《高数/微积分下》

课时一 多元函数与重极限

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 多元函数定义域	★★★	$0\sim3$	选择、填空
2. 多元函数重极限			

1. 多元函数定义域

题 1. 函数 $f(x,y)=\dfrac{\arcsin(5-x^2-y^2)}{\sqrt{x-y^2}}$ 的定义域为________。

解：$\begin{cases}-1\le 5-x^2-y^2\le 1\\ x-y^2>0\end{cases} \Rightarrow \left\{(x,y)\,|\,4\le x^2+y^2\le 6, x<y^2\right\}$

2. 多元函数重极限

题 1. 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{xy+9}-3}{xy}=$___ ____。

解：$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{xy+9}-3}{xy}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(\sqrt{xy+9}-3)(\sqrt{xy+9}+3)}{xy(\sqrt{xy+9}+3)}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{xy(\sqrt{xy+9}+3)}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{\sqrt{xy+9}+3}=\frac{1}{6}$$

题 2. 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\sqrt{1+x^2y}-1}{e^{xy}-1}$。

解：$$\lim_{(x,y)\to(2,0)}\frac{\sqrt{1+x^2y}-1}{e^{xy}-1}=\lim_{(x,y)\to(2,0)}\frac{\frac{1}{2}x^2y}{xy}=\lim_{(x,y)\to(2,0)}\frac{1}{2}x=1$$

等价无穷小公式：

$x\to0$ 时

1） $x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1$

2） $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$1-\cos^a x\sim\dfrac{a}{2}x^2$

3） $(1+x)^a-1\sim ax$，$\sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{1}{2}x$

题 3. 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=$ ________ 。

解： $(x,y)\to(0,0)$，$x^2+y^2\to 0$，$\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$ 有界，故原式 $=0$

题 4. 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{3x-y}{5x-2y}$ 不存在。

证明：取路径：$y=\dfrac{5}{2}x$，

$$\text{则}\ \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{3x-y}{5x-2y}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=\frac{5}{2}x}}\frac{3x-\frac{5}{2}x}{5x-5x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=\frac{5}{2}x}}\frac{\frac{1}{2}x}{0}\quad\text{不存在}$$

沿一条路径趋近，极限不存在，故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{3x-y}{5x-2y}$ 不存在

题 5. 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$，问 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 是否存在？

解：取路径：$y=x$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}}\frac{x\cdot x}{x^2+x^2}=\frac{1}{2}$$

取路径：$y=-x$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}}\frac{x\cdot(-x)}{x^2+(-x)^2}=-\frac{1}{2}$$

沿不同路径趋近，极限值不相等，故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在

判断极限不存在的方法通常有两个：

①找一条路径，极限不存在。

②找两条路径，极限不相等

课时一 练习题

1. 函数 $z=\ln(y^2-2x+1)$ 的定义域为________。

2. 二元函数 $z=\sqrt{\ln\frac{4}{x^2+y^2}}+\arcsin\frac{1}{x^2+y^2}$ 的定义域为________。

3. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{3-\sqrt{9+xy}}{xy}=$________ 。

4. 计算 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=$________ 。

5. $\lim\limits_{\substack{x\to2\\y\to0}}\frac{\tan(xy)}{y}=$________

6. 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to2}}\frac{\ln(1+xy^2)}{x}=$________

$A.0$　　　　$B.1$　　　　$C.2$　　　　$D.4$

7. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}[\frac{\sin(xy)}{y}+\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}]=$________

8. 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+xy}{1+xy}$________

$A.$存在但不等于 0　　$B.$存在且等于 0　　$C.$不存在　　$D.$以上结论都不正确

9. 下列选项中极限存在的是（　　）

$A.\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{x^2+y^2}$　　$B.\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}$　　$C.\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}$　　$D.\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy^2}{x^2+y^2}$

注：练习题答案在文档最后

课时二 偏导数与全微分

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 偏导数	必考	6～10	选择、填空、大题
2. 高阶导数			
3. 全微分			
4. 偏导、连续、可微之间的关系	★★★	0～3	选择、填空

1. 偏导数【$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial x}$，$z_x$，$f_x(x,y)$，$f'_x(x,y)$】

求导公式：

$(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$

$(e^x)' = e^x$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(a^x)' = a^x \ln a$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \sec^2 x$

$(\cot x)' = -\csc^2 x$

$(\sec x)' = \sec x \tan x$

$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$

题 1. $z=3x^2y^3+4x^2-2y+6$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=6xy^3+8x$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=9x^2y^2-2$$

题 2. 设 $f(x,y)=x^2e^y+\arctan\frac{y}{x}$，则偏导数 $f_x(1,0)=$________

法一：$f_x=2xe^y+\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=2xe^y-\frac{y}{x^2+y^2}\Big|_{(1,0)}=2$

法二：$f(x,0)=x^2$，$f_x=2x\big|_{x=1}=2$

题 3. $\left.\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=(\quad)$

$A.\ \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$　　$B.\ \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$

$C.\ \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)}{\Delta x}$　　$D.\ \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)}{\Delta x}$

答案：B

偏导数定义公式：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}=\lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}$$

题 4. 设函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处偏导数存在，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}=$ ________

$A.\ f_x'(x_0,y_0)$　　$B.\ 2f_x'(x_0,y_0)$　　$C.\ f_y'(x_0,y_0)$　　$D.\ 2f_y'(x_0,y_0)$

答案：B　　解析：$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}=\dfrac{x_0+2h-x_0}{h}f_x'(x_0,y_0)=2f_x'(x_0,y_0)$

2. 高阶偏导数

题 1. $z=x^4+y^4-4x^2y^2$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=4x^3-8xy^2$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2-8y^2$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-16xy$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=4y^3-8yx^2$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=12y^2-8x^2$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-16xy$

注意：

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 在区域 D 内连续，

则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$

3. 全微分

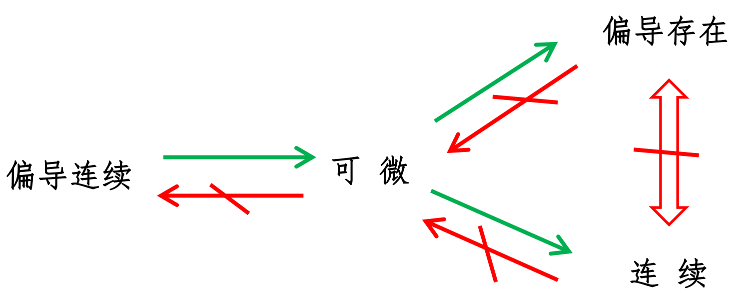
题 1. $z=\arctan\frac{y}{x}$，求 $dz\big|_{(1,1)}$

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot(-\frac{y}{x^2})=-\frac{y}{x^2+y^2}\Big|_{(1,1)}=-\frac{1}{2}$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}\Big|_{(1,1)}=\frac{1}{2}$$

$$dz=-\frac{1}{2}dx+\frac{1}{2}dy$$

4. 偏导、连续、可微之间的关系



题 1. 考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面四条性质：

（1） $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续

（2） $f_x(x,y),f_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续

（3） $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微

（4） $f_x(x,y),f_y(x,y)$ 存在

若用“$P\Rightarrow Q$”表示可由性质 P 推出性质 Q，则下列四个选项中正确的是（　　）

$A.\,(2)\Rightarrow(3)\Rightarrow(1)$　　$B.\,(3)\Rightarrow(2)\Rightarrow(1)$　　$C.\,(3)\Rightarrow(4)\Rightarrow(1)$　　$D.\,(3)\Rightarrow(1)\Rightarrow(4)$

答案：A

课时二 练习题

1. 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处存在对 x,y 偏导数，则 $f'_x(x_0,y_0)=(\quad)$

$A.\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0)-f(x_0-\Delta x,y_0)}{\Delta x}$　　$B.\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-2\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$

$C.\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$　　$D.\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x,y)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$

2. 函数 $z=y^x$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$

3. 设 $z=\sin(xy)+\cos^2(xy)$，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)}=$ _______

4. 函数 $z=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$，求 $z_x(1,1),z_y(1,1)$

5. 设 $z=xy+\dfrac{x}{y}$，则 $dz=$ _______

6. 设 $z=\arctan\dfrac{x}{y}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 及 dz

7. 设 $u=e^{xy^2z^3}$，则 $du=$ _______

8. 函数 $z=\ln(2+x^2+y^2)$ 在 $x=2,y=1$ 时的全微分。

9. 设 $z=e^x\sin(x+y)$，则 $\left.dz\right|_{(0,\pi)}=(\quad)$

$A.-dx+dy$　　$B.dx-dy$　　$C.-dx-dy$　　$D.dx+dy$

10. 求函数 $z=\sqrt{\dfrac{x}{y}}$ 的全微分。

11. 已知函数 $f'_x(a,b)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x+a,b)-f(a-x,b)}{x}=(\quad)$

$A.-f'_x(a,b)$　　$B.2f'_x(a,b)$　　$C.f'_x(a,b)$　　$D.\dfrac{1}{2}f'_x(a,b)$

12. 函数 $f(x,y)$ 偏导数存在，且 $f_x(0,0)=1$, $f_y(0,0)=-2$ ，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=$ ______

13. 求函数 $z=4x^3-xy+e^y$ 的二阶偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$

14. 求函数 $z=e^x\ln y+\sin y\cdot\ln x$ 的二阶偏导数

15. 设二元函数 $z=y^2\cos 2x$ ，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ ______

16. 下列有关多元函数命题错误的是（　　）

A. 函数可微是连续的充分条件　　　　B. 函数可微则偏导数必定存在

C. 偏导数存在是可微的必要条件　　　D. 偏导数存在是连续的充分条件

17. 若用 “$P\Rightarrow Q$”表示可由性质 P 推出性质 Q ，考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面 5 条性质：$f(x,y)$ 在点 x_0,y_0 处：①连续；②两个偏导数存在；③可微；④两个偏导数连续；⑤极限存在，则有（　　）

A. ④⇒③⇒②⇒⑤　　　　B. ②⇒③⇒⑤⇒①

C. ③⇒②⇒⑤⇒①　　　　D. ④⇒③⇒①⇒⑤

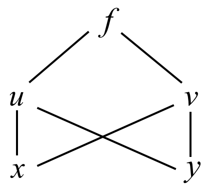
课时三　复合函数、隐函数

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 复合函数求偏导	必考	6~10	大题
2. 隐函数求偏导			

1. 复合函数求偏导

题 1. 设 $z=u^2\ln v$，而 $u=\dfrac{x}{y}$， $v=3x-4y$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

解： $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}$



$$=2u\ln v\cdot\frac{1}{y}+\frac{u^2}{v}\cdot 3=\frac{2u}{y}\ln v+\frac{3u^2}{v}$$

$$=\frac{2x}{y^2}\ln(3x-4y)+\frac{3x^2}{y^2(3x-4y)}$$

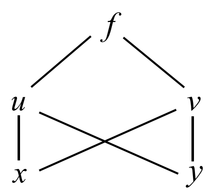
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$=2u\ln v\cdot(-\frac{x}{y^2})+\frac{u^2}{v}\cdot(-4)$$

$$=-\frac{xu}{y^2}\ln v-\frac{4u^2}{v}=-\frac{2x^2}{y^3}\ln(3x-4y)-\frac{4x^2}{y^2(3x-4y)}$$

题 2. $z=f(x^2-y^2,e^{xy})$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

解： $u=x^2-y^2, v=e^{xy}$

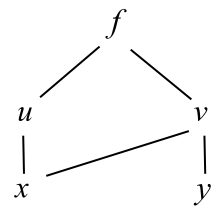


$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=f_1'\cdot 2x+f_2'\cdot ye^{xy}=2xf_1'+ye^{xy}f_2'$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=f_1'\cdot(-2y)+f_2'\cdot xe^{xy}=-2yf_1'+xe^{xy}f_2'$$

题 3. 设 $z=f(x,\frac{x}{y})$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

法一：$z=f(u,v)\qquad u=x,\ v=\frac{x}{y}$



$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=f_1'+\frac{1}{y}f_2'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial x})}{\partial y}=\frac{\partial f_1'}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+(-\frac{1}{y^2})f_2'+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial f_2'}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

f、f_1'、f_2' 具有相同的关系链

$$=f_{12}''\cdot(-\frac{x}{y^2})+(-\frac{1}{y^2})\cdot f_2'+\frac{1}{y}f_{22}''\cdot(-\frac{x}{y^2})$$

$$=-\frac{x}{y^2}f_{12}''-\frac{1}{y^2}f_2'-\frac{x}{y^3}f_{22}''$$

法二：$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=f_2'\cdot(-\frac{x}{y^2})=-\frac{x}{y^2}f_2'$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial y})}{\partial x}=-\frac{1}{y^2}f_2'-\frac{x}{y^2}\cdot(\frac{\partial f_2'}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f_2'}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x})$$

$$=-\frac{1}{y^2}f_2'-\frac{x}{y^2}\cdot(f_{21}''+f_{22}''\cdot\frac{1}{y})$$

$$=-\frac{1}{y^2}f_2'-\frac{x}{y^2}f_{21}''-\frac{x}{y^3}f_{22}''$$

2. 隐函数求偏导

隐函数解题方法：

1）构造函数 $F(x,y,z)$；

2）求 F_x　F_y　F_z

3）$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}$　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_z}$

别忘了负号

题 1. $\sin x+3y-z^3-e^z=6$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$

解：令 $F=\sin x+3y-z^3-e^z-6$

$F_x=\cos x$，　$F_y=3$，　$F_z=-3z^2-e^z$

由公式法得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{\cos x}{3z^2+e^z}\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{3}{3z^2+e^z}$$

题 2. 设 $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$，求 $dz|_{(0,1)}$

解：将 $(0,1)$ 点代入方程得 $z=1$，得这个点 $(0,1,1)$

令 $F=\dfrac{x}{z}-\ln\dfrac{z}{y}=\dfrac{x}{z}-\ln z+\ln y$

$$F_x=\frac{1}{z}\bigg|_{(0,1,1)}=1,\quad F_y=\frac{1}{y}\bigg|_{(0,1,1)}=1,\quad F_z=-\frac{x}{z^2}-\frac{1}{z}=-\frac{x+z}{z^2}\bigg|_{(0,1,1)}=-1$$

由公式法得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=1\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=1,$$

则 $dz=dx+dy$

课时三　练习题

1. $z=e^u\ln v$，且 $u=xy, v=x^2+y^2$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

2. 设$z=u\cos v$，而$u=x+y, v=xy$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

3. $z=f(\dfrac{y}{x},x)$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

4. 设$z=xf(y,xy)$，其中f具有二阶连续偏导数，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

5. $z=f(x^2+y^2, e^{xy})$，其中$f(u,v)$一阶偏导数连续，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

6. 设$z=xy+xf(\dfrac{y}{x})$，且$f(u)$可微，试证：$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy+z$

7. 设$z=z(x,y)$是由方程$x^2+y^2=\ln x-\ln z$确定的隐函数，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

8. 设函数$z=z(x,y)$由方程$e^{x+2y+3z}+xyz=1$确定，计算$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}$，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}$。

9. 设$e^{xy+z}=\sin(xyz)$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

10. 设$\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

11. 设$z=f(x,y)$是由方程$\sin(xyz)-\dfrac{1}{z-xy}=1$所确定，求$dz|_{(0,1)}$。

课时四 梯度、方向导数、多元函数极值

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 梯度、方向导数	★★	0～5	选择、填空
2. 多元函数极值	必考	6～10	大题

1. 梯度、方向导数

题 1. $u=xy^2+yz^3+3$ 在点 $(2,-1,1)$ 处的梯度。

解：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=y^2\Big|_{(2,-1,1)}=1$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=(2xy+z^3)\Big|_{(2,-1,1)}=-3$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=3yz^2\Big|_{(2,-1,1)}=-3$$

$$gradf(2,-1,1)=(1,-3,-3)$$

1. 梯度 $gradf(x_0,y_0)$ 或 $\nabla f(x_0,y_0)$

$$gradf=(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z})$$

（注：各偏导数组成的向量）

题 2. 函数 $u=xy-z^2$ 在点 $P(3,2,-1)$ 处沿方向 $\vec{l}=(2,3,1)$ 的方向导数为________，在点 P 处方向导数的最大值为________。

解：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=y\Big|_{(3,2,-1)}=2$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x\Big|_{(3,2,-1)}=3 \qquad gradf=(2,3,2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-2z\Big|_{(3,2,-1)}=2$$

$$|\vec{l}|=\sqrt{2^2+3^2+1^2}=\sqrt{14} \qquad \vec{e_l}=(\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}})$$

$$\frac{\partial f}{\partial l}=gradf\cdot\vec{e_l}=(2,3,2)\cdot(\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}})=\frac{15}{\sqrt{14}}$$

最大值 $\dfrac{\partial f}{\partial l}\Big|_{\max}=|gradf|=\sqrt{2^2+3^2+2^2}=\sqrt{17}$

2. 方向导数 $\dfrac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(x_0,y_0)}$

①求 P 点的梯度；

②求 l 的单位向量 $\vec{e_l}$；

③ $\dfrac{\partial f}{\partial l}=gradf\cdot\vec{e_l}$

3. 方向导数最大值

$$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{\max}=|gradf|$$

一般极值求解方法：

① 求驻点：$\begin{cases} f'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)=0 \end{cases} \Rightarrow (x_0,y_0)$

驻点：
满足 一阶偏导 同时 为 0 的点

② 求 $A=f''_{xx}$ $B=f''_{xy}$ $C=f''_{yy}$

③ 对每一个驻点 (x_0,y_0) 判定：

$AC-B^2>0$，有极值，且 $A\begin{cases} >0，有极小值 \\ <0，有极大值 \end{cases}$

$AC-B^2<0$，无极值

$AC-B^2=0$，无法判定

2. 多元函数极值

题 1：$f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值 (一般极值)

解：$\begin{cases} f'_x=3x^2+6x-9=0 \\ f'_y=-3y^2+6y=0 \end{cases}$ 得驻点：$(1,0)$，$(1,2)$，$(-3,0)$，$(-3,2)$

$A=f''_{xx}=6x+6$ $B=f''_{xy}=0$ $C=f''_{yy}=-6y+6$

在 $(1,0)$ 点，$AC-B^2=12\times 6=72>0$，有极值，且 $A=12>0$，有极小值 $f(1,0)=-5$

在 $(1,2)$ 点，$AC-B^2<0$，无极值

在 $(-3,0)$ 点，$AC-B^2<0$，无极值

在 $(-3,2)$ 点，$AC-B^2=72>0$，有极值，且 $A=-12<0$，有极大值 $f(-3,2)=31$

选择题中常考知识点：

1. 驻点一定是极值点（×） （若 $AC-B^2<0$，则无极值）
2. 极值点一定是驻点（×） （极值点存在：1. 驻点 2. 一阶导数不存在的点）
3. 可导函数的极值点一定是驻点（√） （去掉了一阶导数不存在的情况）

题 2. 将正数 a 分为三个非负数之和，使它们乘积最大。 （条件极值）

解：设三个数分别为 x,y,z

目标函数： $f = xyz$

条件函数： $x + y + z = a$

注意把 a 移项

构造拉格朗日函数：

$L = xyz + \lambda(x + y + z - a)$

$$\begin{cases} L_x = yz + \lambda = 0 \\ L_y = xz + \lambda = 0 \\ L_z = xy + \lambda = 0 \\ L_\lambda = x + y + z - a = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = z = \frac{a}{3}$$

因为 $(\frac{a}{3},\frac{a}{3},\frac{a}{3})$ 为唯一极值点

故所求乘积最大： $f(x,y,z) = \frac{a}{3}\cdot\frac{a}{3}\cdot\frac{a}{3} = \frac{a^3}{27}$

条件极值求法：

① 确定目标函数 $f(x,y,z)$

② 确定条件函数 $g(x,y,z)$

③ 构造拉格朗日函数

$L = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z)$

$$\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_z = 0 \\ L_\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow (x_0, y_0, z_0)$$

即为所求极值点。

课时四　练习题

1. 求函数 $f(x,y,z)=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 $(1,2,-2)$ 处梯度 $gradf(1,2,-2)=$________ 。

2. 函数 $u=3x^2y^2-2y+4x+6z$ 在原点沿方向 $l=(2,3,1)$ 的方向导数为_________。

3. $z=xe^{2y}$ 在 $P(1,0)$ 到 $K(2,1)$ 的方向导数________。

4. 求函数 $u=e^{xyz}$ 在点 $P_0(1,0,-1)$ 处由 $P_0(1,0,-1)$ 指向 $P_1(2,1,-1)$ 方向的方向导数，并求函数 $u=e^{xyz}$ 在点 $P_0(1,0,-1)$ 处的方向导数的最大值。

5. 求函数 $f(x,y)=4xy-x^2-y^2$ 的极值。

6. 函数 $f(x,y)$ 在开区域 D 内有二阶连续偏导数，且 $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$。记 $A=f_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f_{yy}(x_0,y_0)$，则下列为 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处取极大值的充分条件是（　　）

   $A.\ A<0,\ AC-B^2>0$　　　　$B.\ A>0,\ AC-B^2>0$

   $C.\ A<0,\ AC-B^2<0$　　　　$D.\ A>0,\ AC-B^2<0$

7. 判断题：多元函数的极值点一定是驻点。（　　）

8. 设函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的邻域内偏导数存在，则 $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$ 是 $y=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处取极值的（　　）

   $A.$ 必要但非充分条件　　　　$B.$ 充分但不必要条件

   $C.$ 充分必要条件　　　　$D.$既非充分也非必要条件

9. 某工厂要做一个体积为 $8m^3$ 的无盖长方体容器，已知底面材料的单位造价是侧面材料单价的 2 倍，问怎样设计才能使该长方体容器的造价最低？

10. 周长为 $2P$ 矩形，绕一边旋转一周得到圆柱，求圆柱的体积何时最大？

11. $z=x^3-3x^2-3y^2$ 在 $D: x^2+y^2\le 16$ 上的最大值和最小值。

课时五　向量与空间几何（一）

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 向量的点乘	★★★	$0\sim3$	选择、填空
2. 向量的叉乘	必考	$1\sim3$	选择、填空
3. 空间平面方程	★★★★★	$0\sim7$	大题
4. 空间直线方程			

1. 向量的点乘

向量点乘公式：

$\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$　　$\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$

$|\vec{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$

$\vec{e}_a=\dfrac{1}{|\vec{a}|}(x_1,y_1,z_1)$

平行：$\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}$

垂直：$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$

$\cos\theta=\cos 90^\circ=0$

题 1. 点 $P_1(2,-1,1)$ 和点 $P_2(-4,-1,-7)$ 之间的距离______。

解：$d=\sqrt{(-4-2)^2+(-1+1)^2+(-7-1)^2}=10$

题 2. 向量 $\vec{a}=(0,1,-1)$ 与 $\vec{b}=(1,0,-1)$ 的夹角 $\theta=$______。

解：$|\vec{a}|=\sqrt{0+1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

$|\vec{b}|=\sqrt{1^2+0+(-1)^2}=\sqrt{2}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0\times1+1\times0+(-1)\times(-1)=1$

由 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ 得

$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\theta=\dfrac{\pi}{3}$

题 3. 向量 $\vec{c}=(1,-1,1)$，则与向量 $\vec{c}$ 同向的单位向量为__________。

解：$|\vec{c}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{3}$　　$\vec{e}_c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)=(\dfrac{1}{\sqrt{3}},-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}})$

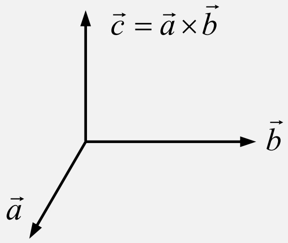
题 4. 给定向量 $\vec{a}=(-1,2,x)$，$\vec{b}=(1,y,-2)$，若 $\vec{a}\parallel\vec{b}$，则 $x+y=$_____。

解：$\vec{a}\parallel\vec{b}$ 可得，$\dfrac{-1}{1}=\dfrac{2}{y}=\dfrac{x}{-2}\Rightarrow x=2$，$y=-2$　　故 $x+y=0$

题 5. 若向量 $\vec{a}=(4,0,2)$，$\vec{b}=(\lambda,2,2)$ 相互垂直，则 $\lambda=$_____。

解：$\vec{a}\cdot\vec{b}=4\lambda+4=0\Rightarrow\lambda=-1$

2. 向量的叉乘



① $\vec{c}\perp\vec{a}$ 且 $\vec{c}\perp\vec{b}$ （即垂直于 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 所在平面）

② $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$

③ $\vec{a}\times\vec{b}$ 经常用于求平面法向量

题 1. 计算 $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$，$\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$，求 $\vec{a}\times\vec{b}$

解：$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -1 & -2\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & -1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\vec{k}=5\vec{i}+\vec{j}+7\vec{k}=(5,1,7)$$

题 2. 已知三个点 $A(1,2,3)$，$B(2,3,4)$，$C(3,4,6)$，则 ΔABC 的面积为__________。

解：$\overrightarrow{AB}=(1,1,1)$ $\quad\overrightarrow{AC}=(2,2,3)$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$$

$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2^2+2^2+3^2}=\sqrt{17}$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times2+1\times2+1\times3=7$$

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{7}{\sqrt{3}\times\sqrt{17}}=\frac{7}{\sqrt{51}}$$

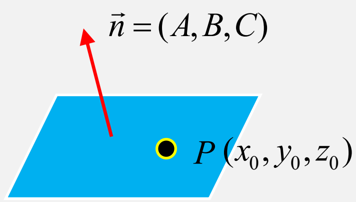
$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\cdot\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{17}\times\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$$=\frac{\sqrt{51}}{2}\times\sqrt{1-\left(\frac{7}{\sqrt{51}}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

3. 空间平面方程

$$\begin{cases} P(x_0,y_0,z_0) \\ \vec{n}=(A,B,C) \end{cases} \Rightarrow A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$ （点法式方程）



化简得 $Ax+By+Cz\underline{-Ax_0-By_0-Cz_0}=0$

$Ax+By+Cz\underline{+D}=0$ （一般式）

题 1. 求过点 $(1,2,4)$，且平行于平面 $3x+2y+z-7=0$ 的平面方程____________。

解：$\vec{n}=(3,2,1)$ ，$P(1,2,4)$

$3(x-1)+2(y-2)+(z-4)=0$

$3x+2y+z-11=0$

题 2. 求过 3 个点 $A(1,1,1)$，$B(-2,-2,2)$ 和 $C(1,-1,2)$ 的平面方程。

解：$\overrightarrow{AB}=(-3,-3,1)$ $\overrightarrow{AC}=(0,-2,1)$ 故 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ 就是该平面的一个法向量。

$$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}=(-1,3,6)$$

平面方程为：$-(x-1)+3(y-1)+6(z-1)=0$

即 $x-3y-6z+8=0$

题 3. 求点 $(1,2,1)$ 到平面 $x+2y+2z-10=0$ 的距离。

解：由距离公式知：

$$d=\frac{|1\times1+2\times2+2\times1-10|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=1$$

点到平面的距离公式：

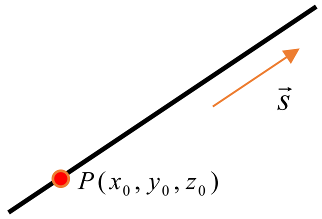
$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

4. 空间直线方程

1）对称式方程

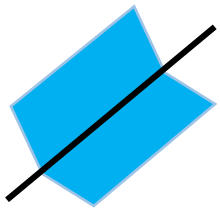
对称式方程

$$\left.\begin{matrix} P(x_0,y_0,z_0) \\ \vec{s}=(A,B,C) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}$$



2）一般式：$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$

两个平面的交线



3）参数方程 $\begin{cases} x=At+x_0 \\ y=Bt+y_0 \\ z=Ct+z_0 \end{cases}$

题 1. 已知平面 $x-y+z+5=0$ 和 $5x-8y+4z+36=0$，求其交线的对称式方程和参数方程。

解：$\begin{cases} x-y+z+5=0 \\ 5x-8y+4z+36=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n}_1=(1,-1,1) \\ \vec{n}_2=(5,-8,4) \end{cases}$

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & -8 & 4 \end{vmatrix}=4\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$$

求出方向向量

令 $y=0 \Rightarrow \begin{cases} x+z+5=0 \\ 5x+4z+36=0 \end{cases}$ 解方程得 $\begin{cases} x=-16 \\ z=11 \end{cases} \Rightarrow (-16,0,11)$ 求出一点

直线方程：$\frac{x+16}{4}=\frac{y}{1}=\frac{z-11}{-3}$

令：$\dfrac{x+16}{4}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-11}{-3}=t$，得参数方程为$\begin{cases}x=4t-16\\y=t\\z=-3t+11\end{cases}$

题 2. 求直线 $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+1}{-1}$ 与平面 $x+y+3z=0$ 的交点坐标。

解：$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+1}{-1}=t$

得$\begin{cases}x=t+2\\y=3t\\z=-t-1\end{cases}$ 代入平面方程得 $t+2+3t+3(-t-1)=0$ $\Rightarrow t=1$

故交点为 $(3,3,-2)$

课时五　练习题

1. 空间两点 $P(2,0,-1)$，$Q(0,5,1)$ 的距离为__________。

2. 已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$，且 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，则 $|\vec{a}+\vec{b}|=($　　$)$

   $A.0$　　$B.\sqrt{7}$　　$C.7$　　$D.1$

3. 设 $\vec{a}=(1,1,-1)$，$\vec{b}=(-1,-1,1)$，则有(　　)

   $A.\vec{a}\,//\,\vec{b}$　　$B.\vec{a},\vec{b}$ 夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$　　$C.\vec{a}\perp b$　　$D.a,b$ 夹角为 $\dfrac{2\pi}{3}$

4. 设向量 $\vec{a}=(\lambda,-3,2)$ 和 $\vec{b}=(1,2,-\lambda)$ 垂直，则 $\lambda=$__________。

5. 设 $\vec{a}=(3,-1,-2)$，$\vec{b}=(1,2,-1)$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$_________，$\vec{a}\times\vec{b}=$__________。

6. 已知两点 $A(1,0,3)$ 和 $B(2,-1,4)$，O 为坐标原点，则 ΔAOB 的面积为(　　)

   $A.\sqrt{6}$　　$B.\dfrac{\sqrt{14}}{2}$　　$C.\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　$D.\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

7. 平面 $x+\sqrt{26}y+3z-3=0$ 与 xoy 面夹角为(　　)

$A.\dfrac{\pi}{4}$　　　　$B.\dfrac{\pi}{3}$　　　　$C.\dfrac{\pi}{6}$　　　　$D.\dfrac{\pi}{2}$

8. 求通过 $M(1,2,3)$，$N(1,1,1)$，$O(1,0,2)$ 三点的平面方程。

9. 点 $(2,1,1)$ 到平面 $x+y-z+1=0$ 的距离为________。

10. 求直线 $\begin{cases} x-5y+2z-1=0 \\ z=2+5y \end{cases}$ 的点向式方程和参数方程。

11. 求过点 $M_1(1,2,1)$ 且平行直线 $\begin{cases} x-5y+2z=1 \\ 5y-z=2 \end{cases}$ 的直线方程为________。

12. 过点 $M_1(1,1,1)$ 与直线 $\begin{cases} x=-t+2 \\ y=3t-4 \\ z=t-1 \end{cases}$ 垂直的平面方程为________。

13. 直线 $L:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-1}{4}$ 与平面 $\pi:6x-2y+8z=7$ 的位置关系是(　　)

$A.$直线 L 与平面 π 平行　　　　$B.$直线 L 与平面 π 垂直

$B.$直线 L 在平面 π 上　　　　$D.$直线 L 与平面 π 只有一个交点，但不垂直

14. 设有直线 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z+8}{1}$ 与 $L_2:\begin{cases} x-y=6 \\ 2y+z=3 \end{cases}$，则 L_1 与 L_2 夹角为(　　)

$A.\dfrac{\pi}{2}$　　　　$B.\dfrac{\pi}{3}$　　　　$C.\dfrac{\pi}{4}$　　　　$D.\dfrac{\pi}{6}$

15. 求直线 $\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y+2}{-2}=z$ 与平面 $x+2y+2z+6=0$ 的交点。

课时六 向量与空间几何（二）

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 空间曲面及其方程	★★	$0\sim3$	选择、填空
2. 空间曲面的法线与切平面	★★★★	$3\sim5$	大题
3. 空间曲线的切线与法平面			

1. 空间曲面及其方程

题 1. 将 xoy 坐标面上的双曲线 $4x^2-9y^2=36$ 绕 x 轴旋转一周，所生成的旋转曲面方程____________。

解：$4x^2-9(y^2+z^2)=36$

题 2. 方程 $x^2+y^2=4$ 在空间直角坐标系中表示（　　）

$A.$ 圆　　$B.$ 圆柱面　　$C.$ 点　　$D.$ 旋转抛物面

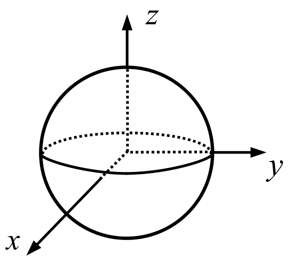
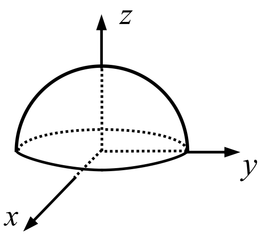
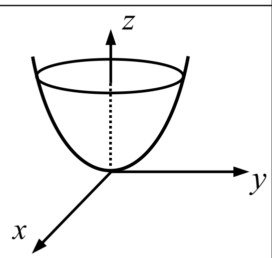
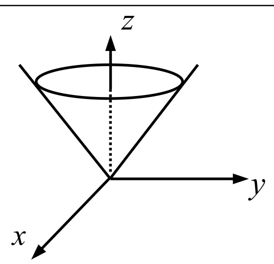
答案：$B.$

题 3. 曲线 $\Gamma:\begin{cases} z=x^2+2y^2 \\ z=2-x^2 \end{cases}$ 在 xoy 平面上的投影方程是____________。

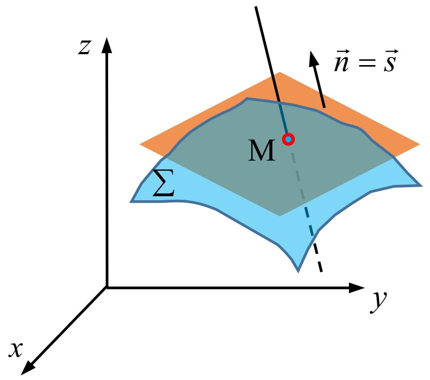
解：联立 $\begin{cases} z=x^2+2y^2 \\ z=2-x^2 \end{cases}$ 消 z　可得 $2-x^2=x^2+2y^2$

整理 $x^2+y^2=1$

★常用空间曲面（必考，必须记住，而且要会画）

$x^2+y^2+z^2=R^2$	$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$	$z=x^2+y^2$	$z=\sqrt{x^2+y^2}$
			

2. 空间曲面的法线与切平面



M 点求出的切平面的法向量 $\vec{n}$ 即是法线的方向向量 $\vec{s}$

题 1. 求 $2e^z - z + xy = 4$ 在点 $(2,1,0)$ 处的切平面与法线

法向量和方向向量求法：

① 构造 F

② 求 F_x, F_y, F_z

③ $\vec{n}=\vec{s}=(F_x, F_y, F_z)$

解： 设 $F = 2e^z - z + xy - 4$

$$\text{则}\begin{cases} F_x = y = 1 \\ F_y = x = 2 \\ F_z = 2e^z - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \vec{s}=\vec{n}=(1,2,1)$$

即切平面为 $(x-2)+2(y-1)+z=0$　　　法线为 $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=z$

3. 空间曲线的切线与法平面

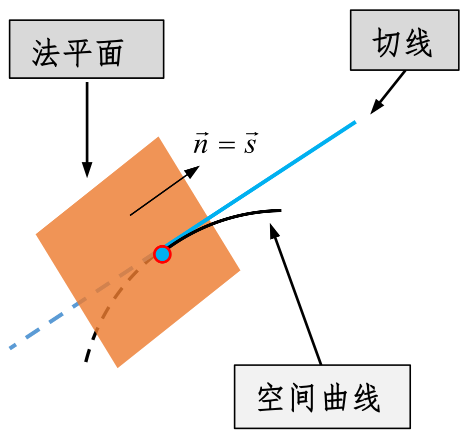
题 1. 求曲线 $x=t, y=2t^2, z=3t^2+t$ 在 $t=1$ 处的切线和法平面

解：当 $t=1$ 时，得点 $P(1,2,4)$

$$\begin{cases} x' = 1 \\ y' = 4t = 4 \\ z' = 6t + 1 = 7 \end{cases} \qquad \text{则 } \vec{s}=\vec{n}=(1,4,7)$$

故切线为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-4}{7}$

法平面为 $(x-1)+4(y-2)+7(z-4)=0$



题 2. 求曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3x \\ 2x-4y+6z=-4 \end{cases}$在$M_0(1,1,1)$处的切线方程和法平面方程。

解：$F=x^2+y^2+z^2-3x$

$F_x=2x-3\big|_{(1,1,1)}=-1$

$F_y=2y\big|_{(1,1,1)}=2$

$F_z=2z\big|_{(1,1,1)}=2$

$\vec{n}_1=(-1,2,2)$

$\vec{n}_2=(2,-4,6)$

$$\vec{s}=\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 6 \end{vmatrix}=(20,10,0)$$

切线方程：$\begin{cases} \dfrac{x-1}{20}=\dfrac{y-1}{10} \\ z-1=0 \end{cases}$

法平面方程：$20(x-1)+10(y-1)=0$

整理　$2x+y-3=0$

课时六　练习题

1. 将 xoy 坐标面上的椭圆 $x^2+4y^2=9$ 绕 y 轴旋转一周所得的旋转曲面方程为__________。

2. 面 yoz 的抛物线 $y^2=3z$ 绕 z 轴旋转一周所生成的旋转曲面为__________。

3. 曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 是由（　　）

   $A.$ xoz 平面上曲线 $z=x$ 绕 z 轴旋转而成

   $B.$ yoz 平面上曲线 $z=|y|$ 绕 z 轴旋转而成

   $C.$ xoz 平面上曲线 $z=x$ 绕 x 轴旋转而成

   $D.$ yoz 平面上曲线 $z=|y|$ 绕 y 轴旋转而成

4. 空间直角坐标系中，方程 $y=x^2$ 表示（　　）

   $A.$椭球面　　$B.$圆柱面　　$C.$抛物线　　$D.$抛物柱面

5. 方程 $x^2+y^2=4$ 在空间解析几何中表示__________。

6. 曲线 r：$\begin{cases}\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{5}=1\\ x-2z+3=0\end{cases}$，关于 xoy 面的投影柱面方程为（　　）

   $A.$ $x^2+20y^2-24x-116=0$　　$B.$ $4y^2+4z^2-16z-9=0$

   $C.$ $\begin{cases}x^2+20y^2-24x-116=0\\ z=0\end{cases}$　　$D.$ $\begin{cases}4y^2+4z^2-16z-9=0\\ x=0\end{cases}$

7. 求曲面 $x^2-y^2-z^2+1=0$ 在点 $M(4,2,1)$ 处的切平面与法线方程。

8. 求曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $2x+4y-z=0$ 平行的切平面的方程。

9. 过曲线 $\begin{cases}x=t^2+2t-2\\ y=e^t+t\\ z=2t-1\end{cases}$ 上对应 $t=0$ 的点切线与法平面方程。

10. 求曲线 $\begin{cases}2x^2+3y^2+z^2=9\\ z^2=3x^2+y^2\end{cases}$ 在点 $M_0(1,-1,2)$ 处的切线及法平面方程。

课时七 二重积分—直角坐标系

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 直角坐标下计算	必考	10～15	大题
2. 极坐标下计算			

1. 直角坐标系下计算

记作：$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ $f(x,y)$ 被积函数 $d\sigma=dxdy$ 面积元素 D 为积分区

直角坐标系下计算二重积分步骤：

1）画出区域 D 的图形

2）写出 x，y 的范围（重点）

3）代入计算（注：被积函数保留至第三步计算）

x 型

x：$x_{左}\to x_{右}$ (常数 $\to$ 常数)

y：$y_{下}\to y_{上}$ (函数 $\to$ 函数)

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_{x_{左}}^{x_{右}}dx\int_{y_{下}=f(x)}^{y_{上}=f(x)}f(x,y)dy$$

y 型

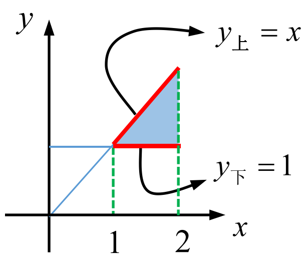
y：$y_{下}\to y_{上}$ (常数 $\to$ 常数)

x：$x_{左}\to x_{右}$ (函数 $\to$ 函数)

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_{y_{下}}^{y_{上}}dy\int_{x_{左}=f(y)}^{x_{右}=f(y)}f(x,y)dx$$

题 1. 计算 $\iint\limits_D xydxdy$，其中 D 的 $y=1$，$x=2$，$y=x$ 围成.

1. 画出区域 D　　2. 写范围　　3. 代入计算

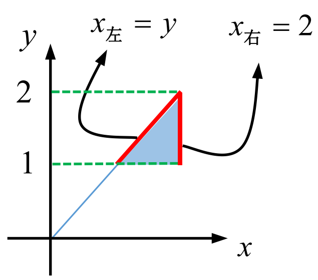


x 型：

$x:1\to 2$

$y:1\to x$

$$\iint\limits_D xydxdy=\int_1^2 dx\int_1^x xydy=\int_1^2\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x\right)dx=\frac{9}{8}$$



y 型：

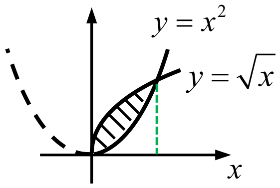
$y:1\to 2$

$x:y\to 2$

$$\iint\limits_D xydxdy=\int_1^2 dy\int_y^2 xydx=\int_1^2\left(2y-\frac{1}{2}y^3\right)dy=\frac{9}{8}$$

题 2. 写区域范围专项练习：计算 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$

（1） D 为 $y=x^2$ 与 $y=\sqrt{x}$ 围成

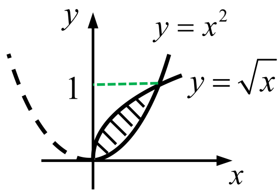


x 型：

$x:0\to 1$

$y:x^2\to\sqrt{x}$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$$



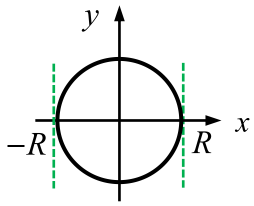
y 型：

$x:y^2\to\sqrt{y}$

$y:0\to 1$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_0^1 dy\int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$$

（2） D 为 $x^2+y^2=R^2$ 围成

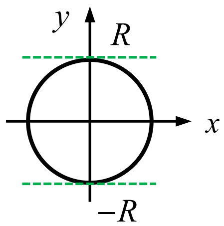


x 型：

$x:-R\to R$

$y:-\sqrt{R^2-x^2}\to\sqrt{R^2-x^2}$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_{-R}^{R} dx\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)dy$$



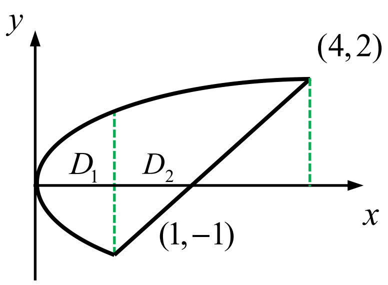
y 型：

$y:-R\to R$

$x:-\sqrt{R^2-y^2}\to\sqrt{R^2-y^2}$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_{-R}^{R} dy\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x,y)dx$$

（3） D 为 $y^2=x$， $y=x-2$ 围成

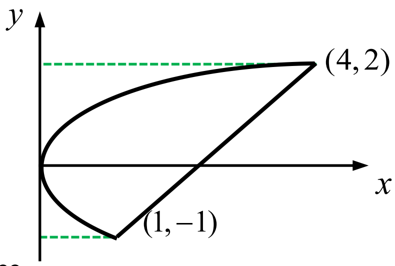


x 型：

$$D_1:\begin{cases}x:0\to 1\\ y:-\sqrt{x}\to\sqrt{x}\end{cases}$$

$$D_2:\begin{cases}x:1\to 4\\ y:x-2\to\sqrt{x}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}&\iint\limits_D f(x,y)dxdy\\ &=\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy+\iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy\\ &=\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy+\int_1^4 dx\int_{x-2}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy\end{aligned}$$



y 型：

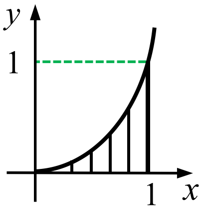
$$D:\begin{cases}y:-1\to 2\\ x:y^2\to y\end{cases}$$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_{-1}^{2} dy\int_{y^2}^{y+2} f(x,y)dx$$

题 3. 交换下列二次积分的积分次序.

① $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy$　　　② $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)dy$

解： ①

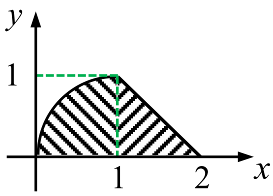


$y:0\to 1$

$x:\sqrt{y}\to 1$

原式 $=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1 f(x,y)dx$

②



$y:0\to 1$

$x:1-\sqrt{1-y^2}\to 2-y$

原式 $=\int_0^1 dy\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y} f(x,y)dx$

题 4. 计算 $\iint\limits_D(\dfrac{xy^2\cos x}{\sqrt{x^2+y^2}}+2)dxdy$，其中 D 由 $x^2+y^2=1$ 围成.

解：$\iint\limits_D(\dfrac{xy^2\cos x}{\sqrt{x^2+y^2}}+2)dxdy=\iint\limits_D\dfrac{xy^2\cos x}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy+\iint\limits_D 2dxdy$

$$=\iint\limits_D 2dxdy=2\iint\limits_D dxdy=2\cdot\pi\cdot 1^2=2\pi$$

1） 若被积函数 $f(x,y)=1$，则 $\iint\limits_D dxdy=A$（区域 D 的面积）

2） $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\begin{cases}0 & D\text{关于}x/y\text{轴对称，}f(x,y)\text{关于}y/x\text{为奇}\\ 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy & D\text{关于}x/y\text{轴对称，}f(x,y)\text{关于}y/x\text{为偶}\end{cases}$

题 5. 环形区域 $D\left\{(x,y)\big|1\le x^2+y^2\le 4\right\}$，设 $I_1=\iint\limits_D(x^2+y^2)d\sigma$，$I_2=\iint\limits_D(x^2+y^2)^2d\sigma$，则（　）

$A.I_1<I_2$　　$B.I_1>I_2$　　$C.I_1=I_2$　　$D.I_1\ge I_2$

答案：$A.$　　若在区域 D 上，$f(x,y)\le g(x,y)$，则 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy\le\iint\limits_D g(x,y)dxdy$

课时七 练习题

1. 求$\iint\limits_D x\sqrt{y}d\sigma$，$D$是由$y=\sqrt{x}$，$y=x^2$所围成的封闭区域.

2. 计算$\iint\limits_D xydxdy$，其中D是由$y=x$，$xy=1$，$x=3$所围成的封闭区域.

3. 计算$\iint\limits_D xydxdy$，其中D是由$y^2=x$，$y=x-2$所围成的封闭区域.

4. 交换下列积分次序：

①$\int_1^3 dx\int_0^{x-1} f(x,y)dy$ ②$\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)dy$ ③$\int_0^1 dy\int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$

5. 求$I=\iint\limits_D \frac{\sin x}{x}dxdy$，其中$D$是由$y=2x$，$x=2y$及$x=2$所围成的封闭区域.

6. 求$\iint\limits_D e^y dxdy$，其中D是由$y=x$，$y=1$及y轴所围成的封闭区域.

7. 设区域D为$|x|\le 2$，$|y|\le 1$，则$\iint\limits_D (1+x^2y)dxdy=$________

8. 设$D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le 4x\right\}$，则二重积分$\iint\limits_D 2dxdy=$________

9. 设D是xoy面上以$(1,1)$，$(-1,1)$，$(-1,-1)$为顶点的三角形区域，D_1是D中在第一象限的部分，则积分$\iint\limits_D (x^3y+\cos^3 x\sin y)d\sigma=(\quad)$

$A.2\iint\limits_{D_1}\cos^3 x\sin yd\sigma$ $B.2\iint\limits_{D_1}x^3yd\sigma$ $C.4\iint\limits_{D_1}(\cos^3 x\sin y+x^3y)d\sigma$ $D.0$

10. 设$I_k=\iint\limits_D (x+y)^k d\sigma\ (k=1,2,3)$，其中$D=\left\{(x,y)\middle|(x-2)^2+(y-1)^2\le 1\right\}$，则$I_1,I_2,I_3$间的大小关系是（ ）

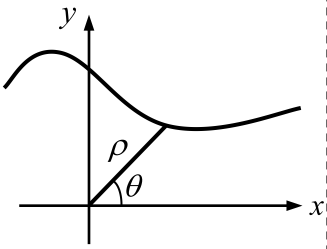
$A.I_1<I_2<I_3$ $B.I_2<I_1<I_3$ $C.I_2<I_3<I_1$ $D.I_3<I_2<I_1$

课时八　二重积分—极坐标

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 直角坐标下计算	必考	10～15	大题
2. 极坐标下计算			

2. 极坐标系下计算

补充知识点：极坐标



1）什么是极坐标？

① 用 θ 和 ρ 表示的函数

② ρ 是原点到函数上点的长度

③ θ 是和 x 轴的夹角

2）直角坐标转化极坐标

令 $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$　例 $x^2+y^2=4$

$\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta=4$

得 $\rho=2$（极坐标）

极坐标求解：

① 画出区域 D → 根据直角坐标方程画图

②写出 θ 和 ρ 范围：

$\theta:\theta_1\to\theta_2$（常数） → θ 的范围覆盖且只能覆盖区域 D

ρ：$\rho_1(\theta)\to\rho_2(\theta)$（函数） → ρ 必须从原点出发

② 代入公式

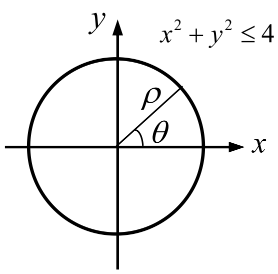
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_{\theta_1}^{\theta_2}d\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$$

被积函数 x,y　用 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 替换

不要忘了这里的 ρ 因子

题 1：求 $\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中 D 为 $x^2+y^2\le4$

解：①画出区域 D



②写出 θ 和 ρ 范围

$\theta:0\to2\pi$

（覆盖整个圆区域）

$\rho:0\to2$

（任意角度 θ，画出 ρ）

③利用公式带入计算

$$\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

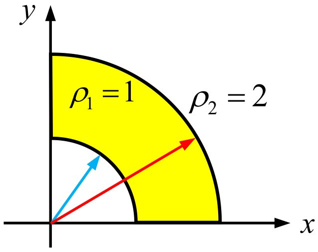
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\sqrt{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta}\rho d\rho$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho^2d\rho=\int_0^{2\pi}\frac{8}{3}d\theta$$

$$=\frac{16\pi}{3}$$

题 2. 求 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$， D 为 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2=4$ 围成的第一象限的部分.

解：①画出区域 D　　②写出 θ 和 ρ 范围　　③代入公式计算

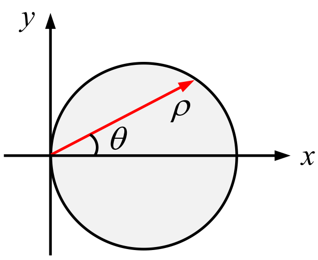


$$\theta: 0 \to \frac{\pi}{2}$$
$$\rho: 1 \to 2$$

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy =$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^2 \sqrt{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta}\rho d\rho$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^2 \rho^2 d\rho \ =\frac{7\pi}{6}$$

题 3. 求 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$，$D$ 为 $(x-1)^2+y^2=1$ 围成的区域.

解：①画出区域 D　　②写出 θ 和 ρ 范围　　③代入公式计算

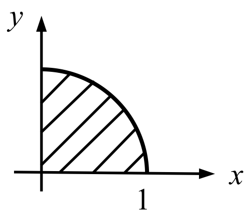


$$\theta: -\frac{\pi}{2} \to \frac{\pi}{2}$$
$$\rho: 0 \to 2\cos\theta$$

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho\cdot\rho d\rho$$
$$=\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta$$
$$=\frac{32}{9}$$

题 4. 积分 $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}dy$ 化为极坐标形式为____________.

解：①画出区域 D　　②写出 θ 和 ρ 范围　　③化为极坐标形式

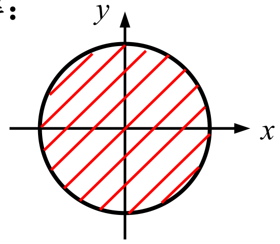


$$\theta: 0 \to \frac{\pi}{2}$$
$$\rho: 0 \to 1$$

$$\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}dy$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \rho\cdot\rho d\rho$$

题 5. 设 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$，则 $\iint\limits_D (y^2-3x+6y+9)d\sigma=$ ________.

解：



$\theta:0\to\dfrac{\pi}{2}$

$\rho:0\to 1$

$$原式=\iint\limits_D y^2 d\sigma+9\iint\limits_D d\sigma$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_D (x^2+y^2)d\sigma+9D$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 \rho^2\cdot\rho d\rho+9\pi=\frac{37}{4}\pi$$

若 D 关于 $y=x$ 对称，则 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_D f(y,x)dxdy$，

故 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_D [f(x,y)+f(y,x)]dxdy$

课时八　练习题

1. 求 $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy$，其中 D 为 $x^2+y^2\le a^2$ 围成的区域.

2. 计算 $I=\iint\limits_D (x^2+y^2)d\sigma$，其中 D 是由 $x^2+y^2=4$, $y=0$ 及 $y=x$ 所围成的封闭区域.

3. 计算 $\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中 D 是由圆环形闭区域：$\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2$.

4. 计算二重积分 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中 $D=\{(x,y)|0\le x\le 2a, 0\le y\le\sqrt{2ax-x^2}\}$.

5. 求 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中 D 为 $x^2+(y-1)^2=1$ 围成的区域.

6. 设有区域 $D=\{(x,y)|1\le x^2+y^2\le 4\}$，则 $\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy=$ (　　)

   $A.\,2\pi\int_1^2 rf(r^2)dr$　　　$B.\,2\pi\int_1^2 rf(r^2)dr-2\pi\int_1^2 rf(r)dr$

   $C.\,2\pi\int_1^2 rf(r)dr$　　　$D.\,2\pi\int_1^2 rf(r)dr-2\pi\int_1^2 rf(r^2)dr$

7. 设 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$，则 $\iint\limits_D (x^2-y)dxdy=$ ________

8. 计算 $\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}(x^2+5y^2-3xy+2x-y)dxdy=$ ________

课时九　三重积分

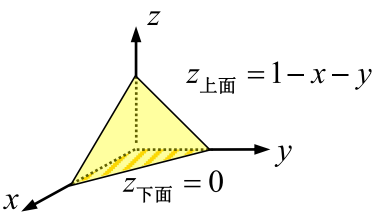
考点	重要程度	分值	常见题型
1. 直角坐标下计算	必考	10～15	大题
2. 柱坐标下计算			
3. 球坐标下计算	★★★	0～8	大题

1. 直角坐标下计算

记作：$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$　　$f(x,y,z)$是被积函数，Ω为积分区域，$dv=dxdydz$

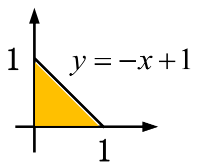
题 1. 计算$\iiint\limits_{\Omega}(x+y)dv$，其中$\Omega$为平面，$x=0,y=0,z=0,x+y+z=1$在第一象限部分.

①画出立体图，确定z的范围



$z:0\to 1-x-y$

②投影到xoy面，确定x和y的范围



$x:0\to 1$
$y:0\to 1-x$

③代入计算

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+y)dv=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}(x+y)dz$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x+y)(1-x-y)dy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x-x^2-2xy+y-y^2)dy$$

$$=\int_0^1(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6})dx$$

$$=\frac{1}{12}$$

直角坐标下计算：

① 画立体图

确定z的范围（$z_下\to z_上$）

② 投影图

确定区域D的范围（同二重积分）

③ 代入公式

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=$$

$$\int_{x_1}^{x_2}dx\int_{y_1=f(x)}^{y_2=f(x)}dy\int_{z_1=z(x,y)}^{z_2=z(x,y)}f(x,y,z)dz$$

2. 柱坐标下计算

柱坐标下计算：

① 画立体图

确定 z 的范围 $(z_{下} \to z_{上})$

② 投影图确定区域 D

θ 和 ρ 的范围

被积函数 x,y 用 $x=\rho\cos\theta$ ，$y=\rho\sin\theta$ 替换

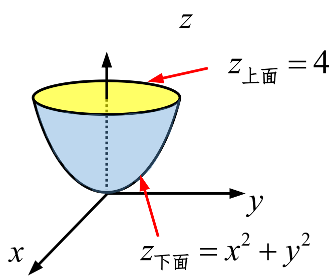
③ 代入公式

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv=\underline{\int_{\theta_1}^{\theta_2}d\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)}\rho d\rho}\int_{z_{下}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)}^{z_{上}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)dz$$

二重积分极坐标

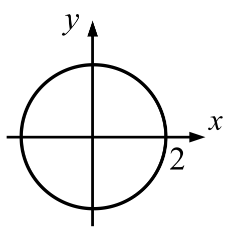
题 1. 计算 $\iiint_{\Omega} zdxdydz$. 其中 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 与曲面 $z=4$ 围成.

① 画出立体图，确定 z 的范围



z: $x^2+y^2 \to 4$

②投影到 xoy 面，确定 θ 和 ρ 的范围



$\theta: 0 \to 2\pi$

$\rho: 0 \to 2$

③代入公式

$$\iiint_{\Omega} zdxdydz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho d\rho\int_{\rho^2}^4 z\,dz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\frac{1}{2}(16-\rho^4)\rho d\rho$$

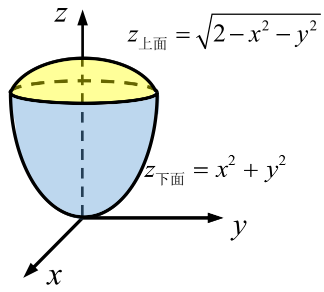
$$=\frac{64}{3}\pi$$

求投影区域的方法：消去 z

$$\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ z=4 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=4$$

题 2. 计算 $\iiint\limits_{\Omega} z dxdydz$. 其中 Ω 是由 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 围成.

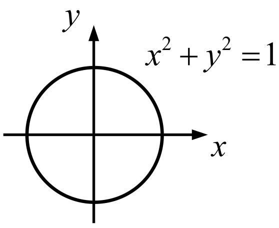
① 画出立体图，确定 z 的范围



z: $x^2+y^2 \to \sqrt{2-x^2-y^2}$

z: $\rho^2 \to \sqrt{2-\rho^2}$

② 投影到 xoy 面，确定 θ 和 ρ 的范围



$\theta: 0 \to 2\pi$
$\rho: 0 \to 1$

③ 代入公式

$$\iiint\limits_{\Omega} z dxdydz$$

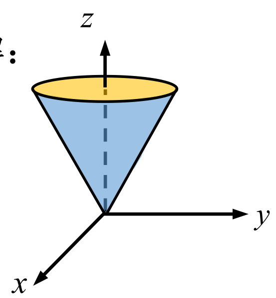
$$=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}} z dz$$

$$=2\pi \int_0^1 \frac{1}{2}\rho(2-\rho^2-\rho^4) d\rho$$

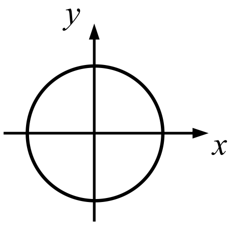
$$=\frac{7\pi}{12}$$

题 3. 计算 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+xy+3)dv$，其中 Ω 是由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及 $z=1$ 围成.

解:



z: $\rho \to 1$



$x^2+y^2=1$

$\theta: 0 \to 2\pi$
$\rho: 0 \to 1$

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+xy+3)dv$$

$$=\iiint\limits_{\Omega} x^2 dv + \iiint\limits_{\Omega} xy dv + 3\iiint\limits_{\Omega} dv$$

$$=\iiint\limits_{\Omega} x^2 dv + 3V$$

$$=\frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv + \pi$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho}^1 \rho^2 dz + \pi$$

$$=\frac{1}{2}\times 2\pi \times \int_0^1 \rho(\rho^2-\rho^3) d\rho + \pi$$

$$=\frac{21}{20}\pi$$

①若 $f(x,y,z)=1$，则 $\iiint\limits_{\Omega} dv = V$（区域Ω的体积）

②$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dv = \begin{cases} 0 & 若\Omega关于xoy/yoz/xoz对称，f(x,y,z)关于z/x/y为奇 \\ 2\iiint\limits_{\Omega'} f(x,y,z)\,dv & 若\Omega关于xoy/yoz/xoz对称，f(x,y,z)关于z/x/y为偶 \end{cases}$$

③若积分区域Ω关于 x,y,z 具有轮换对称性（即 x 换 y， y 换 z， z 换 x， Ω不变）

则 $\iiint\limits_{\Omega} f(x)dv = \iiint\limits_{\Omega} f(y)dv = \iiint\limits_{\Omega} f(z)dv$。

3. 球坐标下计算

球坐标下解题步骤：

① 画立体图

确定 φ 和 r 的范围。（$0 \le \varphi \le \pi$）

② 投影图确定 θ 的范围

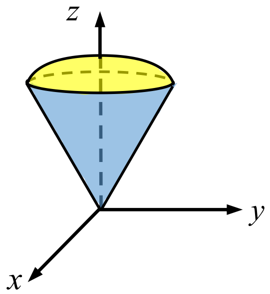
③ 代入公式

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=r^2 \\ x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi,\theta)}^{r_2(\varphi,\theta)} f(r,\varphi,\theta)\, r^2 \sin\varphi dr$$

题 1. 计算三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz$，其中Ω由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 所围成.

解：



$\varphi: 0 \to \dfrac{\pi}{4}$

$\theta: 0 \to 2\pi$

$r: 0 \to \sqrt{2}$

$$I = \iiint\limits_{\Omega} zdxdydz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r\cos\varphi\, r^2 \sin\varphi dr$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\sin 2\varphi d\varphi$$

$$= 2\pi \times \frac{1}{4} \quad = \frac{\pi}{2}$$

课时九 练习题

1. 计算$\iiint\limits_{\Omega} xdxdydz$，其中$\Omega$为三个坐标平面与$x+y+\frac{z}{3}=2$围成.

2. 计算$\iiint\limits_{\Omega} \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$，其中$\Omega$为平面$x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$围成.

3. 求三重积分$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv$，其中$\Omega$是曲面$2z=x^2+y^2$与平面$z=2$所围成的立体.

4. 设空间区域Ω是由曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$和$z=\sqrt{8-x^2-y^2}$所围成，计算三重积分$I=\iiint\limits_{\Omega} zdv$.

5. 求曲面$z=2x^2+y^2$和$z=3-x^2-2y^2$所围成的几何体体积.

6. 已知区域Ω：$x^2+y^2+z^2 \le R^2$，则三重积分$\iiint\limits_{\Omega}(1+xy)dv=$________.

7. 设空间区域$V_1: x^2+y^2+z^2 \le R^2$，$z \ge 0$，$V_2: x^2+y^2+z^2 \le R^2$，$x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$，则有（ ）

$A. \iiint\limits_{V_1} xyzdv = 4\iiint\limits_{V_2} xyzdv$　　$B. \iiint\limits_{V_1} xdv = 4\iiint\limits_{V_2} xdv$

$C. \iiint\limits_{V_1} ydv = 4\iiint\limits_{V_2} ydv$　　$D. \iiint\limits_{V_1} zdv = 4\iiint\limits_{V_2} zdv$

课时十 曲线积分（一）

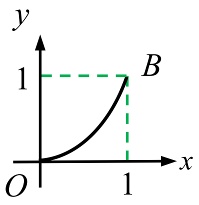
考点	重要程度	分值	常见题型
1. 第一类曲线积分	★★★	0～5	选择、填空、大题
2. 第二类曲线积分			
3. 格林公式	必考	6～10	大题

1. 第一类曲线积分 记作：$\int_L f(x,y)ds$

①画图确定 L 的函数	②计算 ds	③代入公式计算 $\int_L f(x,y)ds$
$y=f(x)$	$ds=\sqrt{1+y'^2(x)}dx$	$=\int_{x_1}^{x_2} f[x,f(x)]\sqrt{1+y'^2(x)}dx \quad (x_1<x_2)$
$x=f(y)$	$ds=\sqrt{1+x'^2(y)}dy$	$=\int_{y_1}^{y_2} f[f(y),y]\sqrt{1+x'^2(y)}dy \quad (y_1<y_2)$
$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$	$ds=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt$	$=\int_{t_1}^{t_2} f[x(t),y(t)]\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt \quad (t_1<t_2)$

题 1. L 是抛物线 $y=x^2$ 上点 $O(0,0)$ 到点 $B(1,1)$ 之间的一段弧，则 $\int_L \sqrt{y}ds=$________.

①画图确定 L



$L: y=x^2$

②计算 ds

$y'=2x$

$ds=\sqrt{1+(2x)^2}dx$

$=\sqrt{1+4x^2}dx$

③代入公式计算

$$\int_L \sqrt{y}ds=\int_0^1 x\cdot\sqrt{1+4x^2}dx$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^1(1+4x^2)^{\frac{1}{2}}d(1+4x^2)$$

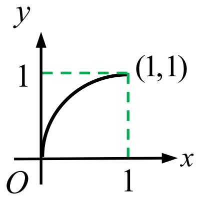
$$=\frac{1}{8}\times\frac{2}{3}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)$$

注：积分区间只论大小，不论起点和终点

题 2. $\int_L \sqrt{x}ds$，其中 L 为抛物线 $x=y^2$ 所从 $(0,0)$ 到 $(1,1)$ 的一段弧

①画图确定 L



$L: x=y^2$

②计算 ds

$L: x'=2y$

$ds=\sqrt{1+(2y)^2}dy$

$=\sqrt{1+4y^2}dy$

③代入公式计算

$$\int_L \sqrt{x}ds=\int_0^1\sqrt{y^2}\sqrt{1+4y^2}\,dy$$

$$=\int_0^1 y\sqrt{1+4y^2}\,dy$$

$$=\frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)$$

题 3. 设 L 为周长为 a 的椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，则 $\oint_L (2xy+3x^2+4y^2)ds=(\quad)$.

$A.12a$　　　　$B.6a$　　　　$C.12$　　　　$D.0$

答案：A　$\oint_L (2xy+3x^2+4y^2)ds=\oint_L (3x^2+4y^2)ds=12\oint_L ds=12a$

第一类曲线积分的性质

1）若 $f(x,y)=1$，则 $\int_L f(x,y)ds=L$（积分曲线的长度）

2）$\int_L f(x,y)ds=\begin{cases}0 & L\text{关于}x/y\text{轴对称，}f(x,y)\text{关于}y/x\text{为奇函数.}\\ 2\int_{L_{正}} f(x,y)\,ds & L\text{关于}x/y\text{轴对称，}f(x,y)\text{关于}y/x\text{为偶函数.}\end{cases}$

题 4. 计算 $\oint_L x^2 ds$，其中 L 为圆周：$x^2+y^2=4$.

解：$\oint_L x^2 ds=\frac{1}{2}\oint_L (x^2+y^2)ds=\frac{1}{2}\oint_L 4ds=2\oint_L ds=2\times 2\pi\times 2=8\pi$

若积分曲线 L 具有轮换对称性：x 换 y，y 换 x，L 不变，

则 $\int_L f(x)ds=\int_L f(y)ds$，即 $\int_L f(x)ds=\frac{1}{2}[\int_L f(x)ds+\int_L f(y)ds]$

课时十　练习题

1. 设 $I=\int_L y^2 ds$，其中 L 为 $y=2x$，$0\le x\le 1$，则 $I=$ ____________.

2. 计算曲线积分 $I=\oint_L xds$，其中 L 为由直线 $y=x$ 及抛物线 $y=x^2$ 所围成的区域的整个边界。

3. 设平面曲线 $L:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$，则 $\oint_L (4x+3y)^2 ds=$ ____________（设曲线长为 a）

4. $L=\{(x,y)\,\big|\,|x|+|y|=1\}$，则由 $\oint_L (xy+|x|)ds=$ ____________

课时十一　曲线积分（二）

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 第一类曲线积分 2. 第二类曲线积分	★★★	0～5	选择、填空、大题
3. 格林公式	必考	6～10	大题

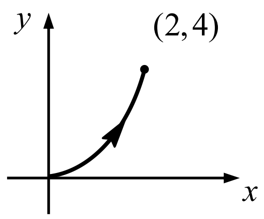
2. 第二类曲线积分

①画图确定 L 的函数	②化变量为统一，计算 $\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$
$y=f(x)$	将 y 换成 x： $=\int_{x_{起}}^{x_{终}}\left\{P\left[x,f(x)\right]+Q\left[x,f(x)\right]\cdot f'(x)\right\}dx$
$x=f(y)$	将 x 换成 y： $=\int_{y_{起}}^{y_{终}}\{P[f(y),y]\cdot f'(y)+Q[f(y),y]\}dy$
$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$	将 x,y 换成 t： $=\int_{t_{起}}^{t_{终}}\{P[x(t),y(t)]\cdot x'(t)+Q[x(t),y(t)]y'(t)\}dt$

记作：$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$

题 1. 计算 $\int_L (x-y)dx+(x+y)dy$，其中 L 从 $(0,0)$ 沿 $y=x^2$ 到 $(1,1)$

解：①画图确定 L



$L: y=x^2$

$x: 0\to 1$

②统一变量代入公式计算

$$\int_L (x-y)dx+(x+y)dy$$

$$=\int_0^1 (x-x^2)dx+(x+x^2)2xdx$$

$$=\int_0^1\left[(x-x^2)+(x+x^2)2x\right]dx$$

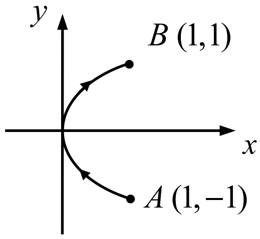
$$=\int_0^1 (x+x^2+2x^3)dx$$

$$=\frac{4}{3}$$

注：积分区间只论起点和终点，不论大小

题 2. 计算$\int_L xydx$，其中L是抛物线$y^2=x$上从$A(1,-1)$到$B(1,1)$上的一段弧

解：①画图确定L



$L: x=y^2$

$y:-1\to 1$

②统一变量代入公式计算

$$\int_L xydx=\int_{-1}^{1} y^2\cdot y\cdot 2ydy=2\int_{-1}^{1} y^4dy=\frac{4}{5}$$

注：没有$Q(x,y)dy$项，默认为0，不用管

课时十一　练习题

1. 计算曲线积分$\int_L (2xy-x^2)dx+(x^2+y)dy$，其中$L$是抛物线$y=x^2$上点$O(0,0)$到点$(1,1)$的一段弧.

2. 计算$\int_L (x^2-\sqrt{y})dy$，其中L是抛物线$y=x^2$上点$O(0,0)$到点$(2,4)$的一段弧.

3. 计算$\int_L ydx+xdy$，其中L为圆周$x=R\cos\varphi$，$y=R\sin\varphi$上由$\varphi=0$到$\varphi=\frac{\pi}{2}$的一段弧.

课时十二 格林公式

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 第一类曲线积分	★★★	$0\sim5$	选择、填空、大题
2. 第二类曲线积分			
3. 格林公式	必考	$6\sim10$	大题

3. 格林公式 （可以看做第二类曲线积分的简便算法）

若积分弧段 L 为 <u>*封闭*</u> 的曲线，则 $\int_L Pdx+Qdy=\pm\iint\limits_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$

1) D 是 L 围成的区域

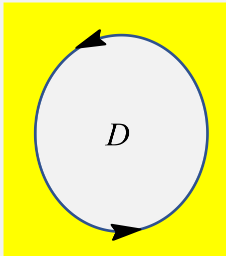
2) 注意 P 和 Q 对应的位置

3) 积分路径有正负

① 人沿 L 方向走，区域 D 在左手一侧则为正，反之为负

② 对于单连通区域（无洞的），逆时针为正，顺时针为负

③ 若积分路径为负，则 $\int_L Pdx+Qdy=-\iint\limits_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$



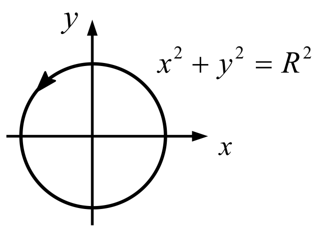
题型 1：常规型

例：计算曲线积分 $\oint_L(2xy-2y)dx+(x^2-4x)dy$，其中 L 为 $x^2+y^2=R^2$，L 为逆时针

解：L 为封闭圆周曲线

$P=2xy-2y \qquad Q=x^2-4x$

$\frac{\partial Q}{\partial x}=2x-4 \qquad \frac{\partial P}{\partial y}=2x-2$



由格林公式得

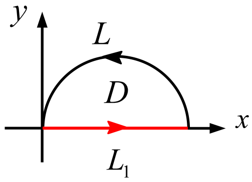
$$\oint_L(2xy-2y)dx+(x^2-4x)dy=\iint\limits_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\iint\limits_D[(2x-4)-(2x-2)]dxdy$$

$$=-2\iint\limits_D dxdy=-2A=-2\pi R^2$$

题型 2：缺线补线型

例：计算 $\int_L (e^x \sin y - 2y)dx + (e^x \cos y - 2)dy$. 其中 L 为逆时针上半圆周 $(x-a)^2 + y^2 = a^2$，$y \geq 0$.

解：补齐有向线段 L_1 ，构成封闭曲线。



$P = e^x \sin y - 2y \qquad Q = e^x \cos y - 2$

$\dfrac{\partial Q}{\partial x} = e^x \cos y \qquad \dfrac{\partial P}{\partial y} = e^x \cos y - 2$

在 $L + L_1$ 上：

$$\oint_{L+L_1} (e^x \sin y - 2y)dx + (e^x \cos y - 2)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$= \iint_D (e^x \cos y - e^x \cos y + 2)dxdy$$

$$= \iint_D 2dxdy = 2 \cdot \frac{1}{2}\pi a^2 = \pi a^2$$

在 L_1 上：

代入 $y=0$，被积函数为 0

$L_1: y = 0$， $x: 0 \to 2a$

$$\int_{L_1} (e^x \sin y - 2y)dx + (e^x \cos y - 2)dy = 0$$

代入 $y=0$ 为常数，故 $dy=0$，含 dy 的项为 0

在 L 上：

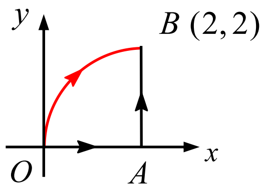
$$\int_L = \oint_{L+L_1} - \int_{L_1} = \pi a^2 - 0 = \pi a^2$$

题型 3：积分与路径无关型

（若 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$，则 $\int_L Pdx + Qdy$ 与积分路径无关，只与起点和终点有关）

例：设 L 为圆周 $y = \sqrt{4x - x^2}$ 从 $(0,0)$ 到 $(2,2)$ 的一段弧，求 $\int_L (x^2 - y)dx - (x + \sin y)dy$.

解：



$P = x^2 - y \qquad Q = -(x + \sin y)$

$\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y} = -1$ 故积分与路径无关

取 $O \to A \to B$ 路径

在 OA 上积分 $OA:\begin{cases} y = 0 \\ x: 0 \to 2 \end{cases} \Rightarrow \int_{OA} (x^2 - y)dx - (x + \sin y)dy = \int_0^2 x^2 dx = \dfrac{8}{3}$

在 AB 上积分 $AB:\begin{cases} x = 2 \\ y: 0 \to 2 \end{cases} \Rightarrow \int_{AB} (x^2 - y)dx - (x + \sin y)dy = \int_0^2 -(2 + \sin y)dy = \cos 2 - 5$

则 $\int_L = \int_{OA} + \int_{AB} = \dfrac{8}{3} + \cos 2 - 5 = \cos 2 - \dfrac{7}{3}$

课时十二 练习题

1. 计算曲线积分 $\oint_L (xy^2 + e^y)dy - (x^2 y + e^x)dx$，其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2\ (a > 0)$，取逆时针.

2. 计算 $\oint_L (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy$，其中 L 由 $y = x^2$ 和 $x = y^2$ 围成，取逆时针方向.

3. 用格林公式计算 $\int_L (x^2 - y)dx - (x + \sin^2 y)dy$，其中 L 是上半圆 $x^2 + y^2 = 2x$ 上从点 $A(2,0)$ 到点 $O(0,0)$ 的一段有向弧.

4. 已知 L 是第一象限中从点 $(0,0)$ 沿圆周 $x^2 + y^2 = 2x$ 到点 $(2,0)$ 的一段弧，求曲线积分 $\int_L 3x^2 ydx + (x^3 + x - 2y)dy$（取逆时针方向为正方向）.

5. 计算 $\int_L (6xy^2 - y^3)dx + (6x^2 y - 3xy^2)dy$，其中 L 为 $(1,2)$ 到 $(3,4)$ 的直线.

6. 计算 $\int_L (2xy^3 - y^2 \cos x)dx + (3x^2 y^2 - 2y\sin x)dy$，其中 L 为抛物线 $2x = \pi y^2$ 上由 $(0,0)$ 到 $(\dfrac{\pi}{2},1)$ 的一段弧.

课时十三 第一类曲面积分

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 第一类曲面积分	★★★★	0～5	选择、填空
2. 第二类曲面积分	必考	6～15	大题
3. 高斯公式			

1. 第一类曲面积分

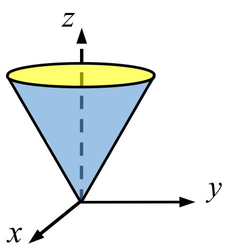
记作：$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS$

题 1. $\iint\limits_{\Sigma} zdS$. 其中 Σ 为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 上对应 $0\le z\le 1$ 的部分

解：

①积分面函数

$\Sigma: z=\sqrt{x^2+y^2}$



②计算 ds

$$z_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad z_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

$$=\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}dxdy=\sqrt{2}dxdy$$

第一类曲面积分解题步骤：

① 确定积分曲面 Σ：$z=z(x,y)$

② 计算 $dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$

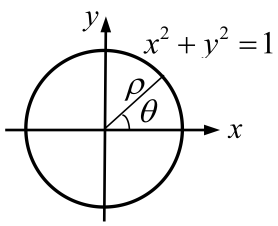
③ 投影确定区域 D_{xy}

④ 代入公式计算

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)ds=$$

$$\iint\limits_{D_{xy}} f\left[x,y,z(x,y)\right]\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

③投影确定区域 D_{xy}



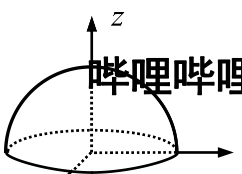
$\theta: 0\to 2\pi$

$\rho: 0\to 1$

④代入公式计算

$$\iint\limits_{\Sigma} zdS=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2}\,dxdy=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho\cdot\rho d\rho=\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$$

题 2. 设曲面 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=a^2\ (z\ge 0)$，则求 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+yz)dS=$ ________ .



$$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y \ldots dS=\frac{1}{3}\iint(x^2+y^2+z^2)dS$$

解：

第一类曲面积分的性质

1）若 $f(x,y,z)=1$ 时，$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS=S$（积分曲面的面积）.

2）$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\begin{cases} 0 & 若\sum关于xoy/yoz/xoz对称，f(x,y,z)关于z/x/y为奇 \\ 2\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS & 若\sum关于xoy/yoz/xoz对称，f(x,y,z)关于z/x/y为偶 \end{cases}$

3）若 $\sum$ 具有轮换对称性（即 x 换 y，y 换 z，z 换 x，$\sum$ 不变），

则 $\iint\limits_{\Sigma} f(x)dS=\iint\limits_{\Sigma} f(y)dS=\iint\limits_{\Sigma} f(z)dS$

课时十三 练习题

1. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS$，其中 $\sum$ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被平面 $z=1$ 所截得的部分.

2. 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} zdS$，其中 $\sum$ 为上半球面 $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$.

3. 求旋转抛物面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 介于 $z=0$ 与 $z=\frac{1}{2}$ 之间的面积.

4. 设 S 为平面 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ 在第一象限的部分，则曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(z+2x+\frac{4}{3}y)dS=$ __________.

5. 设曲面 $\sum$：$x^2+y^2+z^2=a^2$，则 $\oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma}(2x^2+y^2)dS=$ __________.

课时十四　第二类曲面积分

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 第一类曲面积分	★★★★	0～5	选择、填空
2. 第二类曲面积分	必考	6～15	大题
3. 高斯公式			

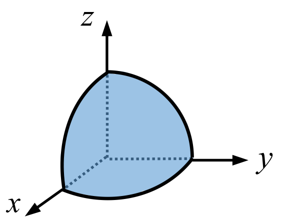
2. 第二类曲面积分（一般不会单独考，在高斯公式中涉及）

记作：$\iint\limits_{\Sigma} \underline{P(x,y,z)dydz} + \underline{Q(x,y,z)dzdx} + \underline{R(x,y,z)dxdy}$

> 要在积分曲面上对以上三部分分别计算，三部分解题思路和步骤是一样的，因为过程太过麻烦，所以基本不考，即使考到，也只考其中一部分。

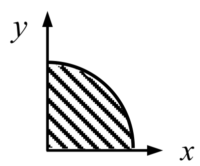
题 1. 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} zdxdy$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上侧在 $x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$ 部分.

解：



1)　积分曲面

$\Sigma: z=\sqrt{1-x^2-y^2}$



2)　投影确定 D_{xy}

$\theta: 0 \to \frac{\pi}{2}$

$\rho: 0 \to 1$

3)　代入计算

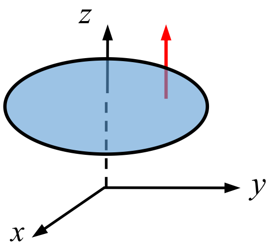
$$\iint\limits_{\Sigma} zdxdy = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\,\rho d\rho = \frac{\pi}{6}$$

> 解题步骤：
>
> 例：$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy$
>
> ① 确认积分曲面 Σ：$z=z(x,y)$
>
> ② 投影，将 $\Sigma \to xoy$ 面，确定 D_{xy}
>
> ③ 代入公式计算
>
> $$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \pm \iint\limits_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy$$
>
> （注：若沿 Σ 的上、前、右方积分，为正反之为负）

题 2. 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} 2xz^2dydz+y(z^2+1)dzdx+zdxdy$ ，其中 Σ 是沿曲面 $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=4\end{cases}$ 上侧.

解：

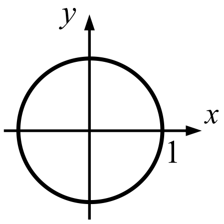


①积分曲面 Σ： $z=4$

（因为 $z=4$ 为常数，所以 $dz=0$）

$$I=\iint\limits_{\Sigma} 2xz^2dydz+y(z^2+1)dzdx+zdxdy=\iint\limits_{\Sigma} zdxdy$$

②将曲面 Σ 投影到 xoy 面确定 D_{xy}



③代入计算

$$\iint\limits_{\Sigma} zdxdy=\iint\limits_{D} 4dxdy=4\cdot\pi\cdot1^2=4\pi$$

课时十五　高斯公式

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 第一类曲面积分	★★★★	0～5	选择、填空
2. 第二类曲面积分	必考	6～15	大题
3. 高斯公式			

3. 高斯公式（可以看做第二类曲面积分的简单算法，经常考）

若积分曲面Σ为 封闭曲面 的 外侧

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \pm \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz$$

1) Ω是封闭曲面Σ围成的空间区域

2) 高斯公式是把第二类曲面积分转化成了三重积分计算其结果

3) 注意P、Q、R对应的位置

4) 沿曲面外侧为正，内侧为负（一般都是外侧）

题型一：常规型

例：计算$\iint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy$，其中$\Sigma$是$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$的外侧

解：积分曲面Σ为封闭的

$P = x \qquad Q = y \qquad R = z$

$\frac{\partial P}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = 1 \qquad \frac{\partial R}{\partial z} = 1$

球的体积公式：$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

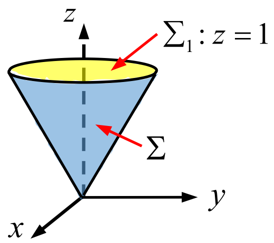
由高斯公式得

$$\iint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy = \iiint_{\Omega} (1+1+1) dxdydz$$

$$= 3\iiint_{\Omega} dxdydz = 3V = 3 \times \frac{4}{3}\pi a^3 = 4\pi a^3$$

题型二：缺面补面型

例：设Σ是锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被平面$z=0$和$z=1$所截得部分的下侧，利用高斯公式计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma} xdzdy+ydzdx+(z^2-2z)dxdy$



解：补齐Σ_1面形成封闭曲面

$P=x \qquad Q=y \qquad R=z^2-2z$

$$\frac{\partial P}{\partial x}=1 \qquad \frac{\partial Q}{\partial y}=1 \qquad \frac{\partial R}{\partial z}=2z-2$$

在$\Sigma+\Sigma_1$上的积分

$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} xdzdy+ydzdx+(z^2-2z)dxdy=\iiint\limits_{\Omega}(1+1+2z-2)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega}2zdxdydz$$

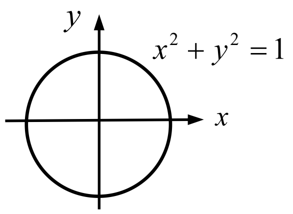
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_\rho^1 2zdz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho(1-\rho^2)d\rho=\frac{\pi}{2}$$

在Σ_1上的积分

Σ_1： $z=1$

$$\iint\limits_{\Sigma_1} xdzdy+ydzdx+(z^2-2z)dxdy=\iint\limits_{\Sigma_1}(z^2-2z)dxdy=\iint\limits_{\Sigma_1}(1-2)dxdy=\iint\limits_{\Sigma_1}(-1)dxdy$$

将Σ_1投影到xoy面上



根据第二类曲面积分公式计算：

$$\iint\limits_{\Sigma_1}(-1)dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}(-1)dxdy=-\pi$$

在Σ上的积分

$$\iint\limits_{\Sigma}=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}=\frac{\pi}{2}+\pi=\frac{3\pi}{2}$$

课时十五 练习题

1. 计算Σ是球面$x^2+y^2+z^2=9$的外侧，则$\oiint\limits_{\Sigma} xdydz+ydxdz+zdxdy=$__________.

2. 计算曲面积分$\oiint\limits_{\Sigma}(x-y)dxdy+x(y-z)dydz$，其中闭曲面$\Sigma$由$x^2+y^2=1$，$z=0$，$z=3$所围成的外侧。

3. 计算第二类曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma}(x+yz^2)dydz+(4y+1)dzdx+zdxdy$，其中$\Sigma$为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(0\le z\le 1)$的下侧。

4. 计算曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma}2xz^2dydz+y(z^2+1)dzdx+(9-z^3)dxdy$，其中$\Sigma$为曲面$z=x^2+y^2+1$ $(1\le z\le 2)$，取下侧。

5. 计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)dydz-zdxdy$，设其中$\Sigma$为曲面$x^2+y^2=2z$被平面$z=2$所截得部分的下侧。

6. 计算$\iint\limits_{\Sigma}(y^2-x)dydz+(z^2-y)dzdx+(x^2-z)dxdy$，其中$\Sigma$是抛物面$z=2-x^2-y^2$位于$z\ge 0$部分的上侧。

课时十六　常数项级数

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 级数概念	★★	0～3	选择、填空
2. 审敛法	必考	3～5	选择、填空、大题
3. 交错级数	★★★★★	0～3	
4. 绝对/条件收敛	★★★	0～6	

1.1 认识级数

记作：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$　　　展开式：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$

令 $S(n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$，若 $\lim\limits_{n\to\infty} S(n) = A$ 有极限，则级数收敛。反之发散。

题 1. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 的和为________.

解：$S(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots\cdots \left(\frac{1}{2}\right)^n = \dfrac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}} = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty} S(n) = \lim_{n\to\infty}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 1$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$

题 2. 级数 $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \cdots$ 的和 $S =$________.

解：$S(n) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} S(n) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}$$

1.2 无穷级数的性质

1）若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\lim_{n\to\infty}u_n=0$；但$\lim_{n\to\infty}u_n=0$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$不一定是收敛的

2）级数$\sum_{n=1}^{\infty}kU_n$和级数$k\sum_{n=1}^{\infty}U_n$具有相同敛散性

3）

$\sum_{n=1}^{\infty}U_n$	$\sum_{n=1}^{\infty}V_n$	$\sum_{n=1}^{\infty}(U_n+V_n)$
收	收	收
收	发	发
发	发	不确定

题 1.判断正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2}{n^2+n}$的敛散性.

解：$u_n=\frac{2n^2}{n^2+n}$　　$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+n}=2\neq 0$　　故级数发散

题 2.如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)=(\quad)$

$A.$收敛　　$B.$发散　　$C.$敛散性不确定　　$D.$绝对收敛

答案：$B.$

1.3 两个常用的参照级数

1）几何级数：$\sum_{n=0}^{\infty}aq^n$ $\begin{cases}|q|<1 & \text{级数收敛}\\ |q|\geq 1 & \text{级数发散}\end{cases}$

2）调和级数：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$　是发散　　扩展：对于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ $\begin{cases}p>1 & \text{级数收敛}\\ p\leq 1 & \text{级数发散}\end{cases}$

两种参照级数，经常用到，可以作为结论，直接使用

2. 正项级数审敛法

题 1. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\cdot 3^n}$ 的敛散性.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho\begin{cases}\rho<1 & \text{收敛}\\ \rho>1 & \text{发散}\\ \rho=1 & \text{不确定}\end{cases}$$

解： $u_n=\frac{2^n}{n\cdot 3^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}[\frac{2^{n+1}}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}\cdot\frac{n\cdot 3^n}{2^n}]$$

$$=\lim_{n\to\infty}(\frac{2}{3}\cdot\frac{n}{n+1})=\frac{2}{3}<1$$

故级数收敛.

题 2. 判断正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{2n+1})^n$ 的敛散性

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho\begin{cases}\rho<1 & \text{收敛}\\ \rho>1 & \text{发散}\\ \rho=1 & \text{不确定}\end{cases}$$

解： $u_n=(\frac{n}{2n+1})^n$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(2n+1)}=\frac{1}{2}<1$$

故级数收敛.

题 3. 判断正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$ 的敛散性

如果可以用等价无穷小替换，则他们有相同的敛散性

解： $n\to\infty$ 时， $\ln(1+\frac{1}{n})\sim\frac{1}{n}$ （等价无穷小）

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 有相同的敛散性

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是调和级数，发散　　故 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$ 也是发散的

3. 交错级数

记作：$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u_n = u_0 - u_1 + u_2 - \cdots\cdots + (-1)^n u_n \cdots$（正负项交错）

题 1. 判断 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 敛散性

交错级数判定方法：

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} u_n = 0 \\ u_{n+1} \le u_n \end{cases} \Rightarrow \text{收敛}$$

注：u_n 不包括 (-1) 项

解：$u_n = \frac{1}{n}$

则 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ 且 $u_{n+1} = \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{n} = u_n$

故交错级数是收敛的

4. 绝对收敛和条件收敛

1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 一定也收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛

2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，但 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛

题 1. 判断 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 是绝对收敛还是条件收敛.

解：$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是调和级数 发散

而 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 为交错级数，满足 $\begin{cases} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 \\ \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \end{cases}$ 收敛

故级数为条件收敛

课时十六 练习题

1. 求级数的和：$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}=$________.

2. 级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$的和等于________.

3. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{q^n}$收敛（$a$为常数），则$q$满足的条件是（ ）.

$A.\ q=1$　　$B.\ |q|<1$　　$C.\ q=-1$　　$D.\ |q|>1$

4. 当（ ）时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\ (p>0)$是收敛的.

$A.\ p=1$　　$B.\ p<1$　　$C.\ p>1$　　$D.\ p\neq 1$

5. 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=2$，则$\sum_{n=1}^{\infty}(3u_n-\frac{5}{2^n})$________

$A.$收敛到-4　　$B.$收敛到1　　$C.$发散　　$D.$无法求和

6. 判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$的敛散性.

7. 判定正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 2^n}{3^n}$的敛散性.

8. 判定正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$的敛散性.

9. 判断正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^2\tan(\frac{\pi}{3^n})$的敛散性.

10. 级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$的敛散性为________.

11. 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\ln(n+1)}$的敛散性.

12. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n}$的收敛性为__________（绝对收敛、条件收敛、发散）.

13. 判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(e^{\frac{1}{n}}-1)$的敛散性，若收敛，指出是绝对收敛还是条件收敛。（写出判别过程）

14. 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\cdot 6^n}$是否收敛，若收敛，指出绝对收敛还是条件收敛。

课时十七 幂级数

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 收敛域	必考	6～10	大题
2. 和函数			
3. 幂级数展开	★★★★★	0～8	
4. 傅里叶级数	★★	0～3	选择、填空

1. 收敛域

幂级数记作：$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

展开式：$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$（含 x 项，且敛散性随 x 的取值不同而不同）

题 1. 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n}$ 的收敛半径和收敛域.

解：$u_n = (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{x^n} \right| = |x| < 1$$

$\Rightarrow -1 < x < 1$

收敛半径：$R = 1$

收敛区间：$x \in (-1,1)$

当 $x=-1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n-1} \dfrac{1}{n} = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 发散，

当 $x=1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{1}{n}$ 为交错级数，

满足 $\begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0 \\ \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n} \end{cases}$，故收敛

则收敛域为 $x \in (-1,1]$

收敛域解题步骤：

1）$u_n = a_n x^n$

2）$\lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1$

3）$a < x < b$

收敛半径：$R = \dfrac{b-a}{2}$

收敛区间：$x \in (a,b)$

收敛域：验证端点 $x=a$，$x=b$ 的敛散性。

题 2. 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{2^n}$ 的收敛域.

解：$u_n=\frac{(x-2)^n}{2^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-2)^{n+1}}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{(x-2)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}|x-2|<1$$

$\Rightarrow\ 0<x<4$

收敛半径：$R=2$　　　收敛区间：$x\in(0,4)$

$x=0$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 发散

$x=4$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}1$ 发散

则收敛域为 $x\in(0,4)$

题 3. 求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n}$ 的收敛域.

解：$u_n=\frac{2n-1}{2^n}x^{2n}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n-1)x^{2n+2}}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{(2n-1)x^{2n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}x^2<1$$

$\Rightarrow\ -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$

收敛半径：$R=\sqrt{2}$　　　收敛区间：$x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

$x=-\sqrt{2}$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(2n-1)$ 发散

$x=\sqrt{2}$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(2n-1)$ 发散　　　则收敛域为 $x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

2. 和函数

记作：$S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ （对幂级数求和）

性质 1：可导并逐项可导 $S'(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nnx^{n-1}$

性质 2：可积并逐项可积 $\int_0^x S(x)dx=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nx^n\,dx=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\cdot\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$

$\dfrac{1}{1-x}$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\ldots\ldots+x^n$	$(-1<x<1)$
$\dfrac{1}{1+x}$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n=1-x+x^2+\ldots\ldots+(-1)^nx^n$	$(-1<x<1)$
$\ln(1+x)$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{n+1}}{n+1}=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\ldots\ldots+(-1)^n\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$(-1<x\le 1)$
e^x	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}x^n=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots\ldots+\dfrac{x^n}{n!}$	$(-\infty<x<+\infty)$
$\sin x$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}\ldots\ldots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$(-\infty<x<+\infty)$
$\cos x$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\dfrac{x^2}{2}+\ldots\ldots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$	$(-\infty<x<+\infty)$

✧ 麦克劳林公式，最常考 $\dfrac{1}{1-x}$

题 1. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 的和函数

和函数 $S(x)$ 解题步骤：

①先求收敛域

②先积后导/先导后积

③利用麦克劳林公式

解：$u_n = nx^{n-1}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x^n}{nx^{n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)}{n}\cdot x\right| = |x| < 1$$

$\Rightarrow\ -1 < x < 1$

收敛区间：$x \in (-1,1)$

$x = -1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$ 发散

$x = 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n$ 发散

则收敛域为 $x \in (-1,1)$

令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$

先积：$\int_0^x S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nx^{n-1}dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1}{1-x} - 1$

后导：$S(x) = \left[\int_0^x S(x)dx\right]' = \left[\frac{1}{1-x} - 1\right]' = \frac{1}{(1-x)^2}$

题 2. 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n}$ 的和函数

解：$u_n=\frac{x^{2n+1}}{2n}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+3}}{2n+2}\cdot\frac{2n}{x^{2n+1}}\right|\quad=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n}{2n+2}\cdot x^2\right|=x^2<1$$

$\Rightarrow\ -1<x<1$

收敛区间：$x\in(-1,1)$

$x=-1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{2n}$ 发散

$x=1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 发散

则收敛域为 $x\in(-1,1)$

令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n}=x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n}$

再令 $S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n}$

$$S_1'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}=x\sum_{n=1}^{\infty}(x^2)^{n-1}=x\left[1+x^2+(x^2)^2+\dots+(x^2)^n\right]=\frac{x}{1-x^2}$$

$$S_1(x)=\int_0^x S_1'(x)dx=\int_0^x\frac{x}{1-x^2}dx=-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)$$

$$S(x)=x\cdot S_1(x)=-\frac{x}{2}\ln(1-x^2)$$

题 3. 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}$ 的和.

解：先求 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$

$$u_n=(n+1)x^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+2)x^{n+1}}{(n+1)x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+2}{n+1}\cdot x\right|=|x|<1$$

$$\Rightarrow\ -1<x<1$$

$x=-1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n+1)$ 发散

$x=1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)$ 发散

则收敛域为 $x\in(-1,1)$

$$\int_0^x S(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(n+1)x^n dx=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}=x+x^2+\ldots+x^n=\frac{1}{1-x}-1$$

$$S(x)=\left(\int_0^x S(x)dx\right)'=\left(\frac{1}{1-x}-1\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}=S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2}=4$$

3. 幂级数展开

题 1. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数

解：$f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{2+(x-1)}-\dfrac{1}{3+(x-1)}$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{(x-1)}{2}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{(x-1)}{3}}$$

$$\boxed{\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=1-x+\cdots(-1)^n x^n+\cdots}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-1}{2}\right)^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{x-1}{3})^n$$

$$\frac{(x-1)}{2}\in(-1,1)\Rightarrow x\in(-1,3)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^{n+1}}(x-1)^n-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^{n+1}}(x-1)^n$$

$$\frac{(x-1)}{3}\in(-1,1)\Rightarrow x\in(-2,4)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x-1)^n \qquad x\in(-1,3)$$

4. 傅里叶级数

题 1. 设有周期为 2π 的函数，它在 $(-\pi,\pi]$ 上的表达式为 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\le 0\\ 1+x^2 & 0<x\le\pi\end{cases}$，其傅里叶级数在点 $x=\pi$ 收敛到__________.

解：$\lim\limits_{x\to\pi^-}f(x)=\lim\limits_{x\to\pi^-}(1+x^2)=1+\pi^2$

$\lim\limits_{x\to\pi^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-\pi^+}(-1)=-1$

$$\frac{\lim\limits_{x\to\pi^-}f(x)+\lim\limits_{x\to\pi^+}f(x)}{2}=\frac{1+\pi^2-1}{2}=\frac{\pi^2}{2}$$

则傅里叶级数在点 $x=\pi$ 收敛到 $\dfrac{\pi^2}{2}$

课时十七 练习题

1. 求无穷级数的和$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n\cdot n}$的收敛半径和收敛域.

2. 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$的收敛半径与收敛域.

3. 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n^2}$的收敛域.

4. 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{4^n}\cdot x^{2n}$的收敛半径是________.

5. 求级数$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$的收敛域及和函数.

6. 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$的收敛域与和函数.

7. 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n\cdot 3^n}$的收敛域与和函数.

8. 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$的和函数.

9. 求级数$\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^n$的收敛域及和函数$S(x)$，并计算数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^n}$的和.

10. 将函数$f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$展开成关于$(x+4)$的幂级数.

11. 将函数$f(x)=\ln(3+x)$展开成关于$(x-1)$的幂级数.

12. 已知$f(x)$是周期为 2 的周期函数，且$f(x)=\begin{cases}3x^2+2 & (0<x<1)\\ x & (-1\le x\le 0)\end{cases}$，则$f(x)$的傅里叶级数在$x=0$处收敛于__________.

13. 设$f(x)$为周期为2π的函数，它在$[-\pi,\pi)$上的表达式为$f(x)=\begin{cases}x^2 , & -\pi\le x<0\\ \pi-x, & 0\le x<\pi\end{cases}$，则$f(x)$的傅里叶级数在$x=2\pi$处收敛于______.

课时一 练习题答案

1. 函数 $z=\ln(y^2-2x+1)$ 的定义域为________。

解：$y^2-2x+1>0 \Rightarrow y^2-2x>-1$，即 $\{(x,y)\,|\,y^2-2x>-1\}$

2. 二元函数 $z=\sqrt{\ln\dfrac{4}{x^2+y^2}}+\arcsin\dfrac{1}{x^2+y^2}$ 的定义域为________。

解：$\begin{cases}\ln\dfrac{4}{x^2+y^2}\geq 0\\ -1\leq\dfrac{1}{x^2+y^2}\leq 1\\ x^2+y^2\neq 0\end{cases} \Rightarrow \{(x,y)\,|\,1\leq x^2+y^2\leq 4\}$

3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{3-\sqrt{9+xy}}{xy}=$________。

解：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{3-\sqrt{9+xy}}{xy}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{(3-\sqrt{9+xy})(3+\sqrt{9+xy})}{xy(3+\sqrt{9+xy})}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{-1}{(3+\sqrt{9+xy})}=-\dfrac{1}{6}$

4. 计算 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=$________。

解：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{(2-\sqrt{xy+4})(2+\sqrt{xy+4})}{xy(2+\sqrt{xy+4})}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{-1}{(2+\sqrt{xy+4})}=-\dfrac{1}{4}$

5. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\dfrac{\tan(xy)}{y}=$________。

解：$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\dfrac{\tan(xy)}{y}=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{y}=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}x=2$

6. 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\ln(1+xy^2)}{x}=$________。

$A.0$　　$B.1$　　$C.2$　　$D.4$

答案：D　　$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\ln(1+xy^2)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{xy^2}{x}=4$

7. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}[\frac{\sin(xy)}{y}+\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}]=$ ________。

答案：2

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}[\frac{\sin(xy)}{y}+\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}]=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin(xy)}{y}+\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{y}+\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{\frac{1}{2}xy}=0+2=2$$

8. 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+xy}{1+xy}$ ________

$A.$ 存在但不等于 0 $B.$ 存在且等于 0 $C.$ 不存在 $D.$ 以上结论都不正确

答案：B $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+xy}{1+xy}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{0}{1}=0$

9. 下列选项中极限存在的是（ ）

$A.\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}$ $B.\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}$ $C.\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}$ $D.\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy^2}{x^2+y^2}$

答案：D

$A.$ 取 $y=x$ 路径，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x}}\frac{x\cdot x}{x^2+x^2}=\frac{1}{2}$

取 $y=-x$ 路径，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x}}\frac{x\cdot(-x)}{x^2+(-x)^2}=-\frac{1}{2}$

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}$ 极限不存在；

$B.$ 取 $y=x^2$ 路径，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2\cdot x^2}{x^4+x^4}=\frac{1}{2}$

取 $y=x^3$ 路径，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x^3}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x^3}}\frac{x^2\cdot x^3}{x^4+x^6}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\cdot x^3}{x^4+x^6}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{1+x}=0$

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}$ 极限不存在；

$C.$ 同 $B.$ 选项，将 x,y 对换即可，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}$ 极限不存在；

$D.$ 分子 x,y 的次数一共是 3 次，而分母 x,y 的次数均是 2 次，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy^2}{x^2+y^2}=0$

课时二 练习题答案

1. 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处存在对 x,y 偏导数，则 $f'_x(x_0,y_0)=($ $)$

$A.\ \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0)-f(x_0-\Delta x,y_0)}{\Delta x}$ $B.\ \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-2\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$

$C.\ \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ $D.\ \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x,y)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$

答案：A

2. 函数 $z=y^x$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=y^x\ln y$ $\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy^{x-1}$

3. 设 $z=\sin(xy)+\cos^2(xy)$，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)}=$ ________

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\cos(xy)\cdot y+2\cos(xy)\cdot[-\sin(xy)]\cdot y=y\cos(xy)-2\sin xy\cos xy\big|_{(0,1)}=1$

4. 函数 $z=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$，求 $z_x(1,1),z_y(1,1)$

解：$z_x=1-\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot(2x)=1-\left.\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|_{(1,1)}=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$z_y=1-\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot(2y)=1-\left.\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|_{(1,1)}=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

5. 设 $z=xy+\dfrac{x}{y}$，则 $dz=$ ________

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=y+\dfrac{1}{y}$ $\dfrac{\partial z}{\partial y}=x-\dfrac{x}{y^2}$ $dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy=(y+\dfrac{1}{y})dx+(x-\dfrac{x}{y^2})dy$

6. 设 $z=\arctan\dfrac{x}{y}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 及 dz

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{y}=\dfrac{y}{x^2+y^2}$　　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(-\dfrac{x}{y^2}\right)=-\dfrac{x}{x^2+y^2}$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{y}{x^2+y^2}dx-\frac{x}{x^2+y^2}dy$$

7. 设 $u=e^{xy^2z^3}$，则 $du=$ ________

解：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=e^{xy^2z^3}\cdot y^2z^3=y^2z^3e^{xy^2z^3}$　　$\dfrac{\partial u}{\partial y}=e^{xy^2z^3}\cdot(2xyz^3)=2xyz^3e^{xy^2z^3}$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=e^{xy^2z^3}\cdot(3z^2xy^2)=3xy^2z^2e^{xy^2z^3}$$

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=y^2z^3e^{xy^2z^3}dx+2xyz^3e^{xy^2z^3}dy+3xy^2z^2e^{xy^2z^3}dz$$

8. 函数 $z=\ln(2+x^2+y^2)$ 在 $x=2,y=1$ 时的全微分。

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2x}{2+x^2+y^2}\Big|_{(2,1)}=\dfrac{4}{7}$　　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2y}{2+x^2+y^2}\Big|_{(2,1)}=\dfrac{2}{7}$

$$dz\Big|_{(2,1)}=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{4}{7}dx+\frac{2}{7}dy$$

9. 设 $z=e^x\sin(x+y)$，则 $dz\big|_{(0,\pi)}=(\quad)$

$A.-dx+dy$　　$B.dx-dy$　　$C.-dx-dy$　　$D.dx+dy$

答案：C

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^x\sin(x+y)+\cos(x+y)e^x=e^x\left[\sin(x+y)+\cos(x+y)\right]$　　$\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,\pi)}=-1$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,\pi)}=e^x\cos(x+y)$　　$\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,\pi)}=-1$　　$dz\Big|_{(0,\pi)}=-dx-dy$

10. 求函数 $z=\sqrt{\frac{x}{y}}$ 的全微分。

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{2y}\sqrt{\frac{y}{x}}$　　$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot(-\frac{x}{y^2})=-\frac{x}{2y^2}\sqrt{\frac{y}{x}}$

$$dz=\frac{1}{2y}\sqrt{\frac{y}{x}}dx-\frac{x}{2y^2}\sqrt{\frac{y}{x}}dy$$

11. 已知函数 $f_x'(a,b)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x+a,b)-f(a-x,b)}{x}=(\quad)$

$A.-f_x'(a,b)$　　$B.2f_x'(a,b)$　　$C.f_x'(a,b)$　　$D.\frac{1}{2}f_x'(a,b)$

答案：B

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(a+x,b)-f(a-x,b)}{x}=\frac{a+x-(a-x)}{x}f_x'(a,b)=2f_x'(a,b)$

12. 函数 $f(x,y)$ 偏导数存在，且 $f_x(0,0)=1$，$f_y(0,0)=-2$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=$ ______

解：$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=f_y(0,0)$，正是对 y 在 $(0,0)$ 处求偏导的定义公式。

13. 求函数 $z=4x^3-xy+e^y$ 的二阶偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=12x^2-y$　　$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=24x$　　$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-1$

$\frac{\partial z}{\partial y}=-x+e^y$　　$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^y$　　$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-1$

14. 求函数 $z=e^x\ln y+\sin y\cdot\ln x$ 的二阶偏导数

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=e^x\ln y+\frac{\sin y}{x}$　　$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^x\ln y-\frac{\sin y}{x^2}$

$\frac{\partial z}{\partial x\partial y}=\frac{e^x}{y}+\frac{\cos y}{x}$　　$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{e^x}{y}+\ln x\cos y$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{e^x}{y}+\frac{\cos y}{x}$　　$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{e^x}{y^2}-\ln x\sin y$

15. 设二元函数 $z=y^2\cos 2x$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ ________

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=y^2(-\sin 2x)\cdot 2=-2y^2\sin 2x$ $\qquad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-4y\sin 2x$

16. 下列有关多元函数命题错误的是（　　）

A. 函数可微是连续的充分条件 $\qquad B$. 函数可微则偏导数必定存在

C. 偏导数存在是可微的必要条件 $\qquad D$. 偏导数存在是连续的充分条件

答案：D　偏导数连续可以推出偏导数存在，则偏导数存在是连续的必要条件。

17. 若用“$P\Rightarrow Q$”表示可由性质 P 推出性质 Q，考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面 5 条性质：

$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处：①连续；②两个偏导数存在；③可微；④两个偏导数连续；⑤极限存在，则有（　　）

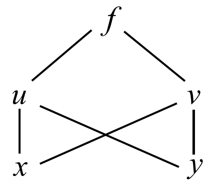
A. ④$\Rightarrow$③$\Rightarrow$②$\Rightarrow$⑤ $\qquad B$. ②$\Rightarrow$③$\Rightarrow$⑤$\Rightarrow$①

C. ③$\Rightarrow$②$\Rightarrow$⑤$\Rightarrow$① $\qquad D$. ④$\Rightarrow$③$\Rightarrow$①$\Rightarrow$⑤

答案：D　偏导数连续$\Rightarrow$ 可微$\Rightarrow$ 连续$\Rightarrow$ 极限存在，由极限知识，函数若连续，则左右极限都存在且等于函数值。

课时三 练习题答案

1. $z=e^u\ln v$，且 $u=xy,v=x^2+y^2$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

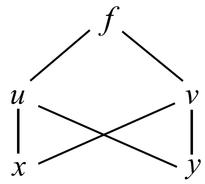


解：$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=e^u\ln v\cdot y+\frac{e^u}{v}\cdot 2x=ye^u\ln v+\frac{2xe^u}{v}$$

$$=ye^{xy}\ln(x^2+y^2)+\frac{2xe^{xy}}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=e^u\ln v\cdot x+\frac{e^u}{v}\cdot 2y=xe^u\ln v+\frac{2ye^u}{v}=xe^{xy}\ln(x^2+y^2)+\frac{2ye^{xy}}{x^2+y^2}$$

2. 设 $z=u\cos v$，而 $u=x+y,v=xy$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

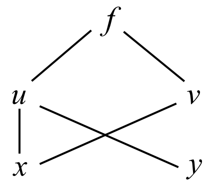


解：$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\cos v\cdot 1-u\sin v\cdot y=\cos v-uy\sin v$$

$$=\cos(xy)-y(x+y)\sin(xy)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\cos v\cdot 1-u\sin v\cdot x=\cos v-ux\sin v=\cos(xy)-x(x+y)\sin(xy)$$

3. $z=f(\dfrac{y}{x},x)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。



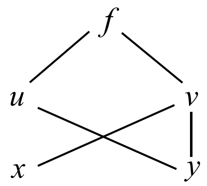
解：$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=f_1'\cdot(-\frac{y}{x^2})+f_2'\cdot 1=-\frac{yf_1'}{x^2}+f_2'$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=f_1'\cdot\frac{1}{x}=\frac{f_1'}{x}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial x})}{\partial y}=-\frac{f_1'}{x^2}+(-\frac{y}{x^2})\cdot\frac{\partial f_1'}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f_2'}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$=-\frac{f_1'}{x^2}-\frac{y}{x^2}\cdot f_{11}''\cdot\frac{1}{x}+f_{21}''\cdot\frac{1}{x}=-\frac{f_1'}{x^2}-\frac{yf_{11}''}{x^3}+\frac{f_{21}''}{x}$$

4. 设 $z=xf(y,xy)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

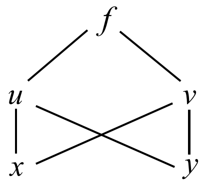


解：$\frac{\partial z}{\partial x}=f(y,xy)+x\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=f(y,xy)+xyf_2'$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial x})}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+xf_2'+xy\left(\frac{\partial f_2'}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f_2'}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$=f_1'\cdot 1+f_2'\cdot x+xf_2'+xy(f_{21}''\cdot 1+f_{22}''\cdot x)\quad =f_1'+2xf_2'+xy(f_{21}''+xf_{22}'')$$

5. $z=f(x^2+y^2,e^{xy})$，其中 $f(u,v)$ 一阶偏导数连续，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。



解：$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=2xf_1'+ye^{xy}f_2'$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x}=2f_1'+2x\left(\frac{\partial f_1'}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f_1'}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)+y^2e^{xy}f_2'+ye^{xy}\left(\frac{\partial f_2'}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f_2'}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$=2f_1'+2x(2xf_{11}''+ye^{xy}f_{12}'')+y^2e^{xy}f_2'+ye^{xy}(2xf_{21}''+ye^{xy}f_{22}'')$$

6. 设 $z=xy+xf(\frac{y}{x})$，且 $f(u)$ 可微，试证：$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy+z$

证明：$\frac{\partial z}{\partial x}=y+f\left(\frac{y}{x}\right)+xf'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=y+f\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{yf'\left(\frac{y}{x}\right)}{x}$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x+xf'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}=x+f'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy+xf\left(\frac{y}{x}\right)-yf'\left(\frac{y}{x}\right)+xy+yf'\left(\frac{y}{x}\right)=2xy+xf\left(\frac{y}{x}\right)=xy+z$$

7. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2=\ln x-\ln z$ 确定的隐函数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$。

解：$F=x^2+y^2-\ln x+\ln z$

$F_x=2x-\frac{1}{x}$ $\quad$ $F_y=2y$ $\quad$ $F_z=\frac{1}{z}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-2xz+\frac{z}{x} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-2yz$$

8. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^{x+2y+3z}+xyz=1$ 确定，计算 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}$，$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}$。

解：将 $(0,0)$ 代入方程得 $z=0$，则该点为 $(0,0,0)$

$F=e^{x+2y+3z}+xyz-1$ $\quad$ $F_x=(e^{x+2y+3z}+yz)\big|_{(0,0,0)}=1$

$F_y=(2e^{x+2y+3z}+xz)\big|_{(0,0,0)}=2$ $\quad$ $F_z=(3e^{x+2y+3z}+xy)\big|_{(0,0,0)}=3$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{1}{3} \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{2}{3}$$

9. 设 $e^{xy+z}=\sin(xyz)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$。

解：令 $F=e^{xy+z}-\sin(xyz)$ $\quad$ $F_x=ye^{xy+z}-yz\cos(xyz)$

$F_y=xe^{xy+z}-xz\cos(xyz)$ $\quad$ $F_z=e^{xy+z}-xy\cos(xyz)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{yz\cos(xyz)-ye^{xy+z}}{e^{xy+z}-xy\cos(xyz)} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{xz\cos(xyz)-xe^{xy+z}}{e^{xy+z}-xy\cos(xyz)}$$

10. 设 $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

解：令 $F=\frac{x}{z}-\ln\frac{z}{y}$

$$F_x=\frac{1}{z} \qquad F_y=-\frac{y}{z}\cdot\left(-\frac{z}{y^2}\right)=\frac{1}{y} \qquad F_z=-\frac{x}{z^2}-\frac{y}{z}\cdot\frac{1}{y}=-\frac{x}{z^2}-\frac{1}{z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{z}{x+z}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(\frac{z}{z+x}\right)'_x=\frac{-z^2}{(x+z)^3}$$

11. 设 $z=f(x,y)$ 是由方程 $\sin(xyz)-\frac{1}{z-xy}=1$ 所确定，求 $dz|_{(0,1)}$。

解：将 $(0,1)$ 代入方程得 $z=-1$，则该点为 $(0,1,-1)$

令 $F=\sin(xyz)-\frac{1}{z-xy}-1$

$$F_x=\left[yz\cos(xyz)+\frac{-y}{(z-xy)^2}\right]\Bigg|_{(0,1-1)}=-2 \qquad F_y=\left[xz\cos(xyz)+\frac{-x}{(z-xy)^2}\right]\Bigg|_{(0,1,-1)}=0$$

$$F_z=\left[xy\cos(xyz)+\frac{1}{(z-xy)^2}\right]\Bigg|_{(0,1,-1)}=1$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=2 \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=0 \qquad dz=2dx$$

课时四 练习题答案

1. 求函数 $f(x,y,z)=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 $(1,2,-2)$ 处梯度 $gradf(1,2,-2)=$________。

解：$\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{2x}{x^2+y^2+z^2}\Big|_{(1,2,-2)}=\dfrac{2}{9}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}\Big|_{(1,2,-2)}=\frac{4}{9}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\Big|_{(1,2,-2)}=-\frac{4}{9}$$

2. 函数 $u=3x^2y^2-2y+4x+6z$ 在原点沿方向 $l=(2,3,1)$ 的方向导数为________。

解：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=6xy^2+4\Big|_{(0,0,0)}=4$ $\qquad \dfrac{\partial u}{\partial y}=6x^2y-2\Big|_{(0,0,0)}=-2$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=6 \qquad gradf(0,0,0)=(4,-2,6)$$

$$|\vec{l}|=\sqrt{2^2+3^2+1}=\sqrt{14} \qquad \vec{e_l}=\left(\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(0,0,0)}=gradf(0,0,0)\cdot\vec{e_l}=(4,-2,6)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}}\right)=\frac{8}{\sqrt{14}}$$

3. $z=xe^{2y}$ 在 $P(1,0)$ 到 $K(2,1)$ 的方向导数________。

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^{2y}\Big|_{(1,0)}=1$ $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial y}=2xe^{2y}\Big|_{(1,0)}=2$ $\qquad gradf(1,0)=(1,2)$

$$\vec{l}=(1,1) \qquad |\vec{l}|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2} \qquad \vec{e_l}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(1,0)}=gradf(1,0)\cdot\vec{e_l}=(1,2)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

4. 求函数 $u=e^{xyz}$ 在点 $P_0(1,0,-1)$ 处由 $P_0(1,0,-1)$ 指向 $P_1(2,1,-1)$ 方向的方向导数，并求函数 $u=e^{xyz}$ 在点 $P_0(1,0,-1)$ 处的方向导数的最大值。

解：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=yze^{xyz}\Big|_{(1,0,-1)}=0$　　$\dfrac{\partial u}{\partial y}=xze^{xyz}\Big|_{(1,0,-1)}=-1$

$\dfrac{\partial u}{\partial z}=xye^{xyz}\Big|_{(1,0,-1)}=0$　　$gradf(1,0,-1)=(0,-1,0)$

$\vec{l}=(1,1,0)$　　$\vec{e_l}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial l}=(0,-1,0)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

最大值 $\dfrac{\partial f}{\partial l}\Big|_{\max}=|gradf|=1$

5. 求函数 $f(x,y)=4xy-x^2-y^2$ 的极值。

解：$\begin{cases} f'_x=4y-2x=0 \\ f'_y=4x-2y=0 \end{cases}$　　得驻点：$(0,0)$

$A=f''_{xx}=-2$　　$B=f''_{xy}=4$　　$C=f''_{yy}=-2$

$AC-B^2=-12<0$　　则该函数无极值。

6. 函数 $f(x,y)$ 在开区域 D 内有二阶连续偏导数，且 $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$。记 $A=f_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f_{yy}(x_0,y_0)$，则下列为 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处取极大值的充分条件是（　　）

$A.\ A<0,\ AC-B^2>0$　　$B.\ A>0,\ AC-B^2>0$

$C.\ A<0,\ AC-B^2<0$　　$D.\ A>0,\ AC-B^2<0$

答案为：A　　若 $AC-B^2>0, A>0$，则 (x_0,y_0) 为极大值点。

7. 判断题：多元函数的极值点一定是驻点。（　　）

答案：×　　存在极值点的情况：1. 驻点　2. 一阶导数不存在的点

8. 设函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的邻域内偏导数存在，则 $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$ 是 $y=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处取极值的（　　）

$A.$ 必要但非充分条件　　　　$B.$ 充分但不必要条件

$C.$ 充分必要条件　　　　$D.$既非充分也非必要条件

答案：D　对于多元函数，驻点不一定是极值点，极值点不一定是驻点。

9. 某工厂要做一个体积为 $8m^3$ 的无盖长方体容器，已知底面材料的单位造价是侧面材料单价的2倍，问怎样设计才能使该长方体容器的造价最低？

解：设该容器的长宽高分别是 x,y,z 假设侧面材料的单价为单位1，总造价为 u，

目标函数：$u=2xy+2xz+2yz$　　条件函数：$xyz=8$

构造拉格朗日函数：$L=2xy+2yz+2xz+\lambda(xyz-8)$

$$\begin{cases} L_x=2y+2z+\lambda yz=0 \\ L_y=2x+2z+\lambda xz=0 \\ L_z=2y+2x+\lambda xy=0 \\ L_\lambda=xyz-8=0 \end{cases}$$ 解得 $x=y=z=2$

因为 $(2,2,2)$ 为唯一极值点，则当长宽高都是 $2m$ 时，造价最低。

10. 周长为 $2P$ 矩形，绕一边旋转一周得到圆柱，求圆柱的体积何时最大？

解：设矩形相邻两边分别为 x,y，则形成的圆柱体体积为 πx^2y

目标函数：$f=x^2y$　　条件函数 $x+y=p$

构造拉格朗日函数：$L=x^2y+\lambda(x+y-p)$

$$\begin{cases} L_x=2xy+\lambda=0 \\ L_y=x^2+\lambda=0 \\ L_\lambda=x+y-p=0 \end{cases}$$ 解得 $\left(\frac{2p}{3},\frac{p}{3}\right)$ 为唯一极值点，

则当相邻两边长分别为 $\frac{2p}{3}$，$\frac{p}{3}$ 时，圆柱体的体积最大。

11. $z=x^3-3x^2-3y^2$ 在 $D: x^2+y^2\le 16$ 上的最大值和最小值。

解：①先找内部极值点

$$\begin{cases} f_x'=3x^2-6x=0 \\ f_y'=-6y=0 \end{cases}$$ 得驻点 $(0,0)$，$(2,0)$

$A=f_{xx}''=6x-6$　　$B=f_{xy}''=0$　　$C=f_{yy}''=-6$

在 $(0,0)$ 点，$AC-B^2=36>0, A<0$　有极大值。

在 $(2,0)$ 点，$AC-B^2=-36<0,$　无极值。

②找边界 $x^2+y^2=16$ 上的极值点

$z=x^3-3(x^2+y^2)=x^3-48$

$z_x'=3x^2=0$　得 $x=0$　　代入得 $y=\pm 4$

③比较　$f(0,0)=0$　$f(0,4)=f(0,-4)=-48$

则函数的最大值为 0，最小值为 -48

课时五　练习题答案

1. 空间两点 $P(2,0,-1)$，$Q(0,5,1)$ 的距离为__________。

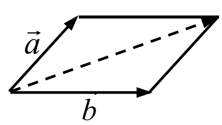
答案：$\sqrt{33}$　　$d=\sqrt{2^2+(-5)^2+(-2)^2}$

2. 已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，且 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，则 $|\vec{a}+\vec{b}|=($　　$)$

$A.0$　　$B.\sqrt{7}$　　$C.7$　　$D.1$

答案：B

解：由余弦定理 $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{1^2+2^2+2\times1\times2\times\frac{1}{2}}=\sqrt{7}$



3. 设$\vec{a}=(1,1,-1)$，$\vec{b}=(-1,-1,1)$，则有(　　)

$A.\vec{a}//\vec{b}$　　　$B.\vec{a},\vec{b}$ 夹角为 $\frac{\pi}{3}$　　　$C.\vec{a}\perp b$　　　$D.a,b$ 夹角为 $\frac{2\pi}{3}$

答案：A　　$\cos\theta=\frac{-1-1-1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=-1,\theta=\pi$　，则$\vec{a}//\vec{b}$

4. 设向量$\vec{a}=(\lambda,-3,2)$和$\vec{b}=(1,2,-\lambda)$垂直，则$\lambda=$__________。

解：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\lambda-6-2\lambda=0$ ，$\lambda=-6$

5. 设$\vec{a}=(3,-1,-2)$，$\vec{b}=(1,2,-1)$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=$_________，$\vec{a}\times\vec{b}=$__________。

解：$\vec{a}\cdot\vec{b}=3-2+2=3$，　$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&-1&-2\\1&2&-1\end{vmatrix}=(5,1,7)$

6. 已知两点$A(1,0,3)$和$B(2,-1,4)$，O为坐标原点，则ΔAOB的面积为(　　)

$A.\sqrt{6}$　　　$B.\frac{\sqrt{14}}{2}$　　　$C.\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　$D.\frac{\sqrt{6}}{2}$

答案：B　　$\overrightarrow{OA}=(1,0,3)$　　$\overrightarrow{OB}=(2,-1,4)$

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}=\frac{2+12}{\sqrt{1^2+3^2}\times\sqrt{2^2+1^2+4^2}}=\frac{14}{\sqrt{210}}$$

$$S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin\theta=\frac{1}{2}\times\sqrt{210}\times\sqrt{1-(\frac{14}{\sqrt{210}})^2}=\frac{\sqrt{14}}{2}$$

7. 平面$x+\sqrt{26}y+3z-3=0$与xoy面夹角为(　　)

$A.\frac{\pi}{4}$　　　$B.\frac{\pi}{3}$　　　$C.\frac{\pi}{6}$　　　$D.\frac{\pi}{2}$

答案：B　　平面与xoy 面的夹角实际上就是两平面法向量所夹的锐角

$\vec{n}_1=(1,\sqrt{26},3)$　　　$\vec{n}_2=(0,0,1)$

$$\cos\theta=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\frac{3}{\sqrt{1^2+26+3^2}}=\frac{1}{2}\qquad\theta=\frac{\pi}{3}$$

8. 求通过 $M(1,2,3)$，$N(1,1,1)$，$O(1,0,2)$ 三点的平面方程。

解：$\overrightarrow{OM}=(0,2,1)$ $\qquad$ $\overrightarrow{ON}=(0,1,-1)$

$$\vec{n}=\overrightarrow{OM}\times\overrightarrow{ON}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=(-3,0,0)=(1,0,0)$$

$x-1=0$ $\qquad$ 即平面方程为 $x=1$

9. 点 $(2,1,1)$ 到平面 $x+y-z+1=0$ 的距离为__________。

答案：$\sqrt{3}$ $\qquad$ $d=\dfrac{|1\times 2+1\times 1-1\times 1+1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\sqrt{3}$

10. 求直线 $\begin{cases} x-5y+2z-1=0 \\ z=2+5y \end{cases}$ 的点向式方程和参数方程。

解：$\vec{n}_1=(1,-5,2)$ $\qquad$ $\vec{n}_2=(0,5,-1)$

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -5 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}=(-5,1,5)$$

令 $y=0$，解得 $x=-3, z=2$ $\qquad$ 则找到一点 $(-3,0,2)$

点向式方程 $\dfrac{x+3}{-5}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{5}$ $\qquad$ 参数方程 $\begin{cases} x=-5t-3 \\ y=t \\ z=5t+2 \end{cases}$

11. 求过点 $M_1(1,2,1)$ 且平行直线 $\begin{cases} x-5y+2z=1 \\ 5y-z=2 \end{cases}$ 的直线方程为__________。

答案：$\dfrac{x-1}{-5}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{5}$

解：$\overrightarrow{n_1}=(1,-5,2)$ $\qquad$ $\overrightarrow{n_2}=(0,5,-1)$ $\qquad$ $\vec{s}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -5 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}=(-5,1,5)$

对称式方程：$\dfrac{x-1}{-5}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{5}$

12. 过点 $M_1(1,1,1)$ 与直线 $\begin{cases} x=-t+2 \\ y=3t-4 \\ z=t-1 \end{cases}$ 垂直的平面方程为________。

答案：$x-3y-z+3=0$

解：令 $t=0$ ，得点 $(2,-4,-1)$　　再令 $t=1$ 得点 $(1,-1,0)$

则直线的方向向量 $\vec{s}=(1,-3,-1)$ ，由题意知 $\vec{s}$ 也为平面的法向量

由点法式方程 $(x-1)-3(y-1)-(z-1)=0$ ，化简得 $x-3y-z+3=0$

13. 直线 $L:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-1}{4}$ 与平面 $\pi:6x-2y+8z=7$ 的位置关系是(　　)

$A.$ 直线 L 与平面 π 平行　　$B.$ 直线 L 与平面 π 垂直

$B.$ 直线 L 在平面 π 上　　$D.$ 直线 L 与平面 π 只有一个交点，但不垂直

答案：B　直线的方向向量 $\vec{s}=(3,-1,4)$，平面的法向量 $\vec{n}=(3,-1,4)$，则 $\vec{s}\,/\!/\,\vec{n}$ ，即直线 L 与平面 π 垂直。

14. 设有直线 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z+8}{1}$ 与 $L_2:\begin{cases} x-y=6 \\ 2y+z=3 \end{cases}$，则 L_1 与 L_2 夹角为(　　)

$A.\dfrac{\pi}{2}$　　$B.\dfrac{\pi}{3}$　　$C.\dfrac{\pi}{4}$　　$D.\dfrac{\pi}{6}$

答案：$B.$

解：$\vec{s_1}=(1,-2,1)$　　$\vec{s_2}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=(-1,-1,2)$

$$\cos\theta=\frac{\vec{s_1}\cdot\vec{s_2}}{|\vec{s_1}||\vec{s_2}|}=\frac{-1+2+2}{\sqrt{1+2^2+1}\times\sqrt{1+1+2^2}}=\frac{1}{2}\qquad \theta=\frac{\pi}{3}$$

15. 求直线 $\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y+2}{-2}=z$ 与平面 $x+2y+2z+6=0$ 的交点。

解：直线的参数方程为 $\begin{cases} x=3t-3 \\ y=-2t-2 \\ z=t \end{cases}$　　代入平面方程解 t

$3t-3+2(-2t-2)+2t+6=0$　　$t=1$　再代入参数方程得交点为 $(0,-4,1)$

课时六　练习题答案

1. 将 xoy 坐标面上的椭圆 $x^2+4y^2=9$ 绕 y 轴旋转一周所得的旋转曲面方程为__________。

答案：$x^2+z^2+4y^2=9$

2. 面 yoz 的抛物线 $y^2=3z$ 绕 z 轴旋转一周所生成的旋转曲面为___________。

答案：$x^2+y^2=3z$

3. 曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 是由（　　）

$A.$ xoz 平面上曲线 $z=x$ 绕 z 轴旋转而成

$B.$ yoz 平面上曲线 $z=|y|$ 绕 z 轴旋转而成

$C.$ xoz 平面上曲线 $z=x$ 绕 x 轴旋转而成

$D.$ yoz 平面上曲线 $z=|y|$ 绕 y 轴旋转而成

答案：B

4. 空间直角坐标系中，方程 $y=x^2$ 表示（　　）

$A.$椭球面　　$B.$圆柱面　　$C.$抛物线　　$D.$抛物柱面

答案:D

5. 方程 $x^2+y^2=4$ 在空间解析几何中表示___________。

答案：圆柱面

6. 曲线 $r:\begin{cases}\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{5}=1\\ x-2z+3=0\end{cases}$，关于 xoy 面的投影柱面方程为（　　）

$A.\ x^2+20y^2-24x-116=0$　　$B.\ 4y^2+4z^2-16z-9=0$

$C.\begin{cases}x^2+20y^2-24x-116=0\\ z=0\end{cases}$　　$D.\begin{cases}4y^2+4z^2-16z-9=0\\ x=0\end{cases}$

答案：A　　消 z 得 A 正确

7. 求曲面 $x^2-y^2-z^2+1=0$ 在点 $M(4,2,1)$ 处的切平面与法线方程。

解：设 $F=x^2-y^2-z^2+1$ $\quad \begin{cases} F_x=2x=8 \\ F_y=-2y=-4 \\ F_z=-2z=-2 \end{cases} \Rightarrow \vec{s}=\vec{n}=(4,-2,-1)$

切面方程：$4(x-4)-2(y-2)-(z-1)=0$ 化简得 $4x-2y-z-11=0$

法线方程：$\dfrac{x-4}{4}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-1}{-1}$

8. 求曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $2x+4y-z=0$ 平行的切平面的方程。

解：设 $F=x^2-y^2-z$ $\quad \begin{cases} F_x=2x \\ F_y=2y \\ F_z=-1 \end{cases}$ 由 $\vec{n}=(2,4,-1)$ ，得 $x=1, y=2, z=5$

则切点为 $(1,2,5)$ 切面方程：$2x+4y-z-5=0$

9. 过曲线 $\begin{cases} x=t^2+2t-2 \\ y=e^t+t \\ z=2t-1 \end{cases}$ 上对应 $t=0$ 的点切线与法平面方程。

解：当 $t=0$ 时，得点 $(-2,1,-1)$ $\quad \begin{cases} x'=2t+2=2 \\ y'=e^t+1=2 \\ z'=2 \end{cases}$ 则 $\vec{s}=\vec{n}=(1,1,1)$

切线为 $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{1}$ 法平面方程：$x+y+z+2=0$

10. 求曲线 $\begin{cases} 2x^2+3y^2+z^2=9 \\ z^2=3x^2+y^2 \end{cases}$ 在点 $M_0(1,-1,2)$ 处的切线及法平面方程。

解：$F=2x^2+3y^2+z^2-9$

$F_x'=4x\big|_{(1,-1,2)}=4 \qquad F_y'=6y\big|_{(1,-1,2)}=-6 \qquad F_z'=2z\big|_{(1,-1,2)}=4$

$\vec{n_1}=(2,-3,2)$

$F=3x^2+y^2-z^2$

$F_x'=6x\big|_{(1,-1,2)}=6 \qquad F_y'=2y\big|_{(1,-1,2)}=-2 \qquad F_z'=-2z\big|_{(1,-1,2)}=-4$

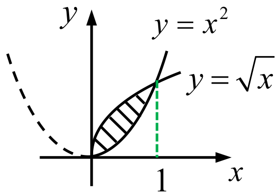
$\vec{n_2}=(3,-1,-2)$

$$\vec{s}=\vec{n}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}=(8,10,7)$$

故切线为 $\dfrac{x-1}{8}=\dfrac{y+1}{10}=\dfrac{z-2}{7}$ 法平面为 $8x+10y+7z-12=0$

课时七 练习题答案

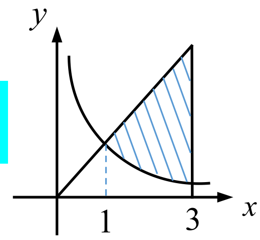
1. 求 $\iint\limits_D x\sqrt{y}d\sigma$，$D$ 是由 $y=\sqrt{x}$, $y=x^2$ 所围成的封闭区域.



解：$\iint\limits_D x\sqrt{y}d\sigma=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}} x\sqrt{y}dy$

$$=\int_0^1 \frac{2}{3}x(x^{\frac{3}{4}}-x^3)dx$$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{4}{11}x^{\frac{11}{4}}-\frac{1}{5}x^5\right)\Bigg|_0^1=\frac{6}{55}$$

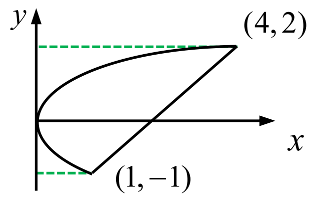


2. 计算 $\iint\limits_D xydxdy$，其中 D 是由 $y=x$, $xy=1$, $x=3$ 所围成的封闭区域.

解：$\int_1^3 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x} xydy=\int_1^3 x(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2x^2})dx=10-\frac{1}{2}\ln 3$

3. 计算 $\iint\limits_D xydxdy$，其中 D 是由 $y^2=x$, $y=x-2$ 所围成的封闭区域.

解：$\int_{-1}^2 dy\int_{y^2}^{y+2} xydx=\int_{-1}^2 y\left[\frac{1}{2}(y+2)^2-\frac{1}{2}y^4\right]dy=\frac{45}{8}$



4. 交换下列积分次序：

① $\int_1^3 dx\int_0^{x-1} f(x,y)dy$ ② $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)dy$ ③ $\int_0^1 dy\int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$

解：①原式 $=\int_0^2 dy\int_{y+1}^3 f(x,y)dx$

② 原式 $=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx$

③ 原式 $=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$

5. 求 $I=\iint\limits_D \frac{\sin x}{x}dxdy$，其中 D 是由 $y=2x$, $x=2y$ 及 $x=2$ 所围成的封闭区域.

解：$I=\iint\limits_D \frac{\sin x}{x}dxdy=\int_0^2 dx\int_{\frac{x}{2}}^{2x}\frac{\sin x}{x}dy=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\cos 2$

6. 求 $\iint\limits_D e^y dxdy$，其中 D 是由 $y=x$, $y=1$ 及 y 轴所围成的封闭区域.

解：$\iint\limits_D e^y dxdy=\int_0^1 dx\int_x^1 e^y dy=\int_0^1 (e-e^x)dx=1$

7. 设区域 D 为 $|x|\le 2,|y|\le 1$，则 $\iint\limits_D (1+x^2 y)dxdy=$________

解：$\iint\limits_D (1+x^2 y)dxdy=\iint\limits_D dxdy+0=8$

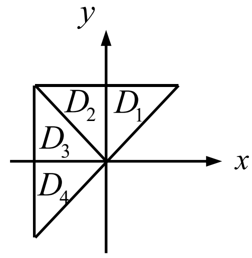
8. 设 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 4x\}$，则二重积分 $\iint\limits_D 2dxdy=$__________

解：$\iint\limits_D 2dxdy=2S_D=8\pi$

9. 设 D 是 xoy 面上以 $(1,1),(-1,1),(-1,-1)$ 为顶点的三角形区域，D_1 是 D 中在第一象限的部分，则积分 $\iint\limits_D (x^3 y+\cos^3 x\sin y)d\sigma=($ $\quad)$

$A.2\iint\limits_{D_1}\cos^3 x\sin yd\sigma$ $\quad B.2\iint\limits_{D_1}x^3 yd\sigma$ $\quad C.4\iint\limits_{D_1}(\cos^3 x\sin y+x^3 y)d\sigma$ $\quad D.0$

答案：A



由二重积分的对称性，

原式 $=\iint\limits_{D_1+D_2+D_3+D_4} x^3 y+\cos^3 x\sin yd\sigma=0+\iint\limits_{D_1+D_2}\cos^3 x\sin yd\sigma$

因为 D_1,D_2 关于 y 轴对称，所以上式 $=2\iint\limits_{D_1}\cos^3 x\sin yd\sigma$，选 A

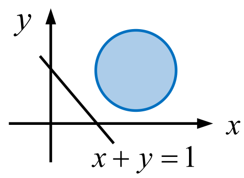
10. 设 $I_k=\iint\limits_D (x+y)^k d\sigma$ $(k=1,2,3)$，其中 $D=\{(x,y)|(x-2)^2+(y-1)^2\le 1\}$，则 I_1,I_2,I_3 间的大小关系是（ $\quad$ ）

$A.I_1<I_2<I_3$ $\quad B.I_2<I_1<I_3$ $\quad C.I_2<I_3<I_1$ $\quad D.I_3<I_2<I_1$

答案：A

由图可知，D 内所有点满足 $x+y>1$，则 $(x+y)<(x+y)^2<(x+y)^3$

即 $I_1<I_2<I_3$



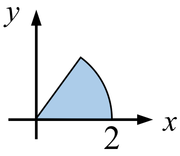
课时八　练习题答案

1. 求 $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy$，其中 D 为 $x^2+y^2\le a^2$ 围成的区域.

解：$\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a e^{\rho^2}\rho d\rho=\pi(e^{a^2}-1)$

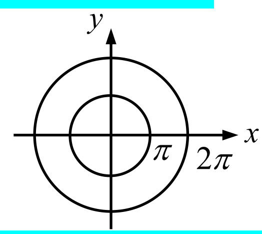
2. 计算 $I=\iint\limits_D(x^2+y^2)d\sigma$，其中 D 是由 $x^2+y^2=4$, $y=0$ 及 $y=x$ 所围成的封闭区域.

解：$I=\iint\limits_D(x^2+y^2)d\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^2\rho^2\cdot\rho d\rho=\pi$



3. 计算 $\iint\limits_D\sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中 D 是由圆环形闭区域：$\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2$.

解：$\iint\limits_D\sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_\pi^{2\pi}\sin\rho\cdot\rho d\rho=-6\pi$



4. 计算二重积分 $\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 2a,0\le y\le\sqrt{2ax-x^2}\right\}$.

解：$y=\sqrt{2ax-x^2}$　化成极坐标　$\rho^2\sin^2\theta=2a\rho\cos\theta-\rho^2\cos^2\theta$　　$\rho=2a\cos\theta$

$$\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}\rho\cdot\rho d\rho=\frac{8}{3}a^3\times\frac{2}{3}=\frac{16}{9}a^3$$

5. 求 $\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中 D 为 $x^2+(y-1)^2=1$ 围成的区域.

解：$x^2+(y-1)^2=1$　化为极坐标　$\rho=2\sin\theta$

$$\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\sin\theta}\rho\cdot\rho d\rho=\frac{8}{3}\int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta d\theta=\frac{16}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{32}{9}$$

6. 设有区域 $D=\left\{(x,y)\middle|1\le x^2+y^2\le 4\right\}$，则 $\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy=$（　　）

$A.\ 2\pi\int_1^2 rf(r^2)dr$　　　　$B.\ 2\pi\int_1^2 rf(r^2)dr-2\pi\int_1^2 rf(r)dr$

$C.\ 2\pi\int_1^2 rf(r)dr$　　　　$D.\ 2\pi\int_1^2 rf(r)dr-2\pi\int_1^2 rf(r^2)dr$

答案：C　原式 $=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2 f(r)rdr=2\pi\int_1^2 f(r)rdr$

7. 设 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$，则 $\iint\limits_D (x^2-y)dxdy=$________

答案：$\frac{\pi}{4}$

$$\iint\limits_D (x^2-y)dxdy=\iint\limits_D x^2dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2\cos^2\theta\, rdr=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta=\frac{1}{4}\times 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta=\frac{\pi}{4}$$

8. 计算 $\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}(x^2+5y^2-3xy+2x-y)dxdy=$________

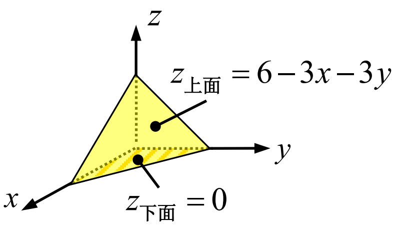
解：原式 $=\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}(x^2+5y^2)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(r^2\cos^2\theta+5r^2\sin^2\theta)\cdot rdr$

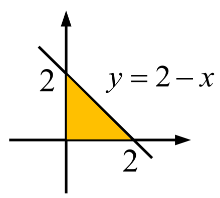
$$=\int_0^{2\pi}(4+16\sin^2\theta)d\theta=24\pi$$

课时九　练习题答案

1. 计算 $\iiint\limits_\Omega xdxdydz$，其中 Ω 为三个坐标平面与 $x+y+\frac{z}{3}=2$ 围成.

解：①$x+y+\frac{z}{3}=2$　则 $z=6-3x-3y$　　$z:0\to 6-3x-3y$





②$x:0\to 2$　　　$y:0\to 2-x$

③$\iiint\limits_\Omega xdxdydz=\int_0^2dx\int_0^{2-x}dy\int_0^{6-3x-3y}xdz=\int_0^2xdx\int_0^{2-x}(6-3x-3y)dy=2$

2. 计算 $\iiint\limits_\Omega \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$，其中 Ω 为平面 $x=0,y=0,z=0,x+y+z=1$ 围成.

解：　$z:0\to 1-x-y$　　　$x:0\to 1$　　　$y:0\to 1-x$

原式 $=\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}\frac{1}{(1+x+y+z)^3}dz=\int_0^1dx\int_0^{1-x}\left[-\frac{1}{8}+\frac{1}{2(1+x+y)^2}\right]dy=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}$

3. 求三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv$，其中 Ω 是曲面 $2z=x^2+y^2$ 与平面 $z=2$ 所围成的立体.

解： $z:\frac{1}{2}(x^2+y^2)\to 2$ 即 $\frac{1}{2}\rho^2\to 2$

ρ: 令 $z=2$ 代入得 $x^2+y^2=4$,即 $0\to 2$ $\theta:0\to 2\pi$

原式 $=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho d\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^2\rho^2dz=\frac{16\pi}{3}$

4. 设空间区域 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和 $z=\sqrt{8-x^2-y^2}$ 所围成，计算三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}zdv$.

解： $z:\sqrt{x^2+y^2}\to\sqrt{8-x^2-y^2}$ 即 $\rho\to\sqrt{8-\rho^2}$

令 $\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{8-x^2-y^2}$ 得 $x^2+y^2=4$

则 $\theta:0\to 2\pi$ $\rho:0\to 2$

$I=\iiint\limits_{\Omega}zdv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho d\rho\int_{\rho}^{\sqrt{8-\rho^2}}z\,dz=2\pi\int_0^2(4\rho-p^3)d\rho=8\pi$

5. 求曲面 $z=2x^2+y^2$ 和 $z=3-x^2-2y^2$ 所围成的几何体体积.

解： $z:2x^2+y^2\to 3-x^2-2y^2$ 即 $\rho^2+\rho^2\cos^2\theta\to 3-\rho^2-\rho^2\sin^2\theta$

令 $2x^2+y^2=3-x^2-2y^2$ 得 $x^2+y^2=1$

则 $\theta:0\to 2\pi$ $\rho:0\to 1$

$V=\iiint\limits_{\Omega}dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_{\rho^2+\rho^2\cos^2\theta}^{3-\rho^2-\rho^2\sin^2\theta}dz=2\pi\times\int_0^1(3\rho-3\rho^3)d\rho=\frac{3\pi}{2}$

6. 已知区域 Ω： $x^2+y^2+z^2\le R^2$，则三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(1+xy)dv=$ ________.

答案： $\frac{4}{3}\pi R^3$ $\iiint\limits_{\Omega}(1+xy)dv=\iiint\limits_{\Omega}dv+0=\frac{4}{3}\pi R^3$

7. 设空间区域 $V_1:x^2+y^2+z^2\le R^2$， $z\ge 0$， $V_2:x^2+y^2+z^2\le R^2$， $x\ge 0,y\ge 0,z\ge 0$，则有（ ）

$A.\iiint\limits_{V_1}xyzdv=4\iiint\limits_{V_2}xyzdv$ $B.\iiint\limits_{V_1}xdv=4\iiint\limits_{V_2}xdv$

$C.\iiint\limits_{V_1}ydv=4\iiint\limits_{V_2}ydv$ $D.\iiint\limits_{V_1}zdv=4\iiint\limits_{V_2}zdv$

答案： D

对于 $A.$ B C 项被积函数均有 x或y 对于 V，利用重积分对称性，可得值为 0

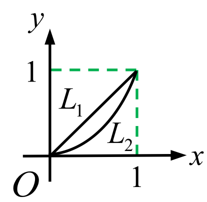
课时十　练习题答案

1. 设 $I=\int_L y^2 ds$，其中 L 为 $y=2x$，$0\le x\le 1$，则 $I=$__________.

答案：$\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$

解：$y'=2$　　$ds=\sqrt{1+2^2}dx=\sqrt{5}dx$　　$I=\int_0^1 4x^2\cdot\sqrt{5}dx=\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$

2. 计算曲线积分 $I=\oint_L xds$，其中 L 为由直线 $y=x$ 及抛物线 $y=x^2$ 所围成的区域的整个边界。



解：L_1 段：$x:0\to 1$　$y'=1$　$ds=\sqrt{1+1}dx$　$I_1=\int_0^1\sqrt{2}xdx=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

L_2 段：$x:0\to 1$　$y'=2x$　$ds=\sqrt{1+(2x)^2}dx=\sqrt{1+4x^2}dx$

$I_2=\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}dx=\dfrac{5\sqrt{5}-1}{12}$　　$I=I_1+I_2=\dfrac{6\sqrt{2}+5\sqrt{5}-1}{12}$

3. 设平面曲线 $L:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$，则 $\oint_L(4x+3y)^2 ds=$__________（设曲线长为 a）

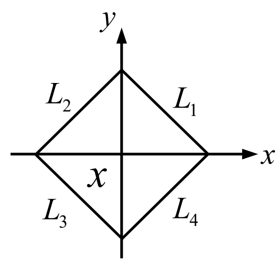
答案：$144a$　　由 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 得 $16x^2+9y^2=144$

$$\int_L(4x+3y)^2 ds=\int_L(16x^2+9y^2+24xy)ds=\int_L(16x^2+9y^2)ds=144a$$

4. $L=\{(x,y)\,\|x|+|y|=1\}$，则由 $\oint_L(xy+|x|)ds=$__________

解：$\int_L(xy+|x|)ds=\int_L|x|ds=\int_{L_1}xds+\int_{L_2}(-x)ds+\int_{L_3}(-x)ds+\int_{L_4}xds$

$\int_{L_1}xds=\int_0^1 x\sqrt{1+1}dx=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　$\oint_{L2}(-x)ds=\int_{-1}^0(-x)\sqrt{1+1}dx=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$



同理 $\int_{L3}(-x)ds=\int_{L4}xds==\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore$ 原式 $=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot 4=2\sqrt{2}$

课时十一　练习题答案

1. 计算曲线积分$\int_L (2xy-x^2)dx+(x^2+y)dy$，其中$L$是抛物线$y=x^2$上点$O(0,0)$到点$(1,1)$的一段弧.

解：$L: y=x^2 \qquad x:0\to 1$

$$\int_L (2xy-x^2)dx+(x^2+y)dy=\int_0^1 (2x\cdot x^2-x^2)dx+(x^2+x^2)2xdx=\frac{7}{6}$$

2. 计算$\int_L (x^2-\sqrt{y})dy$，其中L是抛物线$y=x^2$上点$O(0,0)$到点$(2,4)$的一段弧.

解：$L: y=x^2 \qquad x:0\to 2$

原式$=\int_0^2 (x^2-x)2xdx=\frac{8}{3}$

3. 计算$\int_L ydx+xdy$，其中L为圆周$x=R\cos\varphi$，$y=R\sin\varphi$上由$\varphi=0$到$\varphi=\frac{\pi}{2}$的一段弧.

解：$\int_L ydx+xdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[R\sin\varphi R\cdot(-\sin\varphi)+R\cos\varphi R\cos\varphi\right]d\varphi=R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2\varphi d\varphi=0$

课时十二 练习题答案

1. 计算曲线积分$\oint_L (xy^2+e^y)dy-(x^2y+e^x)dx$，其中$L$为圆周$x^2+y^2=a^2\ (a>0)$，取逆时针.

解：$P=-(x^2y+e^x) \qquad Q=xy^2+e^y \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=y^2 \qquad \frac{\partial P}{\partial y}=-x^2$

由格林公式得：

$$\oint_L (xy^2+e^y)dy-(x^2y+e^x)dx=\iint_D (y^2+x^2)d\sigma=2\pi\times\frac{1}{4}a^4=\frac{\pi a^4}{2}$$

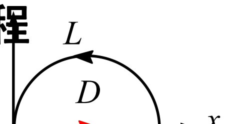
2. 计算$\oint_L (2xy-x^2)dx+(x+y^2)dy$，其中$L$由$y=x^2$和$x=y^2$围成，取逆时针方向.

解：$P=2xy-x^2 \qquad Q=x+y^2 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=1 \qquad \frac{\partial P}{\partial y}=2x$

由格林公式得：

原式$=\iint_D (1-2x)dxdy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(1-2x)dy=\frac{1}{30}$

3. 用格林公式计算$\int_L (x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy$，其中$L$是上半圆$x^2+y^2=2x$上从点$A(2,0)$到



点 $O(0,0)$ 的一段有向弧.

解：补齐 L_1，构成封闭曲线

$$P=x^2-y \qquad Q=-(x+\sin^2 y) \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=-1 \qquad \frac{\partial P}{\partial y}=-1$$

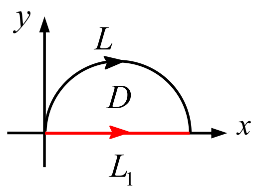
在 $L+L_1$ 上：$\int_L (x^2-y)dx-(x^2+\sin^2 y)dy=\iint_D(-1+1)dxdy=0$

在 L_1 上：$y=0 \quad x:0\to 2 \quad \int_{L_1} x^2dx=\int_0^2 x^2dx=\frac{8}{3}$

在 L 上：$\int_L = \oint_{L+L_1} - \int_{L_1} = 0-\frac{8}{3}=-\frac{8}{3}$

4. 已知 L 是第一象限中从点 $(0,0)$ 沿圆周 $x^2+y^2=2x$ 到点 $(2,0)$ 的一段弧，求曲线积分 $\int_L 3x^2ydx+(x^3+x-2y)dy$（取逆时针方向为正方向）.

解：补齐 L_1，构成封闭曲线



$$P=3x^2y \qquad Q=x^3+x-2y$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=3x^2+1 \qquad \frac{\partial P}{\partial y}=3x^2$$

用 L^- 表示与 L 方向相反的曲线

在 L^-+L_1 上 $\quad \oint_{L^-+L_1} 3x^2ydx+(x^3+x-2y)dy=\iint_D dxdy=\frac{\pi}{2}$

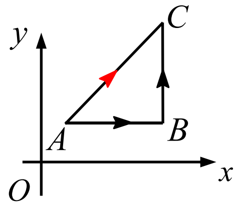
在 L_1 上：$y=0 \quad x:0\to 2 \quad \int_{L_1} =0$

在 L^- 上 $\quad \int_{L^-} = \oint_{L^-+L_1} - \int_{L_1} = \frac{\pi}{2}$

则在 L 上：$\int_L 3x^2ydx+(x^3+x-2y)dy=-\frac{\pi}{2}$

5. 计算$\int_L (6xy^2-y^3)dx+(6x^2y-3xy^2)dy$，其中 L 为 $(1,2)$ 到 $(3,4)$ 的直线.

解：$P=6xy^2-y^3$ $\qquad Q=6x^2y-3xy^2$



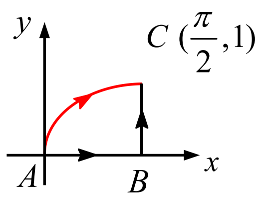
$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=12xy-3y^2 \qquad \dfrac{\partial P}{\partial y}=12xy-3y^2$

则$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，故积分与路径无关。

原式$=\int_{AB}(24x-8)dx+\int_{BC}(54y-9y^2)dy=\int_1^3(24x-8)dx+\int_2^4(54y-9y^2)dy=236$

6. 计算$\int_L (2xy^3-y^2\cos x)dx+(3x^2y^2-2y\sin x)dy$，其中 L 为抛物线 $2x=\pi y^2$ 上由 $(0,0)$ 到 $(\dfrac{\pi}{2},1)$ 的一段弧.

解：$P=2xy^3-y^2\cos x$ $\qquad Q=3x^2y^2-2y\sin x$



$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=6xy^2-2y\cos x \qquad \dfrac{\partial P}{\partial y}=6xy^2-2y\cos x$

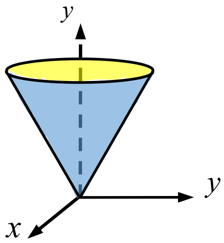
则$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，故积分与路径无关。

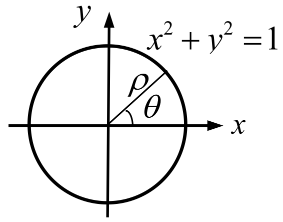
原式$=\int_{AB} \ +\int_{BC}\left(\dfrac{3\pi^2}{4}y^2-2y\right)dy=\int_0^1\left(\dfrac{3\pi^2}{4}y^2-2y\right)dy=\dfrac{\pi^2}{4}-1$

课时十三 练习题答案

1. 计算$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS$，其中$\Sigma$是锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被平面$z=1$所截得的部分.

解：





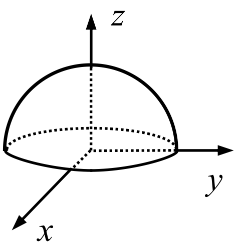
$$dS=\sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2}\,dxdy=\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,dxdy=\sqrt{2}dxdy$$

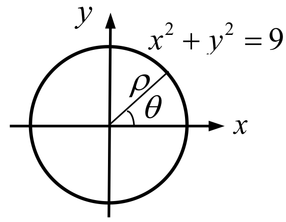
投影区域$D_{xy}:\begin{cases}\theta:0\to 2\pi\\ \rho:0\to 1\end{cases}$

$$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^2\cdot\rho d\rho=2\sqrt{2}\pi\times\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$$

2. 计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}zdS$，其中Σ为上半球面$z=\sqrt{9-x^2-y^2}$.

解：





$$dS=\sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2}\,dxdy=\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}\right)^2}\,dxdy=\frac{3}{\sqrt{9-x^2-y^2}}dxdy$$

投影区域$D_{xy}:\begin{cases}\theta:0\to 2\pi\\ \rho:0\to 3\end{cases}$

$$\iint\limits_{\Sigma}zdS=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{9-x^2-y^2}\cdot\frac{3}{\sqrt{9-x^2-y^2}}dxdy=3S_{D_{xy}}=27\pi$$

3. 求旋转抛物面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 介于 $z=0$ 与 $z=\frac{1}{2}$ 之间的面积.

解：$dS=\sqrt{1+{z_x}^2+{z_y}^2}\,dxdy=\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy$

投影区域 D_{xy}：令 $z=\frac{1}{2}$ 得 $x^2+y^2=1$　　$\begin{cases}\theta:0\to 2\pi\\ \rho:0\to 1\end{cases}$

$$\iint\limits_{\Sigma} dS=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\sqrt{1+\rho^2}\cdot\rho d\rho=\frac{(4\sqrt{2}-2)\pi}{3}$$

4. 设 S 为平面 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ 在第一象限的部分，则曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(z+2x+\frac{4}{3}y)dS=$ ________.

解：由 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$　　得 $2x+\frac{4}{3}y+z=4$　　则 $\iint\limits_{\Sigma}(z+2x+\frac{4}{3}y)dS=4\iint\limits_{\Sigma}dS$

投影区域 D_{xy}：令 $z=0$ 得 $3x+2y=6$

则 $\iint\limits_{\Sigma}dS=\iint\limits_{Dxy}\sqrt{1+{z_x}^2+{z_y}^2}\,dxdy=\int_0^2dx\int_0^{3-\frac{3x}{2}}\sqrt{1+4+\frac{16}{9}}dy=\sqrt{61}$

5. 设曲面 Σ：$x^2+y^2+z^2=a^2$，则 $\oiint\limits_{\Sigma}(2x^2+y^2)dS=$ ________

解：曲面 Σ 为球面，可利用积分的轮换对称性

$$\iint\limits_{\Sigma}(2x^2+y^2)dS=\iint\limits_{2}(x^2+y^2+z^2)ds=a^2\iint\limits_{\Sigma}ds=4\pi a^4$$

课时十五 练习题答案

1. 计算 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 的外侧，则 $\oiint\limits_{\Sigma}xdydz+ydxdz+zdxdy=$ ________.

答案：108π

$P=x\quad Q=y\quad R=z\qquad \frac{\partial P}{\partial x}=1\quad \frac{\partial Q}{\partial y}=1\quad \frac{\partial R}{\partial z}=1$

由高斯公式得：$\oiint\limits_{\Sigma}xdydz+ydxdz+zdxdy=\iiint\limits_{\Omega}(1+1+1)dxdydz=108\pi$

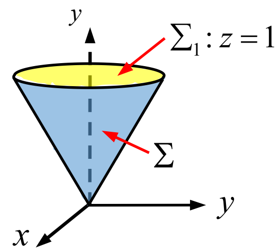
2. 计算曲面积分 $\oiint\limits_{\Sigma}(x-y)dxdy+x(y-z)dydz$，其中闭曲面 Σ 由 $x^2+y^2=1$，$z=0$，$z=3$ 所围成的外侧。

答案：$-\dfrac{9\pi}{2}$

$$P=x(y-z) \qquad Q=0 \qquad R=x-y \qquad \frac{\partial P}{\partial x}=y-z \qquad \frac{\partial R}{\partial z}=0$$

$$\oiint\limits_{\Sigma}(x-y)dxdy+x(y-z)dydz=\iiint\limits_{\Omega}(y-z)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_0^3(\rho\sin\theta-z)dz=-\frac{9\pi}{2}$$

3. 计算第二类曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x+yz^2)dydz+(4y+1)dzdx+zdxdy$，其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(0\le z\le 1)$ 的下侧。



解：补齐 Σ_1 面 z=1，取向上为正

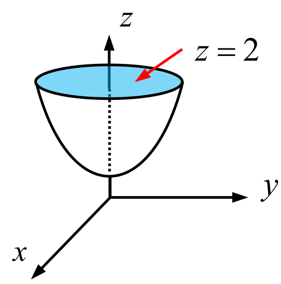
$$P=x+yz^2 \qquad Q=4y+1 \qquad R=z \qquad \frac{\partial P}{\partial x}=1 \qquad \frac{\partial Q}{\partial y}=4 \qquad \frac{\partial R}{\partial z}=1$$

在 $\Sigma+\Sigma_1$ 上的积分 $\quad I=\iiint\limits_{\Omega}(1+4+1)dxdydz=6\times\dfrac{\pi}{3}\times1\times1=2\pi$

在 Σ_1 上的积分 $\quad \Sigma_1:z=1 \quad I=\iint\limits_{\Sigma}dxdy=\pi$

在 Σ 上的积分 $\quad \iint\limits_{\Sigma}=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}=2\pi-\pi=\pi$

4. 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}2xz^2dydz+y(z^2+1)dzdx+(9-z^3)dxdy$，其中 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2+1$ $(1\le z\le 2)$，取下侧。



解：补齐 Σ_1 面 $z=2$，取向上为正

$$P=2xz^2 \qquad Q=y(z^2+1) \qquad R=9-z^3$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}=2z^2 \qquad \frac{\partial Q}{\partial y}=z^2+1 \qquad \frac{\partial R}{\partial z}=-3z^2$$

在 $\Sigma+\Sigma_1$ 上：$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}2xz^2dydz+y(z^2+1)dzdx+(9-z^3)dxdy=\iiint\limits_{\Omega}(2z^2+z^2+1-3z^2)dxdydz$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}(2-x^2-y^2-1)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(1-\rho^2)\rho d\rho=\frac{\pi}{2}$$

在Σ_1上： $I=\iint\limits_{\Sigma}dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}dxdy=\pi$

在Σ上： $\iint\limits_{\Sigma}=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}=-\dfrac{\pi}{2}$

5. 计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)dydz-zdxdy$，设其中$\Sigma$为曲面$x^2+y^2=2z$被平面$z=2$所截得部分的下侧。

解：补齐Σ_1面$z=2$，取向上为正

$P=z^2+x \quad Q=0 \quad R=-z \qquad \dfrac{\partial P}{\partial x}=1 \qquad \dfrac{\partial R}{\partial z}=-1$

在$\Sigma+\Sigma_1$上： $\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(z^2+x)dydz-zdxdy=\iiint\limits_{\Omega}0\ dxdydz=0$

在Σ_1上： $\Sigma_1:z=2 \quad \iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)dydz-zdxdy=-\iint\limits_{\Sigma}2dxdy=-2\iint\limits_{D_{xy}}dxdy=-8\pi$

在Σ上： $\iint\limits_{\Sigma}=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}=8\pi$

6. 计算$\iint\limits_{\Sigma}(y^2-x)dydz+(z^2-y)dzdx+(x^2-z)dxdy$，其中$\Sigma$是抛物面$z=2-x^2-y^2$位于$z\geq 0$部分的上侧。

解：补齐Σ_1面$z=0$，取向下

$P=y^2-x \quad Q=z^2-y \quad R=x^2-z \qquad \dfrac{\partial P}{\partial x}=-1 \quad \dfrac{\partial Q}{\partial y}=-1 \quad \dfrac{\partial R}{\partial z}=-1$

在$\Sigma+\Sigma_1$上 $\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(y^2-x)dydz+(z^2-y)dzdx+(x^2-z)dxdy=\iiint\limits_{\Omega}(-3)\ dxdydz$

$$=-3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}(2-\rho^2)\cdot\rho d\rho=-6\pi$$

在Σ_1上的积分 $\iint\limits_{\Sigma_1}x^2dxdy=-\iint\limits_{D_{xy}}x^2dxdy=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\rho^2\cos^2\theta\cdot\rho d\rho=-\pi$

在Σ上的积分 $\iint\limits_{\Sigma}=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}=-6\pi-(-\pi)=-5\pi$

课时十六　练习题答案

1. 求级数的和：$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}=$________.

答案：$\frac{3}{2}$　　原式$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)=\frac{3}{2}$

2. 级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$的和等于________.

解：原式$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{3}{4}$$

3. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{q^n}$收敛（$a$为常数），则$q$满足的条件是（　　）.

$A.\ q=1$　　$B.\ |q|<1$　　$C.\ q=-1$　　$D.\ |q|>1$

答案：D

4. 当（　　）时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\ (p>0)$是收敛的.

$A.\ p=1$　　$B.\ p<1$　　$C.\ p>1$　　$D.\ p\neq 1$

答案：C

5. 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=2$，则$\sum_{n=1}^{\infty}(3u_n-\frac{5}{2^n})$________

$A.$ 收敛到-4　　$B.$ 收敛到1　　$C.$ 发散　　$D.$ 无法求和

答案：B　　原式$=\sum_{n=1}^{\infty}3u_n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{2^n}=6-5\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$

6. 判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$的敛散性.

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}\cdot\frac{n^n}{2^n\cdot n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^n}{(n+1)^n}=\frac{2}{e}<1$ ，则该级数收敛。

7. 判定正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 2^n}{3^n}$的敛散性.

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)2^{n+1}}{3^{n+1}}\cdot\frac{3n}{n\cdot 2^n}=\frac{2}{3}<1$ ，则该级数收敛。

8. 判定正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$的敛散性.

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\sin\frac{\pi}{3^{n+1}}}{2^n\cdot\sin\frac{\pi}{3^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\times\frac{\pi}{3^{n+1}}}{\frac{\pi}{3^n}}=\frac{2}{3}<1$ ，则该级数收敛。

9. 判断正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^2\tan(\frac{\pi}{3^n})$的敛散性.

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)^2\tan\left(\frac{\pi}{3^{n+1}}\right)}{(n+1)^2\tan\left(\frac{\pi}{3^n}\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{3^{n+1}}}{\frac{\pi}{3^n}}=\frac{1}{3}<1$ ，则该级数收敛。

10. 级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$的敛散性为________.

答案：收敛

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ ，且$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}$ 即$u_{n+1}<u_n$，则该级数收敛。

11. 判断正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\ln(n+1)}$的敛散性.

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}=0$ ，且$\frac{1}{\ln(n+2)}<\frac{1}{\ln(n+1)}$ 即$u_{n+1}<u_n$，则该级数收敛。

12. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{1}{n}$的收敛性为___________（绝对收敛、条件收敛、发散）

解：$\left|(-1)^n \sin\frac{1}{n}\right| = \sin\frac{1}{n}$　　$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 同敛散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ 发散

$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n}=0$，且当 $n\geq 1$ 时，$\sin\frac{1}{n+1}<\sin\frac{1}{n}$ 即 $u_{n+1}<u_n$ 则该级数收敛。

即原级数条件收敛。

13. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(e^{\frac{1}{n}}-1)$ 的敛散性，若收敛，指出是绝对收敛还是条件收敛。（写出判别过程）

解：$\left|(-1)^{n-1}(e^{\frac{1}{n}}-1)\right| = e^{\frac{1}{n}}-1$　　对于 $\sum_{n=1}^{\infty}(e^{\frac{1}{n}}-1)$ 因为 $n\to\infty$ 时，$e^{\frac{1}{n}}-1$ 与 $\frac{1}{n}$ 等价

则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，可得出 $\sum_{n=1}^{\infty}(e^{\frac{1}{n}}-1)$ 发散，因此原级数不是绝对收敛。

原级数为交错级数，$\lim_{n\to\infty}(e^{\frac{1}{n}}-1)=0$，且 $e^{\frac{1}{n+1}}-1<e^{\frac{1}{n}}-1$ 则原级数收敛。

最后得出原级数条件收敛。

14. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\cdot 6^n}$ 是否收敛，若收敛，指出绝对收敛还是条件收敛。

解：$\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n\cdot 6^n}\right| = \frac{1}{n\cdot 6^n}$　　对于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 6^n}$　　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)6^{n+1}}\cdot n\cdot 6^n = \frac{1}{6}<1$

则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 6^n}$ 收敛，可得原级数绝对收敛。

课时十七 练习题答案

1. 求无穷级数的和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n\cdot n}$ 的收敛半径和收敛域.

解：$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{3^{n+1}\cdot(n+1)}\cdot\frac{3^n\cdot n}{x^n}\right|=\left|\frac{x}{3}\right|<1\Rightarrow -3<x<3$

则该级数的收敛区间为 $(-3,3)$，收敛半径 $R=3$

当 $x=3$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散　　当 $x=-3$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ 收敛，

所以收敛域为 $[-3,3)$

2. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$ 的收敛半径与收敛域.

解：$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-5)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\cdot\frac{\sqrt{n}}{(x-5)^n}\right|=|x-5|<1$

得 $4<x<6$，则收敛半径 $R=1$

当 $x=4$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛　　当 $x=6$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散，

所以收敛域为 $[4,6)$

3. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n^2}$ 的收敛域.

解：$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{(-1)^{n+1}(x-1)^n}\right|=|x-1|<1$　　得 $0<x<2$

当 $x=0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n^2})$ 收敛

当 $x=2$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$ 收敛，所以收敛域为 $[0,2]$

4. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{4^n}\cdot x^{2n}$ 的收敛半径是________.

答案：2 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+2)\cdot x^{2n+2}}{4^{n+1}}\cdot\frac{4^n}{(n+1)\cdot x^{2n}}\right|=\left|\frac{x^2}{4}\right|<1$ 得 $-2<x<2$，则收敛半径 $R=2$

5. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ 的收敛域及和函数.

解：$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x^n}{nx^{n-1}}\right|=|x|<1$ 得 $-1<x<1$

当 $x=-1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n$ 发散 当 $x=1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}n$ 发散，

所以收敛域为 $(-1,1)$

令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ $\int S(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=x+x^2+\cdots+x^n=\frac{x}{1-x}$

$S(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1-x+x}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2}$ ，所以和函数为 $\frac{1}{(1-x)^2}$

6. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ 的收敛域与和函数.

解：$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\cdot\frac{2n-1}{x^{2n-1}}\right|=\left|x^2\right|<1$ 得 $-1<x<1$

当 $x=-1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{2n-1}$ 收敛 当 $x=1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ 发散，

所以收敛域为 $(-1,1)$

令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}=1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n-2}=\frac{1}{1-x^2}$

$$\int S'(x)dx=\int\frac{1}{1-x^2}dx=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right)dx=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$$

所以和函数为 $S(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$

7. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n\cdot 3^n}$ 的收敛域与和函数.

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}\cdot\frac{n\cdot 3^n}{(x-1)^n}\right|=\left|\frac{x-1}{3}\right|<1$ 　　得 $-2<x<4$

当 $x=-2$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ 收敛 　　当 $x=4$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所以收敛域为 $[-2,4)$

令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n\cdot 3^n}$

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x-1}{3}\right)^{n-1}=1+\frac{x-1}{3}+\left(\frac{x-1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{x-1}{3}\right)^{n-1}=\frac{3}{4-x}$$

$\int S'(x)dx=\int\frac{3}{4-x}dx=-3\ln(4-x)$，所以和函数 $S(x)=-3\ln(4-x)$

8. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$ 的和函数.

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{n(n+1)}{x^n}\right|=|x|<1$ 　　得 $-1<x<1$

当 $x=-1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n(n+1)}$ 收敛

当 $x=1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 收敛，所以收敛域为 $[-1,1]$

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}，\quad xS(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\right)''=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x},x\in(-1,1)$$

$$\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=-\ln(1-x)\ ,\ \int_0^x-\ln(1-t)dt=(1-x)\ln(1-x)+x$$

即 $xS(x)=(1-x)\ln(1-x)+x$，

所以当 $x\neq 0$ 时，$S(x)=\frac{(1-x)\ln(1-x)}{x}+1,x\in(-1,0)\cup(0,1)$

当 $x=0$ 时，由和函数的连续性得到 $s(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-x)\ln(1-x)}{x}+1=0$

所以$s(x)=\begin{cases}\dfrac{(1-x)\ln(1-x)}{x}+1 & ,\ x\in(-1,0)\cup(0,1)\\ 0 & ,\ x=0\end{cases}$

9. 求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^n$的收敛域及和函数$S(x)$，并计算数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2n-1}{2^n}$的和.

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(2n+1)x^{n+1}}{(2n-1)x^n}\right|=|x|<1$ 得$-1<x<1$

当$x=-1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2n-1)$发散 当$x=1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-1)$发散，

所以收敛域为$(-1,1)$

令$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}2n\cdot x^n-\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n=2x\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\cdot x^{n-1}-\dfrac{x}{1-x}$

令$S_1(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\cdot x^{n-1}$ $\int S_1(x)dx=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n=\dfrac{x}{1-x}$

所以 $S_1(x)=\left(\dfrac{x}{1-x}\right)'=\dfrac{1}{(1-x)^2}$

$$S(x)=\frac{2x}{(1-x)^2}-\frac{x}{1-x}=\frac{x}{x-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^n(2n-1)=-S(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{3}$$

10. 将函数$f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$展开成关于$(x+4)$的幂级数.

解：$f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{x+4-3}-\dfrac{1}{x+4-2}$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{\left(\frac{x+4}{3}\right)-1}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{\left(\frac{x+4}{2}\right)-1}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{3}\right)^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{2}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n$$

其中$\dfrac{(x+4)}{3}\in(-1,1)\Rightarrow x\in(-7,-1)$ $\dfrac{(x+4)}{2}\in(-1,1)\Rightarrow x\in(-6,-2)$

所以$x\in(-6,-2)$

11. 将函数 $f(x)=\ln(3+x)$ 展开成关于 $(x-1)$ 的幂级数.

解：$f(x)=\ln(x-1+4)=\ln4\left(\dfrac{x-1}{4}+1\right)=\ln4+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}4^{-n}}{n}(x-1)^n$

其中 $-1<\dfrac{x-1}{4}\leqslant1 \Rightarrow -3<x\leqslant5$

12. 已知 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，且 $f(x)=\begin{cases}3x^2+2 & (0<x<1)\\ x & (-1\le x\le 0)\end{cases}$，则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=0$ 处收敛于__________.

答案：1

解：$\lim\limits_{x\to0^+}(3x^2+2)=2 \qquad \lim\limits_{x\to0^-}x=0 \qquad \dfrac{2+0}{2}=1$ 　故 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=0$ 处收敛于1

13. 设 $f(x)$ 为周期为 2π 的函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为 $f(x)=\begin{cases}x^2, & -\pi\le x<0\\ \pi-x, & 0\le x<\pi\end{cases}$，则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=2\pi$ 处收敛于______.

答案：$\dfrac{\pi}{2}$

解：$f(x)$ 周期为 2π，则傅里叶级数在 $x=2\pi$ 和 $x=0$ 处收敛于同一值

$\lim\limits_{x\to0^+}(\pi-x)=\pi \qquad \lim\limits_{x\to0^-}x^2=0 \qquad \dfrac{\pi+0}{2}=\dfrac{\pi}{2}$

故 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=0$ 和 $x=2\pi$ 处收敛于 $\dfrac{\pi}{2}$.