STRUKTURY DANYCH
I ZŁOŻONOŚĆ OBLICZENIOWA

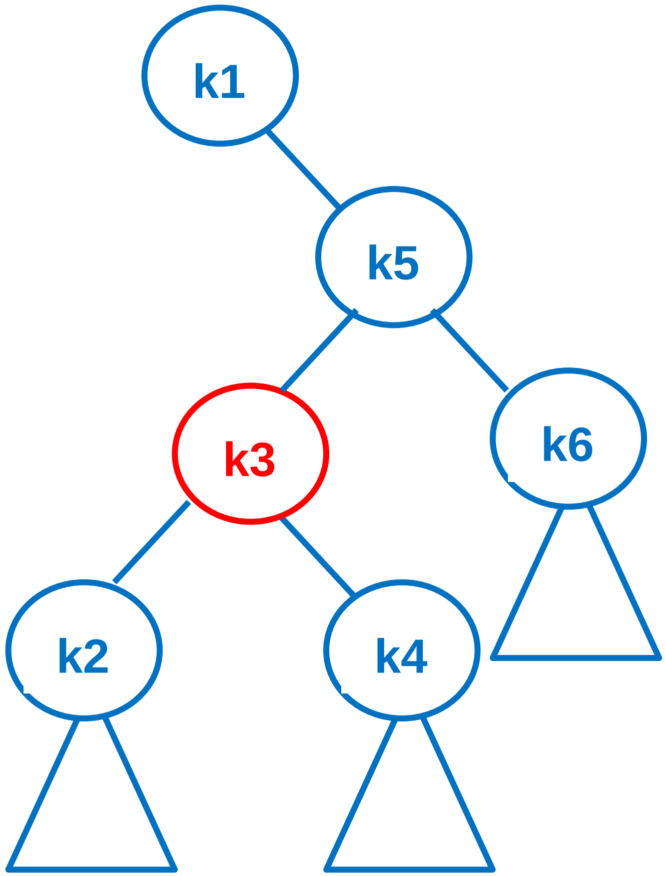
Część 5

Rotacje, algorytm DSW, AVL-drzewa

ROTACJA WĘZŁÓW DRZEWA BST

Rotacja (w prawo albo w lewo) – lokalna operacja promowania rotowanego węzła na poziom o numerze o jeden mniejszym, zachowująca porządek właściwy dla BST.

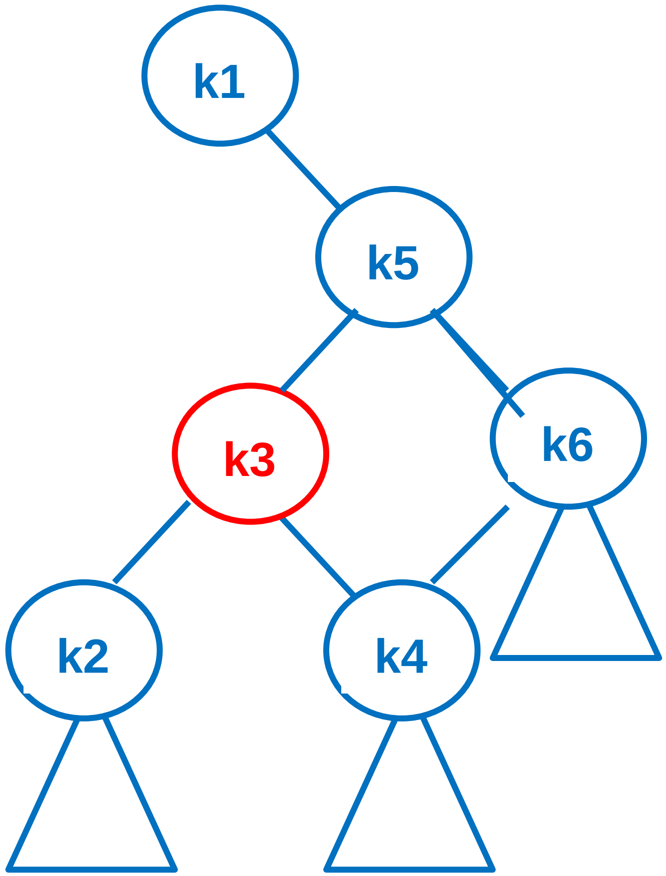
Przykład: rotacja węzła k3 w prawo



ROTACJA WĘZŁÓW DRZEWA BST

Rotacja (w prawo albo w lewo) – lokalna operacja promowania rotowanego węzła na poziom o numerze o jeden mniejszym, zachowująca porządek właściwy dla BST.

Przykład: rotacja węzła k3 w prawo

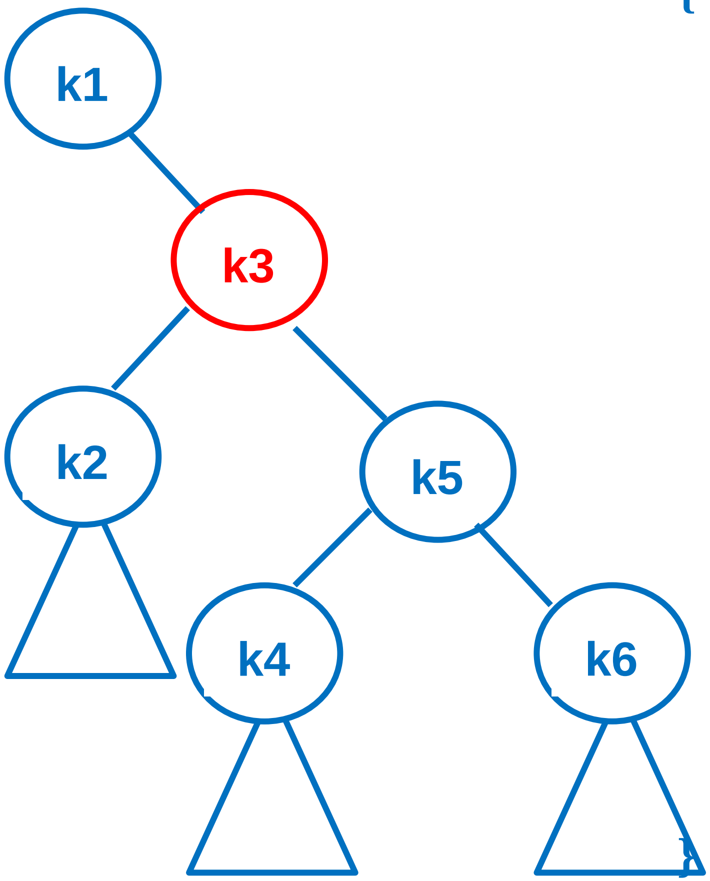



```
rotate_right(grandfather, parent, child)
{
   if (grandfather ≠ NULL )
   {
     if (grandfather→right = parent)
             grandfather→right ← child;
      else   grandfather→left ← child;
   }
   else
         root ← child;//zmiana korzenia drzewa

   tmp ← child→right;
   child→right ← parent;
   parent→left ← tmp;

   return;
}
```

ROTACJA WĘZŁÓW DRZEWA BST

Rotacja (w prawo albo w lewo) – lokalna operacja promowania rotowanego węzła na poziom o numerze o jeden mniejszym, zachowująca porządek właściwy dla BST.

Przykład: rotacja węzła k3 w prawo




```
rotate_right(grandfather, parent, child)
{
  if (grandfather ≠ NULL )
  {
   if (grandfather→right  = parent)
          grandfather→right ← child;
    else  grandfather→left ← child;
  }
  else
      root ← child;//zmiana korzenia drzewa

  tmp ← child→right;
  child→right ← parent;
  parent→left ← tmp;

  return;
}
```

Algorytm DSW dokładnego wyważania drzewa BST
(C.Day – 1976; Q.F.Stout & B.Warren – 1986)

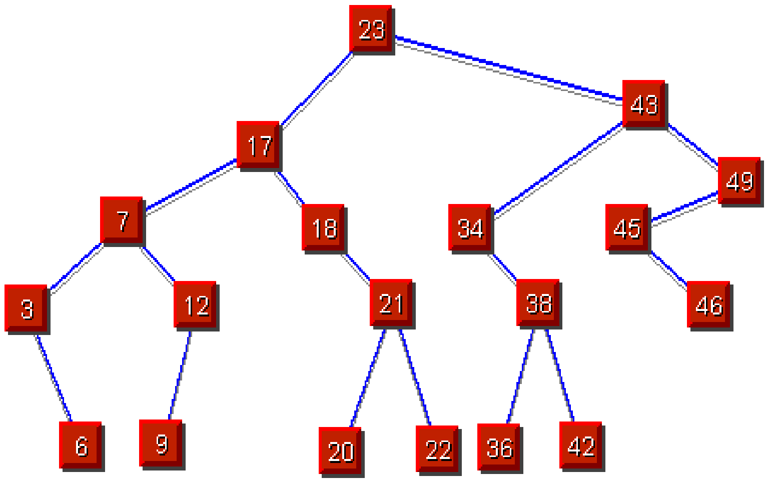
Faza I

Przekształcenie dowolnego drzewa BST w listę liniową za pomocą rotacji w prawo kolejnych lewych potomków napotykanych w „wędrówce" od korzenia do skrajnego prawego węzła o największej wartości klucza.

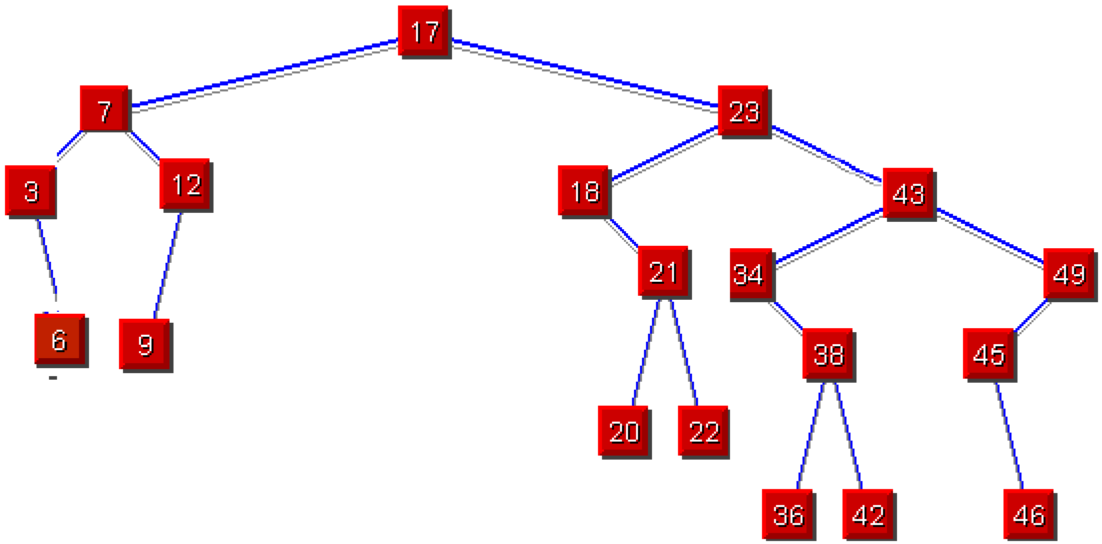
```
make_intermediate_list(root)
{
   grandfather ← NULL;
   tmp ← root;
   while (tmp ≠ NULL)
   {  if ((tmp→left) ≠ NULL)//UWAGA: zmiana „root'a" obsłużona w rotacji !
      {
         tmp2 ← tmp→left;
         rotate_right(grandfather, tmp, tmp→left);
         tmp ← tmp2;
      }
      else
      {  grandfather ← tmp;
         tmp ← tmp→right; }
   }//                    Złożoność I fazy algorytmu DSW O(N)
}//         Liczba rotacji ≤ N-1; liczba wykonań pętli „while" ≤  2N-1)
```

Algorytm DSW – faza I

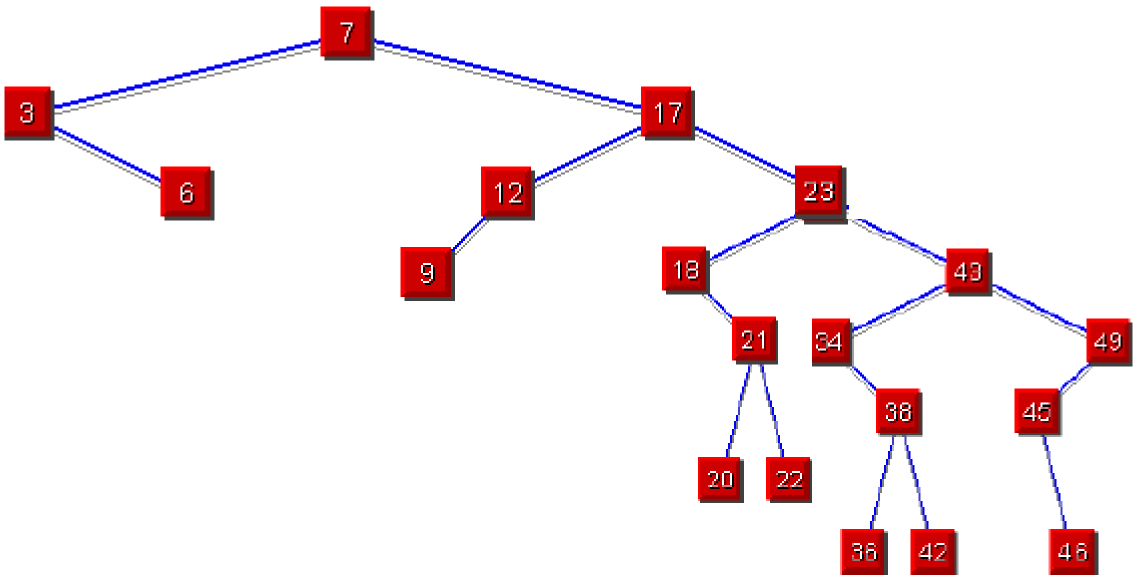
(przykład)



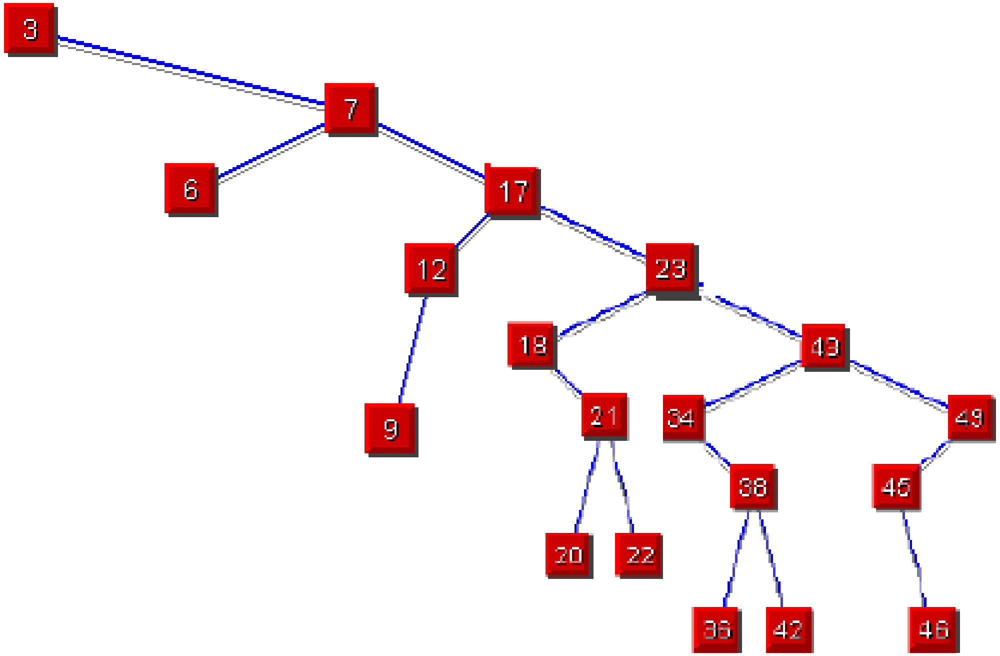
Algorytm DSW – faza I
(przykład)



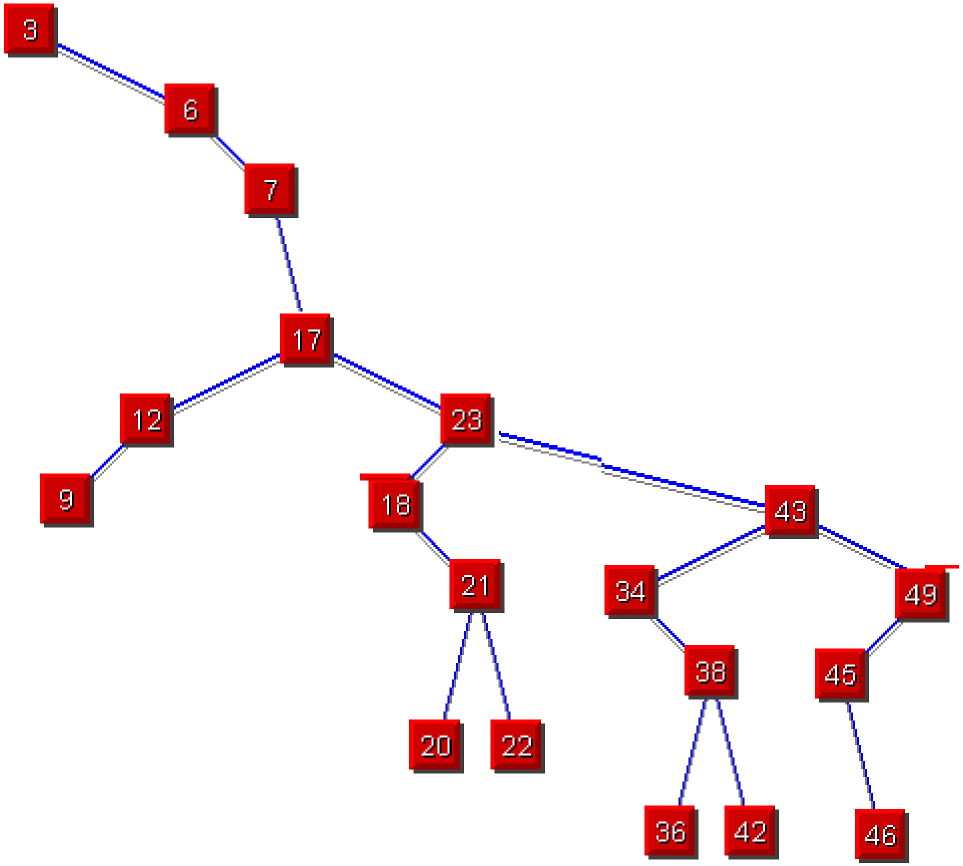
Algorytm DSW – faza I
(przykład)



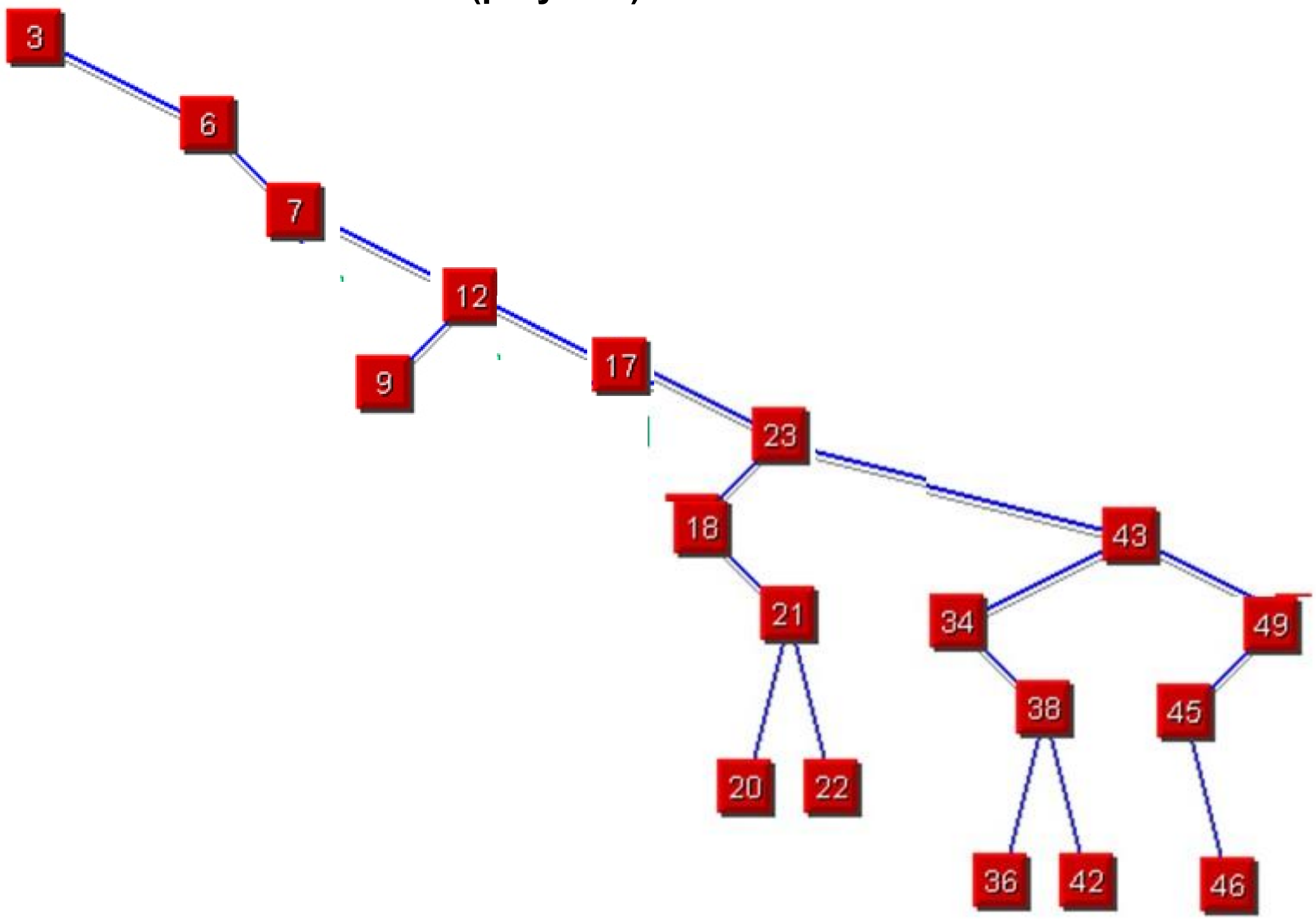
Algorytm DSW – faza I
(przykład)



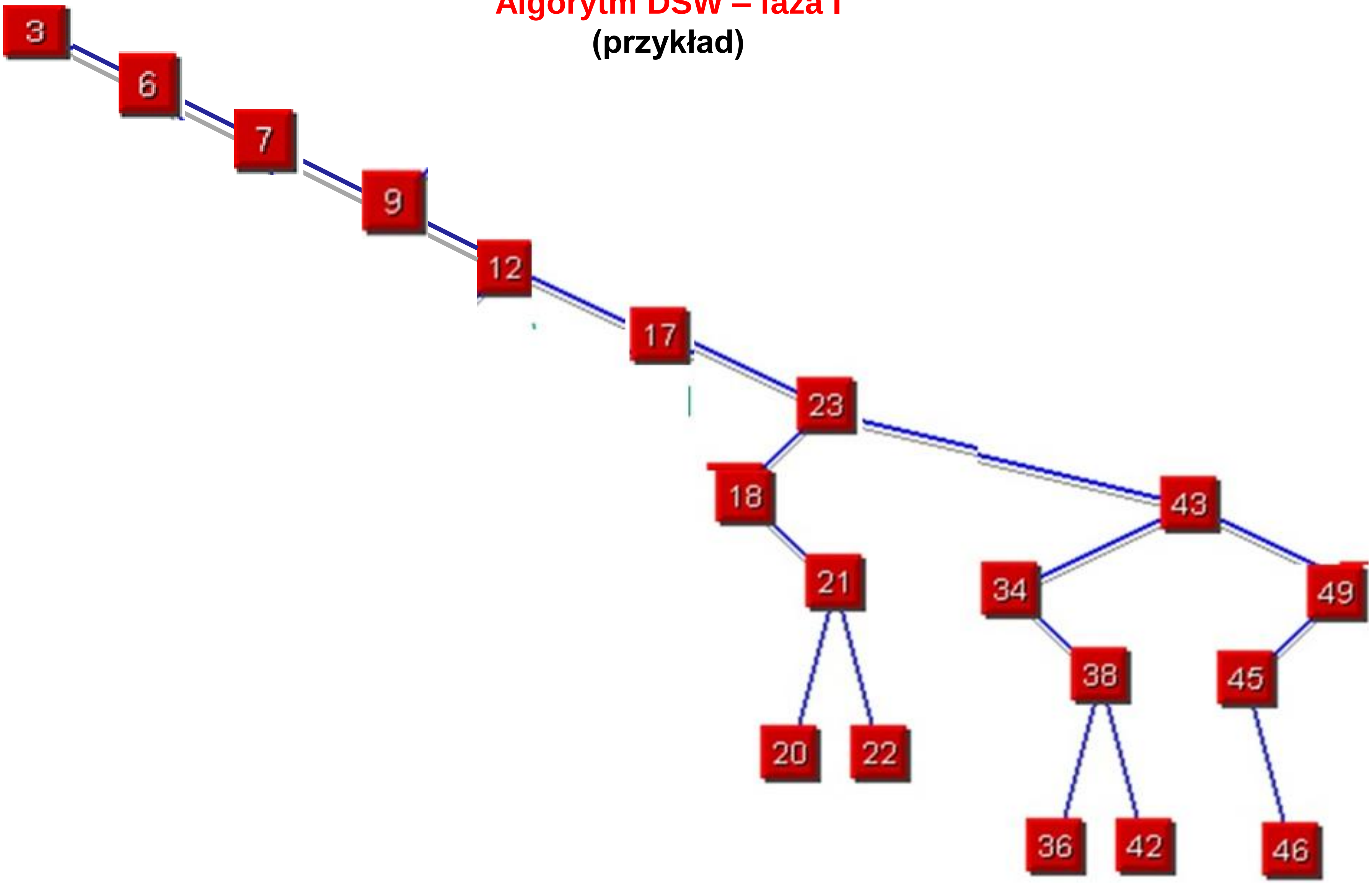
Algorytm DSW – faza I
(przykład)



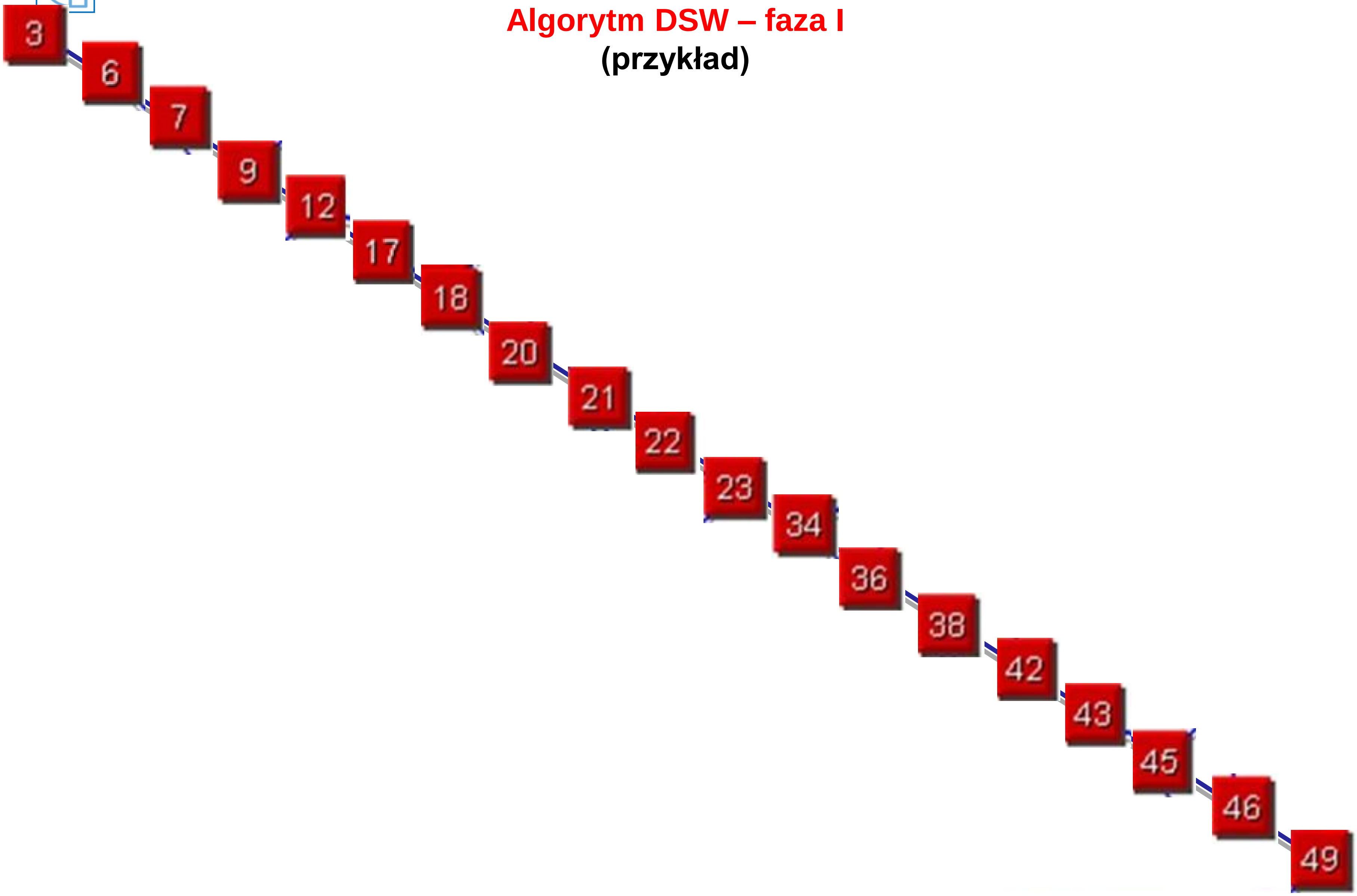
Algorytm DSW – faza I
(przykład)



Algorytm DSW – faza I
(przykład)



Algorytm DSW – faza I
(przykład)



Faza II

Wyważanie za pomocą rotacji w lewo określonych węzłów (faza ma swoje podfazy, których liczba zależy od liczby węzłów w drzewie).

Pojedyncza podfaza fazy II polega na „wędrówce" w dół drzewa, przy czym rotowany jest co drugi węzeł, zaś wybiera się węzły należące do drogi wiodącej od korzenia do elementu o największej wartości klucza, czyli „przemieszczając się" w kierunku prawych potomków. Pierwszym rotowanym w podfazie węzłem jest prawy potomek korzenia.

W każdym cyklu długość drogi wiodącej do ostatniego elementu listy zmniejsza się „dwukrotnie". W przypadku, gdy końcowe dokładnie wyważone drzewo nie będzie miało „kompletu" węzłów na ostatnim poziomie (tzn. $h \neq log_2(N+1)$**), należy w pierwszym cyklu zakończyć wędrówkę po wykonaniu** $N\text{-}m$ **rotacji, gdzie:**

$$m = 2^{(int)\,log_2(N+1)} - 1$$

Dygresja

Parametr m **można także obliczyć następująco:**

$m \leftarrow 1;$

$\text{while } (\, m \leq N \,)\ m \leftarrow 2 * m + 1;$

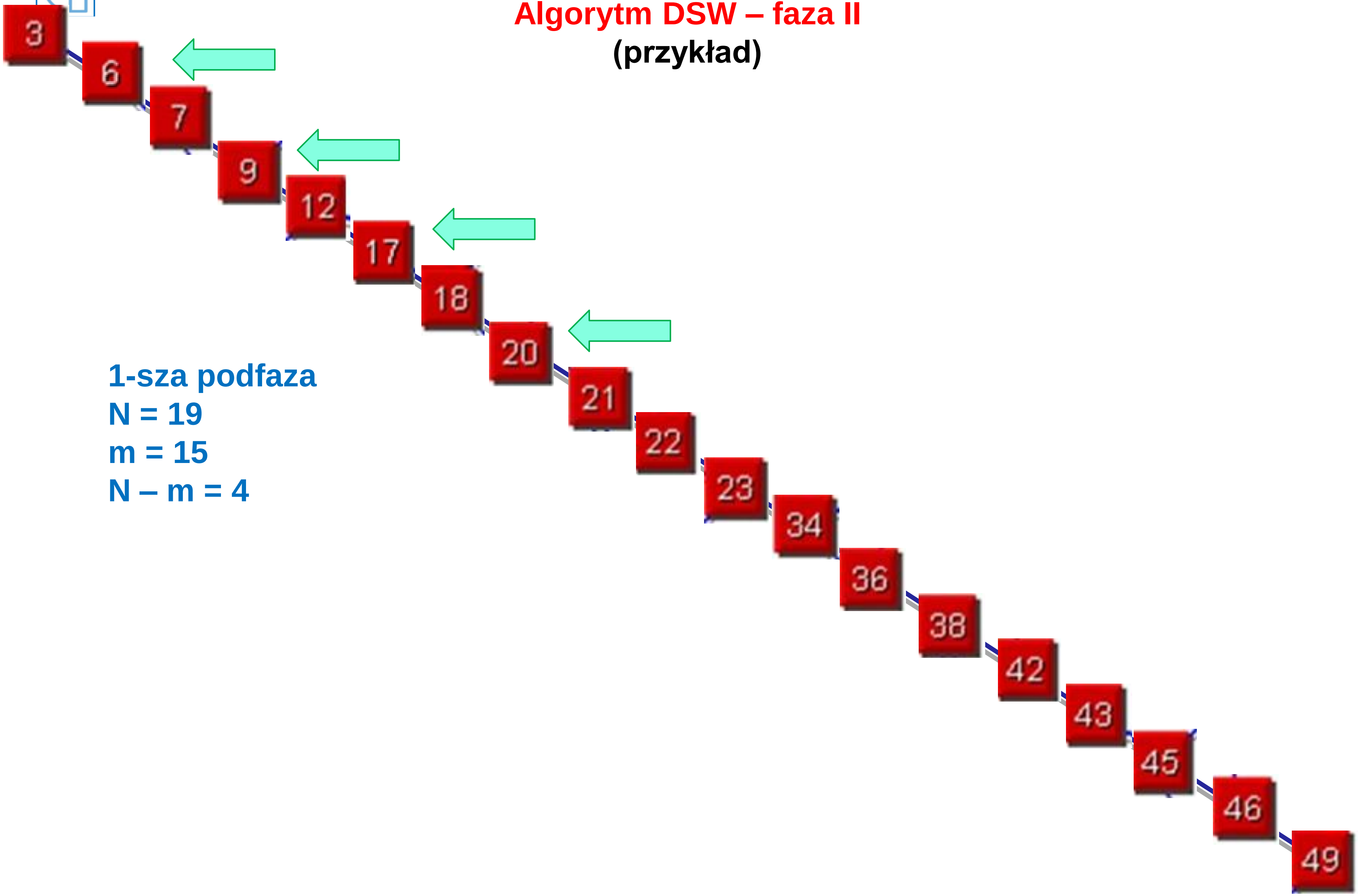
$m \leftarrow m / 2;$

Faza II (pseudokod)

```
make_perfect_tree(N)//N – rzeczywista liczba węzłów na liście
{
   grandfather ← NULL; tmp ← root;
   m ← 1;
   while ( m ≤ N ) m ← 2 * m + 1;
   m ← m / 2;
   for (i ← 0; i < (N-m); i++)
   {  tmp2 ← tmp→right;
      if ( tmp2 ≠ NULL )
      {  rotate_left(grandfather, tmp, tmp→right);
         grandfather ← tmp2;
         tmp ← tmp2→right; } }
   while (m>1)
   {  m ← m/2;  grandfather ← NULL;  tmp ← root;
      for (i ← 0; i < m; i++)
      {  tmp2 ← tmp→right;
         rotate_left(grandfather, tmp, tmp→right);
         grandfather ← tmp2;
         tmp ← tmp2→right; }
   }
}
```

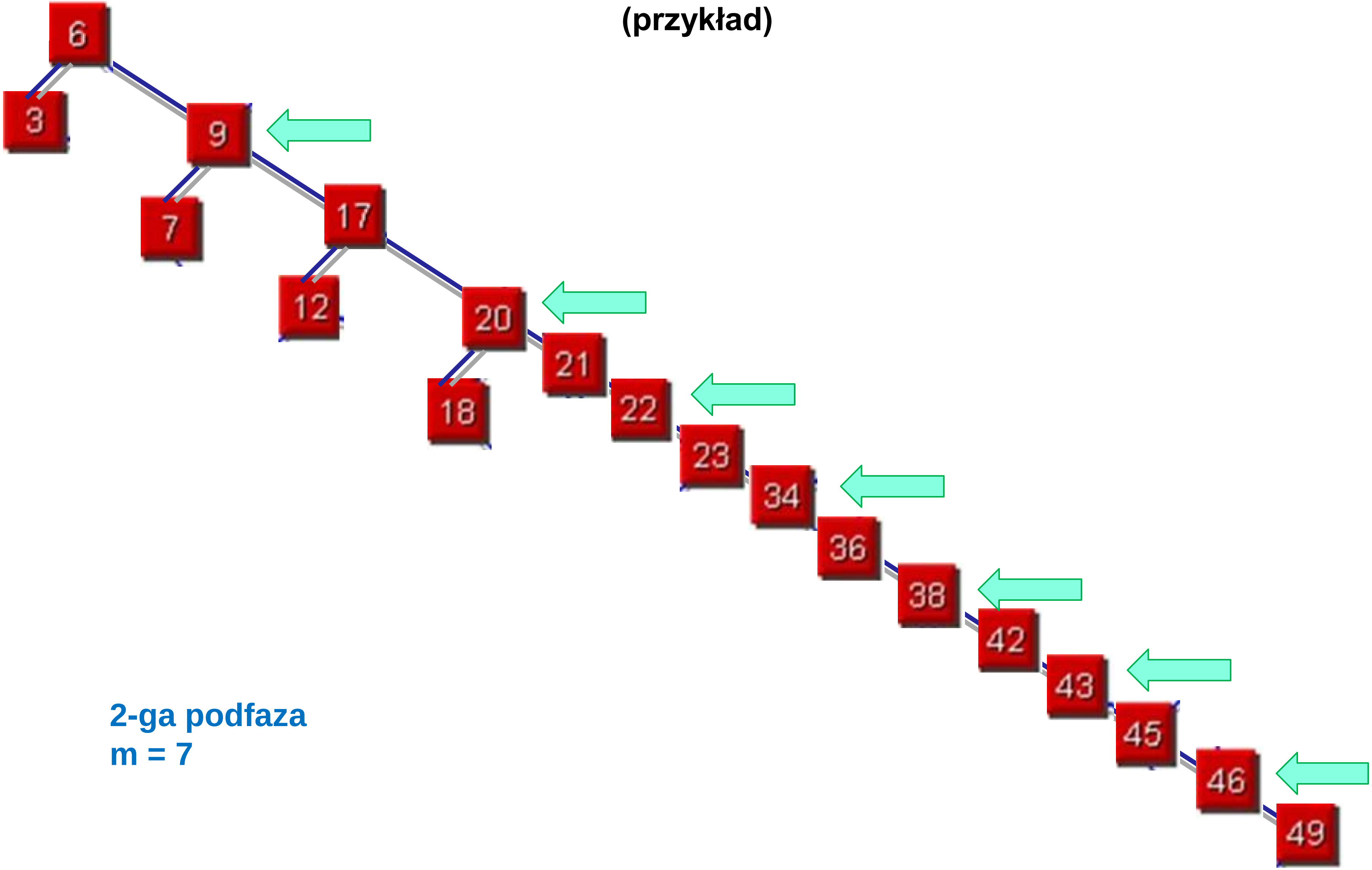
Złożoność II fazy algorytmu DSW O(N)

Algorytm DSW – faza II
(przykład)



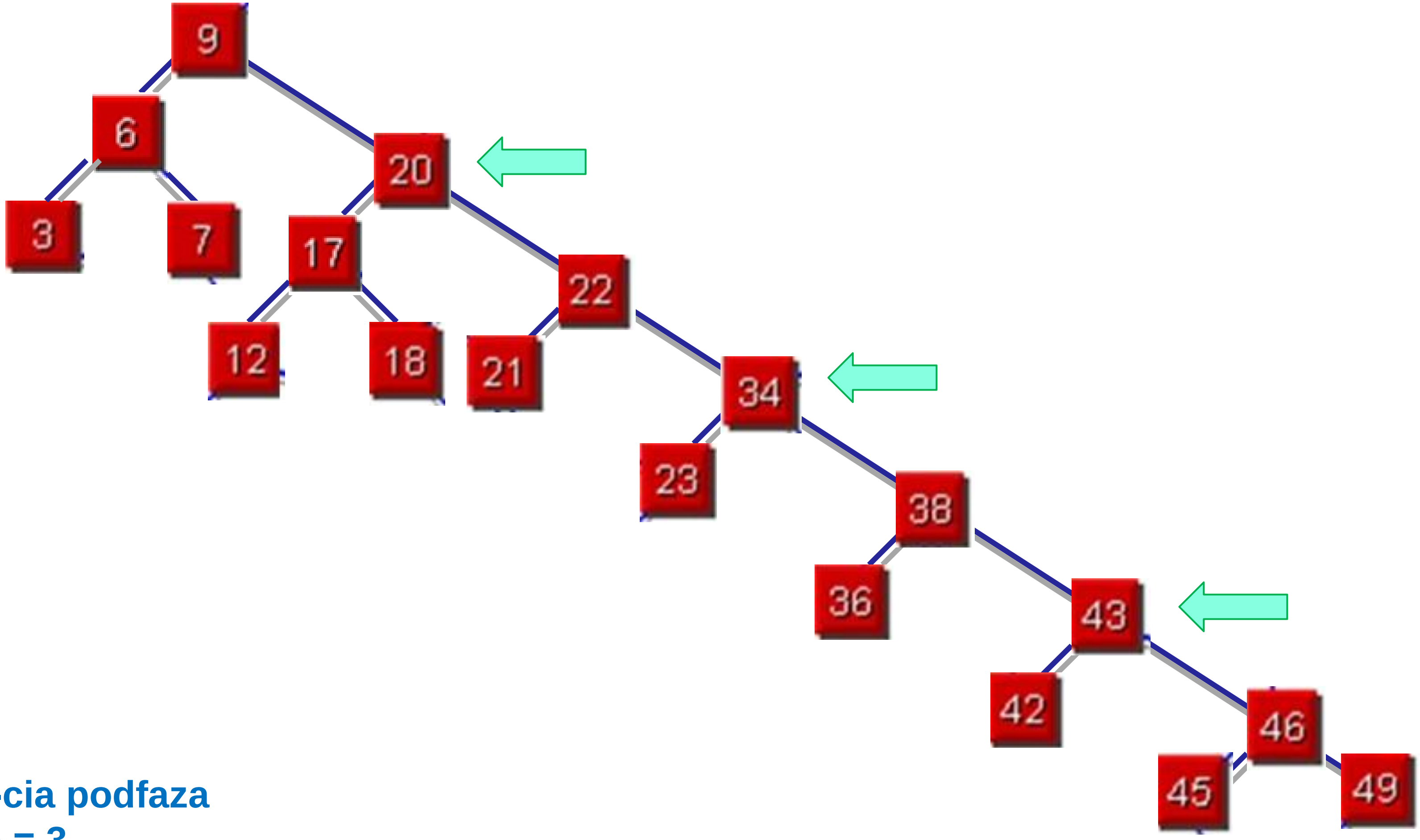
1-sza podfaza
N = 19
m = 15
N – m = 4

Algorytm DSW – faza II
(przykład)



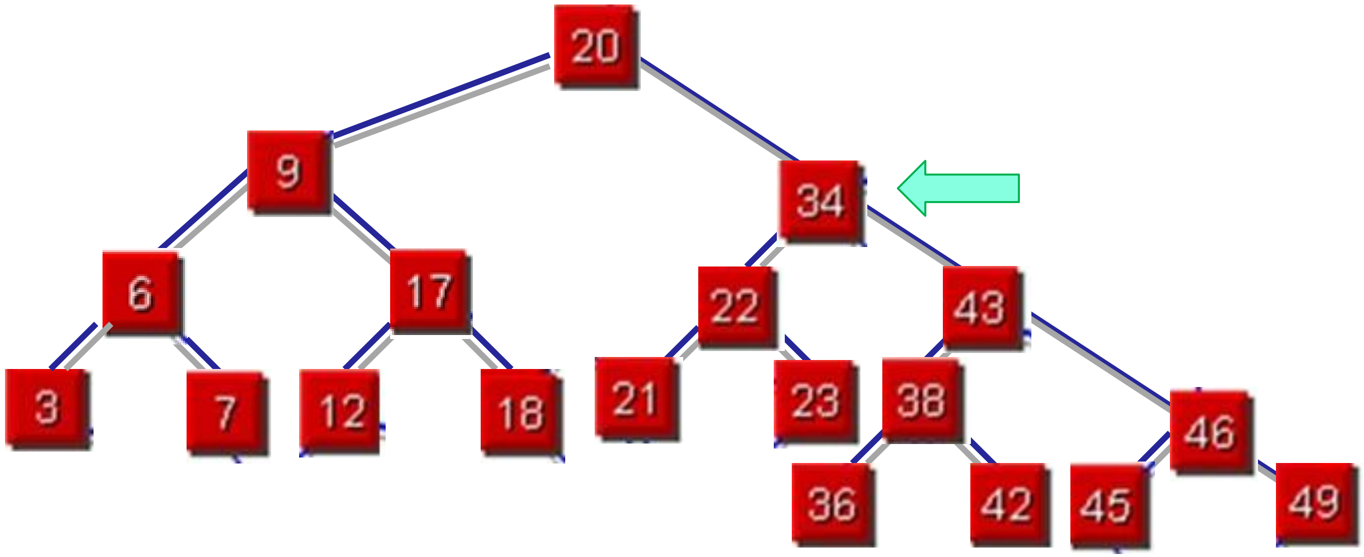
2-ga podfaza
m = 7

Algorytm DSW – faza II
(przykład)



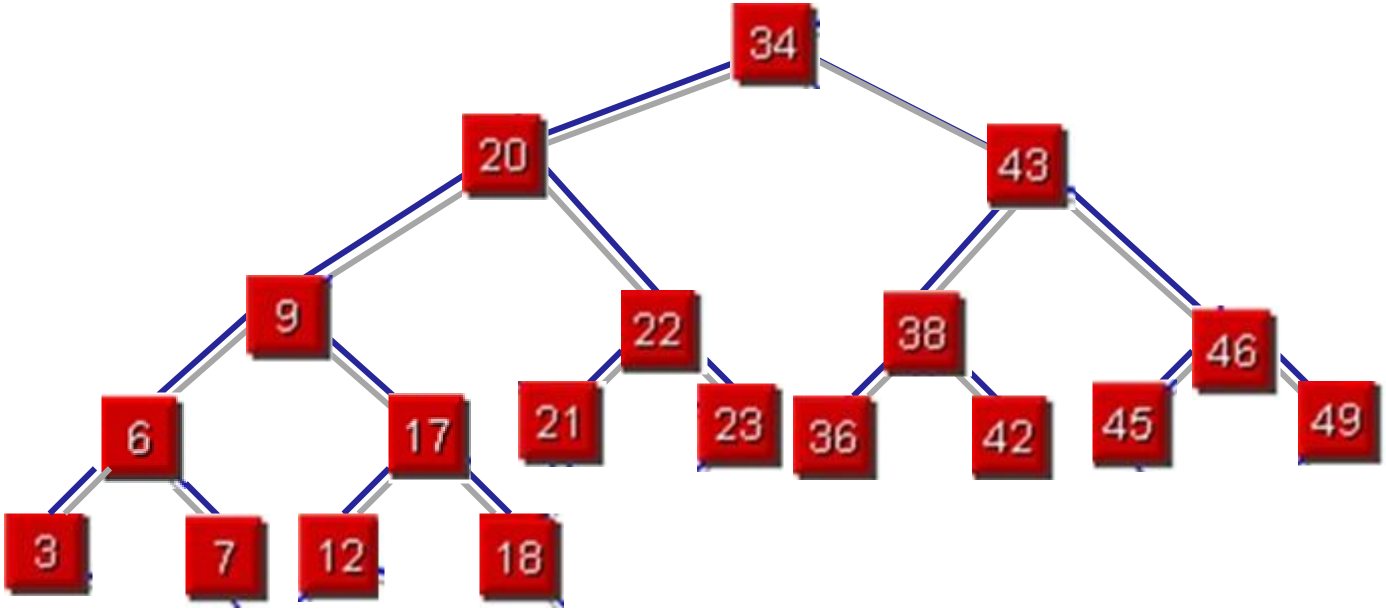
3-cia podfaza
m = 3

Algorytm DSW – faza II
(przykład)



4-ta podfaza
m = 1

Algorytm DSW – faza II
(przykład)

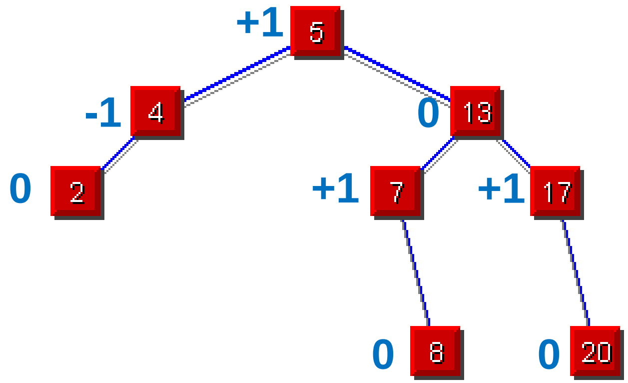


koniec wyważania

AVL - DRZEWA (WYWAŻONE DRZEWA BST)

W AVL-drzewie każdy węzeł (oprócz klucza, wskaźników na potomków oraz opcjonalnych danych nie wpływających na uporządkowanie drzewa AVL) powinien mieć również składową niosącą informację o bieżącej wartości współczynnika wyważenia *(ang.:balance)*.

```
struct node_rec
        {
        eltype key;
        struct node_rec *left, *right;
        int balance;//współczynnik wyważenia węzła
        datatype Ti;
        };
typedef struct node_rec *tree_type;
```



Istotną zaletą AVL-drzew jest to, że operacje wyszukiwania, wstawiania i usuwania węzłów mają złożoność O(lg N).

$$\log_2(N+1) \leq h_{AVL}(N) \leq 1{,}4404 \log_2(N+2) - 0{,}328$$

Wstawianie nowego węzła do AVL-drzewa

Faza 1

Tak, jak w większości binarnych struktur drzewiastych BST, miejsca dla nowego węzła poszukuje się porównując klucze kolejnych węzłów w „wędrówce od korzenia w dół”. Nowy węzeł staje się *nowym liściem*.

Ważne **jest, by szukając miejsca dla nowego węzła pamiętać całą ścieżkę od korzenia do nowego węzła, ze współczynnikami wyważenia włącznie.**

Faza 2

Po wstawieniu nowego węzła należy „wędrować wstecz do korzenia”, korygując odpowiednio współczynniki wyważenia w odwiedzanych węzłach.

Jeżeli współczynnik wyważenia w którymkolwiek z odwiedzanych węzłów osiągnie wartość +2 lub –2, to należy dokonać odpowiedniej rekonstrukcji drzewa, pamiętając o tym, że drzewa AVL są wyważone lokalnie (tzn. *wyważone jest każde poddrzewo*).

Taka rekonstrukcja wymaga wykonania odpowiednio: jednej lub dwóch rotacji. Po wykonaniu lokalnych działań rekonstrukcyjnych AVL-drzewo staje się także wyważone globalnie i proces rekonstrukcji się kończy.

Wstawianie nowego węzła do AVL-drzewa

Faza 2 (cd.)

Uzasadnienie globalnej skuteczności lokalnej rekonstrukcji

Węzły rodzicielskie dla nowego węzła mogą zmienić swój współczynnik wyważenia wyłącznie o wartość ± 1.

Zmiana $0 \rightarrow \pm 1$

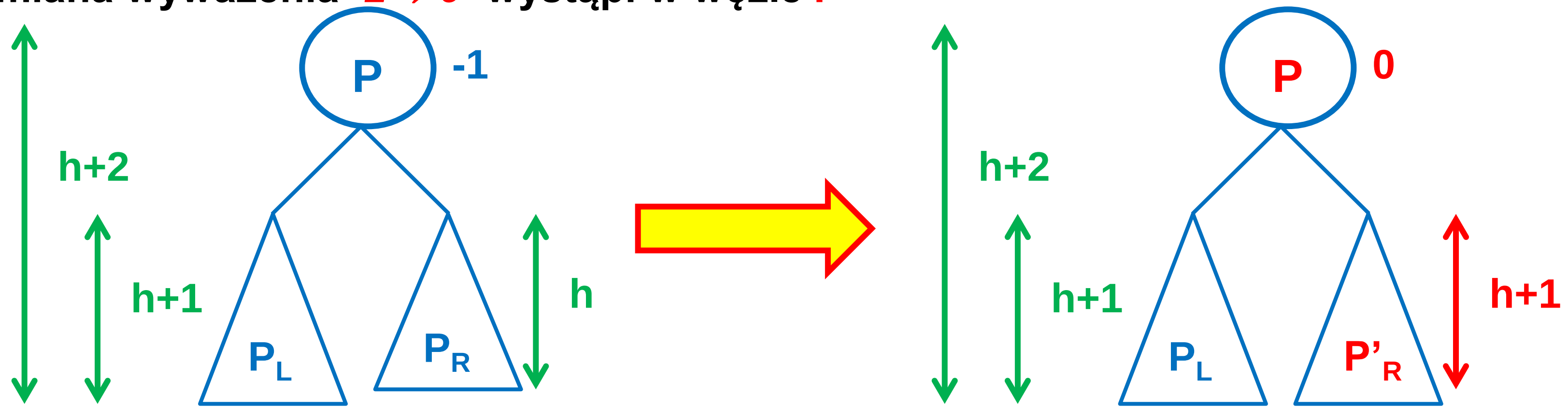
Lokalnie drzewo jest nadal wyważone, jednak trzeba nadal sprawdzać kolejnych przodków (aż do korzenia); być może któryś z przodków przestanie być wyważony.

Zmiana $\pm 1 \rightarrow 0$

Po takiej zmianie wyważenia w którymkolwiek z przodków nowo wstawionego węzła można rekonstrukcję zakończyć (nie trzeba już analizować kolejnych przodków, gdyż wysokość tego poddrzewa, którego korzeniem jest ów przodek, pozostanie taka sama, jak przed wstawieniem nowego węzła).

Przykład

Zmiana wyważenia $-1 \rightarrow 0$ wystąpi w węźle P



Wstawianie nowego węzła do AVL-drzewa

Faza 2 (cd.)

***Zmiana* $\pm 1 \rightarrow \pm 2$**

Jeżeli prawy (lewy) potomek węzła, w którym nastąpiła zmiana współczynnika wyważenia *+1* $\rightarrow$ *+2* (*-1* $\rightarrow$ *-2*), miał przed wstawieniem nowego węzła współczynnik wyważenia *0* (*0*), zaś po wstawieniu nowego węzła uległa zwiększeniu wysokość prawego (lewego) poddrzewa tego potomka i korzeń tego poddrzewa przed wstawieniem nowego węzła miał współczynnik wyważenia *0* lub „nie istniał” (tzw. *konfiguracja jednorodna*), to do przywrócenia lokalnego i globalnego wyważenia wystarczy pojedyncza rotacja tego prawego (lewego) potomka w lewo (prawo).

Jeżeli prawy (lewy) potomek węzła, w którym nastąpiła zmiana współczynnika wyważenia *+1* $\rightarrow$ *+2* (*-1* $\rightarrow$ *-2*), miał przed wstawieniem nowego węzła współczynnik wyważenia *0* (*0*), zaś po wstawieniu nowego węzła uległa zwiększeniu wysokość lewego (prawego) poddrzewa tego potomka i korzeń tego poddrzewa przed wstawieniem nowego węzła miał współczynnik wyważenia *0* lub „nie istniał” (tzw. *konfiguracja niejednorodna*), to do przywrócenia lokalnego i globalnego wyważenia potrzebne są dwie rotacje tego korzenia (lub nowego wstawionego węzła w przypadku, gdy to poddrzewo było puste): pierwsza w prawo (lewo), zaś druga w lewo (prawo).

Dygresja

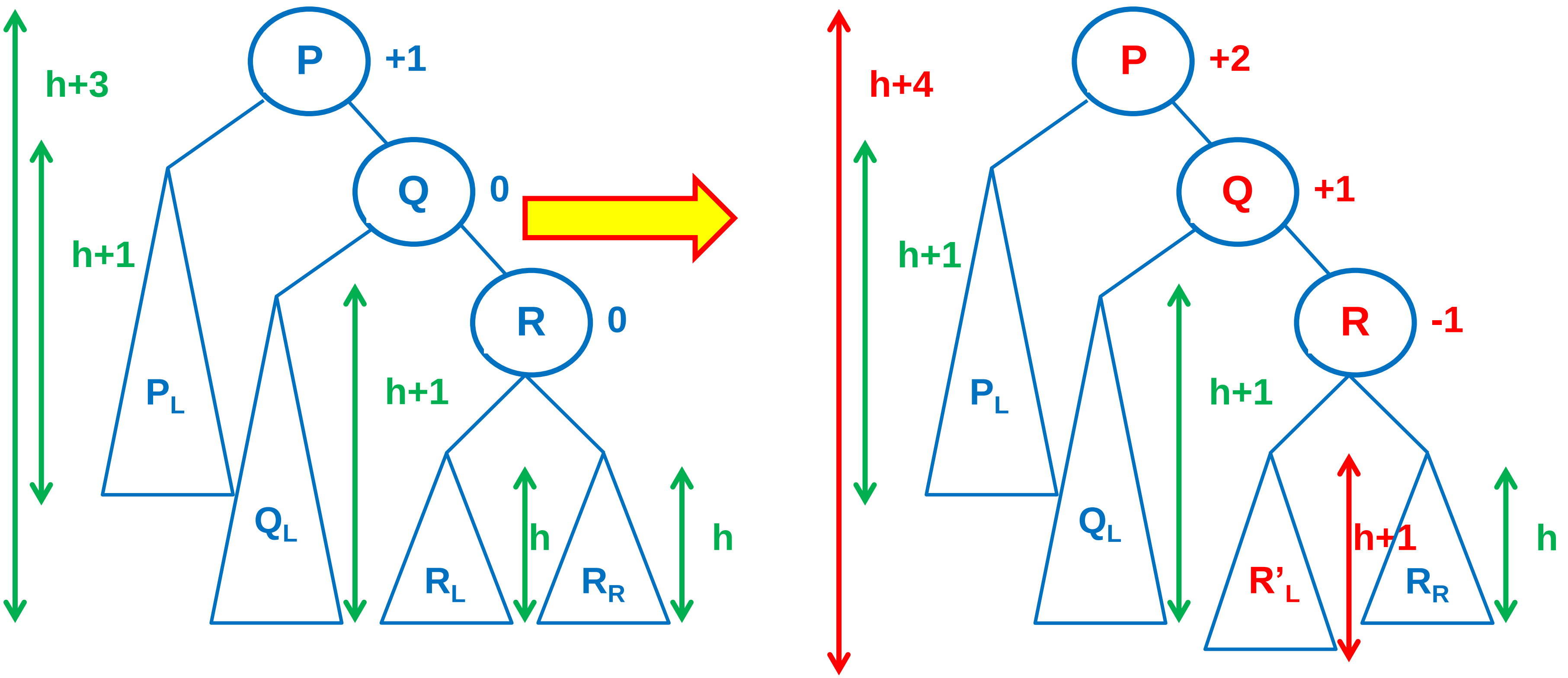
Inne sytuacje nie zaistnieją, gdyż wykluczone są przez mechanizmy rekonstrukcyjne (przywrócenie wyważenia nastąpi wcześniej dzięki działaniom rekonstrukcyjnym podjętym na poziomach analizowanych wcześniej).

Wstawianie nowego węzła do AVL-drzewa

Faza 2 (cd.)

Przykład (konfiguracja jednorodna)

Zmiana wyważenia ***+1*** $\rightarrow$ ***+2*** **wystąpi w węźle P**

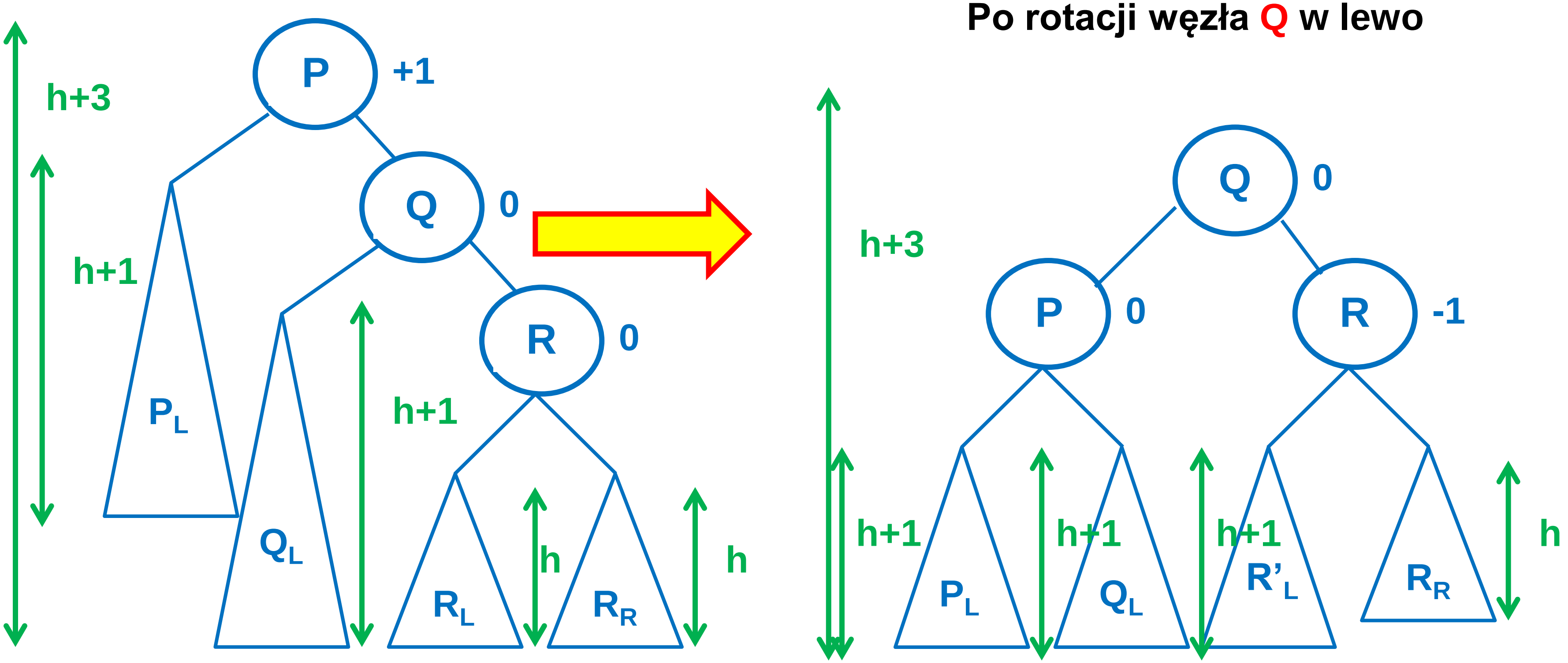


Wstawianie nowego węzła do AVL-drzewa

Faza 2 (cd.)

Przykład (konfiguracja jednorodna)

Zmiana wyważenia ***+1*** $\rightarrow$ ***+2*** **wystąpi w węźle P**

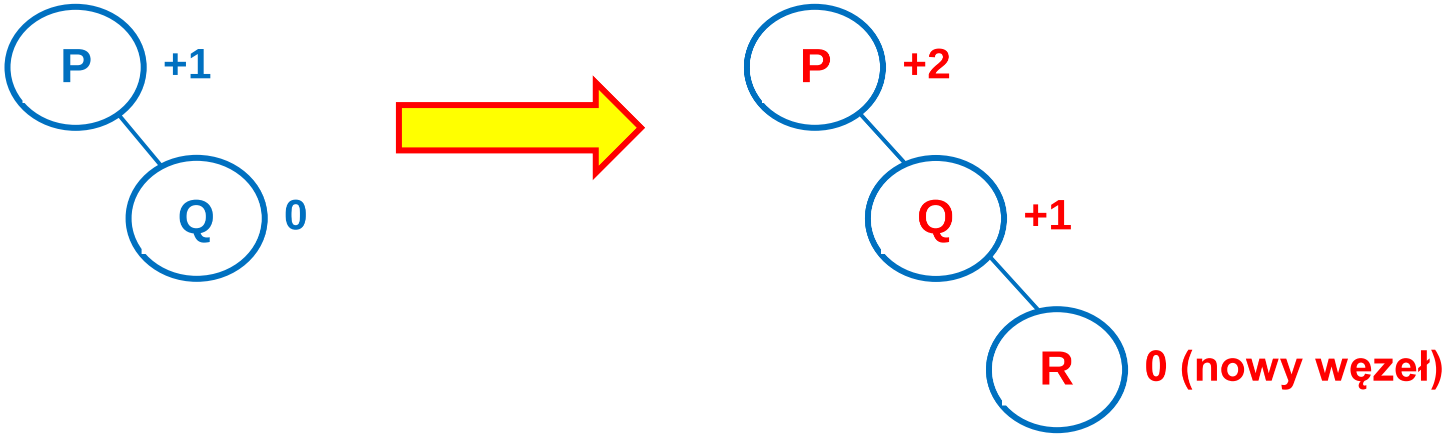


Wstawianie nowego węzła do AVL-drzewa

Faza 2 (cd.)

Przykład (konfiguracja jednorodna – przypadek szczególny)

Zmiana wyważenia ***+1*** $\rightarrow$ ***+2*** **wystąpi w węźle P**



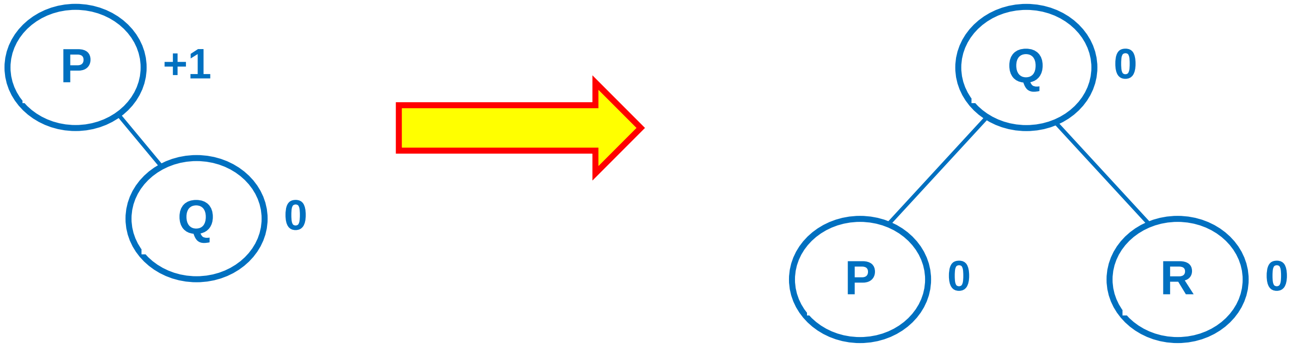
Wstawianie nowego węzła do AVL-drzewa

Faza 2 (cd.)

Przykład (konfiguracja jednorodna – przypadek szczególny)

Zmiana wyważenia *+1* → *+2* wystąpi w węźle P

Po rotacji węzła Q w lewo

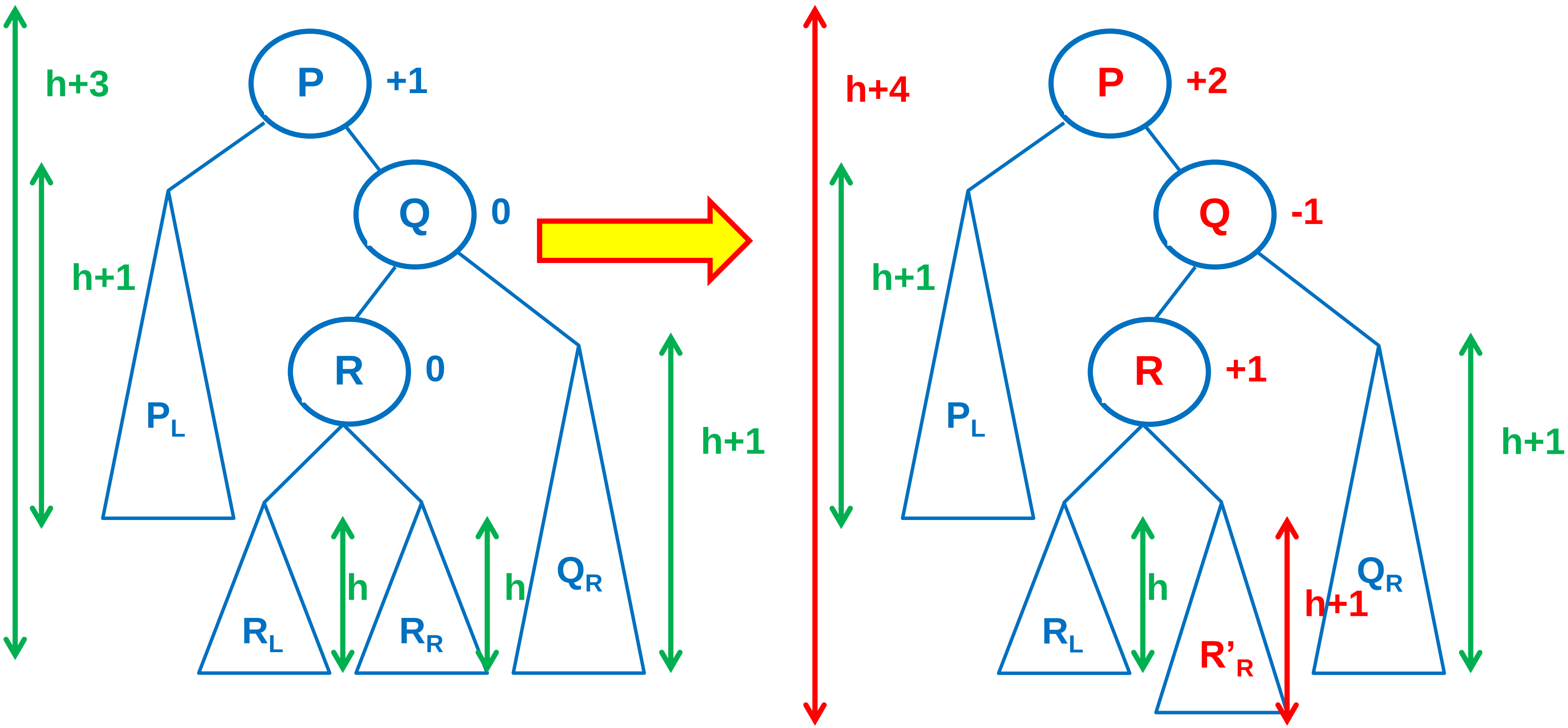


Wstawianie nowego węzła do AVL-drzewa

Faza 2 (cd.)

Przykład (konfiguracja niejednorodna)

Zmiana wyważenia *+1→ +2* wystąpi w węźle P



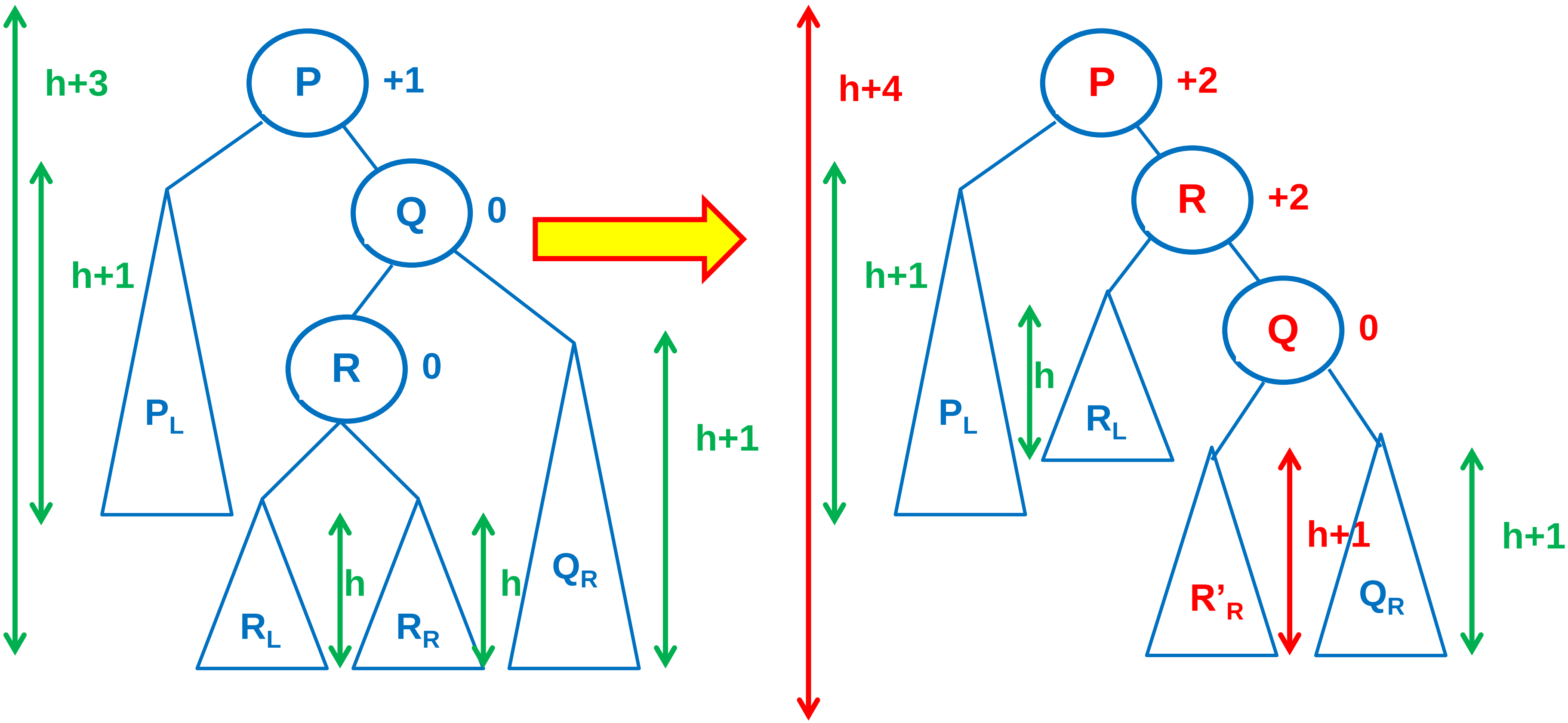
Wstawianie nowego węzła do AVL-drzewa

Faza 2 (cd.)

Przykład (konfiguracja niejednorodna)

Zmiana wyważenia ***+1*** $\rightarrow$ ***+2*** **wystąpi w węźle P**

Po rotacji węzła R w prawo



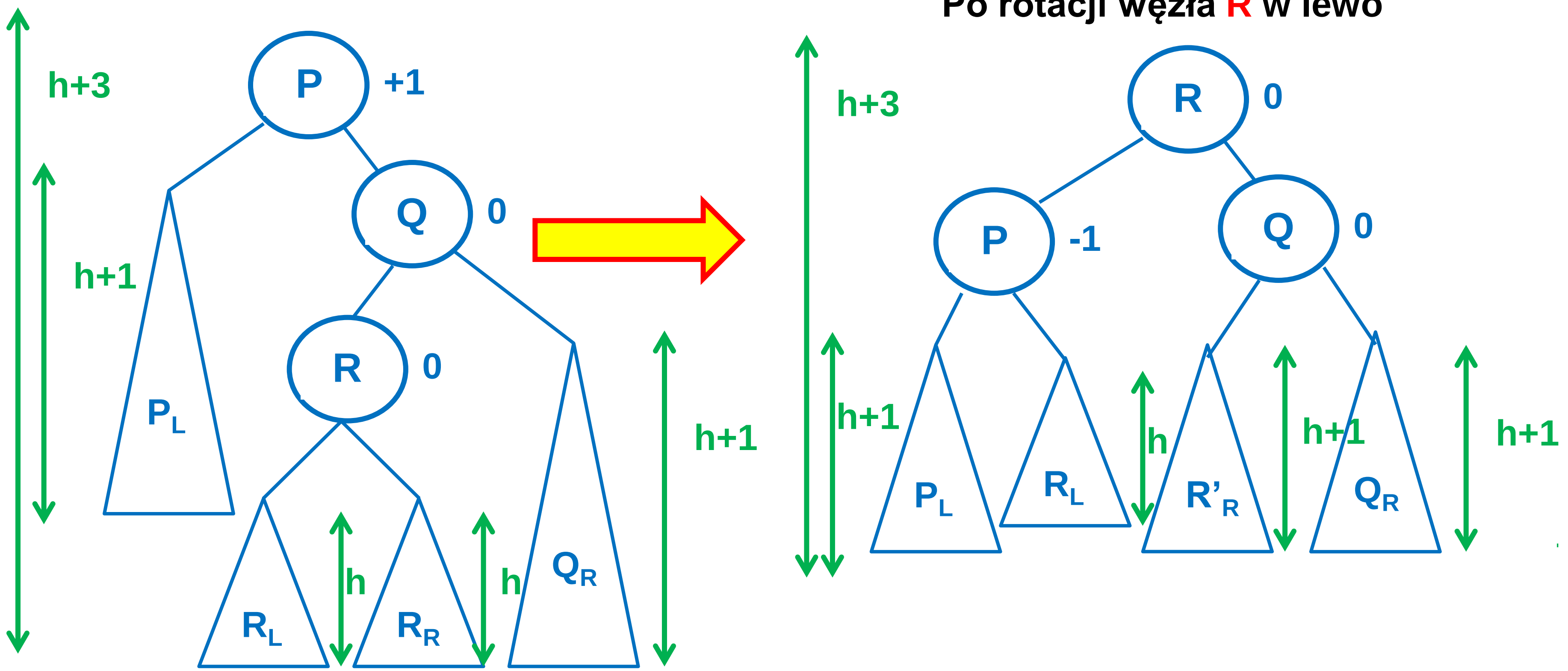
Wstawianie nowego węzła do AVL-drzewa

Faza 2 (cd.)

Przykład (konfiguracja niejednorodna)

Zmiana wyważenia *+1→ +2* wystąpi w węźle P

Po rotacji węzła R w lewo

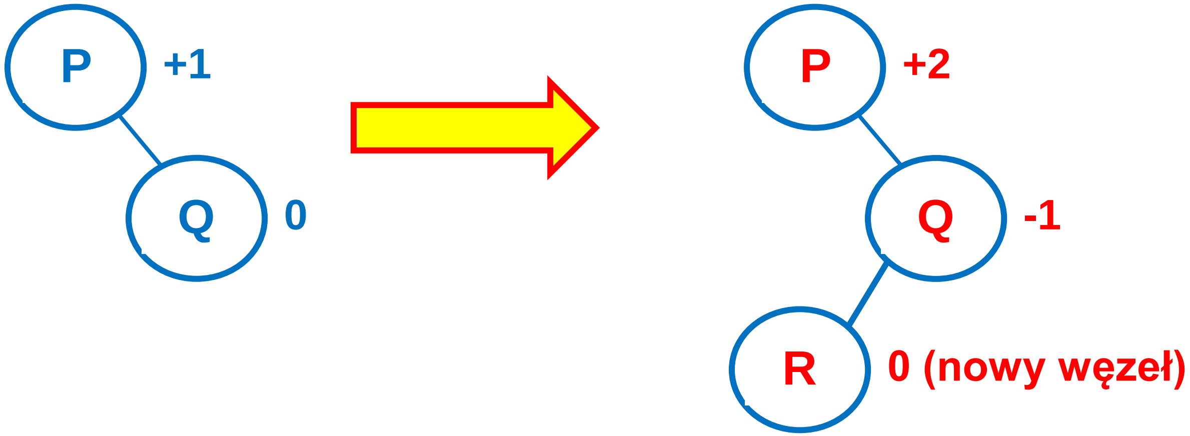


Wstawianie nowego węzła do AVL-drzewa

Faza 2 (cd.)

Przykład (konfiguracja niejednorodna – przypadek szczególny)

Zmiana wyważenia ***+1*** $\rightarrow$ ***+2*** **wystąpi w węźle P**

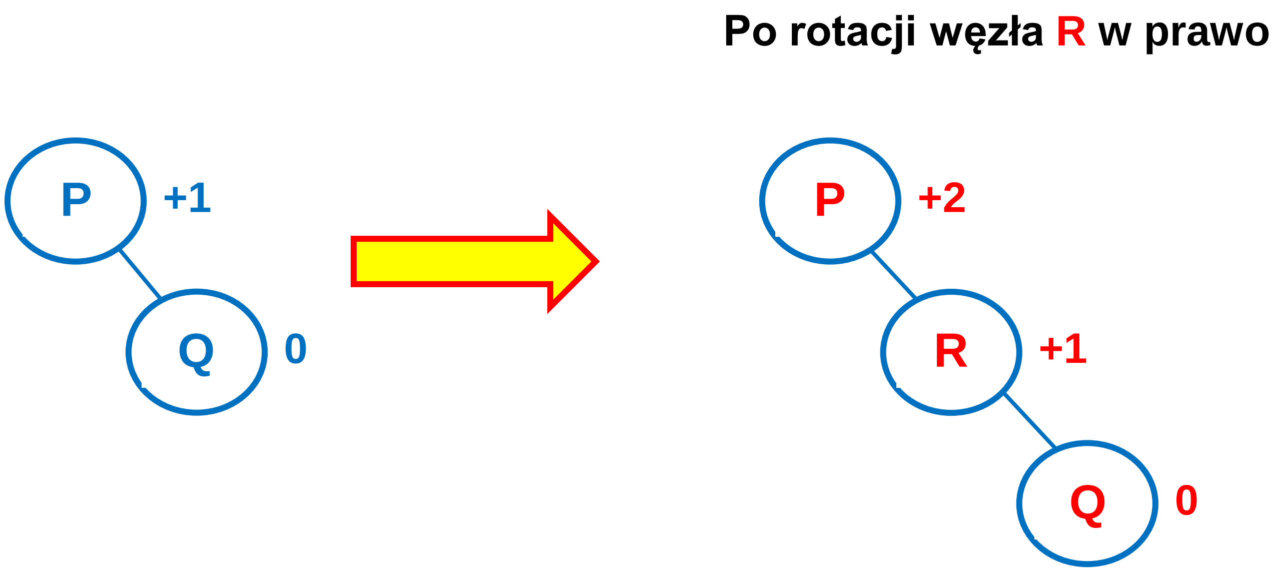


Wstawianie nowego węzła do AVL-drzewa

Faza 2 (cd.)

Przykład (konfiguracja niejednorodna – przypadek szczególny)

Zmiana wyważenia *+1→ +2* wystąpi w węźle P



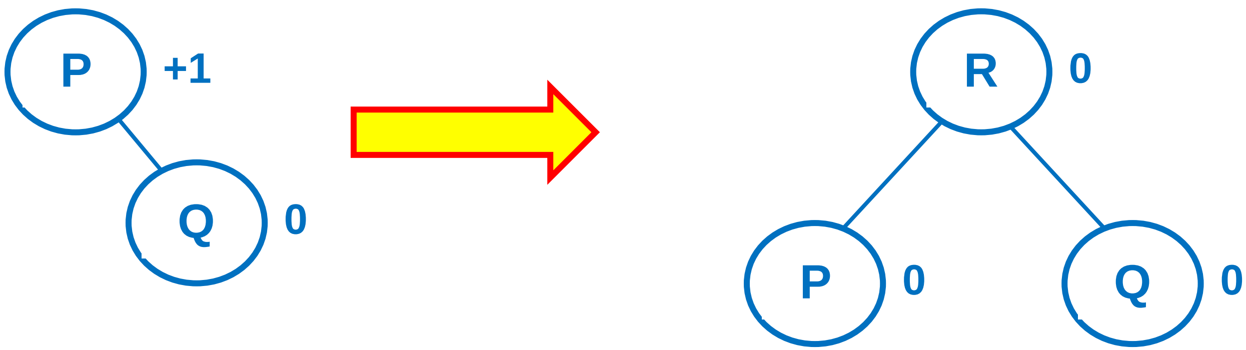
Wstawianie nowego węzła do AVL-drzewa

Faza 2 (cd.)

Przykład (konfiguracja niejednorodna – przypadek szczególny)

Zmiana wyważenia *+1→ +2* wystąpi w węźle P

Po rotacji węzła R w lewo



Usuwanie węzła z AVL-drzewa

Po odnalezieniu węzła, który ma być usunięty, sposób dalszego postępowania zależy od stopnia usuwanego węzła.

- **Jeżeli usuwany węzeł jest liściem, to należy „cofać się” aż do korzenia drogą utworzoną przez jego przodków, sprawdzając współczynniki wyważenia tych przodków i odpowiednio reagując na ich zmianę.**
- **Jeżeli usuwany węzeł ma tylko jedno poddrzewo, to to poddrzewo jest liściem AVL-drzewa; liść ten zajmuje miejsce usuwanego węzła, po czym należy sprawdzić współczynniki wyważenia wszystkich jego przodków, postępując tak jak wyżej.**
- **Jeżeli usuwany węzeł ma oba poddrzewa, to w jego miejsce przenosi się węzeł będący jego następnikiem albo poprzednikiem; analizę zmian współczynników wyważenia (i procesy rekonstrukcyjne opisane powyżej) przenosi się do miejsca, z którego „usunięto” następnika albo poprzednika usuwanego węzła.**

Sposób reakcji na zmiany współczynników wyważenia przodków

Zmiana 0 $\rightarrow \pm 1$

Wysokość poddrzewa, dla którego korzeniem jest węzeł o takiej zmianie współczynnika wyważenia, pozostaje bez zmian (wysokość jednego z jego poddrzew zmniejszyła się o 1), a zatem można zakończyć rekonstrukcję drzewa.

Zmiana $\pm 1 \rightarrow$ 0

Lokalnie drzewo jest nadal wyważone, jednak trzeba nadal sprawdzać kolejnych przodków (aż do korzenia), gdyż wysokość tego poddrzewa uległa zmniejszeniu.

Usuwanie węzła z AVL-drzewa

Sposób reakcji na zmiany współczynników wyważenia przodków (cd.)

Zmiana $\pm 1 \rightarrow \pm 2$

Zmiana taka jest efektem zmniejszenia wysokości lewego (prawego) poddrzewa analizowanego węzła.

- **Jeżeli prawy (lewy) potomek węzła, w którym nastąpiła zmiana współczynnika wyważenia *+1 → +2* (*-1 → -2*), miał przed usunięciem węzła współczynnik wyważenia *+1* (*-1*), to w celu <u>lokalnego wyważenia</u> wystarczy pojedyncza rotacja tego prawego (lewego) potomka w lewo (prawo).**
- **Jeżeli prawy (lewy) potomek węzła, w którym nastąpiła zmiana współczynnika wyważenia *+1 → +2* (*-1 → -2*), miał przed usunięciem węzła współczynnik wyważenia *-1* (*+1*), to w celu <u>lokalnego wyważenia</u> potrzebne są dwie rotacje lewego (prawego) potomka tego potomka (czyli „wnuka" analizowanego węzła): pierwsza w prawo (lewo), zaś druga w lewo (prawo).**

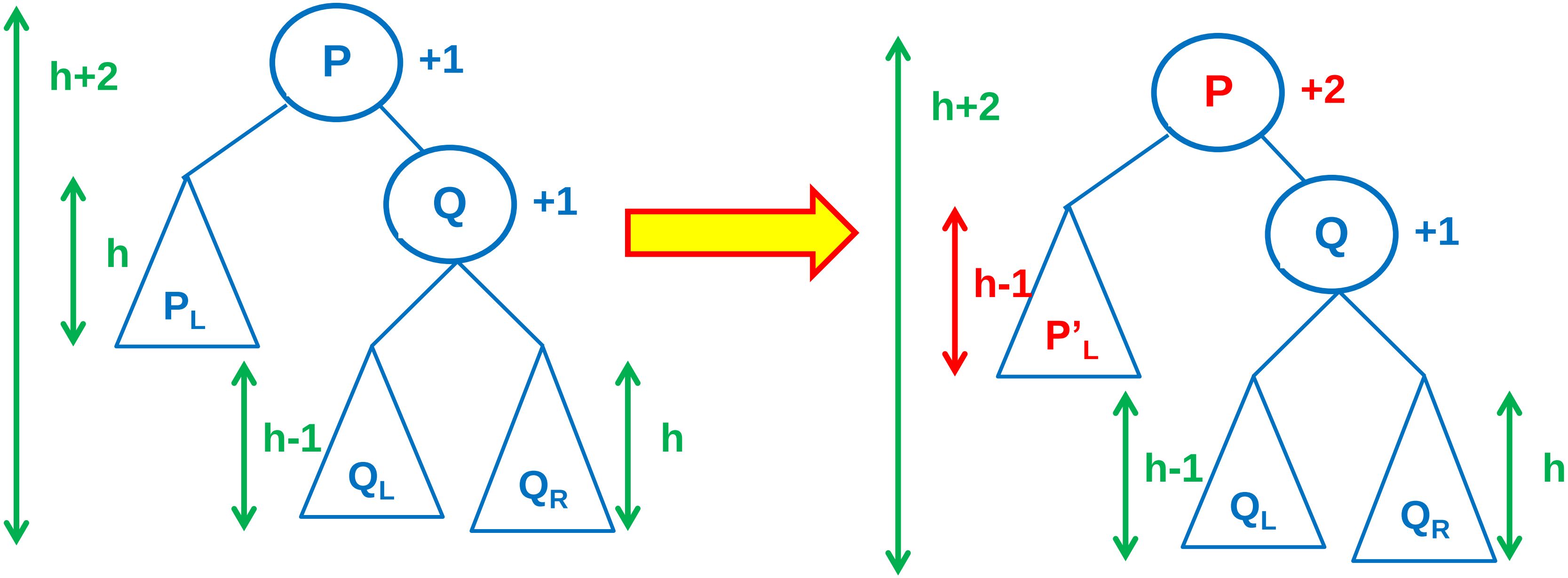
Po wykonaniu powyżej określonych rotacji nadal <u>należy sprawdzać kolejnych przodków</u>, gdyż uzyskane dzięki nim <u>wyważenie lokalne nie musi zapewniać wyważenia globalnego</u> (wysokość tego poddrzewa uległa zmniejszeniu) .

- **Jeżeli prawy (lewy) potomek węzła, w którym nastąpiła zmiana współczynnika wyważenia *+1 → +2* (*-1 → -2*), miał przed usunięciem węzła współczynnik wyważenia *0* (*0*), to w celu <u>lokalnego i globalnego wyważenia</u> wystarczy pojedyncza rotacja tego prawego (lewego) potomka w lewo (prawo).**

Usuwanie węzła z AVL-drzewa

Przykład („*casus*” +*1*)

Zmiana wyważenia +*1* → +*2* wystąpi w węźle P, którego prawy potomek Q ma współczynnik wyważenia +*1*.

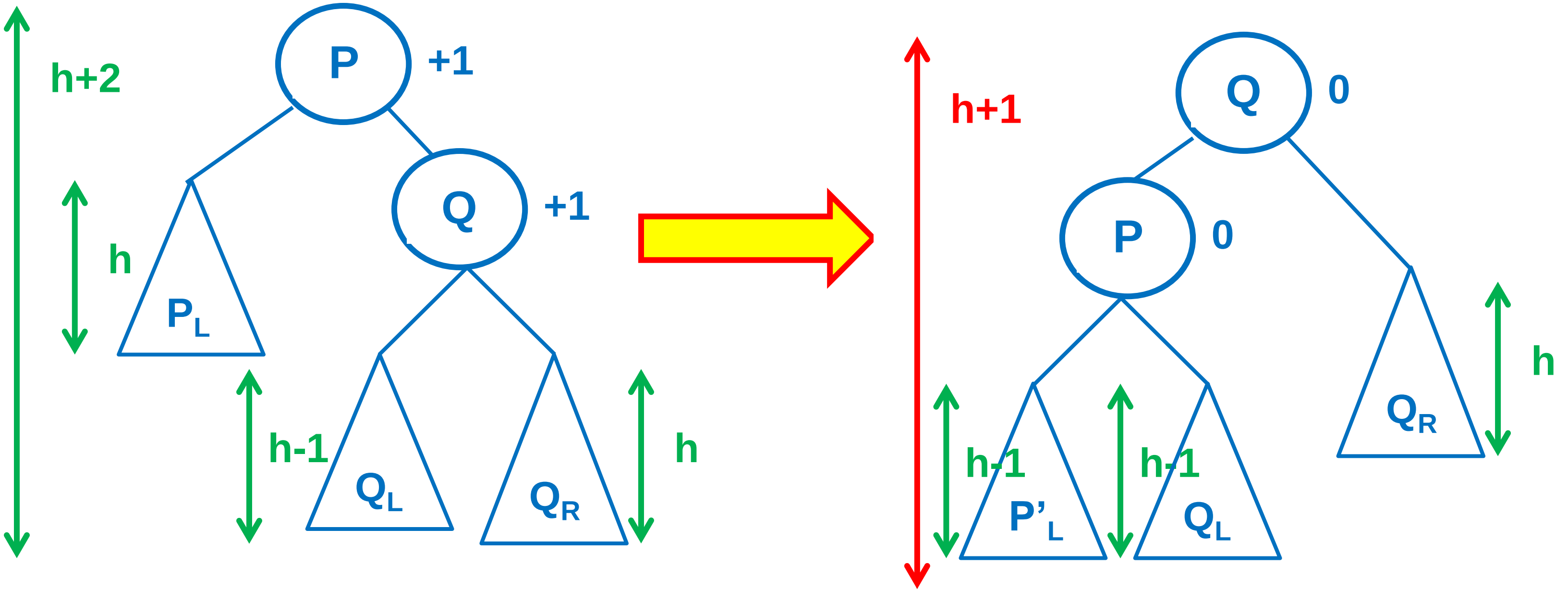


Usuwanie węzła z AVL-drzewa

Przykład („*casus*” +*1*)

Zmiana wyważenia *+1* → *+2* wystąpi w węźle P, którego prawy potomek Q ma współczynnik wyważenia *+1*.

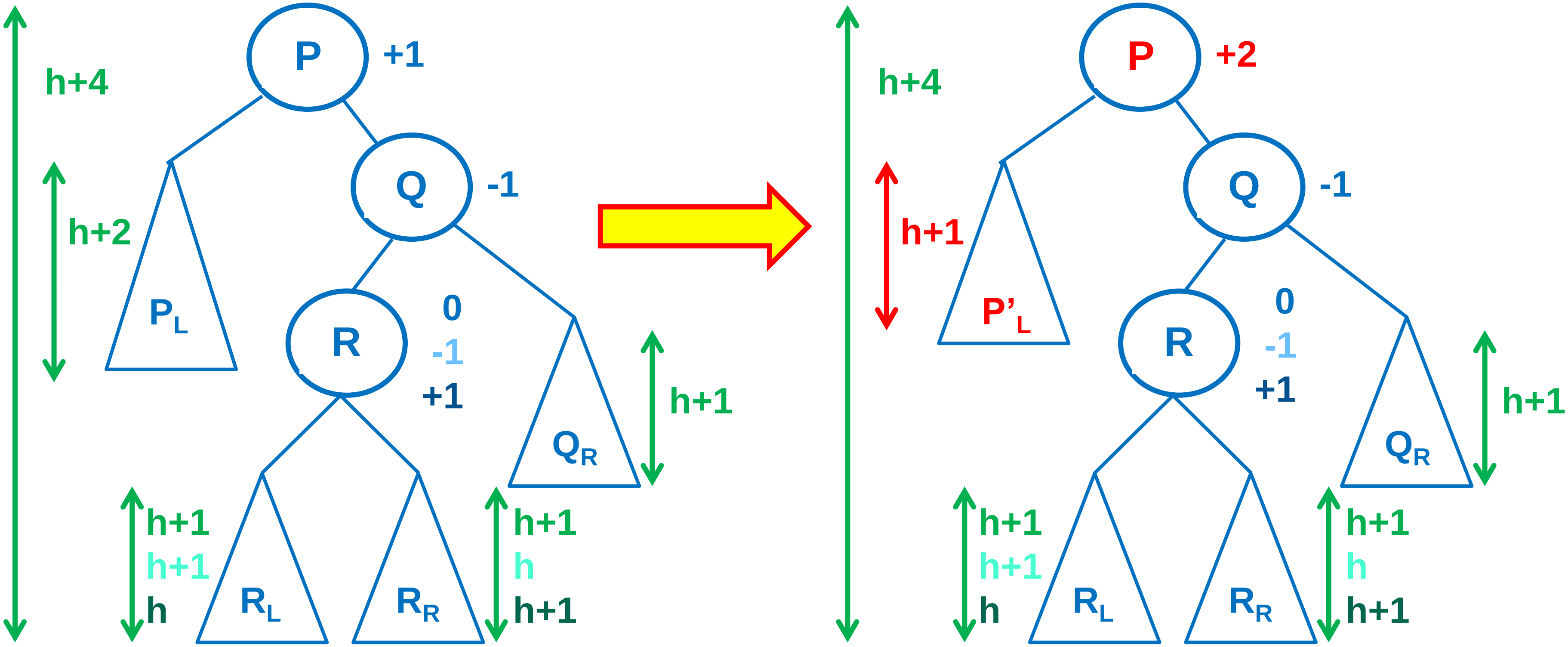
Po rotacji węzła Q w lewo



Usuwanie węzła z AVL-drzewa

Przykład („*casus*” *-1*)

Zmiana wyważenia *+1*→ *+2* wystąpi w węźle P, którego prawy potomek Q ma współczynnik wyważenia *-1*.



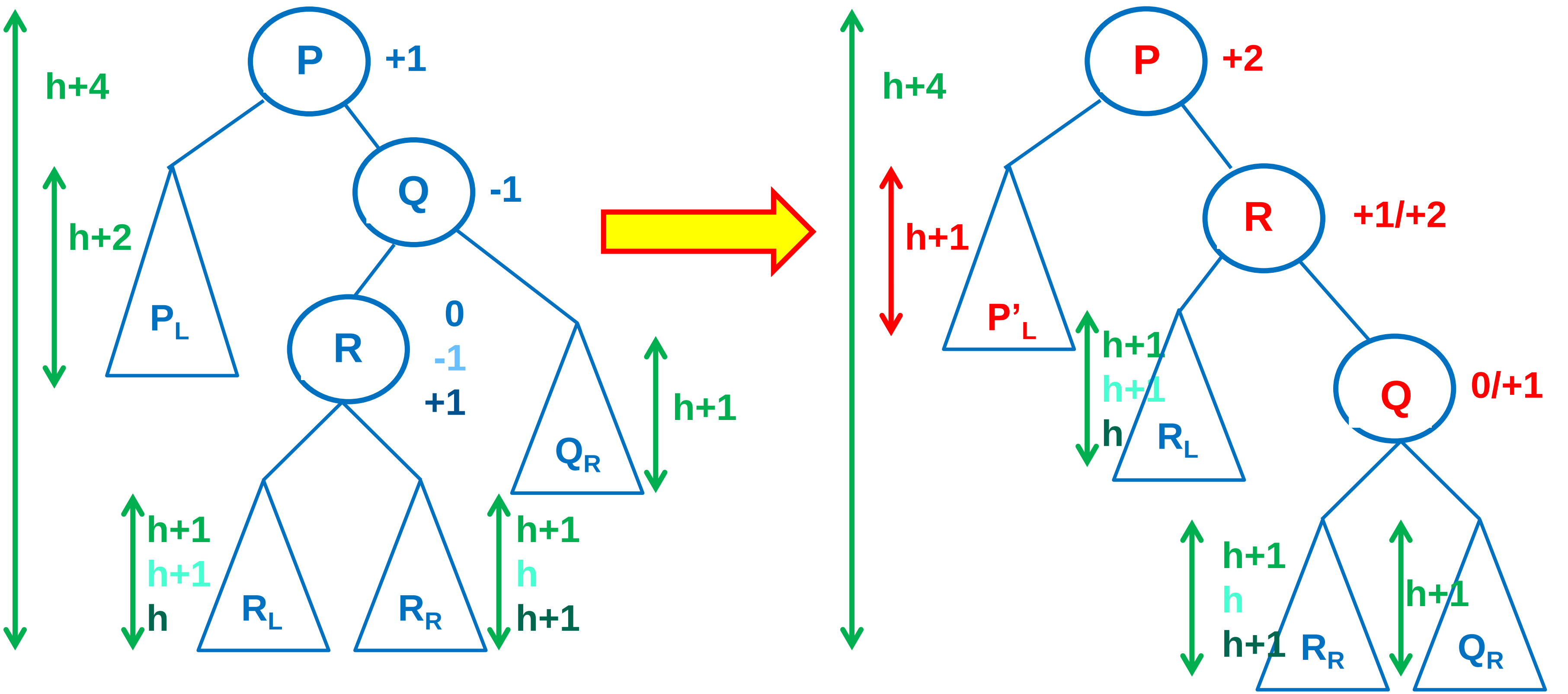
h ≥ -1

Usuwanie węzła z AVL-drzewa

Przykład („*casus*” *-1*)

Zmiana wyważenia *+1*→ *+2* wystąpi w węźle P, którego prawy potomek Q ma współczynnik wyważenia *-1*.

Po rotacji węzła R w prawo

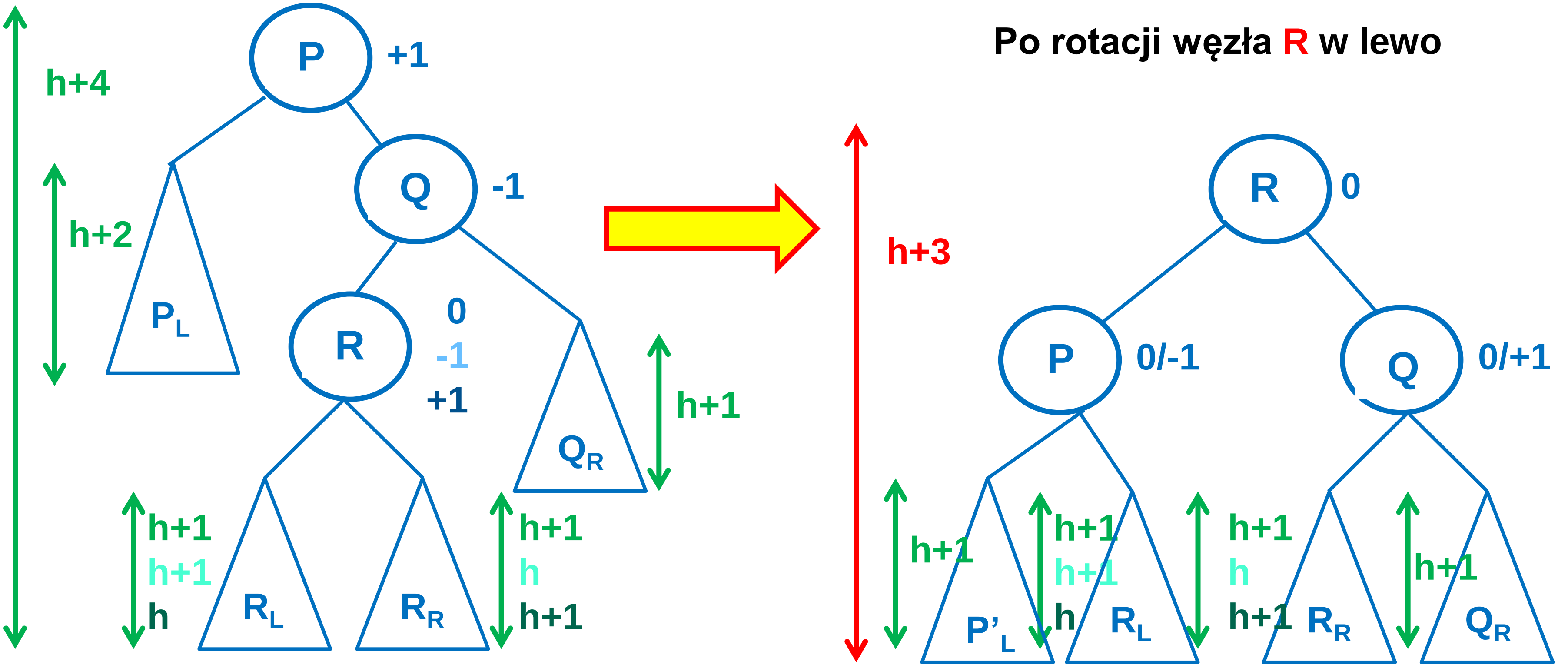


h ≥ -1

Usuwanie węzła z AVL-drzewa

Przykład („*casus*” *-1*)

Zmiana wyważenia *+1→ +2* wystąpi w węźle P, którego prawy potomek Q ma współczynnik wyważenia *-1*.

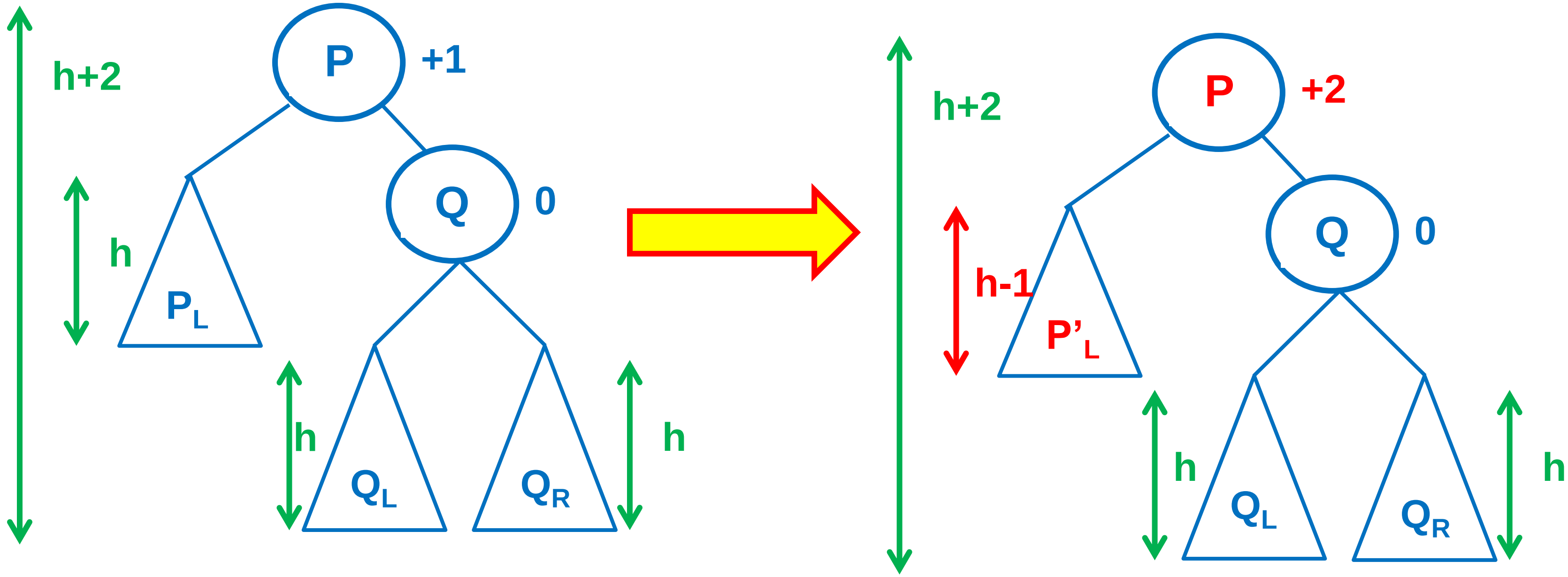


$h \geq -1$

Usuwanie węzła z AVL-drzewa

Przykład („*casus*” *0*)

Zmiana wyważenia *+1*→ *+2* wystąpi w węźle P, którego prawy potomek Q ma współczynnik wyważenia *0*.

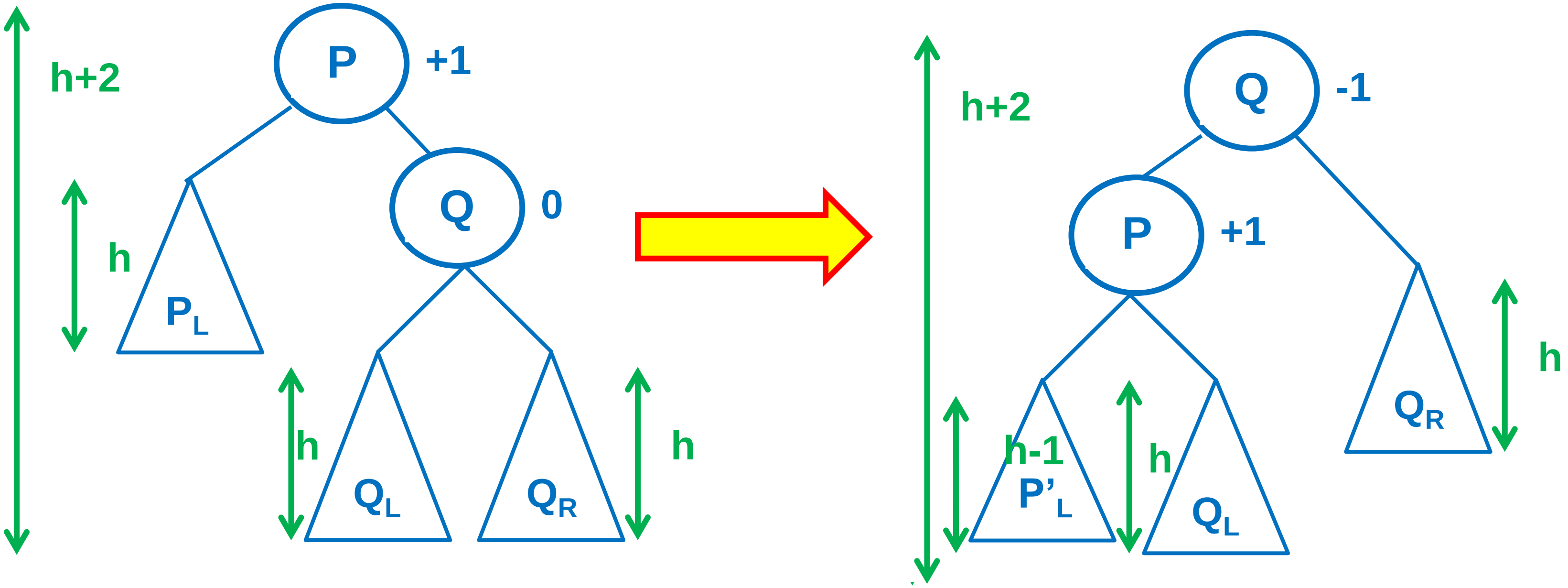


Usuwanie węzła z AVL-drzewa

Przykład („*casus*" *0*)

Zmiana wyważenia *+1*→ *+2* wystąpi w węźle P, którego prawy potomek Q ma współczynnik wyważenia *0*.

Po rotacji węzła Q w lewo



Koniec części 5