt aneinander:

x: zwei ungerade Kathetenlängen: x_a und x_b
y: zwei gerade Kathetenlängen: y_a und y_c
z: eine gerade und eine ungerade Kathetenlänge: z_b und z_c

6. Der perfekte Euler-Ziegel.

Ein perfekter Euler-Ziegel ist ein Euler-Ziegel, bei welchem die Länge der Diagonalen *g* durch den Raum des Ziegels ebenfalls eine ganze Zahl ist. Es ist bis heute nicht bekannt, ob ein solcher Ziegel existiert oder ob es einen Beweis für oder gegen seine Existenz gibt. Die Länge der Raumdiagonalen *g* eines Euler-Ziegels mit den Kantenlängen *x*, *y* und *z* ist definiert durch die Gleichung:

$$g=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

6.1. Perfekter Euler-Ziegel mit 5.1?

Nehmen wir an, dass eine kleinstmögliche Lösung für einen perfekten Euler-Ziegel existiert. Die Konfiguration aus 5.1 scheidet dann aus, denn bei ihr wären alle Längen der Seiten *x*, *y*, und *z*, alle Längen der Flächendiagonalen *a*, *b*, und *c*, sowie auch die Länge der Raumdiagonalen *g* gleichzeitig auch Vielfache von geraden Zahlen. Folglich wäre diese kleinstmögliche Lösung durch Zwei teilbar, was direkt der Annahme widerspricht.

6.2. Perfekter Euler-Ziegel mit 5.2?

Wegen der Kommutativität der drei Summanden unter der Wurzel – und weil „Pythagoras-3D“ durch zwei geschachtelte Anwendungen des Pythagoras-Satzes darstellbar ist – gelten äquivalent die drei folgenden Gleichungen:

$$g=\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}^2+z^2}=\sqrt{a^2+z^2}$$

$$g=\sqrt{\sqrt{x^2+z^2}^2+y^2}=\sqrt{b^2+y^2}$$

$$g=\sqrt{\sqrt{y^2+z^2}^2+x^2}=\sqrt{c^2+x^2}$$

In diesen Gleichungen sind *a*, *b* und *c* jeweils Vielfache der Hypotenuse a_a, b_b, und c_c eines **pPT** und somit Vielfache einer ungeraden Zahl. Nach 3. Bildungsregel für PT müssen die Katheten *x*, *y*, und *z* daher jeweils Vielfache von geraden Zahlen sein. In der Konfiguration 5.2 ist aber genau eine der Kantenlängen *x*, *y* und *z* des Euler-Ziegels das Vielfache von zwei der drei ungeraden Katheten der **pPT** der Flächendreiecke.
Im angegebenen Beispiel ist *x* ein Vielfaches von x_a und x_b, die beide ungerade sind.
Die dritte Gleichung entspricht also nicht der Voraussetzung in 3. Bildungsregel für PT.

Somit existiert auch für das Gesamtsystem der drei Gleichungen keine Lösung.

Bonn im September 2019
Jürgen Buchmüller <pullmoll@t-online.de>