Міністерство освіти і науки України

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»

Інститут прикладного системного аналізу

Кафедра ММСА

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №2

З ДИСЦИПЛІНИ «ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ»

ВАРІАНТ №22

Виконав:

Студент ІІ курсу

групи КА-95

Петренко Д.М.

Перевірила:

Хоменко О.В.

Київ – 2021р

Завдання

1. СЛАР завдання 1 розв'язати методом Гаусса з вибором головного елементу. Для цього реалізувати обраний метод для довільної СЛАР розмірності n×n. Розв'язати СЛАР з точністю **$\varepsilon = 10^{-5}$** (кількість знаків після коми 5).
2. Обчислити **det A**.

№ 22.

$$\begin{cases} 13{,}2x_1 - 8{,}3x_2 - 4{,}4x_3 + 6{,}2x_4 = 6{,}8, \\ 8{,}3x_1 + 4{,}2x_2 - 5{,}6x_3 + 7{,}7x_4 = 12{,}4, \\ 5{,}8x_1 - 3{,}7x_2 + 12{,}4x_3 - 6{,}2x_4 = 8{,}7, \\ 3{,}5x_1 + 6{,}6x_2 - 13{,}8x_3 - 9{,}3x_4 = -10{,}8. \end{cases}$$

1. *Теоретичні відомості*

Метод Гаусса полягає в поступовому виключенні невідомих. Система (3.1) поетапно зводиться до системи трикутного вигляду. Нехай a_{11} 6= 0. На першому етапі з усіх рівнянь, починаючи з другого виключаємо змінну x1. Для цього друге рівняння системи замінюємо рівнянням, яке отримуємо так. Друге рівняння додаємо до першого, помноженого на − a_{21} a_{11} . Третє рівняння системи замінюємо рівнянням, яке утворюється додаванням третього рівняння до першого, помноженого на − a_{31} a_{11} . Тобто k-те рівняння системи замінюємо рівнянням, яке утворюється додаванням k-го рівняння до першого, помноженого на − a_{k1} a_{11} , k=1,2,...n. При цьому елемент a_{11} (на який ділимо) називається головним елементом (або ведучим). Після першого етапу система буде мати вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \qquad a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(1)}x_n = b_3^{(1)}, \\ \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + \dots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)}, \end{cases} \tag{3.3}$$

де коефіцієнти обчислюються за формулами

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j}, \quad b_i^{(1)} = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}}b_1,$$

де $i, j = 2, 3, ..., n$.

На другому етапі пророблюємо аналогічні операції з підсистемою системи (3.3), яка отримується виключенням першого рівняння. Після другого етапу система матиме вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)}, \\ \qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad a_{n3}^{(2)}x_3 + \dots + a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)}, \end{cases} \tag{3.4}$$

,

де коефіцієнти обчислюються за формулами

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} a_{2j}^{(1)}, \quad b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} b_2^{(1)},$$

де $i, j = 3, ..., n$.

Продовжуючи цей процес, на (n−1)-му етапі прямого ходу методу Гаусса система (3.1) зведеться до трикутного вигляду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + ... + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 + ... + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)}, \\ \qquad\qquad\qquad \dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)}. \end{cases} \tag{3.5}$$

Коефіцієнти цієї системи отримуємо з коефіцієнтів вихідної системи (3.1) послідовним перерахунком за формулами:

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} a_{kj}^{(k-1)}, \quad b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} b_k^{(k-1)}, \tag{3.6}$$

,

де верхній індекс (номер етапу) змінюється від 1 до n−1, індекси i, j – від k +1 до n. При цьому a (0) ij := aij , b (0) i := bi . Після цього послідовно, починаючи з останнього, обчислюються значення невідомих:

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}};$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_2 = \frac{b_2^{(1)} - a_{23}^{(1)}x_3 - ... - a_{2n}^{(1)}x_n}{a_{22}^{(1)}};$$

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - ... - a_{1n}x_n}{a_{11}}.$$

Цей процес називається **зворотнім ходом** метода Гаусса і визначається формулою:

$$x_k = \frac{1}{a_{kk}^{(k-1)}} \left(b_k^{(k-1)} - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}^{(k-1)} x_j \right), \tag{3.7}$$

де $k = n, n-1, ..., 2, 1$.

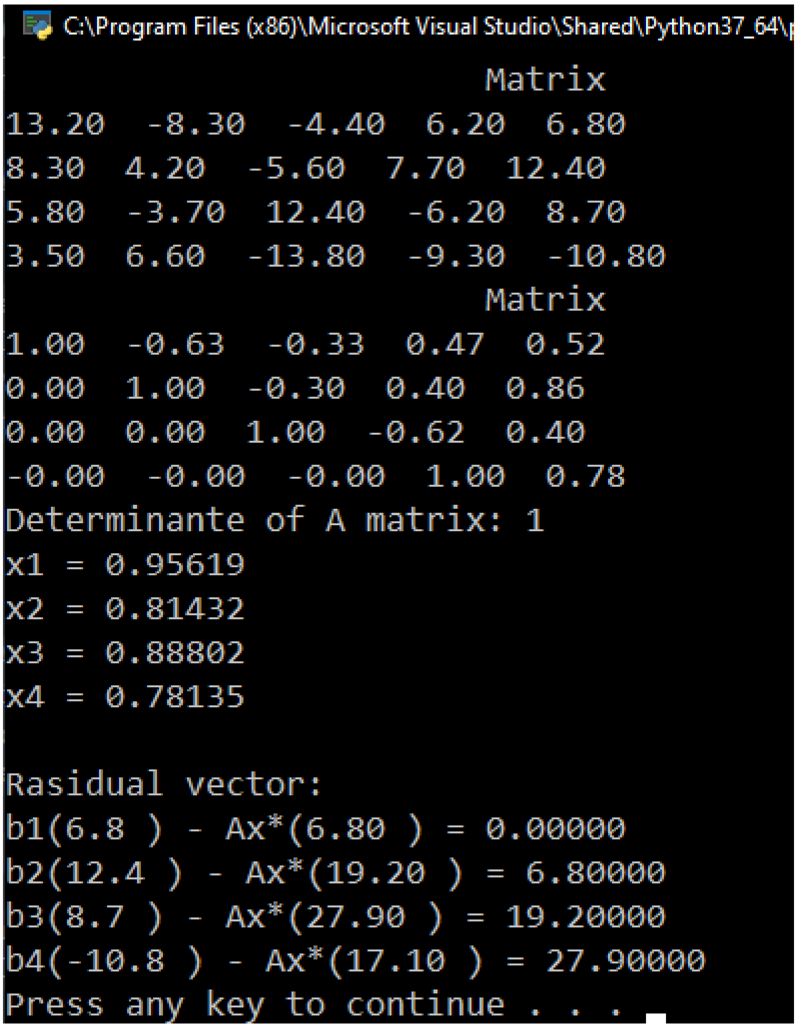
Таким чином, розвязання СЛАР методом Гаусса зводиться до послідовної реалізації обчислень за формулами (3.6) та (3.7).

2. *Лістинг програми*

```
import numpy as np
import math as m
A_m = [[13.2, -8.3, -4.4, 6.2, 6.8],
[8.3, 4.2, -5.6, 7.7, 12.4],
[5.8, -3.7, 12.4, -6.2, 8.7],
[3.5, 6.6, -13.8, -9.3, -10.8]]

A_s = A_m.copy()

def print_A(A):
 print("\t\t\tMatrix")
 for i in range(0, len(A)):
  print(*["%.2f " %A[i][j] for j in range(0, len(A)+1)])

def swap_rows(A, row1, row2):
  A[row1], A[row2] = A[row2], A[row1]

def sum_rows(A, row, source_row, coef):
  A[row] = [(a + k * coef) for a, k in zip(A[row], A[source_row])]

def div_row(A, row, divider):
 A[row] = [a / divider for a in A[row]]

def det_A(A):
 det = 1
 for i in range(0, len(A)):
  det *= A[i][i]
 return int(det)

def max_index(A, col):
 B = np.array(A)
 value_list1 = list(B[col:, col])
 value_list2 = list(B[:, col])
 e_max = max([m.fabs(ell) for ell in value_list1])
 i_max = ([m.fabs(ell) for ell in value_list2]).index(e_max)
 return i_max

def Rasidual_vector(A_s):
 A_x = 0
 X = Gauss(A_m)
 for i in range(0, len(A_s)):
  for j in range(0, len(A_s)):
   A_x += A_s[i][j] * X[j]
  print(f"b{i+1}(%.1f" %A_s[i][len(A_s)], f") - Ax*(%.2f" %A_x,") =",
"%.5f" % (abs(A_s[i][len(A_s)] - A_x)))
 A_x = 0

def Gauss(A):
 column = 0
```

```
 while column < len(A):
  current_row = max_index(A, column)
  if current_row != column:
   swap_rows(A, current_row, column)

  div_row(A, column, A[column][column])

  for r in range(column + 1, len(A)):
   sum_rows(A, r, column, -A[r][column])
  column += 1

 X = [0 for i in range(len(A))]
 for k in range(len(A) - 1, -1, -1):
  X[k] = A[k][-1] - sum(x * a for x, a in zip(X[(k + 1):], A[k][(k +
1):]))

 return X

print_A(A_m)
X_values = Gauss(A_m)
print_A(A_m)
print("Determinante of A matrix:", det_A(A_m))
for i in range(0, len(X_values)):
 print(f"x{i+1} = %.5f" %X_values[i])

print("\nRasidual vector:")
Rasidual_vector(A_s)
```

3. *Приклад роботи програми*



```
C:\Program Files (x86)\Microsoft Visual Studio\Shared\Python37_64\
                        Matrix
13.20  -8.30  -4.40  6.20  6.80
8.30  4.20  -5.60  7.70  12.40
5.80  -3.70  12.40  -6.20  8.70
3.50  6.60  -13.80  -9.30  -10.80
                        Matrix
1.00  -0.63  -0.33  0.47  0.52
0.00  1.00  -0.30  0.40  0.86
0.00  0.00  1.00  -0.62  0.40
-0.00  -0.00  -0.00  1.00  0.78
Determinante of A matrix: 1
x1 = 0.95619
x2 = 0.81432
x3 = 0.88802
x4 = 0.78135

Rasidual vector:
b1(6.8 ) - Ax*(6.80 ) = 0.00000
b2(12.4 ) - Ax*(19.20 ) = 6.80000
b3(8.7 ) - Ax*(27.90 ) = 19.20000
b4(-10.8 ) - Ax*(17.10 ) = 27.90000
Press any key to continue . . .
```

4. *Висновок*

В ході комп’ютерного практикуму мною було написано програму, яка обчислює СЛАР (у прикладі представлена як розширена матриця системи) модифікованим методом Гаусса.

Модифікація поглягає в знаходженні максимального за модулем елемента першого стовпчика розглядуваної для спрощення матриці при зведенні її до верхньотрикутної. Знаходження визначника даної системи описано як множення всіх елементів на головній діагоналі отриманої трикутної матриці.

Перевірка правильності знайдених коренів СЛАР перевіряється у програмі обчисленням вектора нев’язки(b-Ax*).