



《线性代数》



课时一 行列式 (一)

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 逆序数	★★★★	0~3	选择/填空
2. 行列式性质与计算	必考	6~15	大题

1. 逆序数

题 1: 排列 5 2 6 1 4 5 的逆序数为_____, 是_____ (奇/偶) 排列。

解: 逆序 0 1 0 3 2 1 逆序数 $0+1+0+3+2+1=7$, 为奇排列

题 2: 在四阶行列式中, 项 $a_{11}a_{23}a_{44}a_{32}$ 的符号应取_____。

解: 行排列 1 2 4 3 逆序数 $t_1 = 0+0+0+1=1$
 列排列 1 3 4 2 逆序数 $t_2 = 0+0+0+2=2$
 $t = 1+2=3$, 符号为负。

2. 行列式的性质与计算

① 互换行 (列), 变号

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

② 提公因子

$$\begin{vmatrix} 3 & -6 & 4 \\ 2 & 6 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & -6 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 3 \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

③ 倍加

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 + 3r_1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + 3a_{11} & a_{22} + 3a_{12} & a_{23} + 3a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2 + 2c_3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + 2a_{13} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + 2a_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} + 2a_{33} & a_{33} \end{vmatrix}$$



④拆分

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1+d_1 & c_1 \\ a_2 & b_2+d_2 & c_2 \\ a_3 & b_3+d_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

⑤对应成比例值为零

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

题 1: 行列式 $\begin{vmatrix} 1-k & -2 \\ 2 & k-1 \end{vmatrix} = 0$, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解: $(1-k)(k-1) - (-2) \times 2 = 0$ 得 $k = -1$ 或 3

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

题 2: 计算 $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix}$ 。

上三角行列式公式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$$

$$\text{解: } D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2-2 \times 1 & 1-2 \times (-1) & 0-2 \times 0 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3-3r_1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 3-3 \times 1 & 7-3 \times (-1) & 2-3 \times 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 10 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-2r_2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0-0 & 10-2 \times 5 & 2-2 \times 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \times 5 \times (-2) = -10$$



题 3: 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ 。

解: $D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{r_3 - r_1 \\ r_4 - 2r_1}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}$

$$\xrightarrow{\substack{r_3 + r_2 \\ r_4 - 3r_2}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -13 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_4} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -13 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_4 + 2r_3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & -25 \end{vmatrix} = 50$$

题 4: $D = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ 。

解: $D \xrightarrow{r_1 + r_2 + r_3 + r_4} \begin{vmatrix} 8 & 8 & 8 & 8 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 - r_1 \\ r_3 - r_1 \\ r_4 - r_1}} 8 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 \times 4^3 = 512$

题 5: 箭型 $D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 & 9 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ 。

解: $D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 & 9 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1 - 4c_2} \begin{vmatrix} -15 & 4 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1 - 3c_3} \begin{vmatrix} -33 & 4 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1 - 3c_4} \begin{vmatrix} -60 & 4 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -360$



课时一 练习题

1. 排列 2 1 7 9 8 的逆序数为_____。
2. 五阶行列式 D 中 $a_{12}a_{25}a_{34}a_{41}a_{53}$ 的符号是_____。
3. 设 A 为三阶矩阵，且 $\det(A) = -2$ ，若将 A 按列分块 $A = (A_1, A_2, A_3)$ ，其中 A 的第 j 列 $(j=1,2,3)$ ，求 $|A_3 - 2A_1, 3A_2, A_1|$ 。
4. 计算下列行列式的值。

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix} & (2) \quad & \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 \\ -1 & -2 & 5 & -8 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -5 & 10 \end{vmatrix} & (3) \quad & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} & (4) \quad & \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

注：练习题答案在文档最后



课时二 行列式 (二)

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 行列式展开	★★★★★	4~6	填空/大题
2. 范德蒙行列式	★★★★	0~6	大题

1. 行列式展开

题 1: $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, 求 M_{12} , M_{23} , A_{12} , A_{23} 。

余子式 M_{ij} : 去掉 a_{ij} 所在的行与列

代数余子式: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

解: $M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - 7 \times 3 = -20$, $M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - 3 \times 3 = -5$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = 20,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = 5$$

题 2: 用行列式展开计算 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ 。

解: 按第一行展开:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1A_{11} + 2A_{12} + 3A_{13} = 1 \times (-1)^{1+1} M_{11} + 2 \times (-1)^{1+2} M_{12} + 3 \times (-1)^{1+3} M_{13}$$

$$= M_{11} - 2M_{12} + 3M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1 - 6 + 15 = 8$$

按第二列展开:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2A_{12} + A_{22} + 3A_{32} = 8$$

题 3: $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -4 & 6 & -8 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$, 求: ① $2A_{11} - 4A_{12} + 6A_{13} - 8A_{14}$, ② $A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14}$, ③ $M_{11} + M_{12}$

$+M_{13} + M_{14}$ 。



解：① $2A_{11} - 4A_{12} + 6A_{13} - 8A_{14} = 0$

$$\textcircled{2} A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14} = 1 \times A_{11} + 1 \times A_{12} + 1 \times A_{13} + 1 \times A_{14}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -4 & 6 & -8 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4 - r_1]{r_3 - 2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -6 & 4 & -10 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4 - 2r_2]{r_3 + 6r_2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 16 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -32$$

$$\textcircled{3} M_{11} + M_{12} + M_{13} + M_{14} = A_{11} - A_{12} + A_{13} - A_{14}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -4 & 6 & -8 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4 - r_1]{r_3 - 2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 4 & -6 \\ 0 & 4 & 4 & 8 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4 - 4r_2]{r_3 + 2r_2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 \leftrightarrow r_4]{r_3 \leftrightarrow r_4} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 8 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4 + 2r_3]{r_4 + 2r_3} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{vmatrix} = -56$$

2. 范德蒙行列式

题 1. 求 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$ 的值。

解： $D = (d-c)(d-b)(d-a)(c-b)(c-a)(b-a)$

题 2. 求 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 9 & 16 & 25 \\ 1 & 27 & 64 & 125 \end{vmatrix}$ 。

解： $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 9 & 16 & 25 \\ 1 & 27 & 64 & 125 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 1 & 3^3 & 4^3 & 5^3 \end{vmatrix} = (5-4)(5-3)(5-1)(4-3)(4-1)(3-1) = 48$



课时二 练习题

1. 设 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ -3 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 已知 $A_{21} = -2$, $A_{22} = 3$, $A_{23} = x$,

$A_{24} = 2$, $A_{25} = -1$, 试求常数 x 和行列式 D 。

2. 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 9 & 9 & 9 \\ 10 & 11 & 12 & 13 \end{vmatrix}$, 则 $A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44} = \underline{\hspace{2cm}}$, $A_{31} + A_{32} + A_{33} + A_{34} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. 求 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$ 。



课时三 矩阵

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 矩阵的运算	★★★★	3~8	填空/大题
2. 常见矩阵	★★★★	6~8	选择/填空/大题
3. 方阵的行列式计算	必考	3~5	选择/填空

1. 矩阵的运算

	行列式	矩阵
形式	$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 9 & 6 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$
区别	1) 行列式是数值，矩阵是数表 2) 行列式是 $n \times n$ 阶，矩阵是 $m \times n$ 阶 (m, n 可等，可不等) 3) $\lambda A $ 是将行列式某行 (列) 乘以 λ ；而 λA 是矩阵每个元素都乘以 λ 4) 矩阵如果是方阵 ($m = n$)，才有行列式值 5) 行列式加减是数值运算；矩阵加减只能是同型矩阵，对应元素加减	

题 1: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 $A+B$, $2A$ 。

解: $A+B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+1 & 3+0 \\ 1+0 & 1-3 & 1+2 \\ 1+0 & 1+0 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$2A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 & 2 \times 2 & 2 \times 3 \\ 2 \times 1 & 2 \times 1 & 2 \times 1 \\ 2 \times 1 & 2 \times 1 & 2 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

题 2: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, 求 AB , BA 。

前行乘后列:

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times s} = C_{m \times s}$$

解: $AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 2 + (-1) \times 1 + 0 \times (-1) & 1 \times 3 + (-1) \times (-2) + 0 \times 1 \\ 0 \times 2 + 2 \times 1 + 0 \times (-1) & 0 \times 3 + 2 \times (-2) + 0 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$



$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 3 \times 0 & 2 \times (-1) + 3 \times 2 & 2 \times 0 + 3 \times 0 \\ 1 \times 1 + (-2) \times 0 & 1 \times (-1) + (-2) \times 2 & 1 \times 0 + (-2) \times 0 \\ (-1) \times 1 + 1 \times 0 & (-1) \times (-1) + 1 \times 2 & (-1) \times 0 + 1 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & -5 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB \neq BA \Rightarrow (A \pm B)^2 \neq A^2 + B^2 \pm 2AB, A^2 - B^2 \neq (A+B)(A-B)$$

题 3: $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} (2 \ 1 \ 1) \right)^n$ 。

解: 原式 = $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} (2 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdots (2 \ 1 \ 1)$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \times 1 \times \cdots \times 1 \times (2 \ 1 \ 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} (2 \ 1 \ 1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -6 & -3 & -3 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

2. 转置矩阵、伴随矩阵、单位矩阵、逆矩阵

1) 转置矩阵: A^T 若 $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & -5 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 行变列, 列变行

2) 伴随矩阵: $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$

3) 单位矩阵: E

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, |E| = 1 \text{ 且 } AE = EA = A$$

4) 逆矩阵: A^{-1} 若 $AB = BA = E$, 则称 B 为 A 的逆矩阵, 记 $B = A^{-1}$; 即 $AA^{-1} = E$ 。

$$\text{公式: } A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}, A \text{ 可逆} \Leftrightarrow |A| \neq 0$$



题 1: 设方阵 A 满足 $A^2 + 5A + 7E = 0$, 求出 $(A + 3E)^{-1}$ 。

解: $A^2 + 5A + 6E = -E \Rightarrow (A + 3E)(A + 2E) = -E$

$$\Rightarrow (A + 3E)(-A - 2E) = E \Rightarrow (A + 3E)^{-1} = -A - 2E$$

3. 方阵的行列式计算

1. 转置矩阵: A^T

$$\textcircled{1} (AB)^T = B^T A^T \quad \textcircled{2} (A^T)^T = A \quad \textcircled{3} (A \pm B)^T = A^T \pm B^T \quad \textcircled{4} (\lambda A)^T = \lambda A^T$$

2. 伴随矩阵: A^*

$$\textcircled{1} (AB)^* = B^* A^* \quad \textcircled{2} |A^*| = |A|^{n-1} \quad \textcircled{3} A^* = |A| A^{-1} \text{ (若 } A \text{ 可逆)} \quad \textcircled{4} (kA)^* = k^{n-1} A^*$$

3. 可逆矩阵: A^{-1}

$$\textcircled{1} (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1} \quad \textcircled{2} (A^{-1})^{-1} = A \quad \textcircled{3} (kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1} \quad \textcircled{4} (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

4. 矩阵的行列式计算

$$\textcircled{1} |kA| = k^n |A| \quad \textcircled{2} |AB| = |A| |B| \quad \textcircled{3} |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \quad \textcircled{4} |A^T| = |A|$$

题 1: 设 A 为三阶方阵, 且 $|A| = \frac{1}{2}$, 则 $|-2A| = \underline{\hspace{2cm}}$, $|(2A)^{-1}| = \underline{\hspace{2cm}}$, $|A^*| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解: $|-2A| = (-2)^3 |A| = -8 \cdot \frac{1}{2} = -4$

$$|(2A)^{-1}| = \left| \frac{1}{2} A^{-1} \right| = \left(\frac{1}{2} \right)^3 \frac{1}{|A|} = \frac{1}{4}$$

$$|A^*| = |A|^{3-1} = |A|^2 = \frac{1}{4}$$

题 2: 设 A, B 为三阶方阵, $|A| = 2, |B| = -3$, 则 $|2A^* B^{-1}| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解: $|2A^* B^{-1}| = 2^3 |A^* B^{-1}| = 2^3 |A^*| |B^{-1}| = 2^3 |A|^{3-1} \cdot \frac{1}{|B|} = 8 \cdot 2^2 \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) = -\frac{32}{3}$



题 3. 设 A 为三阶方阵, 且 $|A| = -2$, A^* 是 A 的伴随矩阵, 则 $|4A^{-1} + A^*| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解: $|4A^{-1} + A^*| = |4A^{-1} + |A|A^{-1}| = |4A^{-1} - 2A^{-1}| = |2A^{-1}| = 2^3 |A^{-1}| = 2^3 \cdot \frac{1}{|A|} = 2^3 \cdot \frac{1}{-2} = -4$

课时三 练习题

1. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, 则 $(A - 2B)^T = \underline{\hspace{2cm}}$, $AB^T = \underline{\hspace{2cm}}$, $BA = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 $AB - BA$ 。

3. 设 A, B 为 n 阶方阵, $|A| = 2$, $|B| = 3$, 则 $\left| \frac{1}{2} A^* B^{-1} \right| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

4. 设 A 为三阶方阵, $|A| = \frac{1}{2}$, 求 $|(3A)^{-1} - 2A^*| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

5. 设 A 为二阶方阵, B 为三阶方阵, $|A| = \frac{1}{|B|} = \frac{1}{2}$, 则 $\begin{vmatrix} B & 0 \\ 0 & (2A)^{-1} \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

6. 已知 A 为 n 阶方阵, E 为 n 阶单位阵, 且 $A^2 + A - 3E = 0$, 证明 $A - E$ 可逆, 并求 $(A - E)^{-1}$ 。



课时四 初等行变换

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 初等行变换	必考	基础知识	大题
2. 求逆矩阵		6~10	
3. 矩阵的秩	★★★★	3~6	选择/填空

1. 初等行变换

题 1: 用初等行变换将矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -12 & 2 \\ 3 & -1 & -6 & -2 \\ -1 & -1 & 6 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 化成阶梯形和最简形。

$$\text{解: } A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -12 & 2 \\ 3 & -1 & -6 & -2 \\ -1 & -1 & 6 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & -6 & -2 \\ 0 & 4 & -12 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & -2 \\ 3 & -1 & -6 & -2 \\ 0 & 4 & -12 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 - 3r_1 \\ r_4 - 2r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & -2 \\ 0 & -4 & 12 & 4 \\ 0 & 4 & -12 & 2 \\ 0 & -4 & 12 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_3 + r_2 \\ r_4 - r_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & -2 \\ 0 & -4 & 12 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 \div (-4) \\ r_3 \div 6}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1 + r_3 \\ r_2 + r_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

阶梯形

①若有全零行，则全零行位于最下方

②每个阶梯首项为主元，主元依次往右

③阶梯形不唯一

最简形

①主元为 1

②主元所在列的其他元素都为 0

③最简形是唯一

2. 求逆矩阵

题 1: 若 $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ，求 A^{-1} 。

$$\text{解: } A^{-1} = \frac{1}{2 \times 3 - 5 \times 1} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ 主对调，次反号，除以值}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$



题 2: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, (1)若矩阵 X 满足 $AX = E$, 求 X ; (2)若矩阵 Y 满足

$BY = B + 2Y$, 求 Y 。

$$\text{解: (1) } (A:E) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & : & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & : & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & : & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & : & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & : & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_3]{-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & : & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & : & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 + 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & : & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & : & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & : & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & : & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & : & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - 2r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & : & -9 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & : & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & : & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow (E:A^{-1})$$

$$\Rightarrow X = A^{-1} = \begin{pmatrix} -9 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(2) BY = B + 2Y \Rightarrow BY - 2Y = B \Rightarrow (B - 2E)Y = B$$

$$B - 2E = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(B - 2E:B) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & : & 4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & : & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & : & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & : & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & : & 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & : & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 + r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & : & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & : & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & : & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & : & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & : & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & : & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 4r_2]{r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & : & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & : & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & : & 2 & -12 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & : & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & : & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & : & 2 & -12 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2 + r_3]{r_1 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 3 & -8 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & : & 2 & -9 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & : & 2 & -12 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 3 & -8 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & : & 2 & -9 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & : & -2 & 12 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 3 & -8 & -6 \\ 2 & -9 & -6 \\ -2 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$



3. 矩阵的秩

题 1: 用初等变换求下列矩阵的秩: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 。

秩 = 主元个数

$$\text{解: } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 + 2r_1 \\ r_3 - 2r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -4 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 + 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 3$$

题 2: 设 A, B 为三阶方阵, 若 A 可逆, $R(B) = 2$, $R(AB) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

$$\text{解: 若 } A \text{ 可逆, 不妨取 } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(AB) = 2$$

题 3: 设 A 是 4 阶方阵, $R(A) = 2$, 则 $R(A^*) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

$$\text{解: } R(A) = 2 < 4 - 1 = 3 \Rightarrow R(A^*) = 0$$

①若 $R(A) = n$, 则 $R(A^*) = n$ ②若 $R(A) = n - 1$, 则 $R(A^*) = 1$ ③若 $R(A) < n - 1$, 则 $R(A^*) = 0$

矩阵秩的性质

① $0 \leq R(A_{m \times n}) \leq \min\{m, n\}$ ②若矩阵 P, Q 可逆, 则 $R(PA) = R(AQ) = R(PAQ)$ ③ $\max\{R(A), R(B)\} \leq R(A, B) \leq R(A) + R(B)$ ④ $R(A + B) \leq R(A) + R(B)$ ⑤设 A, B 分别是 $m \times n$ 矩阵与 $n \times s$ 矩阵,则 $R(AB) \leq \min\{R(A), R(B)\}$, $R(AB) \geq R(A) + R(B) - n$ 。若 $AB = 0$, 则 $R(A) + R(B) \leq n$ 

课时四 练习题

1. 将矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 8 & 3 \\ 2 & -3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ 化为最简形。

2. 若 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, 求 A^{-1} 。

3. 若 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 求 A^{-1} 。

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 且 $AB - E = A + B$, 求 B 。

5. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $4X = B + 2AX$, 求 X 。

6. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & \lambda & -1 \\ 5 & 6 & 3 & \mu \end{pmatrix}$, 已知 $R(A) = 2$, 求 λ 与 μ 的值。



课时五 向量组

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 向量组	必考	6~15	大题
2. 线性相关与线性无关			

1. 向量组

$a = (1, 1)^T$ 是二维向量, $b = (1, 2, 3)^T$ 是三维向量, $c = (1, 2, 3, 4)^T$ 为四维向量

$$a_1 = (1, 0, 1)^T \quad a_2 = (1, 2, 0)^T \quad a_3 = (0, 2, 3)^T \quad A = (a_1, a_2, a_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ 是向量组}$$

题 1: $\alpha_1 = (1, 0, 0)^T$, $\alpha_2 = (0, 1, 0)^T$, $\alpha_3 = (1, 2, 1)^T$, $\beta = (4, 4, 3)^T$, 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示 β 。

解: 设 k_1, k_2, k_3 满足 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = \beta$

$$\Rightarrow k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} k_1 + k_3 = 4 \\ k_2 + 2k_3 = 4 \\ k_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = -2 \\ k_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \beta = \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3$$

2. 线性相关与线性无关

①若存在一组不全为 0 的数 k_1, k_2, \dots, k_m , 使 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = 0$,

则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关, 否则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关。

② $R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) < m \Leftrightarrow$ 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关;

$R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = m \Leftrightarrow$ 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关。

③极大无关组

例: 三维坐标中 $a_1 = (1, 0, 0)^T, a_2 = (0, 1, 0)^T, a_3 = (0, 0, 1)^T$

任给一个三维向量 $a_4 = (2, 3, 6)^T, a_4 = 2a_1 + 3a_2 + 6a_3$

向量组 a_1, a_2, a_3 是任意一组三维向量 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$ 的一个极大无关组



题 1: 已知 $a_1 = (1, 1, 1)^T$, $a_2 = (1, 0, 2)^T$, $a_3 = (-1, -4, a)^T$, 则 a 为何值时, 该向量组 a_1, a_2, a_3 线性相关。

$$\text{解: } (a_1, a_2, a_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & a+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}$$

$$R(a_1, a_2, a_3) < 3 \Rightarrow a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$$

题 2: 求向量组 $a_1 = (2, 4, 2)^T$, $a_2 = (1, 1, 0)^T$, $a_3 = (2, 3, 1)^T$, $a_4 = (3, 5, 2)^T$ 的秩及一个极大无关组, 并将其余向量用此极大无关组线性表示。

$$\text{解: } A = (a_1, a_2, a_3, a_4) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R(A) = 2, \quad \text{极大无关组为 } a_1, a_2, \quad a_3 = \frac{1}{2}a_1 + a_2, \quad a_4 = a_1 + a_2$$

题 3: 已知向量组 a_1, a_2, a_3 线性无关, $b_1 = a_1 - 2a_2$, $b_2 = a_2 - 2a_3$, $b_3 = a_3 - 2a_1$, 求证: 向量组 b_1, b_2, b_3 线性无关。

证: 若向量组 b_1, b_2, b_3 线性相关, 则存在一组不全为 0 的 k_1, k_2, k_3 使得 $k_1b_1 + k_2b_2 + k_3b_3 = 0$,

$$k_1(a_1 - 2a_2) + k_2(a_2 - 2a_3) + k_3(a_3 - 2a_1) = 0$$

$$(k_1 - 2k_3)a_1 + (k_2 - 2k_1)a_2 + (k_3 - 2k_2)a_3 = 0$$

$$\text{又 } a_1, a_2, a_3 \text{ 线性无关, 故 } \begin{cases} k_1 - 2k_3 = 0 \\ k_2 - 2k_1 = 0 \\ k_3 - 2k_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = 0 \\ k_3 = 0 \end{cases} \quad \text{与假设矛盾}$$

故向量组 b_1, b_2, b_3 线性无关。



课时五 练习题

1. 判断向量组 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ 的线性相关性。

2. 设向量组 $a_1 = (1, 1, 0)^T$, $a_2 = (1, 3, -1)^T$, $a_3 = (5, 3, k)^T$ 线性相关, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, 求矩阵 A 的秩, 并给出一个极大无关组。

4. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 求矩阵 A 的一个极大无关组, 并将其余列向量用极大无关组线性表示。

5. 已知向量组 a_1, a_2, a_3 线性无关, $b_1 = a_1 - a_2$, $b_2 = a_2 - a_3$, $b_3 = a_1 + a_3$, 证明: b_1, b_2, b_3 线性无关。



课时六 解方程组

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 齐次线性方程组	必考	6~12	大题
2. 非齐次线性方程组			

1. 齐次线性方程组 $AX=0$

题 1. 求下列线性方程组的基础解系及通解。

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases}$$

解的判定：系数矩阵 A $R(A)=n$ 只有零解 $R(A)<n$ 无穷多解且有 $n-R(A)$ 个解向解：写出系数矩阵 A ，并进行初等行变换，直至转化为最简形矩阵。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & -5 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & 2 & 8 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/2 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

 $R(A)=2<4$, 方程有无穷多解, $n-R(A)=4-2=2$ 个解向量

$$\text{由} \begin{cases} x_1 - \frac{3}{2}x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - \frac{1}{2}x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2}x_3 - x_4 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_3 + 2x_4 \end{cases}$$

$$\text{令 } x_3=1, x_4=0 \Rightarrow x_1=\frac{3}{2}, x_2=\frac{1}{2}$$

$$\text{得基础解系: } \xi_1 = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right)^T$$

$$\text{令 } x_3=0, x_4=1 \Rightarrow x_1=-1, x_2=2$$

$$\xi_2 = (-1, 2, 0, 1)^T$$

$$\text{故通解为 } (x_1, x_2, x_3, x_4)^T = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 = k_1\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right)^T + k_2(-1, 2, 0, 1)^T \quad k_1, k_2 \in R$$



2. 非齐次线性方程组 $AX = \beta$

题 1. 求非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 - x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_4 = 5 \end{cases}$ 的通解。

判定：增广矩阵 $(A: \beta)$

$R(A) = R(A: \beta) = n$ 方程组有唯一解

$R(A) = R(A: \beta) < n$ 方程组有无穷解

$R(A) \neq R(A: \beta)$ 方程组无解

解：写出增广矩阵 $(A: \beta)$ ，并进行初等行变换

$$(A: \beta) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & \vdots & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & \vdots & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & \vdots & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 3 & \vdots & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - 3r_1]{r_2 - 2r_1, r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 2 & -6 & 0 & \vdots & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 - r_2]{r_4 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 + r_3]{r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

$R(A) = R(A: \beta) = 3 < 4 \Rightarrow$ 该方程组有无穷多解。

①齐通：由 $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 3x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}$

非齐次方程通解 X

$X = (\text{齐次通解} + \text{非齐次特解})$

令 $x_3 = 1$ ，得基础解系： $\xi = (1, 3, 1, 0)^T$ 齐通： $x = k(1, 3, 1, 0)^T$

②非特： $x = (2, 1, 0, 0)^T$ 方程通解： $X = k(1, 3, 1, 0)^T + (2, 1, 0, 0)^T \quad k \in R$



题 2. 非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 = \lambda^2 \end{cases}$, 当 λ 取何值时, 方程组无解? 有唯一解? 有无穷多解? 在方程组有无穷多解时, 求出它的通解。

解: 对增广矩阵 $(A:\beta)$ 作初等行变换把它变成行阶梯形矩阵:

解: 对增广矩阵 $(A:\beta)$ 作初等行变换把它变成行阶梯形矩阵:

$$(A:\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \vdots & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \vdots & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & \vdots & \lambda^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \vdots & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \vdots & \lambda-1 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & \vdots & \lambda^2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \vdots & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \vdots & \lambda-1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda-\lambda^2 & \vdots & \lambda^2-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \vdots & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \vdots & \lambda-1 \\ 0 & 0 & -(\lambda+2)(\lambda-1) & \vdots & (\lambda-1)(\lambda+1) \end{pmatrix}$$

1) 无解: $R(A) \neq R(A:\beta)$, 则 $\begin{cases} -(\lambda+2)(\lambda-1)=0 \\ (\lambda-1)(\lambda+1) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = -2$

2) 有唯一解: $R(A) = R(A:\beta) = 3$, 则 $\begin{cases} -(\lambda+2)(\lambda-1) \neq 0 \\ \lambda-1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda \neq -2 \text{ 且 } \lambda \neq 1$

3) 有无穷多解: $R(A) = R(A:\beta) < 3$, 则 $\begin{cases} -(\lambda+2)(\lambda-1)=0 \\ (\lambda-1)(\lambda+1)=0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = 1$

将 $\lambda = 1$ 代入 $(A:\beta)$ 阶梯型得: $(A:\beta) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$

①齐通: 由 $x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2 - x_3$

令 $x_2 = 1, x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$
 令 $x_2 = 0, x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = -1$
 得基础解系: $\xi_1 = (-1, 1, 0)^T$
 $\xi_2 = (-1, 0, 1)^T$

②非特: $x = (1, 0, 0)^T$, 方程通解为 $X = k_1(-1, 1, 0)^T + k_2(-1, 0, 1)^T + (1, 0, 0)^T$



课时六 练习题

1. 求齐次线性方程组的基础解系及通解。

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 17x_3 - 6x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

2. 解非齐次线性方程组：
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 4 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 = 0 \end{cases}$$

3. 非齐次线性方程组
$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = \lambda - 3 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = -2 \end{cases}$$
，当 λ 取何值时，方程组无解？有唯一解？有无穷

多解？在方程组有无穷多解时，求出它的通解。



课时七 特征值、特征向量、对角化

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 求特征值, 特征向量	必考	6~15	大题
2. 相似对角化			
3. 正交相似对角化			
4. 特征值的性质	★★★★	3~6	选择/填空

1. 求特征值、特征向量

题 1: 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值。

$$\text{解: } |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 = 8 - 6\lambda + \lambda^2 = (4-\lambda)(2-\lambda) = 0$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4$

题 2: 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量。

$$\begin{aligned} \text{解: } |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) A_{11} \\ &= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) = (2-\lambda)^2(1-\lambda) = 0 \end{aligned}$$

故特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$

$$\text{当 } \lambda_1 = 1 \text{ 时, 解 } (A - E)x = 0: A - E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

令 $x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1$ 得基础解系: $a_1 = (0, 1, 1)^T$

$\lambda_1 = 1$ 对应的全部特征向量为 $k_1(0, 1, 1)^T$ ($k_1 \neq 0$)

$$\text{当 } \lambda_2 = \lambda_3 = 2 \text{ 时, 解 } (A - 2E)x = 0: A - 2E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = x_3$$

令 $x_2 = 1, x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$, 令 $x_2 = 0, x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = 1$

得基础解系: $a_2 = (0, 1, 0)^T, a_3 = (1, 0, 1)^T$

则 $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ 对应的全部特征向量为 $k_2(0, 1, 0)^T + k_3(1, 0, 1)^T$ (k_2, k_3 不全为零)

特征值、特征向量求解步骤:

1. 求特征值 λ_i
2. 求 $(A - \lambda_i E)x = 0$ 对应的基础解系



2. 相似对角化

题 1: 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 P , 使 $P^{-1}AP$ 对角化。

解: ①特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$

② $a_1 = (0, 1, 1)^T$ $a_2 = (0, 1, 0)^T$ $a_3 = (1, 0, 1)^T$

③ $P = (a_1, a_2, a_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 使 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$

解题方法:

①求特征值 $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_m$

②求基础解系 $a_1, a_2 \cdots a_m$

③ $P = (a_1, a_2 \cdots a_m)$

使 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_m \end{pmatrix}$

题 2: 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, 判断 A 能否对角化? 若能, 求相似变换矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 对角化

解: $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(4-\lambda) = 0$ 得特征值 $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$

当 $\lambda_1 = 4$ 时, 解 $(A - 4E)X = 0$: $A - 4E = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

令 $x_3 = 3 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 0$, 得基础解系 $a_1 = (1, 0, 3)^T$

当 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 时, 解 $(A - E)X = 0$: $A - E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 = -x_3$

令 $x_1 = 1, x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$, 令 $x_1 = 0, x_3 = 1 \Rightarrow x_2 = -1$

得基础解系 $a_2 = (1, 0, 0)^T$, $a_3 = (0, -1, 1)^T$

因为矩阵有三个线性无关的特征向量, 所以 A 能相似对角化

$P = (a_1, a_2, a_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 使 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$



3. 正交相似对角化

题 1: 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 求一个正交矩阵 P , 使 $P^{-1}AP = \Lambda$ 为对角矩阵。

解: 由 $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 2) = 0$,

得特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = -2$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \text{ 时, } A - E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = -x_2 + x_3$$

得基础解系 $a_1 = (-1, 1, 0)^T \quad a_2 = (1, 0, 1)^T$

$$\lambda_3 = -2 \text{ 时, } A + 2E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

得基础解系 $a_3 = (-1, -1, 1)^T$

正交化:

$$b_1 = a_1 = (-1, 1, 0)^T$$

$$b_2 = a_2 - \frac{[a_2, b_1]}{[b_1, b_1]} \cdot b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

施密特正交化: $a_1 \quad a_2$

$$b_1 = a_1$$

$$b_2 = a_2 - \frac{[a_2, b_1]}{[b_1, b_1]} b_1$$

$b_3 = a_3 = (-1, -1, 1)^T$ (a_3 和 a_1, a_2 已经正交, 不用再正交化)

单位化:

$$e_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T, \quad e_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)^T, \quad e_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$$

单位化: $e = \frac{b}{\|b\|}$

$$P = (e_1, e_2, e_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \text{ 使 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$$



4. 特征值的性质

① $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$

② $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n = |A|$

③若 A 的特征值为 λ ，则：

矩阵	kA	A^2	$aA + bE$	A^m	A^{-1}	A^*
特征值	$k\lambda$	λ^2	$a\lambda + b$	λ^m	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{ A }{\lambda}$

题 1：已知 A 的三个特征值为 1, 2, 3, 则 $|A| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。解： $|A| = 1 \times 2 \times 3 = 6$ 题 2：设三阶方阵 A 的特征向量为 1, -2, 3, 则 $|A^2 + A - E| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。解： $A^2 + A - E \rightarrow \lambda^2 + \lambda - 1$

$$\lambda^2 + \lambda - 1 = \begin{cases} 1, & \lambda = 1 \text{ 时} \\ 1, & \lambda = -2 \text{ 时} \\ 11, & \lambda = 3 \text{ 时} \end{cases} \Rightarrow A^2 + A - E \text{ 的特征值为 } 1, 1, 11$$

$$\text{故 } |A^2 + A - E| = 1 \times 1 \times 11 = 11$$

课时七 练习题

1. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$ ①求特征值、特征向量； ②判断 A 能否对角化，若能对角化，

求可逆矩阵 P ，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵。

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ ，求一个正交矩阵 P ，使 $P^{-1}AP = \Lambda$ 为对角矩阵。

3. 已知 A 的特征值为 1, -1, 2, 求 $|A^{-1} + 2A - E| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



课时八 二次型

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 二次型及其矩阵表示	★★	0~3	大题
2. 求正交变换、化标准形	必考	8~10	
3. 顺序主子式	★★★★★	3~6	填空

1. 二次型及其矩阵表示

题 1: 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$ 所对应的矩阵 A 为 _____, 该二次型的秩为 _____。

$$\text{解: } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+2r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 6 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 3$$

2. 求正交变换, 化标准型

题 1: 用正交变换化二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 7x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 8x_2x_3$ 为标准型。

$$\text{解: 二次型矩阵 } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -4 \\ 2 & 1-\lambda & -4 \\ -4 & -4 & 7-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)^2(\lambda-11) = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 11$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1, A + E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & -4 \\ -4 & -4 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = -x_2 + 2x_3$$

$$\text{令 } x_2 = 1, x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, \quad \text{令 } x_2 = 0, x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = 2$$

$$\text{得基础解系: } a_1 = (-1, 1, 0)^T, a_2 = (2, 0, 1)^T$$

$$\lambda_3 = 11 \text{ 时, } A - 11E = \begin{pmatrix} -10 & 2 & -4 \\ 2 & -10 & -4 \\ -4 & -4 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_3 \end{cases}$$

$$\text{令 } x_3 = -2 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 1 \text{ 得基础解系: } a_3 = (1, 1, -2)^T$$

解题步骤:

1. 写二次型矩阵
2. 求特征值
3. 求基础解系
4. 正交化
5. 单位化



正交化

$$b_1 = a_1 = (-1, 1, 0)^T \quad b_2 = a_2 - \frac{[a_2, b_1]}{[b_1, b_1]} b_1 = (1, 1, 1)^T \quad b_3 = a_3 = (1, 1, -2)^T$$

单位化

$$e_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T, \quad e_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T, \quad e_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right)^T$$

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad \text{标准型 } f = -y_1^2 - y_2^2 + 11y_3^2$$

3. 顺序主子式

顺序主子式：

设 A 为 n 阶方阵，依次取前 k 行与前 k 列构成的子式，称为顺序主子式，例如：

$$\Delta_1 = |a_{11}|, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

题 1：求参数 t 的值，使 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2tx_1x_2 + 2x_1x_3$ 为正定二次型。

$$\text{解：} A = \begin{pmatrix} 2 & t & 1 \\ t & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \Delta_1 = |2| = 2 > 0 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & t \\ t & 1 \end{vmatrix} = 2 - t^2 > 0 \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & t & 1 \\ t & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3t^2 + 5 > 0$$

$$\Rightarrow t^2 < \frac{5}{3}, \quad \text{得 } t \in \left(-\frac{\sqrt{15}}{3}, \frac{\sqrt{15}}{3}\right)$$



课时八 练习题

1. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2$ 所对应的矩阵是_____。
2. 求一个正交变换 $x = Py$ ，使二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 化为标准型，并判定是否为正定二次型。
3. 若二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2tx_2x_3$ 正定，求 t 的取值范围



课时一 练习题答案

1. 排列 2 1 7 9 8 的逆序数为_____。

解: $0+1+0+0+1=2$

2. 五阶行列式 D 中 $a_{12}a_{25}a_{34}a_{41}a_{53}$ 的符号是_____。

解: 行排列 1 2 3 4 5 逆序数 $t_1=0$

列排列 2 5 4 1 3 逆序数 $t_2=0+0+1+3+2=6$

$(-1)^{t_1+t_2}=(-1)^{0+6}=(-1)^6=1$ 符号为正

3. 设 A 为三阶矩阵, 且 $\det(A)=-2$, 若将 A 按列分块 $A=(A_1, A_2, A_3)$, 其中 A 的第 j 列

$(j=1, 2, 3)$, 求 $|A_3-2A_1, 3A_2, A_1|$ 。

解: $|A_3-2A_1, 3A_2, A_1| \xrightarrow{c_1+2c_3} |A_3, 3A_2, A_1| \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} -|A_1, 3A_2, A_3| = -3|A_1, A_2, A_3| = 6$

4. 计算下列行列式的值。

$$(1) \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 \\ -1 & -2 & 5 & -8 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -5 & 10 \end{vmatrix} \quad (3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \quad (4) \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\text{解: } (1) \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-2r_1}} \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3-3/5r_2} \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -5$$



$$(2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 \\ -1 & -2 & 5 & -8 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -5 & 10 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4 - r_1]{r_2 + r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -12 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 14 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4 + r_3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -12 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{vmatrix} = 26$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_1 - 1/3 c_3]{c_1 - 1/2 c_2} \begin{vmatrix} \frac{1}{6} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1 - 1/4 c_4} \begin{vmatrix} -\frac{1}{12} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -2$$

$$(4) \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 + r_2 + r_3 + r_4} 7 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 7 \times 3^3 = 189$$



课时二 练习题答案

1. 设 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ -3 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 已知 $A_{21} = -2$, $A_{22} = 3$, $A_{23} = x$,

$A_{24} = 2$, $A_{25} = -1$, 试求常数 x 和行列式 D 。

解: 由 $a_{41}A_{21} + a_{42}A_{22} + a_{43}A_{23} + a_{44}A_{24} + a_{45}A_{25} = 0$

$$\Rightarrow -3 \times (-2) + 0 \times 3 + 1 \cdot x + 2 \times 2 + 0 \times (-1) = 0$$

$$\Rightarrow 6 + x + 4 = 0 \Rightarrow x = -10$$

又由 $a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} + a_{24}A_{24} + a_{25}A_{25} = D$

$$\Rightarrow 2 \times (-2) + (-1) \times 3 + 1 \cdot x + 3 \cdot 2 + 1 \times (-1) = D \Rightarrow D = -12$$

2. 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 9 & 9 & 9 \\ 10 & 11 & 12 & 13 \end{vmatrix}$, 则 $A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44} = \underline{\hspace{2cm}}$, $A_{31} + A_{32} + A_{33} + A_{34} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解: $A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 9 & 9 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$A_{31} + A_{32} + A_{33} + A_{34} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 11 & 12 & 13 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 11 & 12 & 13 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

3. 求 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$ 。

解: $D = (4-3)(4-2)(4-1)(3-2)(3-1)(2-1) = 6 \times 2 = 12$



课时三 练习题答案

1. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, 则 $(A-2B)^T =$ _____, $AB^T =$ _____, $BA =$ _____。

$$\text{解: } (A-2B)^T = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad AB^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 $AB-BA$ 。

$$\begin{aligned} \text{解: } AB-BA &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & -5 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -4 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. 设 A, B 为 n 阶方阵, $|A|=2, |B|=3$, 则 $\left| \frac{1}{2} A^* B^{-1} \right| =$ _____。

$$\text{解: } \left| \frac{1}{2} A^* B^{-1} \right| = \left| \frac{1}{2} |A| A^{-1} B^{-1} \right| = \left| \frac{1}{2} \cdot 2 A^{-1} B^{-1} \right| = |A^{-1}| |B^{-1}| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

4. 设 A 为三阶方阵, $|A| = \frac{1}{2}$, 求 $|(3A)^{-1} - 2A^*| =$ _____。

$$\text{解: } |(3A)^{-1} - 2A^*| = \left| \frac{1}{3} A^{-1} - 2|A| A^{-1} \right| = \left| \frac{1}{3} A^{-1} - 2 \cdot \frac{1}{2} A^{-1} \right| = \left| -\frac{2}{3} A^{-1} \right| = -\frac{8}{27} \times 2 = -\frac{16}{27}$$



5. 设 A 为二阶方阵, B 为三阶方阵, $|A| = \frac{1}{|B|} = \frac{1}{2}$, 则 $\begin{vmatrix} B & 0 \\ 0 & (2A)^{-1} \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解: $\begin{vmatrix} B & 0 \\ 0 & (2A)^{-1} \end{vmatrix} = |B| |(2A)^{-1}| = |B| \left| \frac{1}{2} A^{-1} \right| = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2 \cdot |A^{-1}| = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2 \cdot 2 = 1$

6. 已知 A 为 n 阶方阵, E 为 n 阶单位阵, 且 $A^2 + A - 3E = 0$, 证明 $A - E$ 可逆, 并求 $(A - E)^{-1}$

解: $A^2 + A - 3E = 0 \Rightarrow (A - E)(A + 2E) = E$

等式两边取行列式: $|(A - E)(A + 2E)| = |A - E| |A + 2E| = 1$

$\Rightarrow |A - E| \neq 0 \Rightarrow A - E$ 可逆 $\Rightarrow (A - E)^{-1} = A + 2E$



课时四 练习题答案

1. 将矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 8 & 3 \\ 2 & -3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ 化为最简形。

$$\begin{aligned}
 \text{解: } A &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 8 & 3 \\ 2 & -3 & 7 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 8 & 3 \\ 2 & -3 & 7 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 3r_1 \\ r_4 - 2r_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & 8 & 9 \\ 0 & -7 & 7 & 8 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{\begin{matrix} r_3 - 8r_2 \\ r_4 - 7r_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4 - r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{r_1 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

2. 若 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, 求 A^{-1} 。

$$\text{解: } |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \quad A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. 若 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 求 A^{-1} 。

$$\begin{aligned}
 \text{解: } (A:E) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 + 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 - 3r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 2 & 1 & -3 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$



$$\xrightarrow{r_3 \times (-1/8)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 - 2r_3]{r_1 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & \frac{3}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 且 $AB - E = A + B$, 求 B 。

解: $AB - E = A + B \Rightarrow AB - B = A + E \Rightarrow (A - E)B = A + E$

$$(A - E : A + E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $4X = B + 2AX$, 求 X 。

解: $4X = B + 2AX \Rightarrow 4X - 2AX = B \Rightarrow (4E - 2A)X = B$

$$(4E - 2A : B) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & \vdots & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & \vdots & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 & \vdots & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 + r_1]{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & \vdots & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & \vdots & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 \cdot (1/4)]{r_1 \cdot (1/2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 + r_3]{r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & \frac{1}{4} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$



6. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & \lambda & -1 \\ 5 & 6 & 3 & \mu \end{pmatrix}$, 已知 $R(A) = 2$, 求 λ 与 μ 的值。

$$\text{解: } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & \lambda & -1 \\ 5 & 6 & 3 & \mu \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 5r_1]{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & \lambda + 3 & -4 \\ 0 & -4 & 8 & \mu - 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & \lambda + 3 & -4 \\ 0 & 0 & 5 - \lambda & \mu - 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{由 } R(A) = 2, \text{ 故 } \begin{cases} 5 - \lambda = 0 \\ \mu - 1 = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} \lambda = 5 \\ \mu = 1 \end{cases}$$



课时五 练习题答案

1. 判断向量组 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ 的线性相关性。

$$\text{解: } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow R(A) = 2 < 3 \Rightarrow \text{线性相关}$$

2. 设向量组 $a_1 = (1, 1, 0)^T$, $a_2 = (1, 3, -1)^T$, $a_3 = (5, 3, k)^T$ 线性相关, 则 $k = \underline{\quad}$ 。

$$\text{解: } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & k \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & k \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+1/2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & k-1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow k-1=0 \Rightarrow k=1$$

3. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, 求矩阵 A 的秩, 并给出一个极大无关组。

$$\text{解: } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 6 & -5 \\ 0 & 3 & -1 & 7 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 6 & -5 \\ 0 & 3 & -1 & 7 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 6 & -5 \\ 0 & 3 & -1 & 7 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 10 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R(A) = 3 \Rightarrow a_4 = -7a_1 + 4a_2 + 5a_3, \quad a_5 = 5a_1 - 3a_2 - 4a_3$$



4. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 求矩阵 A 的一个极大无关组, 并将其余列向量用极大无关组线性表示。

解:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -7 & -7 & -7 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \alpha_3 = 2\alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2$

5. 已知向量组 a_1, a_2, a_3 线性无关, $b_1 = a_1 - a_2$, $b_2 = a_2 - a_3$, $b_3 = a_1 + a_3$ 。证明: b_1, b_2, b_3 线性无关

证: 假设 b_1, b_2, b_3 线性相关, 则存在一组不全为 0 的常数 k_1, k_2, k_3 使得 $k_1b_1 + k_2b_2 + k_3b_3 = 0$,

则 $k_1(a_1 - a_2) + k_2(a_2 - a_3) + k_3(a_1 + a_3) = 0$

又 a_1, a_2, a_3 线性无关 $\Rightarrow \begin{cases} k_1 + k_3 = 0 \\ k_2 - k_1 = 0 \\ k_3 - k_2 = 0 \end{cases}$, 得 $\begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = 0 \\ k_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ 与假设矛盾

向量组 b_1, b_2, b_3 线性无关, 故得证。



课时六 练习题答案

1. 求齐次线性方程组的基础解系及通解。

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 17x_3 - 6x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

解：写出系数矩阵 A ，并进行初等行变换，直至转化为最简形矩阵。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 17 & -6 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 8 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - 3r_2]{r_1 - 2r_2} \begin{pmatrix} 0 & -6 & 21 & -12 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & -4 \\ 0 & -4 & 14 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_3]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & -4 \\ 0 & -6 & 21 & -12 \\ 0 & -4 & 14 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 - 3r_2]{r_4 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 - r_2]{-1/2 r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R(A) = 2 < 4$ ，方程有无穷多解， $4 - R(A) = 2$ 个解向量

$$\text{由} \begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - \frac{7}{2}x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2}x_3 - x_4 \\ x_2 = \frac{7}{2}x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

$$\text{令 } x_3 = 2, x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = 7$$

得基础解系： $\xi_1 = (-3, 7, 2, 0)^T$

$$\text{令 } x_3 = 0, x_4 = 1 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -2$$

$$\xi_2 = (-1, -2, 0, 1)^T$$

故通解为： $X = k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 = k_1 (-3, 7, 2, 0)^T + k_2 (-1, -2, 0, 1)^T$ (k_1, k_2 是任意常数)



2. 解非齐次线性方程组:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 4 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{解: } (A:\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & : & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 4 & : & 4 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & : & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & : & 1 \\ 0 & -4 & 6 & 7 & : & 1 \\ 0 & 4 & -6 & -7 & : & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & : & 1 \\ 0 & -4 & 6 & 7 & : & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1/4 r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & : & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{4} & : & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} & : & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{4} & : & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix}$$

$R(A) = R(A:\beta) = 2 < 4$, 方程组有无穷多解

①齐通: 由
$$\begin{cases} x_1 - \frac{3}{2}x_3 + \frac{3}{4}x_4 = 0 \\ x_2 - \frac{3}{2}x_3 - \frac{7}{4}x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2}x_3 - \frac{3}{4}x_4 \\ x_2 = \frac{3}{2}x_3 + \frac{7}{4}x_4 \end{cases}$$

令 $x_3 = 2, x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = 3$; 令 $x_3 = 0, x_4 = 4 \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = 7$

得基础解系: $\xi_1 = (3, 3, 2, 0)^T, \xi_2 = (-3, 7, 0, 4)^T$

齐通: $x = k_1(3, 3, 2, 0)^T + k_2(-3, 7, 0, 4)^T$

②非特: $x = \left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}, 0, 0\right)^T$

方程通解: $X = k_1(3, 3, 2, 0)^T + k_2(-3, 7, 0, 4)^T + \left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}, 0, 0\right)^T$ (k_1, k_2 为任意常数)



3. 非齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = \lambda - 3 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = -2 \end{cases}$, 当 λ 取何值时, 方程组无解? 有唯一解? 有无穷多解? 在方程组有无穷多解时, 求出它的通解。

解: $(A:\beta) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & \vdots & \lambda-3 \\ 1 & \lambda & 1 & \vdots & -2 \\ 1 & 1 & \lambda & \vdots & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \vdots & -2 \\ 1 & \lambda & 1 & \vdots & -2 \\ \lambda & 1 & 1 & \vdots & \lambda-3 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-\lambda r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \vdots & -2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \vdots & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & \vdots & 3\lambda-3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \vdots & -2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & -(2+\lambda)(\lambda-1) & \vdots & 3\lambda-3 \end{pmatrix}$$

1) 无解: $R(A) \neq R(A:\beta)$, 则 $\begin{cases} (2+\lambda)(\lambda-1) = 0 \\ \lambda-1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = -2$

2) 有唯一解: $R(A) = R(A:\beta) = 3$, 则 $\begin{cases} (2+\lambda)(\lambda-1) \neq 0 \\ \lambda-1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda \neq -2 \text{ 且 } \lambda \neq 1$

3) 有无穷多解: $R(A) = R(A:\beta) < 3$, 则 $\lambda-1=0 \Rightarrow \lambda=1$

将 $\lambda=1$ 代入 $(A:\beta)$ 阶梯型得: $(A:\beta) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

①齐通: 由 $x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2 - x_3$

令 $x_2 = 1, x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$
 令 $x_2 = 0, x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = -1$
 得基础解系: $\xi_1 = (-1, 1, 0)^T$
 $\xi_2 = (-1, 0, 1)^T$

②非特: $x = (-2, 0, 0)^T$

方程通解: $X = k_1(-1, 1, 0)^T + k_2(-1, 0, 1)^T + (-2, 0, 0)^T$ (k_1, k_2 为任意常数)



课时七 练习题答案

1. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$ ①求特征值、特征向量；②判断 A 能否对角化，若能对角化，

求可逆矩阵 P ，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵。

$$\text{解：① } |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 \\ -2 & -2-\lambda & 2 \\ 3 & 6 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+4) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 \\ -2 & -2-\lambda & 2 \\ 3 & 6 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ -2 & 2-\lambda & 2 \\ 3 & 4-2\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 4-2\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2-\lambda \\ 3 & 4-2\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (3-\lambda)[(2-\lambda)(-1-\lambda) - 2(4-2\lambda)] - [-2(4-2\lambda) - 3(2-\lambda)] \\ &= (3-\lambda)(\lambda^2 + 3\lambda - 10) - 7(\lambda - 2) \\ &= (3-\lambda)(\lambda - 2)(\lambda + 5) - 7(\lambda - 2) \\ &= (\lambda - 2)[(3-\lambda)(\lambda + 5) - 7] = (\lambda - 2)(2-\lambda)(\lambda + 4) = 0 \end{aligned}$$

这些步骤在草稿纸上进行，
求特征值一般都使用行列
式展开 若不会 学习课时

得特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ $\lambda_3 = -4$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2 \text{ 时, } A - 2E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = -2x_2 + x_3$$

令 $x_2 = 1, x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -2$; 令 $x_2 = 0, x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = 1$

得基础解系: $a_1 = (-2, 1, 0)^T$, $a_2 = (1, 0, 1)^T$

$$\lambda_3 = -4 \text{ 时, } A + 4E = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}x_3 \\ x_2 = -\frac{2}{3}x_3 \end{cases}$$

令 $x_3 = 3 \Rightarrow x_1 = 1$ $x_2 = -2$, 得基础解系: $a_3 = (1, -2, 3)^T$

②矩阵 A 有三个线性无关的特征向量，故可以相似对角化

$$P = (a_1, a_2, a_3) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{使 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & -4 \end{pmatrix}$$



2. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$, 求一个正交矩阵 P , 使 $P^{-1}AP = \Lambda$ 为对角矩阵。

解: $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 4-\lambda & -4 \\ 2 & -4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(9-\lambda) = 0$ 得特征值: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \quad \lambda_3 = 9$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \text{ 时, } A - 0E = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = 2x_2 - 2x_3$$

令 $x_2 = 1, x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$; 令 $x_2 = 0, x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = -2$

得基础解系: $a_1 = (2, 1, 0)^T$, $a_2 = (-2, 0, 1)^T$

$$\lambda_3 = 9 \text{ 时, } A - 9E = \begin{pmatrix} -8 & -2 & 2 \\ -2 & -5 & -4 \\ 2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

令 $x_3 = 2 \Rightarrow x_1 = 1 \quad x_2 = -2$ 得特征向量 $a_3 = (1, -2, 2)^T$

正交化: (只需将 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ 对应的 a_1 和 a_2 两个向量正交化即可)

$$b_1 = a_1 = (2, 1, 0)^T \quad b_2 = a_2 - \frac{[a_2, b_1]}{[b_1, b_1]} \cdot b_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{4}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 1 \end{pmatrix}^T$$

$b_3 = a_3 = (1, -2, 2)^T$ (为了统一化我们把 a_3 也用 b_3 替换下来)

单位化: $e_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)$ $e_2 = \left(\frac{-2\sqrt{5}}{15}, \frac{4\sqrt{5}}{15}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)^T$ $e_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$$P = (e_1, e_2, e_3) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{-2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \text{使 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 9 \end{pmatrix}$$



3. 已知 A 的特征值为 $1, -1, 2$, 求 $|A^{-1} + 2A - E| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解: $A^{-1} + 2A - E \rightarrow \frac{1}{\lambda} + 2\lambda - 1$

$$\frac{1}{\lambda} + 2\lambda - 1 = \begin{cases} 2 & \lambda = 1 \\ -4 & \lambda = -1 \\ 7/2 & \lambda = 2 \end{cases} \Rightarrow A^{-1} + 2A - E \text{ 的特征向量为 } 2, -4, \frac{7}{2}$$

$$\text{故 } |A^{-1} + 2A - E| = 2 \times (-4) \times \frac{7}{2} = -28$$



课时八 练习题答案

1. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2$ 所对应的矩阵是_____。

解:
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. 求一个正交变换 $x = Qy$, 使二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$

化为标准型, 并判定是否为正交二次型。

解: 二次型矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-10) = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 10$$

$$\text{当 } \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \text{ 时, } A - E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = -2x_2 + 2x_3$$

$$\text{令 } x_2 = 1, x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -2, \quad \text{令 } x_2 = 0, x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = 2$$

$$\text{得基础解系: } a_1 = (-2, 1, 0)^T, \quad a_2 = (2, 0, 1)^T$$

$$\text{当 } \lambda_3 = 10 \text{ 时, } A - 10E = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

$$\text{令 } x_3 = 2 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -2, \text{ 得基础解系: } a_3 = (-1, -2, 2)^T$$

$$\text{正交化: } b_1 = (-2, 1, 0)^T \quad b_2 = a_2 - \frac{[a_2, b_1]}{[b_1, b_1]} b_1 = \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 1\right)^T \quad b_3 = (-1, -2, 2)^T$$

$$\text{单位化: } e_1 = \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, 0\right)^T \quad e_2 = \left(\frac{2\sqrt{5}}{15}, \frac{4\sqrt{5}}{15}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)^T \quad e_3 = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)^T$$



$$Q=(e_1, e_2, e_3)=\begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow f=y_1^2+y_2^2+10y_3^2$$

3. 若二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2tx_2x_3$ 正交, 求 t 的取值范围。

解: 二次型矩阵: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & t \\ 0 & t & 3 \end{pmatrix}$, $\Delta_1 = |2| = 2 > 0$ $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 > 0$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & t \\ 0 & t & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2t^2 > 0 \Rightarrow t \in \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$

