《高数/微积分上》

课时一　函数与极限

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 函数	★★	0～3	选择、填空
2. 极限	必 考	6～10	选择/填空/大题

1. 函数

题 1. 求函数 $y=\ln\frac{x}{x-2}+\arcsin\frac{3x-1}{5}$ 的定义域。

解：$\begin{cases}\frac{x}{x-2}>0\\ \left|\frac{3x-1}{5}\right|\le 1\end{cases}\Rightarrow -\frac{4}{3}\le x<0$

函数定义域为 $x\in\left[-\frac{4}{3},0\right)$

题 2. $f(2x+3)=x^2$ 求 $f(x)$。

解：令 $t=2x+3$，则 $x=\frac{t-3}{2}$

得 $f(t)=(\frac{t-3}{2})^2=\frac{1}{4}t^2-\frac{3}{2}t+\frac{9}{4}$

$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}$

2. 极限　记作：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$

1）左极限：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$　右极限：$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$

2）$x\to x_0$ ⟺ 表示 $x\ne x_0$

3）$x\to x_0$ ⟺ $x\to x_0^+$ 且 $x\to x_0^-$

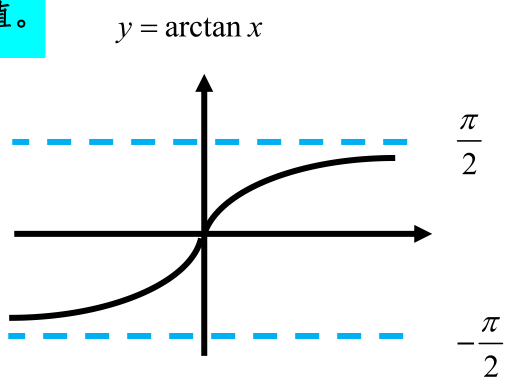
4）极限存在的充要条件：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$（左右极限存在且相等）

题 1：设函数 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$，当 $x\to 0$ 时求极限值。

解：$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x}=-1$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=1$

左右极限存在但是不相等，故无极限

题 2. 设函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1}{x-1}$，当 $x\to 1$ 时求极限值。



解：$\lim\limits_{x\to 1^-}\arctan\dfrac{1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\arctan(-\infty)=-\dfrac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\arctan\dfrac{1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\arctan(+\infty)=\dfrac{\pi}{2}$

左右极限存在但是不相等，故无极限

题 3. 设函数 $f(x)=e^{\frac{x}{x-2}}$，当 $x\to 2$ 时求极限值

解：$\lim\limits_{x\to 2^-}e^{\frac{x}{x-2}}=\lim\limits_{x\to 2^-}e^{-\infty}=0$

$\lim\limits_{x\to 2^+}e^{\frac{x}{x-2}}=\lim\limits_{x\to 2^+}e^{+\infty}=+\infty$

左极限存在，右极限不存在，所以极限不存在

需要从左右极限考虑的情形：

①分段函数在分界点处的极限，如：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$，$f(x)=\begin{cases}\cos x & x\ge 0\\ e^x-1 & x<0\end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$。

② $f(x)$ 中含 $a^{\frac{\varphi(x)}{x-b}}$ 或 $a^{\frac{\varphi(x)}{b-x}}$，如：$f(x)=e^{\frac{x}{x-2}}$，求 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$。

③三角函数或反三角函数，如：$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$

课时一 练习题

1. 函数 $y=\dfrac{1}{\ln(1-x)}+\sqrt{x+2}$ 的定义域为________。

2. 函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{\ln(x+2)}+\arccos\dfrac{x-1}{3}$ 的定义域为________。

3. 下列各组函数中，是相同的函数的是（ ）。

A. $f(x)=|x|,g(x)=\sqrt{x^2}$ B. $f(x)=x,g(x)=(\sqrt{x})^2$

C. $f(x)=\ln x^2,g(x)=2\ln x$ D. $f(x)=\dfrac{|x|}{x},g(x)=1$

4. 设 $f(\sin\dfrac{x}{2})=1+\cos x$，求 $f(\cos x)$。

5. 求函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1}{x+1}$，当 $x\to -1$ 时极限是否存在。

6. 从 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=1$ 不能推测（ ）。

A. $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=1$ B. $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=1$ C. $f(x_0)=1$ D. $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-1\right]=0$

7. $f(x)=\begin{cases}x+2, & x\le 0\\ e^{-x}+1, & 0<x\le 1\\ x^2, & 1<x\end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$（ ）。

A. 0 B. 不存在 C. 2 D. 1

8. 下列各式正确的是（ ）。

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}=1$ B. $\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=0$ C. $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$ D. $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{\frac{1}{x}}=-1$

注：练习题答案在文档最后

课时二 求极限（一）

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 有理化、抓大头	必 考	10～20	大题
2. 重要极限公式			
3. 无穷小公式			

1. 有理化、抓大头

题 1：求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x+9}-3}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(\sqrt{x+9}+3)}{(\sqrt{x+9}-3)(\sqrt{x+9}+3)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{x+9}+3)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\sqrt{x+9}+3=6$$

题 2：求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^3}}{7+\dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{x^3}}=\dfrac{3}{7}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3}{7x^3}=\dfrac{3}{7}$

题 3：求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(4x^2-3)^3(3x-2)^4}{(6x^2+7)^5}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(4x^2)^3(3x)^4}{(6x^2)^5}=\dfrac{2}{3}$

2. 重要极限公式

$\lim\limits_{\Delta\to 0}\frac{\sin\Delta}{\Delta}=1$ $\lim\limits_{\Delta\to 0}(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}}=\lim\limits_{\Delta\to\infty}(1+\frac{1}{\Delta})^{\Delta}=e$

题 1：求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3=3$

题 2：求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{x}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x\cos 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos 2x}\cdot\frac{\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos 2x}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2=2$

题 3：求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}[1+(-x)]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}[1+(-x)]^{(-\frac{1}{x})\cdot(-1)}=e^{-1}$

题 4：求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})^n$

解：原式$=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{n+1}{n^2})^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[(1+\frac{n+1}{n^2})^{\frac{n^2}{n+1}}\right]^{\frac{n+1}{n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}}=e$

题 5. 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2x+3}{2x+1})^{x+1}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2x+3}{2x+1}-1)^{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{2x+1})^{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{2x+1})^{\frac{2x+1}{2}\cdot\frac{2}{2x+1}\cdot x+1}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2(x+1)}{2x+1}}=e$

3. 无穷小

1）定义：以 0 为极限的量称作无穷小量

例：$x \to 0$ 时，x，$2x^2$，$\tan x \to 0$ 称为 $x \to 0$ 时的无穷小

$x \to \infty$ 时，$\frac{1}{x}$，$\frac{1}{x^2}$，$\frac{2}{3x^3+1} \to 0$ 称为 $x \to \infty$ 时的无穷小

2）无穷小比较 α,β 为自变量某种趋向下的无穷小

① $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$ β 为 α 的高阶无穷小

② $\lim \frac{\beta}{\alpha} = k(k \neq 0)$ β 为 α 的同阶无穷小

② $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$ β 为 α 的等阶无穷小

3）等价无穷小替换公式:

$x \to 0$ 时：1）$x \to 0$ 才成立 2）x 作为整体看待，不仅仅指 x

① $\sin x \sim x$ $\tan x \sim x$ $\arctan x \sim x$ $\arcsin x \sim x$ $\ln(1+x) \sim x$ $e^x - 1 \sim x$

② $(1+x)^a - 1 \sim ax$ $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x$ $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ $1-\cos^a x \sim \frac{a}{2}x^2$

题 1：求极限 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{2x}$

解：原式 $= \lim\limits_{x\to 0} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$

题 2：求极限 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{1-\cos\sqrt{x}}$

解：原式 $= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2} = 1$

题 3：求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x\cdot\arcsin x^2}$

错解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-x}{x\cdot x^2}=0$ （×）

正解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\frac{1}{2}$

题 4：求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x\cdot\ln(1+2x)}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x\cdot\ln(1+2x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x\cdot 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^{x^2}-1)+(1-\cos x)}{2x^2}$

$$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^{x^2}-1)}{2x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)}{2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

题 5：当 $x\to 0$ 时，$\sqrt{1+x}-1$ 与 ax 是等价无穷小，求 a

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{ax}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x}{ax}=1$ 可求得 $a=\frac{1}{2}$

课时二 练习题

1\. 计算 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1}$

2\. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

3\. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-n+1}{18n^3+n^2+n}=$（ ）。

$A.\ \dfrac{1}{6}$　　$B.\ 0$　　$C.\ \dfrac{1}{2}$　　$D.\ 1$

4\. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)^{15}(2x+1)^{10}}{(3x+2)^{25}}=$________。

5\. 下列极限的计算正确的是（ ）

$A.\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=0$　　$B.\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$　　$C.\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x}=2$　　$D.\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x}=\dfrac{1}{2}$

6\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}=$________。

7\. $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{2}{x})^{x}=$________。

8\. 若 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+a}{x-a})^{x}=8$，则 $a=$________。

9\. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=$________。

10\. 下列变量在自变量给定的变化过程中是无穷小量的是（ ）。

$A.\ \dfrac{x^2}{x^3+1}(x\to 1)$　　$B.\ \ln x(x\to+\infty)$　　$C.\ 2^{-x}(x\to+\infty)$　　$D.\ \ln x(x\to 2)$

11\. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{\sin 2x}=$__________。

12\. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x}=$__________。

13\. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-1)\tan 3x^2}{\arctan 2x(1-\cos x)}=$__________。

14\. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=$__________。

15\. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=$__________。

16\. 若 $x\to 0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $x\sin x$ 是等价无穷小，则 $a=$__________。

17\. 当 $x\to 0$ 时，$\cos x-1$ 是 $\sin^k x$ 的同阶无穷小量，则 $k=$__________。

课时三　求极限（二）

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 洛必达法则	必　考	8～15	大题

1. 洛必达法则

若满足 $\frac{0}{0}$，$\frac{\infty}{\infty}$ 型，则 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$

①必须满足 $\frac{0}{0}$，$\frac{\infty}{\infty}$ 型才可以使用，其他形式，不能直接使用

②若 $\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 仍满足 $\frac{0}{0}$，$\frac{\infty}{\infty}$ 型，可以连续使用洛必达法则 $\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\frac{f''(x)}{g''(x)}$

③洛必达法则不是万能的，求极限的时候，首选无穷小替换，再用洛必达法则

题 1：求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\frac{1}{6}$

题 2：求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-3}{2x^2+x}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{4x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

题 3：求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x})$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{2x}=0$$

$(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$

$(e^x)'=e^x$

$(\ln x)'=\frac{1}{x}$

$(a^x)'=a^x\ln a$

$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$

$(\sin x)'=\cos x$

$(\cos x)'=-\sin x$

$(\tan x)'=\sec^2 x$

$(\cot x)'=-\csc^2 x$

$(\sec x)'=\sec x\tan x$

$(\csc x)'=-\csc x\cot x$

$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$

$(\text{arccot}\, x)'=-\frac{1}{1+x^2}$

题 4：求极限 $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\ln x$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}-\dfrac{x^2}{x}=0$

题 5：求极限 $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{1}{\ln x}}$

$\ln B^A = A\ln B$

解：令 $y=\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{1}{\ln x}}$，两边取对数：

$$\ln y=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x}\ln(2-x)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln(2-x)}{\ln x}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-\dfrac{1}{2-x}}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}-\frac{x}{2-x}=-1$$

$\ln y=-1$ $\quad y=e^{-1}$ $\quad$ 故 $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{-1}$

题 6：求极限 $\lim\limits_{x\to 0} x^{2\sin x}$

解：令 $y=\lim\limits_{x\to 0} x^{2\sin x}$，两边取对数：

$$\ln y=\lim_{x\to 0}2\sin x\ln x$$

$$=\lim_{x\to 0}2x\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{2\ln x}{\dfrac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}(-2x)=0$$

$\ln y=0$ $\quad y=1$ $\quad$ 故 $\lim\limits_{x\to 0} x^{2\sin x}=1$

题 7：求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$

解：令 $y=\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$ ，两边取对数：

$$\ln y=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln(e^x-1)}\ln x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\ln(e^x-1)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{e^x}{e^x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{xe^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+xe^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+x}=0$$

$\ln y=0$ $\quad y=1$ $\quad$ 故 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}=1$

课时三　练习题

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{x\tan x}$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xe^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}$

3. $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln\sin3x}{\ln\sin2x}$

4. $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right]$

5. $\lim\limits_{x\to0^+}x^2\ln x$

6. 求 $\lim\limits_{x\to0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$

7. 求 $\lim\limits_{x\to1^+}(\ln x)^{\tan(x-1)}$

8. $y=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{\ln(x^3+1)}}$

课时四　连续与间断点

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 连续 2. 间断点	必考	6～10	选择/填空/大题

1. 连续　$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$　（极限值=函数值）

题 1. $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\le 1 \\ 2-x & 1<x \end{cases}$ 是否连续

解：分界点在 $x=1$ 处

左极限：$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^2=1$

右极限：$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2-x)=1$

函数值：$f(1)=1$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)=1$　函数连续

题 2. 设 $f(x)=\begin{cases} (1+ax)^{\frac{1}{x}}, & x>0 \\ e, & x=0 \\ \dfrac{\sin ax}{bx}, & x<0 \end{cases}$ $(a\ne 0,b\ne 0)$，问 a 和 b 各取何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 连续。

解：左极限　$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin ax}{bx}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{ax}{bx}=\dfrac{a}{b}$

右极限　$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(1+ax)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}(1+ax)^{\frac{1}{ax}\cdot ax\cdot\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+} ax\cdot\frac{1}{x}}=e^a$

函数值　$f(0)=e$

由 $\dfrac{a}{b}=e^a=e$ 可得 $a=1,b=\dfrac{1}{e}$

题 3. 确定 a,b，使 $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\ge 1 \\ ax+b & 0\le x<1 \\ e^x & x<0 \end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续。

解：在分界点为 $x=0$ 处

左极限：$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} e^x=1$

右极限：$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} ax+b=b$

函数值：$f(0)=b$　　可得: $b=1$

在分界点为 $x=1$ 处

左极限：$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} ax+b=a+b$

右极限：$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} x^2=1$

函数值：$f(1)=1$　　可得: $a+b=1$

联立 $\begin{cases} b=1 \\ a+b=1 \end{cases} \Rightarrow a=0 \quad b=1$

2. 间断点

第一类间断点	可去间断点	$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\ne f(x_0)$
	跳跃间断点	$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\ne\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$
第二类间断点	无穷间断点	$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ ，$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 至少有一个是无穷
	振荡间断点	$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ ，$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 振荡不存在

题 1.求函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 的间断点，并判断其类型。

解：$f(x)=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}$ 　　在点 $x=1, x=2$ 处无定义

在 $x=1$ 处

极限值：$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x-2}=-2$

左右极限存在且相等，故点 $x=1$ 为可去间断点

在 $x=2$ 处

左极限：$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+1}{x-2}=-\infty$ 　　右极限：$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x+1}{x-2}=+\infty$

故为第二类间断点

题 2.求函数 $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}} & x>0 \\ \ln(1+x) & -0.5\le x<0 \end{cases}$ 的间断点，并判断其类型

解：在 $x=0$ 处

左极限：$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\ln(1+x)=0$

右极限：$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x-1}}=\dfrac{1}{e}$

左右极限都存在，但是不相等，故 $x=0$ 为跳跃间断点

$x>0$ 时 $f\left(x\right)=e^{\frac{1}{x-1}}$ 　　定义域 $x\neq 1$ 　　故在 $x=1$ 处也是间断点

左极限：$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{x-1}}=0$

右极限：$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$

故 $x=1$ 为第二类间断点

课时四　　练习题

1. 设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & x>0 \\ x & x=0 \\ \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} & x<0 \end{cases}$，问 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否连续。

2. 设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}\sin 2x & x<0 \\ k & x=0 \\ x\sin\dfrac{1}{x}+2 & x>0 \end{cases}$，求常数 k 的值，使函数 $f(x)$ 在定义域内连续。

3. $y=\dfrac{x^2-x-6}{x^2-9}$ 的可去间断点是（　）。

$A.\ x=3$　　$B.\ x=-2$　　$C.\ x=-3$　　$D.$无

4. 设 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$，则 $x=1$ 是 $f(x)$ 的（　）。

$A.$连续点　　$B.$无穷间断点　　$C.$跳跃间断点　　$D.$可去间断点

5. 函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1}{x}$ 的间断点是（　）。

$A.$可去间断点　　$B.$无穷间断点　　$C.$跳跃间断点　　$D.$振荡间断点

6. $x=1$ 是 $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{1}{1-x}}}$ ________间断点。

课时五　导数

考点		重要程度	分值	常见题型
1. 求导定义公式		★★★★	0～8	选择、填空
2. 求导计算	1）复合函数求导	必 考	6～15	选择、填空、大题
	2）微分			
	3）隐函数求导			
	4）参数方程求导			
3. 可导，可微，连续之间的关系		★★★	0～3	选择、填空

1. 求导定义公式　（导数记作形式：y'，$f'(x)$，$\frac{dy}{dx}$，$\frac{df(x)}{dx}$）

求导定义公式：$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$（这个式子有极限值就说明在这点可导）

左导数：$f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$　　右导数：$f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

函数在某点可导的充分必要条件：$f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$（左导数＝右导数）

题 1：求函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x & x<0\\ \ln(1+x) & x\ge 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 的导数

解:左导数

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\sin\Delta x-\ln(1+0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}=1$$

右导数

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\ln(1+\Delta x)-\ln(1+0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

$f'_-(0)=f'_+(0)=1$　　所以在 $x=0$ 处导数 $f'(0)=1$

题 2：已知 $f'(2)=1$，求函数 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$

解：$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}=\frac{(2+h)-(2-h)}{h}f'(2)=2f'(2)=2$

2. 求导计算

题 1. 设 $y=e^x\ln x$，求 y'

解：$y'=\left(e^x\right)'\ln x+e^x\left(\ln x\right)'=e^x\ln x+\dfrac{e^x}{x}$

题 2. 设 $y=\ln\cos e^x$，求 dy

解：$y'=\dfrac{1}{\cos e^x}\cdot\left[-\sin e^x\right]\cdot e^x=-e^x\tan e^x$

$dy=-e^x\tan e^x dx$

题 3. 设 $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$，求 y'

解：$y'=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left[1+\dfrac{1}{2}\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x\right]$

$=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

$=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

题 4. 设 $y=f\left(\sin x^2\right)$，求 $\dfrac{dy}{dx}$

解：$\dfrac{dy}{dx}=f'\left(\sin x^2\right)\cdot\cos x^2\cdot 2x=2x\cos x^2 f'\left(\sin x^2\right)$

题 5. 设 $y=f(x)$ 由方程 $y-xe^y=1$ 确定，求 $dy|_{x=0}$

解：两边同时对 x 求导，得

$y'-e^y-xe^y y'=0$　　解得 $y'=\dfrac{e^y}{1-xe^y}$

把 $x=0$ 代入原方程可得 $y=1$

所以 $y'=\left.\dfrac{e^y}{1-xe^y}\right|_{(0,1)}=e$　　$dy|_{x=0}=edx$

$$[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$

$(e^x)'=e^x$

$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

$(a^x)'=a^x\ln a$

$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$

$(\sin x)'=\cos x$

$(\cos x)'=-\sin x$

$(\tan x)'=\sec^2 x$

$(\cot x)'=-\csc^2 x$

$(\sec x)'=\sec x\tan x$

$(\csc x)'=-\csc x\cot x$

$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$

$(\text{arccot}\, x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

题 6. 求曲线 $e^y - xy = e$ 在 $x=0$ 处的切线方程。

解：两边同时对 x 求导，得

$$e^y \cdot y' - y - x \cdot y' = 0 \qquad \Rightarrow y' = \frac{y}{e^y - x}$$

当 $x=0$ 时代入原方程 $y=1$　　则 $y' = \frac{1}{e}$

则切线方程为 $y-1=\frac{1}{e}(x-0)$　整理可得 $y=\frac{1}{e}x+1$

题 7. 设 $y=\left(1+x^2\right)^{\sin x}$，求 y'

解：两边取对数得：　　$\ln y = \sin x \cdot \ln\left(1+x^2\right)$

两边同时对 x 求导得：$\frac{1}{y}\cdot y' = \cos x \ln\left(1+x^2\right) + \frac{2x}{1+x^2}\sin x$

于是 $y' = y\cdot\left[\cos x\ln\left(1+x^2\right)+\frac{2x}{1+x^2}\sin x\right] = \left(1+x^2\right)^{\sin x}\left[\cos x\ln\left(1+x^2\right)+\frac{2x}{1+x^2}\sin x\right]$

题 8. 设 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=t-\arctan t \end{cases}$，求 $\frac{dy}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$

参数方程求导方法：

① $\frac{dx}{dt}$　② $\frac{dy}{dt}$

③ $\frac{dy}{dx} = \frac{②}{①}$

④ $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}$

⑤ $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{④}{①}$

解：$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}\cdot 2t = \frac{2t}{1+t^2}$　　$\frac{dy}{dt} = 1-\frac{1}{1+t^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{t}{2}$$

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt} = \frac{d\left(\frac{t}{2}\right)}{dt} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}\bigg/\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\bigg/\frac{2t}{1+t^2} = \frac{1+t^2}{4t}$$

3. 可导，可微，连续之间的关系

(可导和可微可以认为是一样的，可导就是可微，可微就是可导)

$$\boxed{\text{可导（可微）}} \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} \boxed{\text{连续}}$$

课时五 练习题

1. 求函数 $f(x)=\begin{cases}2x & ,x\le 0\\ \sin 2x & ,x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的导数。

2. 确定常数 a,b，使函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}(e^{2x}-1) & ,x<0\\ a+\sin bx & ,x\ge 0\end{cases}$ 处处可导。

3. 设 $f(x)=\begin{cases}x\cos\dfrac{1}{x^2} & ,x\ne 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处（ ）。

$A.$极限不存在　　$B.$极限存在但不连续　　$C.$ 连续但不可导　　$D.$可导

4. 设 $f'(x_0)=2$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}[f(x_0+\dfrac{1}{n})-f(x_0-\dfrac{1}{2n})]n$。

5. $f(x)$ 在 $U(x_0,\delta)$ 有定义，$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{h}=1$，则 $f'(x_0)=$（ ）。

$A.\ -\dfrac{1}{2}$　　$B.\ 2$　　$C.\ -1$　　$D.\ \dfrac{1}{2}$

6. 设 $y=\sin x\cdot\cos x$，求 y'。

7. $y=\ln\sin\sqrt{x}$，求 y'。

8. 设 $f(x)=x\arctan\sqrt{x^2+2x}$，求 $f'(x)$。

9. 设 $y=f(\ln x)$，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

10. 设 $y=f(x)$ 由方程 $xy=e^{x+y}$ 确定，求 dy。

11. 求曲线 $y=2+xe^y$ 在 $x=0$ 处的切线方程。

12. 设 $y=x^x$，求 y'。

13. 设 $y=x^{\cos x}$，$(x>0)$，求 dy

14. 求由参数方程 $\begin{cases}x=e^t\sin t\\ y=e^t\cos t\end{cases}$ 所确定的函数的导数 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{\frac{\pi}{3}}$。

15. 已知 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$

课时六 单调性与凹凸性

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 单调性与极值点	★★★★	3～10	选择/填空/大题
2. 凹凸性与拐点			

1. 单调性与极值点

题 1. 求函数 $f(x)=2x+3\sqrt[3]{x^2}$ 的单调区间和极值。

解：定义域：$(-\infty,+\infty)$，

$f'(x)=2+\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}$，可能极值点：$x_1=-1, x_2=0$

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−		+
$f(x)$	↗	极大	↘	极小	↗

解题方法：

① 求定义域

② 求可能极值点

③ 画表判正负

④ 总结

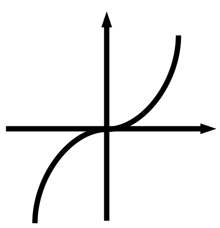
单调递增区间：$(-\infty,-1],[0,+\infty)$，单调递减区间：$[-1,0]$

极大值：$f(-1)=1$ ，极小值：$f(0)=0$

题 2：判断：

1) 驻点一定是极值点（×）

驻点：一阶导数为 **0** 的点



例 $y=x^3$，$y'=3x^2=0$ 驻点为 $(0,0)$

$x=0$ 不是极值点，因为在 $x=0$ 的左右两边 y' 不是异号

2) 极值点一定是驻点（×） 极值点存在于两处：①驻点；②一阶导数不存在点

3) 可导函数极值点一定是驻点（√） 去掉了导数不存在的情况。

题 3：证明：当 $x>0$ 时，$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$。

证明：令 $f(x)=x-\ln(1+x)$

$$f'=1-\frac{1}{1+x}>0$$

故 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 时单调增加，且 $f(0)=0$

于是有 $f(x)>0$，即 $x-\ln(1+x)>0$　　得证 $x>\ln(1+x)$，

令 $g(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}$

$$g'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}>0$$

故 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调增加，且 $g(0)=0$

故 $g(x)>0$，即 $\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}>0$　　得证 $\ln(1+x)>\frac{x}{1+x}$

综合可得：$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$

2. 单调性与极值点

题 1：求函数 $y=xe^{-x}$ 的凹凸区间及拐点。

解题方法：

① 求定义域

② 求可能拐点

③ 画表判正负

④ 总结

解：定义域为 $x\in(-\infty,+\infty)$

$y'=e^{-x}(1-x)$　　$y''=e^{-x}(x-2)$

可能拐点：$x=2$

	$(-\infty,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f''(x)$	$-$	$=0$	$+$
$f(x)$	凸	拐点	凹

凹区间：$x\in[2,+\infty)$；凸区间：$x\in(-\infty,2]$；拐点：$(2,2e^{-2})$

题 2：判断：

1） $f''(x)=0$ 的点一定是拐点（×） 要保证左右异号。

2）拐点一定是 $f''(x)=0$ 的点。（×）

（ 拐点存在于两处① $f''(x)=0$ 的点；②二阶导数不存在点）

3）二阶导数存在的函数，拐点一定是 $f''(x)=0$（√） 去掉了二阶导数不存在的情况。

课时六　练习题

1. 求 $y=2x\arctan x-\ln(1+x^2)$ 的单调区间。

2. 求函数 $y=\ln x+\dfrac{1}{x}$ 的极值。

3. 下列关于极值命题中正确的是（ ）

$A.$若 $f'(x_0)=0$ 则 x_0 必定是 $f(x)$ 的极值点

$B.$极大值一定大于极小值

$C.$若 $f'(x_0)$ 存在且 x_0 是极限值，则必有 $f'(x_0)=0$

$D.$若 $f(x)$ 在点 x_0 连续但不可导，则 x_0 必为 $f(x)$ 的极值点

4. 试证：当 $x>0$ 时，$e^x-\left(1+x\right)>1-\cos x$

5. 问 a,b 为何值时，点 $(1,3)$ 为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点。

6. 求 $y=xe^x-e^x+1$ 的单调性、极值、凹凸区间及拐点。

课时七　不定积分（一）

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 不定积分原理	★★★★	$0\sim3$	选择、填空
2. 直接积分法	★★★	基础知识	选择、填空、大题
3. 第一类换元法	必　考		

不定积分公式表：

1. $\int kdx = kx + C$

2. （1）$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$（$a \neq -1$）　（2）$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3. （1）$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$　（2）$\int e^x dx = e^x + C$

4. （1）$\int \sin xdx = -\cos x + C$　（2）$\int \cos xdx = \sin x + C$

（3）$\int \tan xdx = -\ln|\cos x| + C$　（4）$\int \cot xdx = \ln|\sin x| + C$

（5）$\int \sec xdx = \ln|\sec x + \tan x| + C$　（6）$\int \csc xdx = \ln|\csc x - \cot x| + C$

（7）$\int \sec^2 xdx = \tan x + C$　（8）$\int \csc^2 xdx = -\cot x + C$

（9）$\int \sec x\tan xdx = \sec x + C$　（10）$\int \csc x\cot xdx = -\csc x + C$

5. （1）$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$　（2）$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C\left(a>0\right)$

（3）$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$　（4）$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

（5）$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$　（6）$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C$

（7）$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$　（8）$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} + C$

1. 不定积分原理

题 1. 若 $f(x)$ 的导数是 $\sin x$，则 $f(x)$ 有一个原函数为（ ）。

$A.\ 1+\sin x$ $B.\ 1-\sin x$ $C.\ 1+\cos x$ $D.\ 1-\cos x$

答案：B $F'(x)=f(x)$，$f'(x)=\sin x$ $\Rightarrow F''(x)=\sin x$

2. 直接积分法

题 1：$\int \sqrt{x}(x^2-5)dx$

解：原式 $=\int (x^{\frac{5}{2}}-5x^{\frac{1}{2}})dx=\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}-\frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$

题 2：$\int \frac{3x^2}{1+x^2}dx$ （加项减项）

解：原式 $=\int \frac{3x^2+3-3}{1+x^2}dx=\int \frac{3(x^2+1)-3}{1+x^2}dx=\int (3-\frac{3}{1+x^2})dx=3x-3\arctan x+C$

题 3：$\int \frac{1}{x^2(1+x^2)}dx$

解：原式 $=\int (\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2})dx=-\frac{1}{x}-\arctan x+C$

题 4：$\int 2^x e^x dx$

解：原式 $=\int (2e)^x dx=\frac{(2e)^x}{\ln(2e)}+C$

题 5：$\int \sin^2(\frac{x}{2})dx$

解：原式 $=\int \frac{1}{2}(1-\cos x)dx=\int (\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos x)dx=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sin x+C$

利用二倍角公式降幂

$\sin 2x=2\sin x\cos x$

$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$

$=2\cos^2 x-1$

$=1-2\sin^2 x$

$\cos x=1-2\sin^2(\frac{x}{2})$

$\sin^2(\frac{x}{2})=\frac{1}{2}(1-\cos x)$

题 6: $\int \frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx$

解:原式$=\int \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x-\sin x}dx=\int \frac{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}{\cos x-\sin x}dx=\int(\cos x+\sin x)dx=\sin x-\cos x+C$

3. 第一类换元法——凑微分

题 1: $\int(1+2x)^2 dx$

解:原式$=\frac{1}{2}\int(1+2x)^2 d(1+2x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}(1+2x)^3+C=\frac{1}{6}(1+2x)^3+C$

题 2: $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

解:原式$=\int(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}xdx=\frac{1}{2}\int(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}d(x^2+1)=\sqrt{x^2+1}+C$

题 3: $\int \frac{5^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$

解:原式$=\int(5^{\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2})dx=-\int 5^{\frac{1}{x}}d(\frac{1}{x})=-\frac{1}{\ln 5}5^{\frac{1}{x}}+C$

题 4: $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$

解:原式$=\int \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\int \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}d(\sqrt{x})=2\arctan\sqrt{x}+C$

题 5: $\int \frac{1}{1+e^{-x}}dx$

解:原式$=\int \frac{e^x}{1+e^x}dx=\int \frac{1}{1+e^x}\cdot e^x dx=\int \frac{1}{1+e^x}d(1+e^x)=\ln(e^x+1)+C$

题 6：$\int \frac{1}{x\ln x}dx$

解：原式 $=\int \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}dx=\int\frac{1}{\ln x}d(\ln x)=\ln(\ln x)+C$

题 7：$\int \tan xdx$

解：原式 $=\int\frac{\text{sinx}}{\cos x}dx=-\int\frac{1}{\cos x}d\cos x=-\ln\left|\cos x\right|+C$

题 8：$\int \cos^3\theta d\theta$

解：原式 $=\int\cos^2\theta\cdot\cos\theta d\theta=\int\cos^2\theta d\sin\theta\ =\int(1-\sin^2\theta)d\sin\theta=\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta+C$

题 9：$\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$

解：原式 $=\int\arctan\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx=2\int\arctan\sqrt{x}d(\arctan\sqrt{x})=(\arctan\sqrt{x})^2+C$

课时七 练习题

1. 设 $e^x+\sin x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f'(x)=$________。

2. 设 a 是非零常数，若 $\ln(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，那么 $f(x)$ 的另一个原函数是（ ）。

$A.\ \ln|ax|$ $B.\ \frac{1}{a}\ln|ax|$ $C.\ \ln|a+x|$ $D.\ \frac{1}{2}(\ln x)^2$

3. 对于不定积分 $\int f(x)dx$，下列说法正确的是（ ）。

$A.\ d\int f(x)dx=f(x)$ $B.\int f'(x)dx=f(x)$ $C.\int df(x)=f(x)$ $D.\frac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)$

4. 求下列不定积分：

1）$\int(\sqrt{x}+1)\sqrt{x^3}dx$ 2）$\int\frac{x^2}{1+x^2}dx$ 3）$\int\frac{1}{x^2-3}dx$ 4）$\int\cos^2\frac{x}{2}dx$

5）$\int\frac{dx}{\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}$ 6）$\int\tan^2 xdx$ 7）$\int(3-2x)^3dx$ 8）$\int\frac{1}{\sqrt[3]{2x+1}}dx$

9）$\int 3^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}dx$ 10）$\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ 11）$\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$ 12）$\int\frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}$

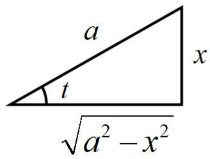
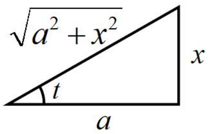
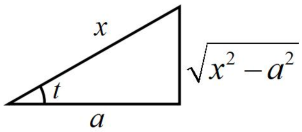
13）$\int\frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}dx$ 14）$\int\frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}}dx$ 15）$\int\tan^3 x\sec xdx$ 16）$\int\frac{xe^{\arctan x^2}}{1+x^4}dx$

课时八　不定积分（二）

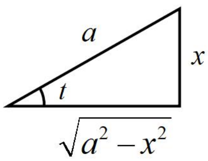
考点	重要程度	分值	常见题型
1. 第二类换元法	★★★	0～5	大题
2. 分部积分法	必　考	5～8	大题
3. 有理化积分	★★★	0～5	大题

1. 第二类换元法

①三角代换（被积函数含有二次根式的情况通常用三角换元）

根式形式	所作替换	对应三角形
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x=a\sin t$	
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x=a\tan t$	
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x=a\sec t$	

题 1：$\int \frac{1}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$



解：令 $x=a\sin t$， $dx=a\cos tdt$

$$原式=\int \frac{1}{a^3\cos^3 t}\cdot a\cos tdt$$

$$=\frac{1}{a^2}\int \sec^2 tdt=\frac{1}{a^2}\tan t+C$$

$$=\frac{1}{a^2}\tan t+C=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}+C$$

②幂代换（被积函数含有$\sqrt[n]{ax+b}$或$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$时，用$t$整体替换）

题 1：$\int\frac{1}{1+\sqrt{2x}}dx$

解：令$1+\sqrt{2x}=t$，$x=\frac{1}{2}(t-1)^2$，$dx=(t-1)dt$

原式$=\int\frac{1}{t}\cdot(t-1)dt=\int(1-\frac{1}{t})dt=t-\ln t+C=1+\sqrt{2x}-\ln(1+\sqrt{2x})+C$

2. 分部积分法

$\int u\cdot v'dx=\int udv=uv-\int v\cdot du=uv-\int v\cdot u'dx$

u的优先等级：反 对 幂 指 三

题 1：$\int x\ln xdx$

解：原式$=\frac{1}{2}\int\ln xdx^2=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{2}\int x^2d\ln x=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{2}\int x^2\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$

题 2：$\int x\arctan xdx$

解：原式$=\frac{1}{2}\int\arctan xdx^2$

$$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int x^2d\arctan x$$

$$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int(1-\frac{1}{1+x^2})dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\arctan x+C$$

题 3：$\int\ln xdx$

解：原式$=x\ln x-\int xd\ln x=x\ln x-\int1\cdot dx=x\ln x-x+C$

题 4：$\int e^{\sqrt{x}}dx$　令$\sqrt{x}=t$，$x=t^2$，$dx=2tdt$

解：原式$=\int e^t\cdot2tdt=2\int tde^t=2t\cdot e^t-2\int e^tdt=2te^t-2e^t+C=2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}-2e^{\sqrt{x}}+C$

3.有理化积分

题 1：$\int \frac{x+1}{x^2-5x+6}dx$

解：$\frac{x+1}{x^2-5x+6}=\frac{x+1}{(x-3)(x-2)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}=\frac{A(x-2)+B(x-3)}{(x-2)(x-3)}=\frac{(A+B)x-2A-3B}{(x-2)(x-3)}$

$$(A+B)x-2A-3B=x+1 \quad \Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ 2A+3B=-1 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} A=4 \\ B=-3 \end{cases}$$

故原式$=\int(\frac{4}{x-3}-\frac{3}{x-2})dx=4\ln|x-3|-3\ln|x-2|+C$

课时八　　练习题

1. $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$ ，$(a>0)$

2. $\int\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}dx$

3. $\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$

4. $\int\frac{1}{\sqrt{x+2}+1}dx$

5. $\int\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx$

6. $\int x^n\ln xdx$

7. $\int\arcsin xdx$

9. $\int xe^{2x}dx$

10. $\int x\cos xdx$

11. $\int\frac{1}{x\left(x^2+1\right)}dx$

课时九 定积分（一）

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 凑微分/分部积分	必 考	6～8	大题
2. 换元换限			
3. 分段函数			
4. 反常积分			

1. 凑微分/分部积分

题 1：计算定积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$（凑微分）

解：原式 $=\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}dx=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}d\left(\frac{x}{2}\right)=\arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^1=\arcsin\frac{1}{2}-0=\frac{\pi}{6}$

题 2：计算定积分 $\int_0^{\sqrt{3}} 2x\arctan xdx$（分部积分）

解：原式 $=\int_0^{\sqrt{3}} \arctan xdx^2$

$$=x^2\arctan x\Big|_0^{\sqrt{3}}-\int_0^{\sqrt{3}} x^2 d\arctan x$$

$$=\pi-\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2}{1+x^2}dx=\pi-\int_0^{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$=\pi-\left(x-\arctan x\right)\Big|_0^{\sqrt{3}}=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$$

2. 换元换限

题 1：计算定积分 $\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx$

解：$\sqrt{e^x-1}=t$，$x=\ln\left(1+t^2\right)$，$dx=\frac{2t}{1+t^2}dt$

$x=0$ 时 $t=0$，$x=\ln 2$ 时 $t=1$

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx=\int_0^1 t\cdot\frac{2t}{1+t^2}dt=2\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt=2\left(t-\arctan t\right)\Big|_0^1=2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)=2-\frac{\pi}{2}$$

题 2：计算定积分 $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$

解：令 $x=\tan t, t=\arctan x, dx=\sec^2 tdt$

$x=0$ 时，$t=0$；$x=1$ 时，$t=\frac{\pi}{4}$

原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sec^3 t}\cdot\sec^2 tdt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos tdt=\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. 分段函数

题 1：计算定积分 $\int_0^{2\pi}|\sin x|dx$（分段积分）

解：原式 $=\int_0^{\pi}\sin xdx+\int_{\pi}^{2\pi}-\sin xdx=-\cos x\Big|_0^{\pi}+\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}=4$

题 2：计算 $\int_0^2 f(x)dx$，其中 $f(x)=\begin{cases} x+1 & x\le 1 \\ \frac{1}{2}x^2 & x>1 \end{cases}$（分段积分）

解：原式 $=\int_0^1(x+1)dx+\int_1^2\frac{1}{2}x^2dx=\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)\Big|_0^1+\frac{1}{6}x^3\Big|_1^2=\frac{8}{3}$

4. 反常积分

题 1：计算定积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}dx$（反常积分—积分区间无界）

解：原式 $=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+(x+1)^2}dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+(x+1)^2}d(x+1)=\arctan(x+1)\Big|_0^{+\infty}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan(x+1)-\arctan 1=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$

题 2：讨论 $\int_{-1}^1\frac{1}{x^2}dx$ 的收敛性。

解：原式 $=\int_{-1}^0\frac{1}{x^2}dx+\int_0^1\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^0-\frac{1}{x}\Big|_0^1=\lim\limits_{x\to0^-}-\frac{1}{x}-1-1+\lim\limits_{x\to0^-}-\frac{1}{x}=\infty-\infty$，发散

课时九　练习题

1. 计算 $\int_1^e \frac{\ln x}{x(1+\ln x)}dx$

2. 计算 $\int_0^1 \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}dx$

3. 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2xdx$

4. 计算 $\int_1^{e^2} \sqrt{x}\ln xdx$

5. 计算 $\int_8^{27} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-1}dx$

6. 计算 $\int_{\frac{1}{2}}^1 e^{\sqrt{2x-1}}dx$

7. 计算 $\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx$

8. 计算 $\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x|dx$

9. 已知 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & x\ge 0 \\ xe^{x^2} & x<0 \end{cases}$，计算 $\int_{-1}^1 f(x)dx$

10. 下列反常积分中发散的是（　）。

$A.\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$　　$B.\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$　　$C.\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}dx$　　$D.\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$

11. 反常积分 $\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx,(p>0)$ 收敛，则 p 的取值范围是_________。

12. 下列反常积分中收敛的是（　）。

$A.\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx$　　$B.\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$　　$C.\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$　　$D.\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}dx$

课时十　定积分（二）

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 定积分的性质	★★★★★	3～6	选择、填空
2. 变限积分的求导	★★★★	0～6	大题

1. 定积分的性质

题 1. $\int_{-2}^{2}(\frac{x\cos x}{1+x^2}+\sqrt{4-x^2})dx=$________。

奇偶性：

若 $f(x)$ 为奇，$\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$

若 $f(x)$ 为偶，$\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_{0}^{a}f(x)dx$

解：原式 $=\int_{-2}^{2}\frac{x\cos x}{1+x^2}dx+\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx$

$$=0+2\int_{0}^{2}\sqrt{4-x^2}dx=2\pi$$

题 2. 设 $I_1=\int_1^2\ln xdx$，$I_2=\int_1^2\ln^2xdx$，$I_3=\int_1^2x\ln xdx$，则下列不等式正确的是（ ）。

$A.\ I_1>I_2>I_3$　　$B.\ I_1<I_2<I_3$

$C.\ I_2<I_1<I_3$　　$D.\ I_1>I_3>I_2$

$f(x)\le g(x)$，则 $\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$

答案：C　解：令 $x=2$，$(\ln 2)^2<\ln 2<2\ln 2$，所以 $I_2<I_1<I_3$

2. 变限积分的求导

$$\frac{d}{dx}\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(t)dt=f[\varphi_2(x)]\cdot\varphi_2'(x)-f[\varphi_1(x)]\cdot\varphi_1'(x)$$

题 1：$\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}dt$

解：原式 $=\sqrt{1+(x^2)^2}\cdot 2x-\sqrt{1+0^2}\cdot(0)'=2x\sqrt{1+x^4}$

题 2：求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^{1}e^{-t^2}dt}{x^2}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{0-e^{-\cos^2x}\cdot(-\sin x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-\cos^2x}}{2}\cdot\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2}e^{-1}$

课时十　练习题

1. $\int_{-2}^{2}\left[\frac{\sin x^3\ln(1+x^2)}{e^{x^2}-1}-\sqrt{4-x^2}\right]dx=$________。

2. $\int_{-1}^{1}\frac{x+|x|}{1+x^2}dx=$________。

3. $I_1=\int_0^1 xdx$，$I_2=\int_0^1\ln xdx$，$I_3=\int_0^1\sqrt{x}dx$ 比较 I_1,I_2,I_3 大小

4. 比较定积分的大小：

1）$\int_0^1 e^x dx$ ___ $\int_0^1 e^{x^2}dx$　　2）$\int_0^1\frac{1}{1+x^5}dx$ ___ $\int_0^1\frac{1}{1+x^{10}}dx$

5. 求极限 $\frac{d}{dx}\int_x^{4x}\sin x^2 dx$

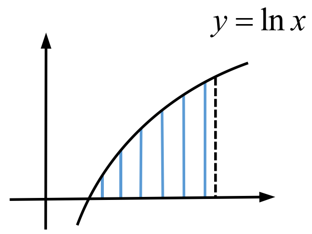
6. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}dt}{\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt}$

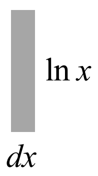
课时十一　定积分的应用

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 利用定积分求面积 2. 利用定积分求体积	必考	5-10	大题

1. 利用定积分求面积

题 1：计算 $y=\ln x$ 与 x 轴以及 $x=e$ 围成的图形面积。

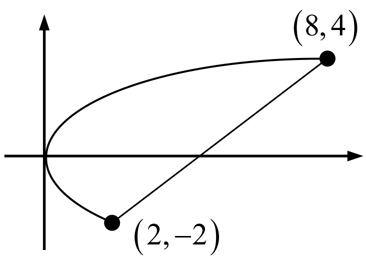




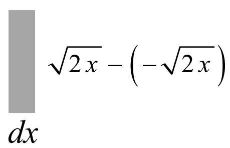
解：$dA=\ln x dx$

$$A=\int_1^e dA=\int_1^e \ln x dx=\left(x\ln x-x\right)\Big|_1^e=1$$

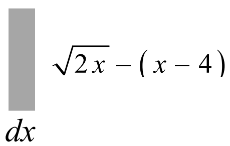
题 2：计算抛物线 $y^2=2x$ 与 $y=x-4$ 所围成的图形面积



A_1 :



A_2 :



解：$dA_1=\left[\sqrt{2x}-\left(-\sqrt{2x}\right)\right]dx=2\sqrt{2x}dx$

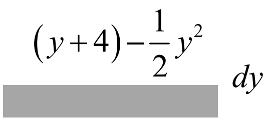
$$A_1=\int_0^2 dA_1=\int_0^2 2\sqrt{2x}dx=\frac{16}{3}$$

$$dA_2=\left[\sqrt{2x}-(x-4)\right]dx=\left(\sqrt{2x}+4-x\right)dx$$

$$A_2=\int_2^8 dA_2=\int_2^8\left(\sqrt{2x}+4-x\right)dx=\frac{38}{3}$$

$$A=A_1+A_2=\frac{16}{3}+\frac{38}{3}=18$$

解法二：

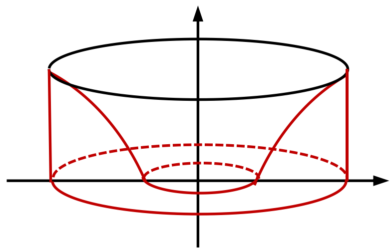


解：$dA=\left(y+4-\frac{1}{2}y^2\right)dy$　$A=\int_{-2}^4\left(y+4-\frac{1}{2}y^2\right)dy=\left[\frac{y^2}{2}+4y-\frac{y^3}{6}\right]\Bigg|_{-2}^4=18$

2. 利用定积分求体积

题 3：计算 $y=\ln x$，x 轴以及 $x=e$ 围成的图形绕 x 轴和 y 轴旋转一周的体积分别是多少

解：绕 x 轴

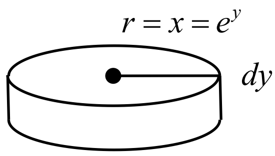


$$dV_x=\pi r^2 dx=\pi\cdot(\ln x)^2 dx$$

$$V_x=\int_1^e dV_x=\int_1^e \pi(\ln x)^2 dx=\pi(e-2)$$

绕 y 轴 $V_y=V_{外}-V_{内}$

$$V_{外}=\pi\cdot e^2\cdot 1=\pi e^2$$



$$dV_{内}=\pi\cdot\left(e^y\right)^2\cdot dy=\pi\cdot e^{2y}dy$$

$$V_{内}=\int_0^1 dV_{内}=\int_0^1 \pi e^{2y}dy=\frac{1}{2}\pi(e^2-1)$$

则 $V_y=V_{外}-V_{内}=\pi e^2-\dfrac{1}{2}\pi(e^2-1)=\dfrac{1}{2}\pi\left(e^2+1\right)$

课时十一　练习题

1. 计算平面图形由抛物线 $y=2-x^2$ 与直线 $y=x$ 围成的面积。

2. 计算曲线 $y=\ln x$ 与直线 $y=\ln a, y=\ln b\ (b>a>1)$ 及 y 轴所围图形的面积。

3. 求曲线 $y=\sin x\left(0\le x\le \pi\right)$ 与 $y=0$ 所围成的平面图形面积以及绕 x 轴旋转所得的体积。

4. 过坐标原点作曲线 $y=e^x$ 的切线，该切线与曲线 $y=e^x$ 以及 x 轴围成的平面图形记为 D

   ①求 D 的面积 A；②求 D 绕 x 轴所围成的旋转体体积 V

5. 过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线并交于点 $(e,1)$，该切线与曲线 $y=\ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D。1）求平面图形 D 的面积；2）求 D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积。

课时十二　微分方程

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 可分离变量	★★★	0～3	选择、填空
2. 齐次微分方程	★★★	0～3	
3. 一阶线性微分方程	必 考	6～10	大题
4. 二阶常系数齐次			
5. 二阶常系数非齐次			

1. 可分离变量　方程形式：$g(y)dy = f(x)dx$　方法：两边同时积分

题 1. $\dfrac{dy}{dx} = 2xy$

解：分离变量 $\dfrac{dy}{y} = 2xdx$，两边同时积分 $\int \dfrac{dy}{y} = \int 2xdx$

$\Rightarrow \quad \ln|y| = x^2 + C$

$\Rightarrow \quad |y| = e^{x^2+C} = e^{x^2} \cdot e^C$

$\Rightarrow \quad y = \pm e^C \cdot e^{x^2}$

因 $\pm e^{C_1}$ 是任意非零常数，又 $y \equiv 0$ 也是原方程的解，

故得方程 $\dfrac{dy}{dx} = 2xy$ 的通解为：$y = C_1 e^{x^2}$ (C_1为任意常数)

题 2. $xy' - y\ln y = 0$

解：$x\dfrac{dy}{dx} - y\ln y = 0$　分离变量 $\dfrac{dy}{y\ln y} = \dfrac{dx}{x}$　两边积分 $\int \dfrac{dy}{y\ln y} = \int \dfrac{dx}{x}$

$\ln|\ln y| = \ln|x| + C_1 = \ln|x| + \ln e^{C_1} = \ln e^{C_1}|x|$

$|\ln y| = e^{C_1}|x| = C_2|x|$

$\Rightarrow \ln y = \pm C_2 x = Cx$

2. 齐次微分方程

方程形式：$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

题 1. $\left(x^2+2xy\right)dx+xydy=0$

解：$\frac{dy}{dx}=-\frac{x^2+2xy}{xy}=-\frac{1+2\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}}$

令 $u=\frac{y}{x}$，则 $y=xu$ $\quad \frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$

$u+x\frac{du}{dx}=-\frac{1+2u}{u}$

整理得 $x\frac{du}{dx}=-\frac{1+2u}{u}-u=-\frac{(u+1)^2}{u}$

分离变量 $\frac{u}{(u+1)^2}du=-\frac{1}{x}dx$

两边积分 $\int\frac{u}{(u+1)^2}du=-\int\frac{1}{x}dx$

$\ln|u+1|+\frac{1}{u+1}=-\ln|x|+C$

将 $u=\frac{y}{x}$ 代回 $\ln\left|\frac{y}{x}+1\right|+\frac{1}{\frac{y}{x}+1}=-\ln|x|+C$

化简整理：$\ln\left|\frac{y}{x}+1\right|+\ln|x|+\frac{x}{x+y}=C$

$\ln|y+x|+\frac{x}{x+y}=C$

3. 一阶线性微分方程 形式：$y'+P(x)y=Q(x)$

题 1. $\dfrac{dy}{dx}+y=e^{-x}$

解：$P(x)=1$，$Q(x)=e^{-x}$

通解公式：$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx+C\right)$

$$\int P(x)dx=\int 1dx=x$$

$$\int Q(x)e^{\int P(x)dx}=\int e^{-x}\cdot e^{x}dx=x$$

所以方程通解：$y=e^{-x}(x+C)$

题 2. 已知 $f(x)$ 为可导函数，且满足方程 $\int_0^x tf(t)dt=x^2+f(x)$，求 $f(x)$

解：两边求导 $xf(x)=2x+f'(x)$

整理得 $f'(x)-xf(x)=-2x$

$$P(x)=-x \quad Q(x)=-2x$$

$$\int P(x)dx=\int -xdx=-\frac{1}{2}x^2$$

$$\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx=\int -2xe^{-\frac{1}{2}x^2}dx=2e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

故方程通解：$f(x)=e^{\frac{1}{2}x^2}\left(2e^{-\frac{1}{2}x^2}+C\right)=2+Ce^{\frac{1}{2}x^2}$

$x=0$ 时 代入原方程 $\int_0^x tf(t)dt=x^2+f(x)$ $\quad\Rightarrow 0=0+f(0)\ \Rightarrow f(0)=0$

代入 $(0,0)$ 点，即 $0=2+C\ \Rightarrow C=-2$，故 $f(x)=2-2e^{\frac{1}{2}x^2}$

4. 二阶常系数齐次线性微分方程

形式：$y''+Py'+Qy=0$

特征根 r_1，r_2	通解
$r_1\neq r_2$	$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
$r_1=r_2$	$y=\left(C_1+C_2x\right)e^{r_1x}$
$r=\alpha\pm\beta i$	$y=e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right)$

题 1. 求微分方程 $y''-2y'-3y=0$ 的通解.

解：特征方程 $r^2-2r-3=0$

特征根：$r_1=-1\quad r_2=3$

方程通解：$y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$

题 2. 求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\dfrac{dy}{dx}+y=0$ 的解，满足初始条件 $y|_{x=0}=4$，$y'|_{x=0}=-2$

解：原方程：$y''+2y'+y=0$

特征方程：$r^2+2r+1=0$

特征根：$r_1=r_2=-1$

通解为：$y=\left(C_1+C_2x\right)e^{-x}$

代入 $y|_{x=0}=4$ 得 $C_1=4$，

则 $y=\left(4+C_2x\right)e^{-x}$

$y'=C_2e^{-x}-\left(4+C_2x\right)e^{-x}$

代入 $y'|_{x=0}=-2$ 得 $-2=C_2-4\ \Rightarrow\ C_2=2$

所以方程的解：$y=\left(4+2x\right)e^{-x}$

5. 二阶常系数非齐次线性方程

通解结构：$y=Y+y^*$（齐通+非特）

$$y^*=x^k e^{\lambda x}Q_m(x) \qquad k=\begin{cases}0 & \lambda\neq\lambda_1,\lambda_2\\1 & \lambda=\lambda_1\text{或}\lambda=\lambda_2\\2 & \lambda=\lambda_1=\lambda_2\end{cases}$$

$P_m(x)$	$Q_m(x)$
x	$ax+b$
x^2+1	ax^2+bx+c
x^3+x^2+1	ax^3+bx^2+cx+d

①: $y''+py'+qy=e^{\lambda x}P_m(x)$ 型

题 1. $y''-5y'+6y=xe^{2x}$

解：特征方程：$r^2-5r+6=0$

特征根：$r_1=2,r_2=3$

通解：$Y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$

从原方程可知 $\lambda=2$，$P_m(x)=x$

设特解：$y^*=xe^{2x}(ax+b)$

$$(y^*)'=e^{2x}(2ax^2+2bx+2ax+b)$$

$$(y^*)''=e^{2x}(4ax^2+4bx+8ax+4b+2a)$$

将 y^*，$(y^*)'$ $(y^*)''$ 代入原方程，化简后得：$-2ax+2a-b=x$

对应系数相等 $\begin{cases}-2a=1\\2a-b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{1}{2}\\b=-1\end{cases}\qquad\Rightarrow y^*=-x\left(\dfrac{1}{2}x+1\right)e^{2x}$

则方程通解为 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}-x\left(\dfrac{1}{2}x+1\right)e^{2x}$

② $f(x)=e^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x+Q_n(x)\sin\omega x\right]$型

题 2. 求微分方程 $y''+4y=x\cos x$ 的通解。

通解：$y=Y+y^*$（齐通+非特）

$$y^*=x^k e^{\lambda x}\left[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}\sin\omega x\right]$$

$$k=\begin{cases}0 & \lambda\pm\omega i\text{不是特征根}\\ 1 & \lambda\pm\omega i\text{是特征根}\end{cases}$$

$$m=\max\{l,n\}$$

$$R_m^{(1)}=ax^m+bx^{m-1}+\cdots+c$$

$$R_m^{(2)}=ex^m+fx^{m-1}+\cdots+g$$

解：$\lambda=0,\omega=1,P_l(x)=x,Q_n(x)=0$

特征方程：$r^2+4=0$

特征根：$r=\pm 2i$　　$\alpha=0,\beta=2$

$Y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$

由于 $\lambda\pm\omega i=\pm i$ 不是特征方程的根

故 $y^*=(ax+b)\cos x+(cx+d)\sin x$

$$(y^*)'=(cx+d+a)\cos x+(-ax+c-b)\sin x$$

$$(y^*)''=(2c-ax-b)\cos x-(cx+d+2a)\sin x$$

代入原方程化简整理得：$(3ax+3b+2c)\cos x+(3cx+3d-2a)\sin x=x\cos x$

$$\begin{cases}3a=1\\3b+2c=0\\3c=0\\3d-2a=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{3}\\b=0\\c=0\\d=\dfrac{2}{9}\end{cases}\qquad\Rightarrow y^*=\frac{1}{3}x\cos x+\frac{2}{9}\sin x$$

故 $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\dfrac{1}{3}x\cos x+\dfrac{2}{9}\sin x$

课时十二 练习题

1. 下列微分方程的阶数为二阶的是（ ）。

$A.\ x(y')^2-2yy'+x=0$ $B.\ x^2y''-xy'+y=0$

$C.\ xy'''-2y''+x^2y=0$ $D.\ (7x-6y)dx+(x+y)dy=0$

2. 求微分方程 $xdy+2ydx=0, y|_{x=2}=1$ 的特解。

3. 求微分方程 $\left(x^3+y^3\right)dx-3xy^2dy=0$ 的通解。

4. 求微分方程 $y'+y\cos x=e^{-\sin x}$ 的通解。

5. 求微分方程 $y'+\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$ 的通解。

6. 求微分方程 $x\dfrac{dy}{dx}+y=xe^x$ 满足 $y|_{x=1}=0$ 的特解。

7. 设可导函数 $\varphi(x)$ 满足 $\varphi(x)\cos x+2\int_0^x\varphi(t)\sin tdt=x+1$，求 $\varphi(x)$。

8. 求微分方程 $y''+6y'+9y=0$ 的通解。

9. 求微分方程 $y''-4y'+3y=0$ 满足 $y|_{x=0}=6$，$y'|_{x=0}=10$ 的特解。

10. 求微分方程 $y''-4y'+5y=0$ 的通解。

11. 求微分方程 $y''-2y'+y=4xe^x$ 的通解。

12. 求微分方程 $y''-5y'+4y=3-4x$ 的通解。

13. 求微分方程 $y''-y=e^x\cos 2x$ 的通解。

课时十三 中值定理

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 罗尔中值定理	★★★★★	0～8	大题
2. 拉格朗日中值定理	★★★★		
3. 柯西中值定理	★★		

1. 罗尔中值定理

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续； (2) 在开区间 (a,b) 内可导； (3) $f(a)=f(b)$。

则 (a,b) 内至少有一点 ξ $(a<\xi<b)$，使得 $f'(\xi)=0$。

题 1. 设函数在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=1, f(1)=0$，证明：存在一点 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$。

证：令 $F(x)=xf(x)$， $F(0)=0\times f(0)=0$， $F(1)=1\times f(1)=0$

$F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导， $F(0)=F(1)$

由罗尔定理得 $\exists\xi\in(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$

即 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$，移项得 $f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$

题 2. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(1)=0$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $2f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$。

证：令 $F(x)=x^2 f(x)$， $F(0)=0^2\cdot f(0)=0$ ， $F(0)=1^2\cdot f(1)=0$

$F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $F(0)=F(1)$

由罗尔定理得 $\exists\xi\in(0,1)$，使得 $F'(\xi)=2\xi f(\xi)+\xi^2 f'(\xi)=0$

得证： $2f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

2. 拉格朗日中值定理

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；　　(2) 在开区间 (a,b) 内可导；

则 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$ 或 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

题 1：设 $b>a>0$，证明不等式：$\dfrac{b-a}{b}<\ln b-\ln a<\dfrac{b-a}{a}$

证明：令 $f(x)=\ln x$

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，由拉格朗日中值定理知：

存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}=f'(\xi)$

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$，$f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0$，$f'(x)$ 在 (a,b) 上单调递减

$\dfrac{1}{b}<f'(x)<\dfrac{1}{a}$，即 $\dfrac{1}{b}<f'(\xi)<\dfrac{1}{a}$，$\dfrac{1}{b}<\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}<\dfrac{1}{a}$

又 $b>a$，$\therefore\dfrac{b-a}{b}<\ln b-\ln a<\dfrac{b-a}{a}$，原不等式得证

3. 柯西中值定理

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足：

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；　　(2) 在开区间 (a,b) 内可导；　　(3) $g'(x)\neq 0$。

那么存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$，$(a<\xi<b)$

题 1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导 $(0<a<b)$，求证：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=\xi\ln\frac{b}{a}f'(\xi)$。

证：令 $g(x)=\ln x$， $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导

由柯西中值定理得：$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$，即 $\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\frac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}}=\xi f'(\xi)$

得证： $f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)(\ln b-\ln a)=\xi\ln\frac{b}{a}f'(\xi)$

课时十三　练习题

1. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可微，且 $f(1)=0$，证明：在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f'(\xi)\arctan\xi+\frac{f(\xi)}{1+\xi^2}=0$ 。

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$，证明：至少有一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)+f'(\xi)=0$。

3. 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$f(a)=f(b)=0$，证明：至少存在一个 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$

4. 证明：当 $b>a>0$，$n>1$ 时有不等式 $na^{n-1}<\frac{b^n-a^n}{b-a}<nb^{n-1}$

5. 证明：对任何实数 a,b 成立 $|\arctan a-\arctan b|\le|a-b|$

6. 设 $x_1x_2>0$，试证：在 x_1 与 x_2 之间存在一点 ξ，使得：$x_1e^{x_2}-x_2e^{x_1}=(1-\xi)e^{\xi}(x_1-x_2)$

课时一 练习题答案

1. 函数 $y=\dfrac{1}{\ln(1-x)}+\sqrt{x+2}$ 的定义域为________。

答案：$[-2,0)\cup(0,1)$

解：$\begin{cases}1-x>0\\ \ln(1-x)\neq 0\\ x+2\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<1\\ x\neq 0\\ x\geq -2\end{cases}\Rightarrow x\in[-2,0)\cup(0,1)$

2. 函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{\ln(x+2)}+\arccos\dfrac{x-1}{3}$ 的定义域为________。

答案：$(-2,-1)\cup(-1,2]$

解：$\begin{cases}4-x^2\geq 0\\ \ln(2+x)\neq 0\\ x+2>0\\ -1\leq\dfrac{x-1}{3}\leq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2\leq x\leq 2\\ x\neq -1\\ x>-2\\ -2\leq x\leq 4\end{cases}\Rightarrow x\in(-2,-1)\cup(-1,2]$

3. 下列各组函数中，是相同的函数的是（ ）。

A. $f(x)=|x|,g(x)=\sqrt{x^2}$ B. $f(x)=x,g(x)=(\sqrt{x})^2$

C. $f(x)=\ln x^2,g(x)=2\ln x$ D. $f(x)=\dfrac{|x|}{x},g(x)=1$

答案：A，解析：B.定义域不同；C.定义域不同；D.定义域不同，值域不同。

4. 设 $f(\sin\dfrac{x}{2})=1+\cos x$，求 $f(\cos x)$。

解：$f(\sin\dfrac{x}{2})=1+1-2\sin^2\dfrac{x}{2}=2-2\sin^2\dfrac{x}{2}$

即 $f(x)=2-2x^2$，则 $f(\cos x)=2-2\cos^2 x$

5. 求函数 $f(x)=\arctan\frac{1}{x+1}$，当 $x\to -1$ 时极限是否存在。

解：$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\arctan\frac{1}{x+1}=-\frac{\pi}{2}$，　$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\arctan\frac{1}{x+1}=\frac{\pi}{2}$

左极限 $\neq$ 右极限，故极限不存在。

6. 从 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=1$ 不能推测（　）。

$A.\ \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=1$　　$B.\ \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=1$　　$C.\ f(x_0)=1$　　$D.\ \lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-1\right]=0$

答案：C，极限值与函数值无关，故 C 错误。

7. $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\le 0 \\ e^{-x}+1, & 0<x\le 1 \\ x^2, & 1<x \end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=$（　）。

$A.\ 0$　　$B.$ 不存在　　$C.\ 2$　　$D.\ 1$

答案：C

解：$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+2)=2$，　$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(e^{-x}+1)=2$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$，故 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=2$

8. 下列各式正确的是（　）。

$A.\ \lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}}=1$　　$B.\ \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=0$　　$C.\ \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}=+\infty$　　$D.\ \lim\limits_{x\to -\infty} e^{\frac{1}{x}}=-1$

答案：A

解：$A:\ \lim\limits_{x\to +\infty}=e^{\frac{1}{x}}=e^0=1$；　　$B:\ \lim\limits_{x\to 0^+}=e^{\frac{1}{x}}=e^{+\infty}=+\infty$

$C:\ \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=e^{+\infty}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}=e^{-\infty}=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}\neq\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}$，故极限不存在

$D:\ \lim\limits_{x\to -\infty}=e^{\frac{1}{x}}=e^0=1$

课时二 练习题答案

1. 计算 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\sqrt{3x+1}-2)(\sqrt{3x+1}+2)}{(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x+1-4}{(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)}{(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{3}{\sqrt{3x+1}+2}=\frac{3}{4}$$

2. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\cos[\dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}]$

$$=\lim_{n\to\infty}\cos(\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}})=\lim_{n\to\infty}\cos\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=1$$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-n+1}{18n^3+n^2+n}=$（ ）。

$A.\ \dfrac{1}{6}$ $B.\ 0$ $C.\ \dfrac{1}{2}$ $D.\ 1$

答案：B $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-n+1}{18n^3+n^2+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2}{18n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{6n}=0$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)^{15}(2x+1)^{10}}{(3x+2)^{25}}=$________。

解：原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{15}\cdot 2^{10}\cdot x^{10}}{3^{25}\cdot x^{25}}=\dfrac{2^{10}}{3^{25}}$

5. 下列极限计算正确的是（ ）

$A.\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=0$ $B.\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$ $C.\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x}=2$ $D.\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x}=\dfrac{1}{2}$

答案：D

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}=$________。

解：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{\sin3x}{x}}{\frac{\sin2x}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{\sin3x}{3x}\cdot3}{\frac{\sin2x}{2x}\cdot2}=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin3x}{3x}}{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin2x}{2x}}=\dfrac{3}{2}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{2}{x})^x=$________。

解：原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{2}{x})^{(-\frac{x}{2})\cdot(-\frac{2}{x})x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}(-\frac{2}{x})\cdot x}=e^{-2}$

8. 若 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+a}{x-a})^x=8$，则 $a=$________。

解：$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{x+a}{x-a}-1)^x=8\quad\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{2a}{x-a})^x=8\quad\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{2a}{x-a})^{\frac{x-a}{2a}\cdot\frac{2a}{x-a}\cdot x}=8$

$\Rightarrow e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2ax}{x-a}}=8\quad\Rightarrow e^{2a}=8\quad\Rightarrow a=\dfrac{3}{2}\ln2$

9. $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=$________。

解：原式 $=\lim\limits_{x\to0}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot(\cos x-1)\cdot\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}(\cos x-1)\cdot\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}-\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}-\frac{1}{2}x}=1$

10. 下列变量在自变量给定的变化过程中是无穷小量的是（　）。

$A.\ \dfrac{x^2}{x^3+1}(x\to1)\qquad B.\ \ln x(x\to+\infty)\qquad C.\ 2^{-x}(x\to+\infty)\qquad D.\ \ln x(x\to2)$

答案：C

11. 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan3x}{\sin2x}=$________。

解：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{2x}=\dfrac{3}{2}$

12. 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sin^2x}=$________。

解：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{x^2}=1$

13. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-1)\tan 3x^2}{\arctan 2x(1-\cos x)}=$________。

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot 3x^2}{2x\cdot\dfrac{1}{2}x^2}=3$

14. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=$________。

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\dfrac{x^2}{2}}{x^3}=\dfrac{1}{2}$

15. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=$________。

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1+1-e^x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-(-x)}{x}=2$

16. 若 $x\to 0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $x\sin x$ 是等价无穷小，则 $a=$________。

答案：3

解：依题得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1}{x\sin x}=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{3}ax^2}{x^2}=1$，即 $\dfrac{1}{3}a=1\Rightarrow a=3$

17. 当 $x\to 0$ 时，$\cos x-1$ 是 $\sin^k x$ 的同阶无穷小量，则 $k=$________。

答案：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{\sin^k x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{x^k}=$ 常数（$\neq 0$ 且 $\neq 1$）　$\Rightarrow k=2$

课时三 练习题答案

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{x\tan x}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=1$

2. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{xe^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^{\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}xe^{\frac{x}{2}}}{1+e^x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}+\frac{1}{4}xe^{\frac{x}{2}}}{e^x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x+4}{4e^{\frac{x}{2}}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{2e^{\frac{x}{2}}}=0$

3. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\sin 3x}{\ln\sin 2x}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{\sin 3x}\cdot\cos 3x\cdot 3}{\frac{1}{\sin 2x}\cdot\cos 2x\cdot 2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{3\cos 3x}{2\cos 2x}\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}=\dfrac{3}{2}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x}{3x}=1$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right]$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}-\dfrac{1}{2(1+x)}=-\dfrac{1}{2}$

5. $\lim\limits_{x\to 0^+}x^2\ln x$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-2\cdot\frac{1}{x^3}}=\lim\limits_{x\to 0^+}-\dfrac{x^2}{2}=0$

6. 求 $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$

解：$\ln y=\lim\limits_{x\to 0}\ln(x+e^x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+e^x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+e^x}{x+e^x}=2$

$\ln y=2 \quad\Rightarrow\quad y=e^2$

7. 求 $\lim\limits_{x\to 1^+}(\ln x)^{\tan(x-1)}$

解：$\ln y=\lim\limits_{x\to1^+}\ln(\ln x)^{\tan(x-1)}=\lim\limits_{x\to1^+}\tan(x-1)\cdot\ln(\ln x)=\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)\cdot\ln(\ln x)$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{\ln(\ln x)}{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{(x-1)^2}}=\lim_{x\to1^+}-\frac{(x-1)^2}{x\ln x}$$

$$=\lim_{x\to1^+}-\frac{2(x-1)}{\ln x+1}=0$$

$\ln y=0 \quad\Rightarrow\quad y=e^0=1$

8. $y=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{\ln(x^3+1)}}$

解：$\ln y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\ln\left(x^3+1\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{3x^2}{x^3+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+1}{3x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x^3}}{3}=\dfrac{1}{3}$

$\ln y=\dfrac{1}{3} \quad\Rightarrow\quad y=e^{\frac{1}{3}}$

课时四 练习题答案

1. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{x} & x>0\\ x & x=0\\ \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} & x<0\end{cases}$ 问 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否连续。

解：左极限：

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to0^-}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=1$$

右极限：$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{x}=1$ 函数值：$f(0)=0$

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\neq f(0)$ $\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\sin2x & x<0\\ k & x=0\\ x\sin\dfrac{1}{x}+2 & x>0\end{cases}$ 求常数 k 的值，使函数 $f(x)$ 在定义域内连续。

解：左极限：$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x}\sin2x=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{2x}{x}=2$

右极限：$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}x\sin\dfrac{1}{x}+2=2$

$f(x)$ 在定义域内连续，那么 $f(x)$ 在 $x=0$ 处也是连续的。

$\therefore f(0)=k=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ $\Rightarrow k=2$

3. $y=\dfrac{x^2-x-6}{x^2-9}$ 的可去间断点是（ ）。

$A.\ x=3$ $B.\ x=-2$ $C.\ x=-3$ $D.$ 无

答案：A

解：函数在 $x=\pm3$ 时无定义

在 $x=3$ 处：$\lim\limits_{x\to 3} y=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+2)}{(x+3)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+2}{x+3}=\frac{5}{6}$

故 $x=3$ 为函数的可去间断点。

在 $x=-3$ 处：$\lim\limits_{x\to -3} y=\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2-x-6}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to -3}\frac{(x-3)(x+2)}{(x+3)(x-3)}=\lim\limits_{x\to -3}\frac{x+2}{x+3}=\infty$

故 $x=-3$ 为函数的无穷间断点。

4. 设 $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$，则 $x=1$ 是 $f(x)$ 的（ ）。

A.连续点　　B.无穷间断点　　C.跳跃间断点　　D.可去间断点

答案：B

5. 函数 $f(x)=\arctan\frac{1}{x}$ 的间断点是（ ）。

A.可去间断点　　B.无穷间断点　　C.跳跃间断点　　D.振荡间断点

答案：C

解：$f(x)$ 在 $x=0$ 处无定义，

解：左极限：$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\arctan\frac{1}{x}=\arctan(-\infty)=-\frac{\pi}{2}$

右极限：$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\arctan\frac{1}{x}=\arctan(+\infty)=\frac{\pi}{2}$

左极限 $\neq$ 右极限，故 $x=0$ 为跳跃间断点

6. $x=1$ 是 $f(x)=\frac{1}{1-e^{\frac{1}{1-x}}}$ ________间断点。

答案：跳跃间断点

解：左极限：$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{1-e^{\frac{1}{1-x}}}=0$　　右极限：$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{1-e^{\frac{1}{1-x}}}=1$

左极限 $\neq$ 右极限，故 $x=1$ 为跳跃间断点

课时五 练习题答案

1. 求函数 $f(x)=\begin{cases}2x & ,x\le 0\\ \sin 2x & ,x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的导数。

解：左导数： $f_-'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{2\Delta x-0}{\Delta x}=2$

右导数： $f_+'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\sin 2\Delta x}{\Delta x}=2$

$f_-'(0)=f_+'(0)=2$ 所以在 $x=0$ 处导数为 $f'(0)=2$

2. 确定常数 a,b，使函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}(e^{2x}-1) & ,x<0\\ a+\sin bx & ,x\ge 0\end{cases}$ 处处可导。

解： $f_-'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\frac{1}{\Delta x}(e^{2\Delta x}-1)-a}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{e^{2\Delta x}-1-a\Delta x}{\Delta x^2}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{2e^{2\Delta x}-a}{2\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{4e^{2\Delta x}}{2}=2$$

$f_+'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{a+\sin b\Delta x-a}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\sin b\Delta x}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{b\Delta x}{\Delta x}=b$$

依题可知 $\begin{cases}\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}2e^{2\Delta x}-a=0\\ b=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ b=2\end{cases}$

3. 设 $f(x)=\begin{cases} x\cos\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0 \\ 0 & ,x=0 \end{cases}$，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处（ ）。

$A.$极限不存在　　$B.$极限存在但不连续　　$C.$ 连续但不可导　　$D.$可导

答案：C

解：$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x\cos\dfrac{1}{x^2}=0=f(0)$

极限值 $=$ 函数值，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta x\cos\frac{1}{(\Delta x)^2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\frac{1}{(\Delta x)^2}$$

振荡无极限，故导数不存在

4. 设 $f'(x_0)=2$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}[f(x_0+\dfrac{1}{n})-f(x_0-\dfrac{1}{2n})]n$。

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x_0+\frac{1}{n})-f(x_0-\frac{1}{2n})}{\frac{1}{n}}=\dfrac{\frac{1}{n}-(-\frac{1}{2n})}{\frac{1}{n}}f'(x_0)=\dfrac{3}{2}\times 2=3$

5. $f(x)$ 在 $U(x_0,\delta)$ 有定义，$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{h}=1$，则 $f'(x_0)=$（ ）。

$A.\ -\dfrac{1}{2}$　　$B.\ 2$　　$C.\ -1$　　$D.\ \dfrac{1}{2}$

答案：A，解：原式 $=\dfrac{x_0-2h-x_0}{h}f'(x_0)=-2f'(x_0)=1\Rightarrow f'(x_0)=-\dfrac{1}{2}$

6. 设 $y=\sin x\cdot\cos x$，求 y'。

解：$y'=(\sin x)'\cos x+\sin x(\cos x)'=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$

7. $y=\ln\sin\sqrt{x}$，求 y'。

解：$y'=\dfrac{1}{\sin\sqrt{x}}\cdot\cos\sqrt{x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}$

8. 设 $f(x)=x\arctan\sqrt{x^2+2x}$，求 $f'(x)$。

解：$f'(x)=\arctan\sqrt{x^2+2x}+x\cdot\dfrac{1}{1+(\sqrt{x^2+2x})^2}\cdot\dfrac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x}}=\arctan\sqrt{x^2+2x}+\dfrac{x}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$

9. 设 $y=f(\ln x)$，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

解：$\dfrac{dy}{dx}=f'(\ln x)\cdot(\ln x)'=\dfrac{1}{x}f'(\ln x)=\dfrac{f'(\ln x)}{x}$

10. 设 $y=f(x)$ 由方程 $xy=e^{x+y}$ 确定，求 dy。

解：两边同时对 x 求导得：$y+xy'=e^{x+y}(1+y')$ $\Rightarrow y'=\dfrac{e^{x+y}-y}{x-e^{x+y}}$ $\Rightarrow dy=\dfrac{e^{x+y}-y}{x-e^{x+y}}dx$

11. 求曲线 $y=2+xe^y$ 在 $x=0$ 处的切线方程。

解：两边同时对 x 求导得：$y'=e^y+xe^y\cdot y'$ $\Rightarrow y'=\dfrac{e^y}{1-xe^y}$

将 $x=0$ 代入原方程得：$y(0)=2$，

将 $x=0$，$y(0)=2$ 代入 $\Rightarrow y'=\dfrac{e^y}{1-xe^y}$ 得 $y'(0)=e^2$

故切线方程为：$y-2=e^2(x-0)$，整理得 $y=e^2x+2$

12. 设 $y=x^x$，求 y'。

解：两边同时取对数：$\ln y=\ln x^x=x\ln x$

两边同时对 x 求导：$\dfrac{y'}{y}=\ln x+1$

于是 $y'=y(\ln x+1)=x^x(\ln x+1)$

13. 设 $y=x^{\cos x}$，$(x>0)$，求 dy。

解：两边同时取对数：$\ln y=\ln x^{\cos x}=\cos x\ln x$

两边同时对 x 求导：$\dfrac{y'}{y}=-\sin x\ln x+\dfrac{\cos x}{x}$

$$y'=(\frac{\cos x}{x}-\sin x\ln x)y=(\frac{\cos x}{x}-\sin x\ln x)x^{\cos x}$$

$$dy=(\frac{\cos x}{x}-\sin x\ln x)y=(\frac{\cos x}{x}-\sin x\ln x)x^{\cos x}dx$$

14. 求由参数方程 $\begin{cases}x=e^t\sin t\\ y=e^t\cos t\end{cases}$ 所确定的函数的导数 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{\frac{\pi}{3}}$。

解：$\dfrac{dx}{dt}=e^t\sin t+e^t\cos t=e^t(\sin t+\cos t)$

$$\frac{dy}{dt}=e^t\cos t+e^t(-\sin t)=e^t(\cos t-\sin t)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dt}{dx}}=\frac{e^t(\cos t-\sin t)}{e^t(\sin t+\cos t)}=\left.\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}\right|_{\frac{\pi}{3}}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}}=-2+\sqrt{3}$$

15. 已知 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$

解：$\dfrac{dy}{dt}=a\sin t$ ，$\dfrac{dx}{dt}=a(1-\cos t)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dt}{dx}}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$$

$$\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt}=\frac{\cos t(1-\cos t)-\sin^2 t}{(1-\cos t)^2}=\frac{\cos t-1}{(1-\cos t)^2}=\frac{1}{\cos t-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})=\frac{\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{\cos t-1}}{a(1-\cos t)}=-\frac{1}{a(\cos t-1)^2}$$

课时六　练习题答案

1. 求 $y=2x\arctan x-\ln(1+x^2)$ 的单调区间。

解：定义域为 $(-\infty,+\infty)$，$y'=2\arctan x+\frac{2x}{1+x^2}-\frac{2x}{1+x^2}=2\arctan x$，可能极值点：$x=0$

	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小	↗

故单调递减区间为 $(-\infty,0]$，单调递增区间为 $[0,+\infty)$。

2. 求函数 $y=\ln x+\frac{1}{x}$ 的极值。

解：定义域为 $(0,+\infty)$，$y'=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$，可能极值点：$x=1$

	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小	↗

故函数在 $x=1$ 处取得极小值 $f(1)=1$。

3. 下列关于极值命题中正确的是（　）

A.若 $f'(x_0)=0$ 则 x_0 必定是 $f(x)$ 的极值点

B.极大值一定大于极小值

C.若 $f'(x_0)$ 存在且 x_0 是极限值，则必有 $f'(x_0)=0$

D.若 $f(x)$ 在点 x_0 连续但不可导，则 x_0 必为 $f(x)$ 的极值点

答案：C

4. 试证：当 $x>0$ 时，$e^{x}-(1+x)>1-\cos x$。

证：令 $F(x)=e^{x}-(1+x)-(1-\cos x)=e^{x}+\cos x-x-2$

$F'(x)=e^{x}-\sin x-1$ 不容易判断正负　　所以继续求 $F''(x)=e^{x}-\cos x$

因为 $x>0$ 时，$e^{x}>1$，$\cos x\le 1$，所以 $F''(x)>0\Rightarrow F'(x)=e^{x}-\sin x-1$ 是单调递增的

则 $F'=e^{x}-\sin x-1$ 有最小值 $F'(0)=0$　所以 $F'(x)>F'(0)=0$

可以得到 $F(x)=e^{x}+\cos x-x-2$ 是单调递增的　故有最小值 $F(0)=0$

$F(x)=e^{x}+\cos x-x-2>0$　　得证：$e^{x}-(1+x)>1-\cos x$

5. 问 a,b 为何值时，点 $(1,3)$ 为曲线 $y=ax^{3}+bx^{2}$ 的拐点。

解：$y'=3ax^{2}+2bx, y''=6ax+2b$

由题意知 $\begin{cases}a+b=3\\6a+2b=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\dfrac{3}{2}\\b=\dfrac{9}{2}\end{cases}$

6. 求 $y=xe^{x}-e^{x}+1$ 的单调性、极值、凹凸区间及拐点。

解：定义域为 $(-\infty,+\infty)$，$y'=e^{x}+xe^{x}-e^{x}=xe^{x}$，可能极值点：$x=0$

	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
y'	$-$	0	$+$
y	↘	极小	↗

故单调递减区间为 $(-\infty,0]$，单调递增区间为 $[0,+\infty)$，极小值 $y(0)=0$

$y''=e^{x}+xe^{x}=(1+x)e^{x}$，可能拐点：$x=-1$

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,+\infty)$
y''	$-$	0	$+$
y	凸	拐点	凹

故凸区间为 $(-\infty,-1]$，凹区间为 $[-1,+\infty)$，拐点 $(-1,1-\dfrac{2}{e})$

课时七　练习题答案

1. 设 $e^x+\sin x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f'(x)=$________。

答案：$e^x-\sin x$

2. 设 a 是非零常数，若 $\ln x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，那么 $f(x)$ 的另一个原函数是（　）。

$A.\ \ln|ax|$　　$B.\ \frac{1}{a}\ln|ax|$　　$C.\ \ln|a+x|$　　$D.\ \frac{1}{2}(\ln x)^2$

答案：A

3. 对于不定积分 $\int f(x)dx$，下列说法正确的是（　）。

$A.\ d\int f(x)dx=f(x)$　　$B.\int f'(x)dx=f(x)$

$C.\int df(x)=f(x)$　　$D.\frac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)$

答案：D

4. 求下列不定积分：

1）$\int(\sqrt{x}+1)\sqrt{x^3}dx$

解：原式 $=\int(x^{\frac{1}{2}}+1)\cdot x^{\frac{3}{2}}dx=\int(x^2+x^{\frac{3}{2}})dx=\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$

2）$\int\frac{x^2}{1+x^2}dx$

解：原式 $=\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx=\int(1-\frac{1}{1+x^2})dx=x-\arctan x+C$

3）$\int\frac{1}{x^2-3}dx$

解：原式 $=\int\frac{1}{(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}dx=\frac{\sqrt{3}}{6}\int(\frac{1}{x-\sqrt{3}}-\frac{1}{x+\sqrt{3}})dx$

$$=\frac{\sqrt{3}}{6}\left[\int\frac{1}{x-\sqrt{3}}d(x-\sqrt{3})-\int\frac{1}{x+\sqrt{3}}d(x+\sqrt{3})\right]$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{6}\left[\ln\left|x-\sqrt{3}\right|-\ln\left|x+\sqrt{3}\right|\right]+C=\frac{\sqrt{3}}{6}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|+C$$

4）$\int\cos^2\frac{x}{2}dx$

解：原式$=\int\frac{1}{2}(\cos x+1)dx=\frac{1}{2}\int(\cos x+1)dx=\frac{1}{2}(\sin x+x)+C$

5）$\int\frac{dx}{\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}$

解：原式$=\int\frac{1}{(\frac{1}{2}\sin x)^2}dx=4\int\csc^2 xdx=-4\cot x+C$

6）$\int\tan^2 xdx$

解：原式$=\int(\sec^2 x-1)dx=\tan x-x+C$

7）$\int(3-2x)^3 dx$

解：原式$=-\frac{1}{2}\int(3-2x)^3 d(3-2x)=-\frac{1}{8}(3-2x)^4+C$

8）$\int\frac{1}{\sqrt[3]{2x+1}}dx$

解：原式$=\int(2x+1)^{-\frac{1}{3}}dx=\frac{1}{2}\int(2x+1)^{-\frac{1}{3}}d(2x+1)=\frac{3}{4}(2x+1)^{\frac{2}{3}}+C$

9）$\int 3^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}dx$

解：原式$=-\int 3^{\frac{1}{x}}d(\frac{1}{x})=-\frac{3^{\frac{1}{x}}}{\ln 3}+C$

10）$\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

解：原式$=2\int e^{\sqrt{x}}d\sqrt{x}=2e^{\sqrt{x}}+C$

11）$\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

解：原式$=\int\frac{e^x}{1+(e^x)^2}dx=\int\frac{1}{1+(e^x)^2}de^x=\arctan e^x+C$

12） $\int \frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}$

解：原式 $=\int \frac{1}{\ln x\ln(\ln x)}d\ln x=\int \frac{1}{\ln(\ln x)}d\ln(\ln x)=\ln\left|\ln(\ln x)\right|+C$

13） $\int \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}dx$

解：原式 $=\int \frac{1}{(x\ln x)^2}d(x\ln x)=-\frac{1}{x\ln x}+C$

14） $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}}dx$

解：原式 $=\int \frac{\cos^2 x\cdot\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx=\int \frac{1-\sin^2 x}{\sqrt{\sin x}}d\sin x$

$$=\int\left[(\sin x)^{-\frac{1}{2}}-(\sin x)^{\frac{3}{2}}\right]d\sin x=2(\sin x)^{\frac{1}{2}}-\frac{2}{5}(\sin x)^{\frac{5}{2}}+C$$

15） $\int \tan^3 x\sec x dx$

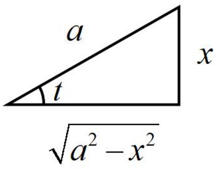
解：原式 $=\int \tan^2 x\cdot\tan x\sec x dx=\int(\sec^2 x-1)d\sec x=\frac{1}{3}\sec^3 x-\sec x+C$

16） $\int \frac{xe^{\arctan x^2}}{1+x^4}dx$

解：原式 $=\frac{1}{2}\int e^{\arctan x^2}d\arctan x^2=\frac{1}{2}e^{\arctan x^2}+C$

课时八　练习题答案

1. $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$ ，$(a>0)$



解：令 $x=a\sin t$，　$dx=a\cos tdt$

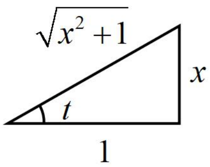
原式$=\int a\cos t\cdot a\cos tdt=a^2\int\cos^2 tdt$

$$=a^2\int\frac{1}{2}(1+\cos 2t)dt=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)dt$$

$$=\frac{a^2}{2}(t+\frac{1}{2}\sin 2t)+C=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{2}\sin t\cos t+C$$

$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{a^2}{2}\cdot\frac{x}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}+C=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C$$

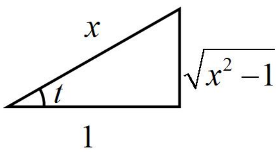
2. $\int\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}dx$



解：令 $x=\tan t$，　$dx=\sec^2 tdt$

原式$=\int\frac{1}{\sec^3 t}\cdot\sec^2 tdt=\int\cos tdt=\sin t+C=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C$

3. $\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$



解：令 $x=\sec t$，　$dx=\sec t\tan tdt$

原式$=\int\frac{1}{\sec t\tan t}\cdot\sec t\tan tdt=\int dt=t+C=\arccos\frac{1}{x}+C$

4. $\int \frac{1}{\sqrt{x+2}+1}dx$

解：令 $t=\sqrt{x+2}$，　$x=t^2-2$，$dx=2tdt$

$$原式=\int \frac{2t}{t+1}dt=\int \frac{2t+2-2}{t+1}dt=2\int (1-\frac{1}{t+1})dt=2(t-\ln|t+1|)dt=2\left[\sqrt{x+2}-\ln(\sqrt{x+2}+1)\right]+C$$

5. $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx$

解：令 $\sqrt{1+e^x}=t$，则 $x=\ln(t^2-1)$，$dx=\frac{2t}{t^2-1}dt$

$$原式=\int \frac{1}{t}\cdot\frac{2t}{t^2-1}dt=\int \frac{2}{t^2-1}dt=\int \frac{2}{(t+1)(t-1)}dt=\int (\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1})dt=\ln(t-1)-\ln(t+1)+C$$

将 $t=\sqrt{1+e^x}$ 回代得：$原式=\ln(\sqrt{1+e^x}-1)-\ln(\sqrt{1+e^x}+1)+C$

6. $\int x^n \ln x dx$

解：
$$原式=\int \ln x d\frac{x^{n+1}}{n+1}=\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\ln x-\int \frac{x^{n+1}}{n+1}d\ln x$$
$$=\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\ln x-\int \frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{x}dx$$
$$=\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\ln x-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}+C$$

7. $\int \arcsin x dx$

解：
$$原式=x\arcsin x-\int x d\arcsin x=x\arcsin x-\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$
$$=x\arcsin x+\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}d(1-x^2)$$
$$=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$$

8. $\int xe^{2x}dx$

解：原式$=\frac{1}{2}\int xde^{2x}=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C$

9. $\int x\cos xdx$

解：原式$=\int xd\sin x=x\sin x-\int\sin xdx=x\sin x+\cos x+C$

10. $\int\frac{1}{x\left(x^2+1\right)}dx$

解：$\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x(x^2+1)}=\frac{(A+B)x^2+A+Cx}{x(x^2+1)}$

$$\begin{cases}A+B=0\\A=1\\C=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=-1\end{cases}$$

$$\int\frac{1}{x(x^2+1)}dx=\int\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}dx=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$$

课时九　练习题答案

1. 计算 $\int_1^e \frac{\ln x}{x(1+\ln x)}dx$

解：原式 $=\int_1^e \frac{\ln x+1-1}{x(1+\ln x)}dx=\int_1^e \frac{\ln x+1}{x(1+\ln x)}dx-\int_1^e \frac{1}{x(1+\ln x)}dx$

$$=\int_1^e \frac{1}{x}dx-\int_1^e \frac{1}{1+\ln x}d(1+\ln x)=\ln x\Big|_1^e-\ln|1+\ln x|\Big|_1^e=1-\ln 2$$

2. 计算 $\int_0^1 \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}dx$

解：原式 $=\int_0^1 e^{\arctan x}d\arctan x=e^{\arctan x}\Big|_0^1=e^{\frac{\pi}{4}}-1$

3. 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2xdx$

解：原式 $=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} xd\cos 2x=-\frac{1}{2}x\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2xdx=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$

4. 计算 $\int_1^{e^2}\sqrt{x}\ln xdx$

解：原式 $=\int_1^{e^2} x^{\frac{1}{2}}\ln xdx=\frac{2}{3}\int_1^{e^2}\ln xdx^{\frac{3}{2}}$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x\Big|_1^{e^2}-\frac{2}{3}\int_1^{e^2}x^{\frac{3}{2}}d\ln x=\frac{4}{3}e^3-\frac{2}{3}\int_1^{e^2}x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=\frac{4}{3}e^3-\frac{2}{3}\int_1^{e^2}x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{4}{3}e^3-\frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^{e^2}=\frac{4}{3}e^3-\frac{4}{9}e^3+\frac{4}{9}=\frac{8}{9}e^3+\frac{4}{9}$$

5. 计算 $\int_8^{27}\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-1}dx$

解：令 $\sqrt[3]{x}-1=t$，$x=(t+1)^3$，$dx=3(t+1)^2$

$x=8$ 时，$t=1$；$x=27$ 时，$t=2$

$$\int_8^{27}\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-1}dx=\int_1^2\frac{t+1}{t}\cdot 3(t+1)^2dt=3\int_1^2(t^2+3t+3+\frac{1}{t})dt=3(\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2+3t+\ln t)\Big|_1^2=\frac{59}{2}+3\ln 2$$

6. 计算 $\int_{\frac{1}{2}}^{1} e^{\sqrt{2x-1}}dx$

解：令 $\sqrt{2x-1}=t$， $x=\dfrac{t^2+1}{2}$， $dx=tdt$

$x=\dfrac{1}{2}$ 时， $t=0$； $x=1$ 时， $t=1$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} e^{\sqrt{2x-1}}dx=\int_0^1 e^t\cdot tdt=\int_0^1 tde^t=te^t\Big|_0^1-\int_0^1 e^tdt=e-e^t\Big|_0^1=e-e+1=1$$

7. 计算 $\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx$

解：令 $x=2\sin t$， $dx=2\cos tdt$

$x=0$ 时， $t=0$； $x=2$ 时， $t=\dfrac{\pi}{2}$

$$\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2 t\cdot\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos tdt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2 t\cdot 2\cos t\cdot 2\cos tdt=16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cdot\cos^2 tdt$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2tdt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)dt=2(t-\frac{1}{4}\sin 4t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi$$

8. 计算 $\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|dx$

解：原式 $=-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\ln xdx+\int_1^e\ln xdx=-x\ln x\Big|_{\frac{1}{e}}^{1}+\int_{\frac{1}{e}}^{1}xd\ln x+x\ln x\Big|_1^e-\int_1^e xd\ln x$

$$=-\frac{1}{e}+\int_{\frac{1}{e}}^{1}x\cdot\frac{1}{x}dx+e-\int_1^e x\cdot\frac{1}{x}dx=-\frac{1}{e}+x\Big|_{\frac{1}{e}}^{1}+e-x\Big|_1^e$$

$$=-\frac{1}{e}+1-\frac{1}{e}+e-(e-1)=2-\frac{2}{e}$$

9. 已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x^2} & x\geq 0\\ xe^{x^2} & x<0\end{cases}$，计算 $\int_{-1}^{1}f(x)dx$

解：原式 $=\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx=\int_{-1}^{0}xe^{x^2}dx+\int_0^1\dfrac{1}{1+x^2}dx=\dfrac{1}{2}e^{x^2}\Big|_{-1}^{0}+\arctan x\Big|_0^1=\dfrac{1}{2}(1-e)+\dfrac{\pi}{4}$

10. 下列反常积分中发散的是（ ）。

$A.\ \int_0^{+\infty} e^{-x}dx$　　$B.\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$　　$C.\ \int_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}dx$　　$D.\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$

答案：C

解：$A.\ \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = -(0-1) = 1$，收敛

$B.\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty} = -(0-1) = 1$，收敛

$C.\ \int_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}dx = \int_e^{+\infty} \frac{1}{\ln x}d\ln x = \ln(\ln x)\Big|_e^{+\infty} = +\infty$，发散

$D.\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$，收敛

11. 反常积分 $\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx,(p>0)$ 收敛，则 p 的取值范围是________。

答案：$0<p<1$

12. 下列反常积分中收敛的是（ ）。

$A.\ \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx$　　$B.\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$　　$C.\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$　　$D.\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}dx$

答案：A

解：$A.\ \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^{\infty} = -(0-1) = 1$，收敛　　$B.\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx = \ln x\Big|_1^{+\infty} = +\infty$，发散

$C.\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\Big|_1^{+\infty} = +\infty$，发散

$D.\ x=1$ 时，$\frac{1}{(x-1)^2}$ 无界，$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}dx = \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2}dx + \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^2}dx$

$\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2}dx = -\frac{1}{x-1}\Big|_0^1 = +\infty$，故 $\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}dx$ 发散

课时十 练习题答案

1. $\int_{-2}^{2}\left[\frac{\sin x^3 \ln(1+x^2)}{e^{x^2}-1}-\sqrt{4-x^2}\right]dx=$________。

答案：-2π，原式$=\int_{-2}^{2}\frac{\sin x^3\ln(1+x^2)}{e^{x^2}-1}dx-\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx=0-2\int_0^2\sqrt{4-x^2}dx=-2\pi$

2. $\int_{-1}^{1}\frac{x+|x|}{1+x^2}dx=$________。

答案：$\ln 2$

解：$\int_{-1}^{1}\frac{x+|x|}{1+x^2}dx=\int_{-1}^{1}\frac{x}{1+x^2}dx+\int_{-1}^{1}\frac{|x|}{1+x^2}dx=0+2\int_0^1\frac{|x|}{1+x^2}dx=2\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx=\ln(1+x^2)\Big|_0^1=\ln 2$

3. $I_1=\int_0^1 xdx$，$I_2=\int_0^1\ln xdx$，$I_3=\int_0^1\sqrt{x}dx$ 比较 I_1,I_2,I_3 大小。

解：在$[0,1]$上，$\sqrt{x}>x>\ln x$，所以 $I_3>I_1>I_2$

4. 比较定积分的大小：

1）$\int_0^1 e^x dx$ ____ $\int_0^1 e^{x^2}dx$　　2）$\int_0^1\frac{1}{1+x^5}dx$ ____ $\int_0^1\frac{1}{1+x^{10}}dx$

答案：（1）$>$　（2）$<$

5. 求极限 $\frac{d}{dx}\int_x^{4x}\sin x^2dx$

解：原式$=4\sin(4x)^2-\sin x^2=4\sin 16x^2-\sin x^2$

6. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}dt}{\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt}$　　满足 $\frac{0}{0}$ 不定式，使用洛必达法则

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\cdot\cos x}{\frac{\sin x}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e\cdot 1}{1}=e$

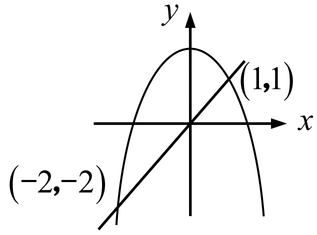
课时十一　练习题答案

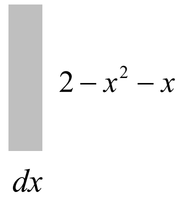
1. 计算平面图形由抛物线 $y=2-x^2$ 与直线 $y=x$ 围成的面积。

解：$dA=\left(2-x^2-x\right)dx$

$$A=\int_{-2}^{1}\left(2-x^2-x\right)dx$$

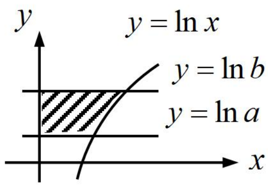
$$=\left(2x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_{-2}^{1}=\frac{9}{2}$$

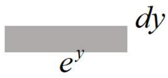




2. 计算曲线 $y=\ln x$ 与直线 $y=\ln a, y=\ln b\ (b>a>1)$ 及 y 轴所围图形的面积。

解：





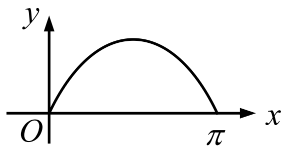
$y=\ln x \Rightarrow x=e^y$，　$dA=e^y dy$

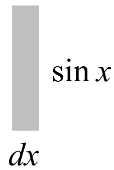
$$A=\int_{\ln a}^{\ln b}dA=\int_{\ln a}^{\ln b}e^y dy=e^y\Big|_{\ln a}^{\ln b}=b-a$$

3. 求曲线 $y=\sin x\left(0\le x\le\pi\right)$ 与 $y=0$ 所围成的平面面积以及绕 x 轴旋转所得旋转体的体积 V_x。

解：$dA=\sin xdx$

$$A=\int_0^{\pi}\sin xdx=-\cos x\Big|_0^{\pi}=2$$

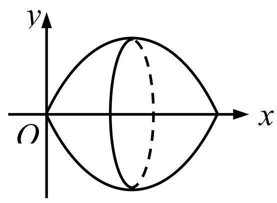


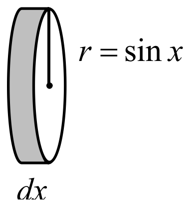


$dV=\pi\sin^2 xdx$

$$V_x=\int_0^{\pi}\pi\left(\sin x\right)^2 dx$$

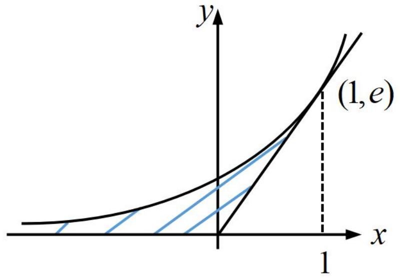
$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)dx=\frac{\pi^2}{2}$$





4. 过坐标原点作曲线 $y=e^x$ 的切线，该切线与曲线 $y=e^x$ 以及 x 轴围成的平面图形记为 D，

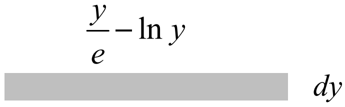
①求 D 的面积 A，②求 D 绕 x 轴所围成的旋转体体积 V。



解：①设切点坐标为 $P(x_0,y_0)$ 则斜率为 $y'|_{x=x_0}=e^{x_0}$

切线方程为 $y-y_0=e^{x_0}(x-x_0)$

过 $Q(0,0)$ 点，则 $-y_0=-x_0e^{x_0}$



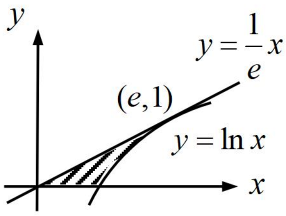
得切点坐标 $(1,e)$，则得切线方程为 $y=ex$

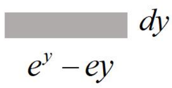
$$dA=\left(\frac{y}{e}-\ln y\right)dy \qquad A=\int_0^e\left(\frac{y}{e}-\ln y\right)dy=\left(\frac{y^2}{2e}-y\ln y+y\right)\Bigg|_0^e=\frac{e}{2}+\lim_{y\to 0^+}y\ln y=\frac{e}{2}$$

② $$V=\pi\int_{-\infty}^1\left(e^x\right)^2dx-\pi\int_0^1(ex)^2dx=\pi\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]\Bigg|_{-\infty}^1-\pi e^2\left[\frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_0^1$$

$$=\pi\left(\frac{e^2}{2}-0\right)-\pi e^2\left(\frac{1}{3}-0\right)=\frac{1}{6}\pi e^2$$

5. 过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线并交于点 $(e,1)$，该切线与曲线 $y=\ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D。1）求平面图形 D 的面积；2）求 D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积。



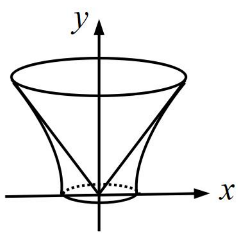


解: 1) $y'=\frac{1}{x}=\frac{1}{e}$，切线方程: $y-1=\frac{1}{e}(x-e)$，即 $y=\frac{1}{e}x$

作图如右所示：$dA=(e^y-ey)dy$

$$A=\int_0^1 dA=\int_0^1(e^y-ey)dy=(e^y-\frac{e}{2}y^2)\Bigg|_0^1=\frac{e}{2}-1$$

2) $dv_{外}=\pi\cdot(e^y)^2dy$，



$$v_{外}=\int_0^1 dv_{外}=\int_0^1\pi(e^y)^2dy=\pi\int_0^1 e^{2y}dy=\frac{1}{2}\pi e^{2y}\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{2}(e^2-1)$$

$dv_{内}=\pi\cdot(ey)^2dy$，

$$v_{内}=\int_0^1 dv_{内}=\int_0^1\pi(ey)^2dy=\frac{1}{3}\pi e^2y^3\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}\pi e^2$$

$$v=v_{外}-v_{内}=\frac{\pi}{6}e^2-\frac{\pi}{2}$$

课时十二 练习题答案

1. 下列微分方程的阶数为二阶的是（ ）。

$A.\ x(y')^2-2yy'+x=0$　　$B.\ x^2y''-xy'+y=0$

$C.\ xy'''-2y''+x^2y=0$　　$D.\ (7x-6y)dx+(x+y)dy=0$

答案：B

2. 求方程 $xdy+2ydx=0, y|_{x=2}=1$ 的特解。

解：$x\neq 0$，$y\neq 0$ 时，

分离变量：$\frac{1}{y}dy=-\frac{2}{x}dx$

两边同时积分：$\int\frac{1}{y}dy=\int-\frac{2}{x}dx$

$\ln|y|=-2\ln|x|+C$

$\ln|y|+2\ln|x|=C$

$\ln|y|+\ln x^2=C$

$\ln|yx^2|=C$

将 $x=2$，$y=1$ 代入得 $C=2\ln 2$

故：$\ln|yx^2|=2\ln 2$

又 $x=0$ 时，$y=0$

综上：

$x=0$ 时，$y=0$ ，

$x\neq 0$ 时，$\ln|yx^2|=2\ln 2$

3. 求方程 $\left(x^3+y^3\right)dx-3xy^2dy=0$ 的通解。

解：$\frac{dy}{dx}=\frac{x^3+y^3}{3xy^2}=\frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^3}{3\left(\frac{y}{x}\right)^2}$

令 $u=\frac{y}{x}$ ，$y=xu$ ，$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$

$u+x\frac{du}{dx}=\frac{1+u^3}{3u^2}$

分离变量：$\int\frac{3u^2}{1-2u^3}du=\int\frac{1}{x}dx$

两边同时积分：$\int\frac{3u^2}{1-2u^3}du=\int\frac{1}{x}dx$

$-\frac{1}{2}\ln|1-2u^3|=\ln|x|+C$

$\ln\left(1-2u^3\right)^{-\frac{1}{2}}=\ln|x|+\ln e^C=\ln e^C|x|$

$\left(1-2u^3\right)^{-\frac{1}{2}}=e^C|x|=\pm e^Cx=C_1x$

将 $u=\frac{y}{x}$ 回代得：$\left(1-2\frac{y^3}{x^3}\right)^{-\frac{1}{2}}=C_1x$

4. 求微分方程 $y'+y\cos x=e^{-\sin x}$ 的通解。

解：$P(x)=\cos x$，　$Q(x)=e^{-\sin x}$

$$\int P(x)dx=\int\cos xdx=\sin x$$

$$\int Q(x)e^{\int P(x)dx}=\int e^{-\sin x}e^{\sin x}dx=x$$

方程通解：$y=e^{-\sin x}(x+C)$

5. 求微分方程 $y'+\frac{y}{x}=\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$ 的通解。

解：$P(x)=\frac{1}{x}$，$Q(x)=\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$

$$\int P(x)dx=\int\frac{1}{x}dx=\ln x$$

$$\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx=\int\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}e^{\ln x}dx=\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x$$

方程通解：$y=e^{-\ln x}(\arcsin x+C)$，即：$y=\frac{1}{x}(\arcsin x+C)$

6. 求微分方程 $x\frac{dy}{dx}+y=xe^x$ 满足 $y|_{x=1}=0$ 的特解。

解：$x=0$ 时，$y=0$；$x\neq0$ 时，$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=e^x$

$P(x)=\frac{1}{x}$，$Q(x)=e^x$

$$\int P(x)dx=\int\frac{1}{x}dx=\ln x$$

$$\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx=\int e^x\cdot e^{\ln x}dx=\int xe^xdx=\int xde^x=xe^x-\int e^xdx=xe^x-e^x$$

通解：$y=e^{-\ln x}(xe^x-e^x+C)=\frac{1}{x}(xe^x-e^x+C)$

将 $(1,0)$ 代入方程得 $C=0$，故特解为 $y=\begin{cases}0 & ,\ x=0\\ e^x-\frac{e^x}{x} & ,\ x\neq0\end{cases}$

7. 设可导函数 $\varphi(x)$ 满足 $\varphi(x)\cos x+2\int_0^x \varphi(t)\sin tdt=x+1$，求 $\varphi(x)$。

解：两边同时求导 $\varphi'(x)\cos x+\varphi(x)\cdot(-\sin x)+2\varphi(x)\sin x=1$

即 $\varphi'(x)\cos x+\varphi(x)\sin x=1$ ①

当 $\cos x\neq 0$ 时，$\varphi'(x)+\varphi(x)\tan x=\dfrac{1}{\cos x}$

$P(x)=\tan x$，$Q(x)=\dfrac{1}{\cos x}$

$$\int P(x)dx=\int \tan xdx=\int \frac{\sin x}{\cos x}dx=-\ln\cos x$$

$$\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx=\int \frac{1}{\cos x}\cdot e^{-\ln\cos x}dx=\int \frac{1}{\cos^2 x}dx=\int \sec^2 xdx=\tan x$$

即 $\varphi(x)=e^{\ln\cos x}(\tan x+C)=\cos x(\tan x+C)$ ②

根据 $\varphi(x)\cos x+2\int_0^x \varphi(t)\sin tdt=x+1$

当 $x=0$ 时，$\varphi(0)=1$，将 $(0,1)$ 代入②中，得 $C=1$

即 $\varphi(x)=\cos x(\tan x+1)$

当 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 时，代入①中，得 $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sin x}$

$$即\ \varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sin x} & x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}\\ \cos x(\tan x+1) & x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

8. 求微分方程 $y''+6y'+9y=0$ 的通解。

解:特征方程：$r^2+6r+9=0$，　得：$r_1=r_2=-3$，　则：$y=(C_1+C_2x)e^{-3x}$

9. 求微分方程 $y''-4y'+3y=0$ 满足 $y|_{x=0}=6$，$y'|_{x=0}=10$ 的特解。

解：特征方程：$r^2-4r+3=0$，得：$r_1=1,r_2=3$，则 $y=C_1e^x+C_2e^{3x}$，$y'=C_1e^x+3C_2e^{3x}$

将 $y|_{x=0}=6$　$y'|_{x=0}=10$ 代入得：$\begin{cases}6=C_1+C_2\\10=C_1+3C_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=4\\C_2=2\end{cases}\Rightarrow y=4e^x+2e^{3x}$

10. 求微分方程 $y''-4y'+5y=0$ 的通解。

解：特征方程：$r^2-4r+5=0$； 特征根：$r=2\pm i$

$\alpha=2$， $\beta=1$， 通解为：$y=e^{2x}\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right)$

11. 求微分方程 $y''-2y'+y=4xe^x$ 的通解。

解：特征方程：$r^2-2r+1=0$， 特征根：$r_1=r_2=1$， 通解：$Y=(C_1+C_2x)e^x$

从原方程可知：$\lambda=1$，$P_m(x)=4x$，设方程特解为：$y^*=x^2e^x(ax+b)$

$(y^*)'=e^x(ax^3+3ax^2+bx^2+2bx)$，$(y^*)''=e^x(ax^3+6ax^2+bx^2+6ax+4bx+2b)$

将 y^*，$(y^*)'$，$(y^*)''$ 代入原方程，化简后得：$3ax+b=2x$

对应系数相等：$\begin{cases}3a=2\\b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{2}{3}\\b=0\end{cases}$，则 $y^*=\dfrac{2}{3}x^3e^x$

方程通解为：$y=(C_1+C_2x)e^x+\dfrac{2}{3}x^3e^x$

12. 求微分方程 $y''-5y'+4y=3-4x$ 的通解。

解：特征方程：$r^2-5r+4=0$；特征根：$r_1=1$，$r_2=4$；通解：$Y=C_1e^x+C_2e^{4x}$

从原方程可知：$\lambda=0$，$P_m(x)=3-4x$

设方程特解为：$y^*=ax+b$，则 $(y^*)'=a$，$(y^*)''=0$

将 y^*，$(y^*)'$，$(y^*)''$ 代入原方程，化简得：$4b-5a+4ax=3-4x$

对应系数相等：$\begin{cases}4b-5a=3\\4a=-4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\b=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$，则 $y^*=-x-\dfrac{1}{2}$

方程通解为：$y=C_1e^x+C_2e^{4x}-x-\dfrac{1}{2}$

13. 求微分方程 $y''-y=e^x\cos 2x$ 的通解。

解：特征方程：$r^2-1=0$，特征根：$r_1=-1$，$r_2=1$；通解：$Y=C_1e^{-x}+C_2e^x$

从原方程可知：$\lambda=1$，$\omega=2$，$P_l(x)=1$，$Q_n(x)=0$

由于 $\lambda\pm\omega i=1\pm 2i$，不是特征方程的根，设 $y^*=e^x\left(a\cos 2x+b\sin 2x\right)$

$(y^*)'=e^x\left[(a+2b)\cos 2x+(b-2a)\sin 2x\right]$，$(y^*)''=e^x\left[(4b-3a)\cos 2x-(4a+3b)\sin 2x\right]$

代入原方程：$e^x\left[(4b-3a)\cos 2x-(4a+3b)\sin 2x\right]-e^x(a\cos 2x+b\sin 2x)=e^x\cos 2x$

化简整理得：$(4b-4a)\cos 2x-(4a+4b)\sin 2x=\cos 2x$

$\begin{cases}4b-4a=1\\4a+4b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{1}{8}\\b=\dfrac{1}{8}\end{cases}$，则 $y^*=\dfrac{1}{8}e^x(-\cos 2x+\sin 2x)$

故通解为：$y=C_1e^{-x}+C_2e^x+\dfrac{1}{8}e^x(-\cos 2x+\sin 2x)$

课时十三　练习题答案

1. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可微，且 $f(1)=0$，证明：在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f'(\xi)\arctan\xi+\dfrac{f(\xi)}{1+\xi^2}=0$。

证：令 $F(x)=f(x)\arctan x$

$F(0)=f(0)\times\arctan 0=0$，$F(1)=f(1)\times\arctan 1=0$

$F(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，在 $(0,1)$ 可导，且 $F(0)=F(1)$，

由罗尔中值定理可得 $\exists\xi\in(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)\arctan\xi+\dfrac{f(\xi)}{1+\xi^2}=0$

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$，证明：至少有一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)+f'(\xi)=0$。

证：令 $F(x)=e^x f(x)$

$F(a)=e^a f(a)=0$，$F(b)=e^b f(b)=0$

$F(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可导，且 $F(a)=F(b)$，

由罗尔中值定理可得 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$，

即 $e^{\xi}f(\xi)+e^{\xi}f'(\xi)=0$ 得证 $f(\xi)+f'(\xi)=0$。

该步骤在草稿纸上进行

$f(x)+f'(x)=0\Rightarrow 1+\dfrac{f'(x)}{f(x)}=0$

$\Rightarrow\int(1+\dfrac{f'(x)}{f(x)})dx=0$

$\Rightarrow x+\ln f(x)=0$

$\ln e^x+\ln f(x)=0\Rightarrow\ln e^x f(x)=0$

3. 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$f(a)=f(b)=0$，证明：至少存在一个 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$。

该步骤在草稿纸上进行

$$f'(x)+f(x)g'(x)=0\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}+g'(x)=0\Rightarrow\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx+\int g'(x)dx=0$$

$$\Rightarrow\ln f(x)+g(x)=0\Rightarrow\ln f(x)+\ln e^{g(x)}=0\Rightarrow\ln f(x)e^{g(x)}=0$$

证：设 $F(x)=f(x)e^{g(x)}$

$\because f(a)=f(b)=0\qquad\therefore F(\mathrm{a})=F(b)=0$

由罗尔定理知：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$

即 $f'(\xi)e^{g(\xi)}+e^{g(\xi)}f(\xi)g'(\xi)=0\qquad\Rightarrow f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$

4. 证明：当 $b>a>0$, $n>1$ 时有不等式 $na^{n-1}<\dfrac{b^n-a^n}{b-a}<nb^{n-1}$

证：令 $f(x)=x^n$

由拉格朗日中值定理知，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{b^n-a^n}{b-a}$

$f'(x)=nx^{n-1}$，$f''(x)=n(n-1)x^{n-2}$

$n>1$，$x>0$ 时：$f''(x)>0$，$f'(x)$ 单调递增

又 $\xi\in(a,b)$，$\therefore f'(a)<f'(\xi)<f'(b)$，即 $na^{n-1}<\dfrac{b^n-a^n}{b-a}<nb^{n-1}$，不等式得证

5. 证明：对任何实数 a,b 成立 $|\arctan a-\arctan b|\le|a-b|$

证：令 $f(x)=\arctan x$

由拉格朗日中值定理知，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

等式两边取绝对值：$|f(b)-f(a)|=|f'(\xi)||(b-a)|$

又 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}\in[0,1]$，故 $|f(b)-f(a)|\le|(b-a)|$

即 $|\arctan a-\arctan b|\le|a-b|$，不等式得证

6. 设$x_1x_2>0$，试证：在x_1与x_2之间存在一点ξ，使得：$x_1e^{x_2}-x_2e^{x_1}=(1-\xi)e^{\xi}(x_1-x_2)$

证：$\dfrac{x_1e^{x_2}-x_2e^{x_1}}{x_1-x_2}=(1-\xi)e^{\xi}$，$\dfrac{\dfrac{e^{x_2}}{x_2}-\dfrac{e^{x_1}}{x_1}}{\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}}=(1-\xi)e^{\xi}$，

令$f(x)=\dfrac{e^x}{x}$，$F(x)=\dfrac{1}{x}$

$x_1x_2>0$，则区间$[x_1,x_2]$不含原点，故$f'(x)$，$F'(x)$总存在且不为零。

由柯西中值定理得：存在$\xi\in(x_1,x_2)$，使得$\dfrac{\dfrac{e^{x_2}}{x_2}-\dfrac{e^{x_1}}{x_1}}{\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}}=\left.\dfrac{\left(\dfrac{e^x}{x}\right)'}{\left(\dfrac{1}{x}\right)'}\right|_{x=\xi}=(1-\xi)e^{\xi}$

化简整理：$x_1e^{x_2}-x_2e^{x_1}=(1-\xi)e^{\xi}(x_1-x_2)$，不等式得证