Міністерство освіти і науки України

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»

Інститут прикладного системного аналізу

Кафедра ММСА

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №1

З ДИСЦИПЛІНИ «ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ»

ВАРІАНТ №22

Виконав:

Студент ІІ курсу

групи КА-95

Петренко Д.М.

Перевірила:

Хоменко О.В.

Київ – 2021р

1. Теоретичні відомості

Теорема 1.

Алгебраїчне рівняння n-того степеня має рівно n коренів, дійсних чи комплексних, за умови, що кожен корінь рахується стільки разів, яка його кратність.

Теорема 2.

Алгебраїчне рівняння непарного степеня має принаймні один дійсний корінь.

Теорема 3.

Нехай $A = \max\{|a_{n-1}|, ..., |a_0|\}$, $B = \max\{|a_n|, ..., |a_1|\}$,де a_k, $k = 0, 1, ..., n$ – коефіцієнти рівняння. Тоді модулі всіх коренів рівняння задовольняють нерівність:

$$\frac{1}{1+\frac{B}{|a_0|}} \le |x_{*i}| \le 1+\frac{A}{|a_n|},$$

тобто корені розташовані в кільці.

Наслідок:

Числа

$$r = \frac{1}{1+\frac{B}{|a_0|}} \qquad R = 1+\frac{A}{|a_n|}$$

є відповідно нижньою та верхньою межею додатніх коренів алгебраїчного рівняння: $r \le x_{+*i} \le R$. Аналогічно числа $-R$ та $-r$ є нижньою та верхньою межами від'ємних коренів: $-R \le x_{-*i} \le -r$.

Теорема 4.

Нехай $a_n > 0$ і a_i – перший від'ємний коефіцієнт в послідовності a_n , a_{n-1} , a_{n-2} ,..., a_0; C – найбільша з абсолютних величин від'ємних коефіцієнтів. Тоді за верхню межу додатніх коренів рівняння (2.1) може бути прийняте число:

$$R = 1 + \sqrt[n-i]{\frac{C}{a_n}}.$$

Теорема 5.

Число S_1 додатніх коренів алгебраїчного рівняння з врахуванням їх кратностей $P_n(x) = 0$ дорівнює числу змін знаків в послідовності коефіцієнтів a_n , a_{n-1} , a_{n-2} ,..., a_0 (коефіцієнти, які дорівнюють нулю не враховуються) многочлена $P_n(x)$ або менше цього числа на парне число.

Число S_2 від'ємних коренів алгераїчного рівняння з врахуванням їх кратностей $P_n(x) = 0$ дорівнює числу змін знаків в послідовності a_n , a_{n-1} , a_{n-2} ,..., a_0 многочлена $P_n(-x)$ або менше цього числа на парне число.

Теорема 6.

Якщо алгебраїчне рівняння (2.1) має всі дійсні корені, то квадрат кожного некрайнього коефіцієнта більше добутку двох його сусідніх коефіцієнтів. Наслідок:

Якщо при будь-якому k виконується рівність

$$a_k^2 \leq a_{k-1}a_{k+1},$$

, то рівняння має принаймні одну пару комплексних коренів.

Теорема 7.

Якщо функція f(x), що визначає рівняння $f(x) = 0$, на кінцях відрізка $[a_i; b_i]$ приймає значення різних знаків, тобто $f(a_i) \cdot f(b_i) < 0$, то на цьому відрізку міститься принаймні один корінь рівняння.

Теорема 8.

Неперервна строго монотонна функція f(x) має єдиний нуль на відрізку [a; b] тоді і тільки тоді, коли на його кінцях вона приймає значення різних знаків.

На теоремі Больцано — Коші базується так званий спосіб перебору, який полягає в тому, що частину області визначення функції f(x) розбивають на відрізки точками xi , розташованими на умовно невеликій відстані h одна від одної.

Обчисливши значення f(x) у всіх цих точках (або лише визначивши знаки $f(x_i)$), порівнюють їх в сусідніх точках, тобто, перевіряють виконання умови $f(x_{i-1})f(x_i) \leq 0$.

Якщо відома кількість коренів в досліджуваній області, то, зменшуючи крок пошуку h таким чином можна їх локалізувати, або ж довести процес до стану, який дозволяє стверджувати про наявність пар коренів, які відрізняються один від одного на величину h = ε. Недоліком даного способу є необхідністьвиконання великої кількості обчислень. Проте даний метод може бути застосований в комбінації з іншими.

Теорема 9.

Нехай f(x) = P(x)– поліном без кратних коренів. Утворимо послідовність многочленів:

$$f_0 = f(x),$$
$$f_1 = f'(x),$$
$$f_2 = -[f_0 \ mod \ f_1],$$

тобто, починаючи з f_2, кожний наступний многочлен є залишком від ділення двох попередніх многочленів, взятим з протилежним знаком. Кількість дійсних коренів рівняння f(x) = 0 на довільному відрізку [a; b] дорівнює різниці між кількістю змін знаку у цій послідовності при x = a та кількістю змін знаку при x = b.

На практиці також застосовують графічний спосіб відокремлення коренів. Зокрема, для відокремлення коренів іноді доцільно вихідне рівняння $f(x) = 0$ замінити рівносильним йому рівнянням:

$f_1(x) - f_2(x) = 0,$

де функції $f_1(x)$, $f_2(x)$ простіші, ніж $f(x)$. Тоді нулями функції $f(x)$ є абсциси точок перетину функцій $f_1(x)$ і $f_2(x)$.

Метод дихотомії.

Нехай функція $f(x)$ визначена та неперервна при всіх $x \in [a; b]$ та на $[a; b]$ змінює знак. Візьмемо довільну точку $c \in [a; b]$. Якщо на відрізку $[a; b]$ існує єдиний корінь, то наступні ситуації є взаємовиключними:

- $f(a)f(c) < 0$ – корінь знаходиться на інтервалі $(a; c)$;
- $f(c)f(b) < 0$ – корінь знаходиться на інтервалі $(c; b)$;
- $f(c) = 0$ – точка c є шуканим коренем.

Далі ця процедура може бути застосована для відрізків $[a; c]$ або $[c; b]$ відповідно та повторюватись циклічно. Цей процес називається методом дихотомії. Якщо спосіб задання точок c визначених так, що утворена послідовність довжин проміжків існування кореня прямує до нуля, то методом дихотомії можна знайти будь-який корінь рівняння з наперед заданою точністю.

Метод половинного ділення реалізує найпростіший спосіб вибору точки c – поділ проміжку існування кореня навпіл.

Метод хорд.

Можливо досягти кращих результатів збіжності, якщо відрізок $[a; b]$ ділити на частини не навпіл, а пропорційно величинам ординат $f(a)$ та $f(b)$ графіка даної функції $f(x)$. Тобто, точку c знаходити як абсцису точки перетину осі ox з прямою, що проходить через точки $(a; f(a))$ та $(b; f(b))$. Ця пряма є хордою дуги кривої:

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}.$$

Покладаючи y = 0, x = c, отримаємо:

$$x^{(1)} = c = a - \frac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)}.$$

Припустимо, що друга похідна f''(x) зберігає знак і розглянемо два випадки: f(a) > 0, f''(x) > 0 та f(a) < 0, f''(x) > 0. Випадок f''(x) < 0 зводиться до розглядуваного, якщо рівняння записати в формі −f(x) = 0. Першому випадку відповідають формули:

$$x^{(0)} = b,$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f(x^{(k)})-f(a)}(x^{(k)}-a),\ k = 0, 1, \ldots$$

Другому випадку відповідають формули:

$$x^{(0)} = a,$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f(b)-f(x^{(k)})}(b-x^{(k)}),\ k = 0, 1, \ldots$$

В першому випадку залишається нерухомим кінець a, а в другому b.

Метод Ньютона.

Одним з найвідоміших методів пошуку коренів нелінійних рівнянь є метод Ньютона (інші назви: Ньютона-Рафсона, дотичних).

Нехай f(x) – двічі диференційовна на [a; b], який містить корінь x^* рівняння. Нехай x(k) ∈[a; b] член послідовності наближень до кореня x^*. Для x ∈ [a; b] за формулою Тейлора:

$$f(x) = f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(x - x^{(k)}) + \frac{1}{2}f''(\theta_k)(x - x^{(k)})^2,$$

Оскільки корінь $x^* \in [a; b]$, то розклад є справедливим для $x = x^*$:

$$f(x_*) = f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(x_* - x^{(k)}) + \frac{1}{2}f''(\bar{\theta}_k)(x_* - x^{(k)})^2.$$

Оскільки $f(x^*) = 0$, матимемо:

$$f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(x_* - x^{(k)}) + \frac{1}{2}f''(\bar{\theta}_k)(x_* - x^{(k)})^2 = 0$$

Вважаючи, що значення x(k) близьке до x^*, величина $(x^* - x(k))^2$ буде досить мала. Якщо відкинути останній доданок, то буде знайдено не корінь, а деяка інша точка x(k+1). Отримаємо:

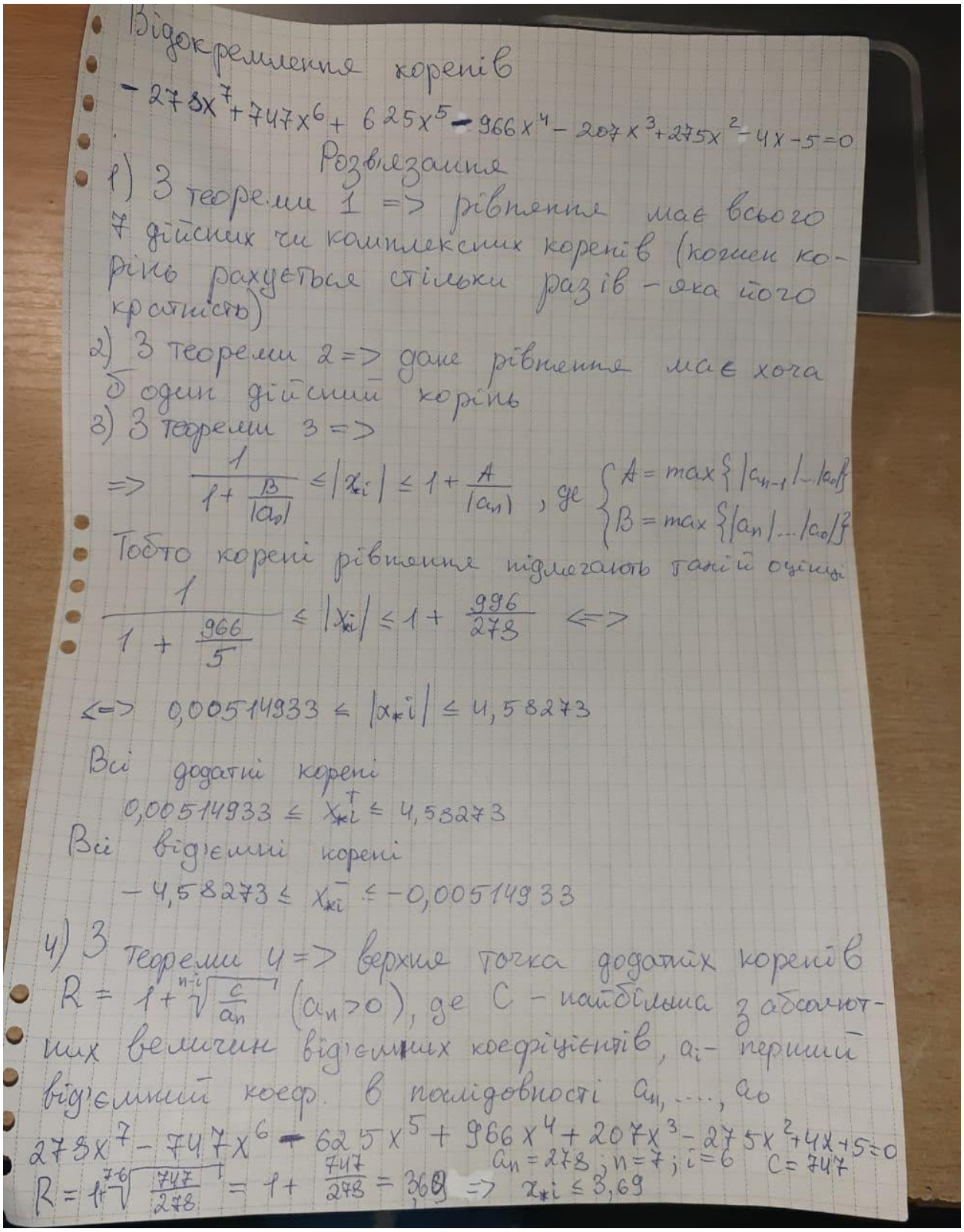
$$f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = 0,$$

або

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Ця формула й визначає ітераційний процес Ньютона.

2. *Відокремлення коренів*



Відокремлення коренів

$-278x^7+747x^6+625x^5-966x^4-207x^3+275x^2-4x-5=0$

Розв'язання

1) З теореми 1 $\Rightarrow$ рівняння має всього 7 дійсних чи комплексних коренів (кожен корінь рахується стільки разів - яка його кратність)

2) З теореми 2 $\Rightarrow$ дане рівняння має хоча б один дійсний корінь

3) З теореми 3 $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+\frac{B}{|a_0|}} \le |x_i| \le 1+\frac{A}{|a_n|}, \text{ де } \begin{cases} A=\max\{|a_{n-1}|\dots|a_0|\} \\ B=\max\{|a_n|\dots|a_0|\} \end{cases}$$

Тобто корені рівняння підлягають такій оцінці

$$\frac{1}{1+\frac{966}{5}} \le |x_i| \le 1+\frac{996}{278} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}00514933 \le |x_i| \le 4{,}58273$$

Всі додатні корені

$$0{,}00514933 \le x_i^+ \le 4{,}58273$$

Всі від'ємні корені

$$-4{,}58273 \le x_i^- \le -0{,}00514933$$

4) З теореми 4 $\Rightarrow$ верхня точка додатніх коренів $R=1+\sqrt[n-i]{\frac{C}{a_n}}$ $(a_n>0)$, де C - найбільша з абсолютних величин від'ємних коефіцієнтів, a_i - перший від'ємний коеф. в послідовності $a_n,\dots,a_0$

$278x^7-747x^6-625x^5+966x^4+207x^3-275x^2+4x+5=0$

$a_n=278;\ n=7;\ i=6\quad C=747$

$R=1+\sqrt[7-6]{\frac{747}{278}}=1+\frac{747}{278}=3{,}69 \Rightarrow x_i \le 3{,}69$

ENVY

Аналогічно оцінимо нижню границю

$P_7(-x) = 278x^7 + 747x^6 - 625x^5 - 966x^4 + 207x^3 + 275x^2 + 4x - 5 = 0$

$a_n = 278$; $n = 7$; $i = 5$; $c = 966$

$R = 1 + \sqrt[7-5]{\frac{966}{278}} = 1 + 1{,}86 = 2{,}86 \Rightarrow 2{,}86 \geq -x_{+i}$

Остаточно маємо:

$-2{,}86 \leq x_{+i} \leq 3{,}69$

5) З теореми 5 $\Rightarrow$ кільк. додатніх коренів $P_7(x)$ = кількості змін знаку в послідовності $a_n, \dots, a_0$ = 4, або менше цього числа на парне число (2, 0). Відповідно, число від'ємних коренів $P_7(x)$ = кількості змін знаку в послідовності $a_n, \dots, a_0$ для $P_7(-x)$ = 3, або менше числа на парне число (1).

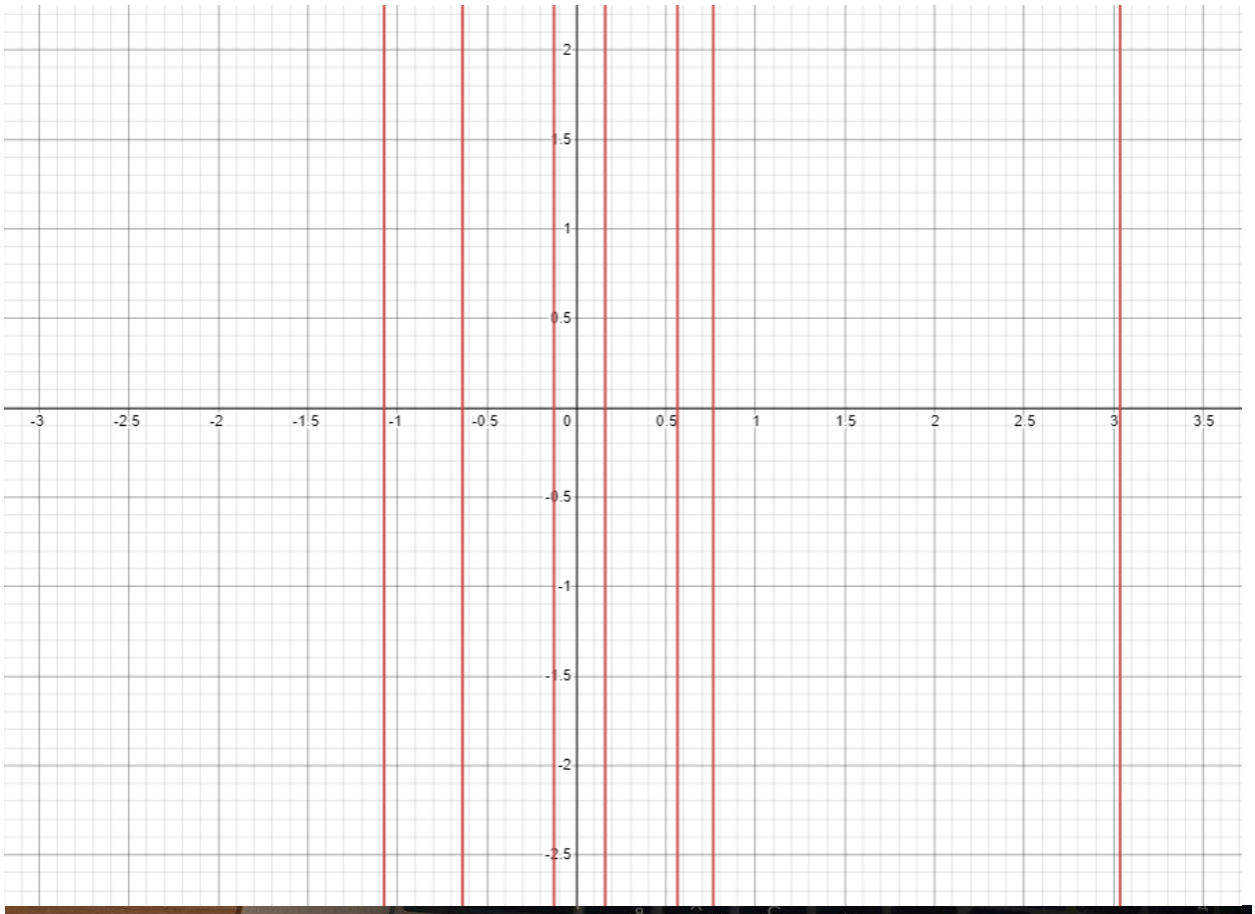
6) З теореми 6 $\Rightarrow$ якщо алгебраїчне рівняння має всі дійсні корені, то квадрат кожного некрайнього коеф. більше добутку двох його сусідніх коеф.. Перевіримо цю умову:

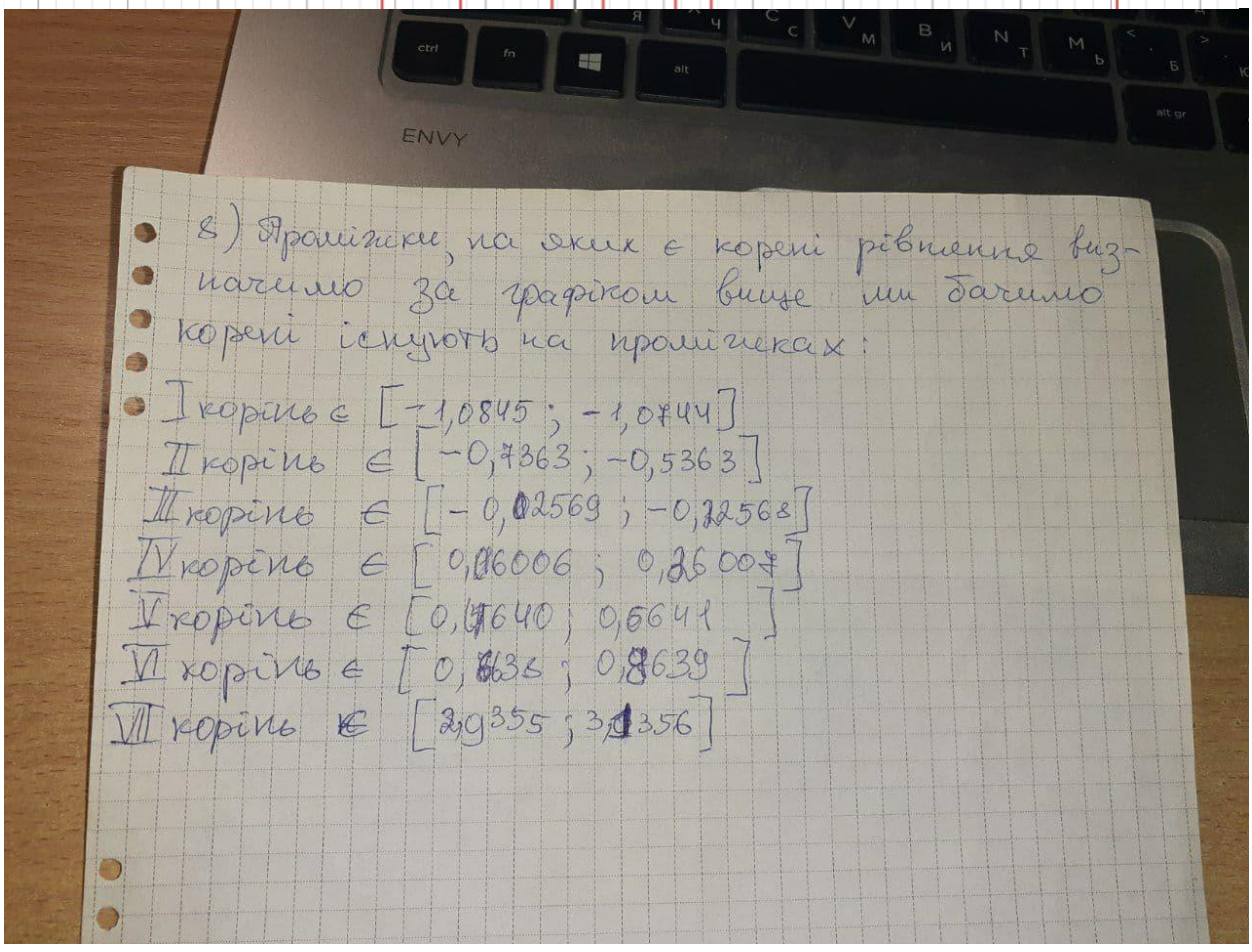
$a_x^2 > a_{k-1} a_{k+1}$

$(747)^2 > (-278)(265)$
$(625)^2 > (747)(-966)$
$(-966)^2 > (-207)(625)$
$(-207)^2 > (275)(-966)$
$(275)^2 > (-207)(-4)$
$(-4)^2 > (-5)(275)$

} всі корені алгебраїчного рівняння дійсні

7) З теореми 7 $\Rightarrow$ якщо ф-ція $f(x) = 0$ на відрізку $[a; b]$ приймає значення різних знаків, то на цьому відрізку міститься хоча б 1 корінь рів.





8) Проміжки, на яких є корені рівняння визначимо за графіком вище ми бачимо корені існують на проміжках:

I корінь $\in [-1,0845; -1,0744]$

II корінь $\in [-0,7363; -0,5363]$

III корінь $\in [-0,\!2569; -0,\!2568]$

IV корінь $\in [0,\!6006; 0,\!6007]$

V корінь $\in [0,\!6640; 0,\!6641]$

VI корінь $\in [0,\!8638; 0,\!8639]$

VII корінь $\in [2,\!9355; 3,\!1356]$

3. Лістинг програми

І програма

```
# Half interval method
eps = 0.00001
intervals = [[-1.275, -1.075], [-0.736, -0.536], [-0.226, -
0.026], [0.061, 0.261], [0.456, 0.656], [0.673, 0.873],
[2.936, 3.136]]
def func(x):
     return -278 * pow(x, 7) + 747 * pow(x, 6) + 625 * pow(x,
5) - 966 * pow(x, 4) - 207 * pow(x, 3) + 275 * pow(x, 2) - 4
* x + 5
def find_root(a, b, e):
 i = 0
 while abs(b-a) > e:
  c = (b+a)/2
  f = func(c)
  if abs(func(c)) < e:
   return c
  elif func(a)*func(c) < 0:
   b = c
  else:
   a = c
  print("Iteration", i, " on interval [", a, ",", b, "]\n")
  i += 1
 return c
print("Method of half intervals\n")
for a,b in intervals:
  print("\n Interval [", a, ',', b, "] x=", find_root(a, b,
eps), "\n")
```

ІІ програма

```
#Chord method
eps = 0.00001
intervals = [[-1.275, -1.075], [-0.736, -0.536], [-0.226, -
0.026], [0.061, 0.261], [0.456, 0.656], [0.673, 0.873],
[2.936, 3.136]]
def func(x):
     return -278 * pow(x, 7) + 747 * pow(x, 6) + 625 * pow(x,
5) - 966 * pow(x, 4) - 207 * pow(x, 3) + 275 * pow(x, 2) - 4
* x - 5
```

```
def dfunc(x):
    return -278 * 7 * pow(x, 6)+747* 6 * pow(x, 5) + 625 * 5
* pow(x, 4) - 966 * 4 *pow(x, 3) - 207 * 3 * pow(x, 2) +275
* 2 * x - 4
def ddfunc(x):
    return -278 * 42 * pow(x, 5)+747* 30 * pow(x, 4) + 625 *
20 * pow(x, 3) - 966 * 12 *pow(x, 2) - 207 * 6 * x +275 * 2
def find_root(a, b, e):
 i = 1
 while abs((b - a) / 2) > e:
   a = b - (b - a) * func(b) / (func(b) - func(a))
   b = a - (a - b) * func(a) / (func(a) - func(b))
   print("Iteration", i, " on interval [", a, ",", b, "]\n")
   i += 1

   return b
print("Method of hordes\n")
for a,b in intervals:
 print("\n Interval [", a, ',', b, "] x=", find_root(a, b,
eps), "\n")
```

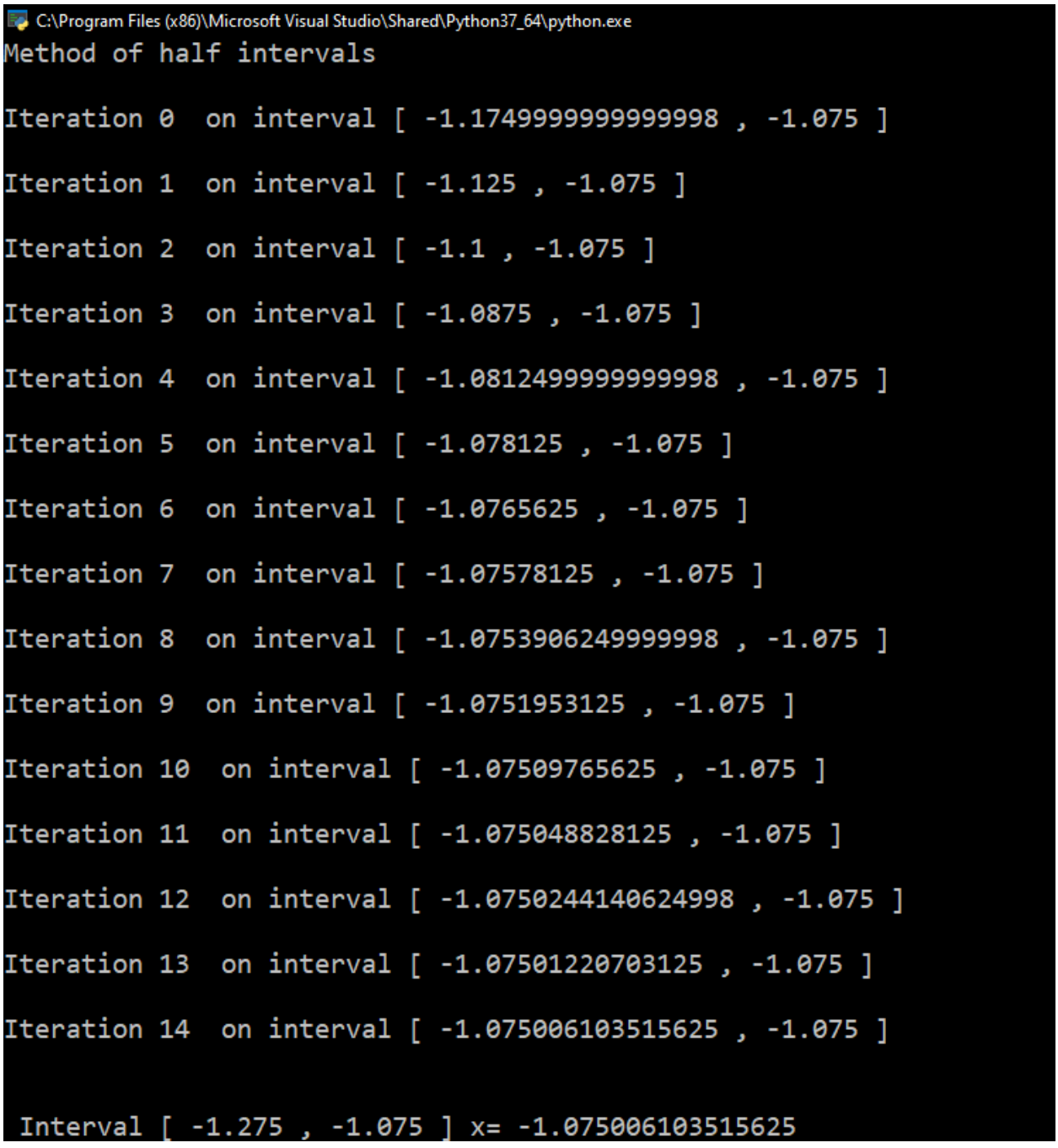
III програма

```
#Newtone method
eps = 0.00001
intervals = [[-1.275, -1.075], [-0.736, -0.536], [-0.226, -
0.026], [0.061, 0.261], [0.456, 0.656], [0.673, 0.873],
[2.936, 3.136]]
def func(x):
    return -278 * pow(x, 7) + 747 * pow(x, 6) + 625 * pow(x,
5) - 966 * pow(x, 4) - 207 * pow(x, 3) + 275 * pow(x, 2) - 4
* x - 5
def dfunc(x):
    return -278 * 7 * pow(x, 6)+747* 6 * pow(x, 5) + 625 * 5
* pow(x, 4) - 966 * 4 *pow(x, 3) - 207 * 3 * pow(x, 2) +275
* 2 * x - 4
def ddfunc(x):
    return -278 * 42 * pow(x, 5)+747* 30 * pow(x, 4) + 625 *
20 * pow(x, 3) - 966 * 12 *pow(x, 2) - 207 * 6 * x +275 * 2
def find_root(a, b, e):
 x0, xn, i = 0, 0, 0
 if func(a) * func(b) < 0:
```

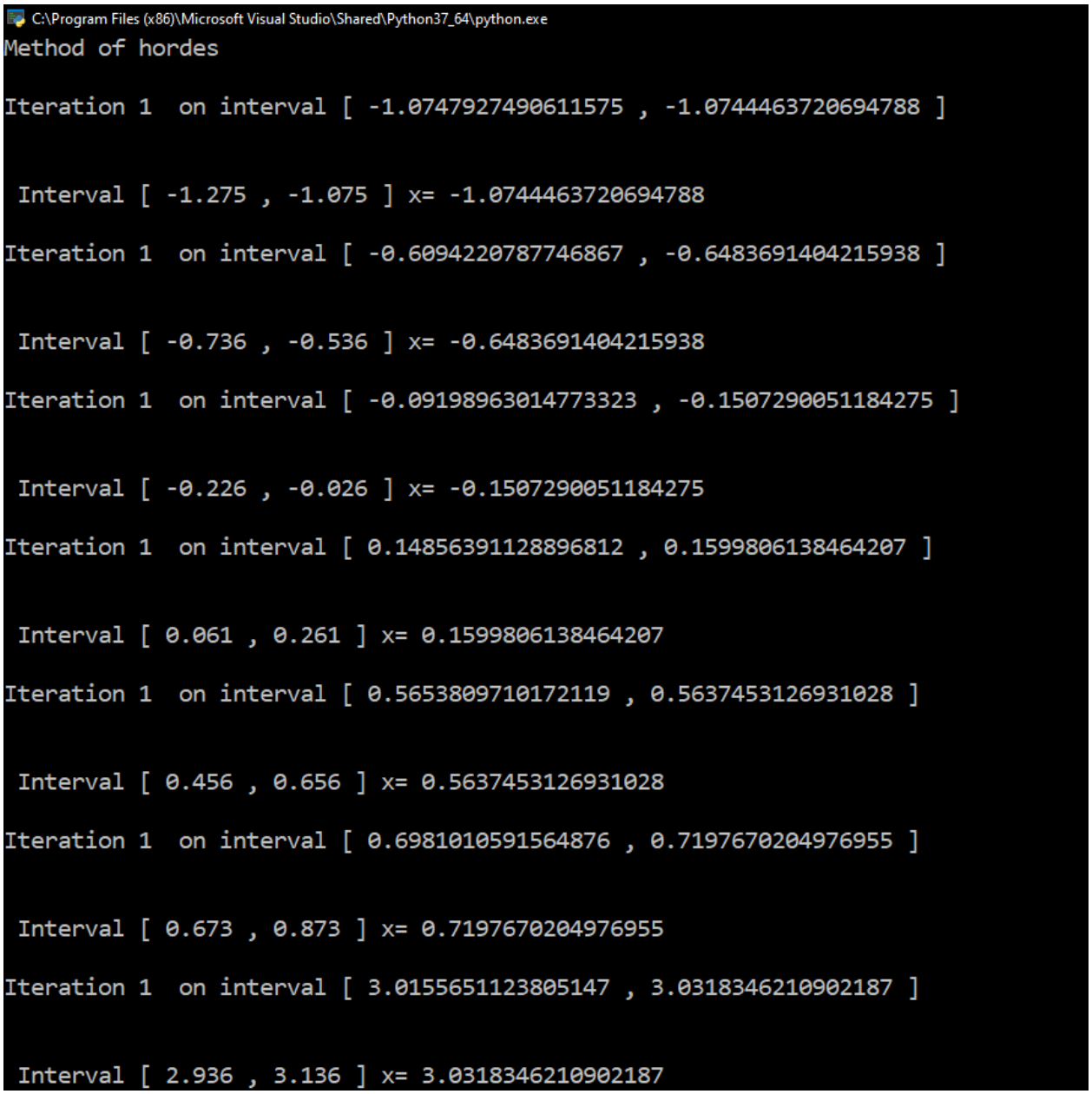
```
  if func(a) * ddfunc(a) > 0:
   x0 = a
  else:
   x0 = b
  xn = x0 - func(x0) / dfunc(x0)

  while abs(x0 - xn) > e:
   x0 = xn
   xn = x0 - func(x0) / dfunc(x0)
   i += 1

   print("Iteration", i, " xn=", xn, "f=", func(xn), "\n",)
 return xn

print("Newton's method(Tangent method)")
for a,b in intervals:
 print("\n Interval [", a, ',', b, "] x=", find_root(a, b,
eps), "\n")
```

4. Приклад роботи програми

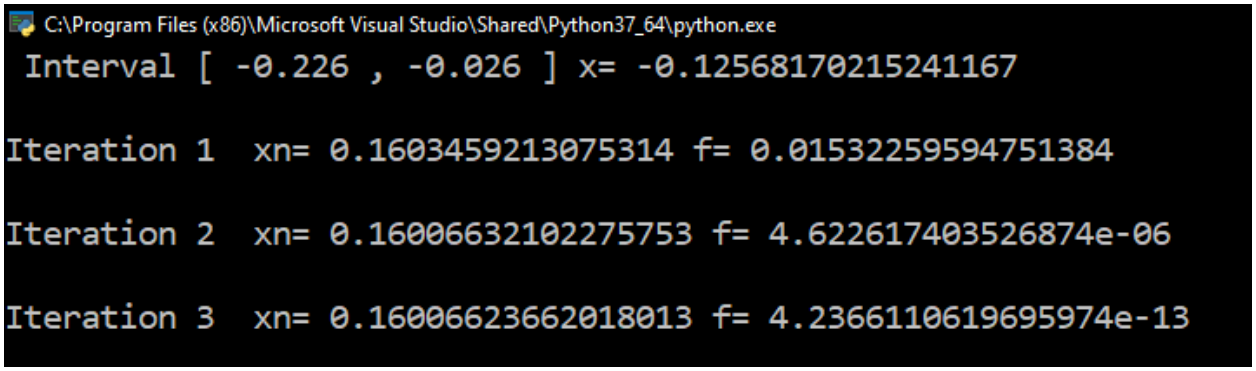
І програма (Метод половинного ділення)



II програма (Метод хорд)



III програма (Метод Ньютона або метод дотичних)



5. Висновок

В ході комп’ютерного практикуму, я знайшов корені рівняння та визначив швидкість роботи кожного з запропонованих методів. Знаходження інтервалів для коренів було проведено за допомогою обчислень та графіку.

Застосування теореми Штрума є надто складним для ручних обчислень. Згідно з результатами роботи, найкращим методом виявився метод Ньютона, що за мінімальну кількість кроків знайшов корінь.

Метод половинного ділення, або метод бісекції виявився найповільнішим, оскільки витратив більше часу на обробку та розрахунок інформації.