เอกสารฉบับนี้เป็นการสรุปเนื้อหาและโจทย์ที่จำเป็นสำหรับ

การสอบในแต่ละวิชาสำหรับน้อง ๆ ปี 1

ของโครงการพี่สอนน้องครั้งที่ 17

หากมีข้อผิดพลาดหรือข้อสงสัยเกี่ยวกับเนื้อหาหรือโจทย์

สามารถติดต่อได้ทาง [LineOpenChat]

Fluid Mechanics (กลศาสตร์ของไหล)

ของไหลเป็นการเกาะตัวกันของโมเลกุลของสสารที่มีการเรียงตัวแบบสุ่ม และรวมกันอยู่ด้วยแรงยึดเหนี่ยวอย่างอ่อนๆ ซึ่งรวมกันเป็นกลุ่มก้อนได้ด้วยแรงที่กระทำจากผนังภาชนะที่ของไหลนั้นบรรจุอยู่ โดยในทั้งของเหลวและก๊าซรวมเรียกว่า ของไหล

Overview

- Fluidstatics
  - Pressure
  - Buoyant Force
- Fluid dynamics
  - Continuity Equation (Mass conservation)
  - Bernoulli's Equation (Energy density conservation)
  - Other Applications of Fluids dynamics

Fluidstatics

- **ความหนาแน่น (Density)** $\rho = \frac{M}{V}$
- **ความดัน (Pressure)**

คืออัตราส่วนแรงแนวฉากต่อพื้นที่หนึ่งหน่วย $P \equiv \frac{F}{A}$ เป็นปริมาณสเกลาร์มีหน่วย SI เป็น N/m^2 หรือ Pascal

ถ้าความดันไม่เท่ากันในบริเวณใด ๆ $P = \frac{dF}{dA}$

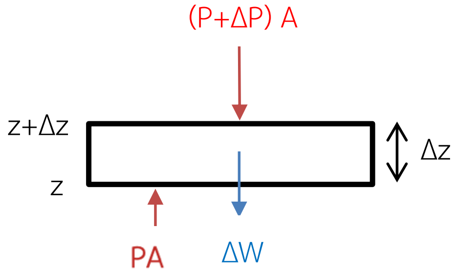
ความดันบรรยากาศที่ผิวโลก มีค่า P_{atm} = 101,325 Pa = 1 atm = 1.013 bar = 760 torr = 760 mmHg

ความดันเกจ คือ ความดันที่อ่านได้จากเกจ (มาตรวัด)

ความดันสัมบูรณ์ คือ ความดันสุทธิที่กระทำ $P = P_{atm} + P_{gauge}$

○ ความสัมพันธ์ระหว่าง ความดันกับความลึกในของไหล

พิจารณาก้อนมวลของไหลที่ระดับความสูง z ใด ๆ



ได้ว่า $\Sigma\vec{F} = 0$

$$PA - (P+\Delta P)A - \Delta W = 0$$

$$-(\Delta P)A = \Delta W = (\Delta m)\,g = \rho(\Delta V)g = \rho A(\Delta z)\,g$$

$$\frac{\Delta P}{\Delta z} = -\rho g$$

ใส่ $\lim\limits_{\Delta x \to 0}$ จะได้ว่า

$$\boxed{\frac{dP}{dz} = -\rho g}$$

○ ความดันกับความลึกของของเหลวความหนาแน่นคงที่

ความดันของของเหลวที่ระดับความลึก h จากผิวของเหลว (ความสูง $z = H-h$) จะหาได้จาก $dP = -\rho g\,dz$

$$\int_{P=P(h)}^{P=P_{atm}} dP = -\rho g \int_{z=H-h}^{z=H} dz$$

$P_{atm} - P = -\rho gh$ นั่นคือ $\boxed{P = P_{atm} + \rho gh}$

○ ความดันกับความสูงของชั้นบรรยากาศ

เนื่องจากความหนาแน่นของอากาศไม่คงที่ (ยิ่งสูงอากาศยิ่งเบาบาง) ดังนั้นจึงต้องหาความสัมพันธ์ของความหนาแน่นก่อน จากสมการสถานะ $PV = nRT$ ซึ่งมวลสามารถเขียนได้ว่า $M = n\mu$ โดย μ เป็น Molar mass

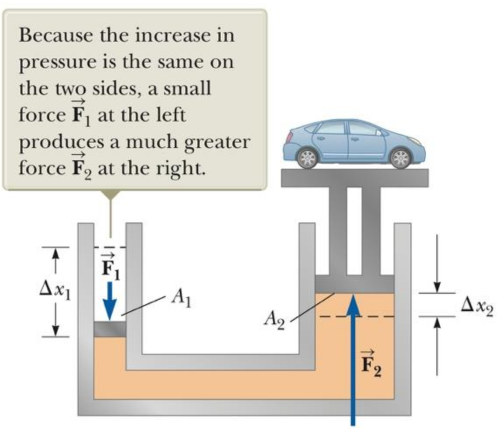
จึงทำให้ได้ว่า $P\mu V = n\mu RT$ นั่นคือ $P\mu V = MRT$ ได้ว่า $\rho = \frac{M}{V} = \frac{P\mu}{RT}$ ซึ่งขึ้นกับความดัน

ดังนั้นความดันที่ระดับความสูง Z จากผิวโลก จะหาได้จาก $dP = -\rho g\,dz = -\frac{P\mu}{RT} g\,dz$

ย้าย P ไปหาร $\int_{P=P_{atm}}^{P=P} \frac{dP}{P} = -\frac{\mu g}{RT}\int_{z=0}^{z=z} dz$ ได้ว่า $\ln\left(\frac{P}{P_{atm}}\right) = -\frac{\mu g}{RT} z$

สามารถเขียนได้ว่า $\boxed{P = P_{atm}\, e^{-\left(\frac{\mu g}{RT}\right)z}}$ เรียกสมการนี้ว่า Barometric Equation

○ Pascal's Law



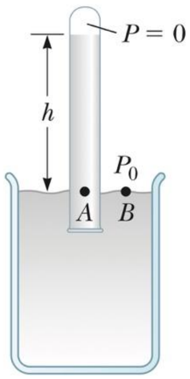
การเปลี่ยนแปลงของความดันที่กระทำกับของไหลในภาชนะ จะถูกส่งต่อโดยไม่หายหกตกหล่นให้กับทุก ๆ ส่วนของของไหลนั้น รวมถึงผนังภาชนะด้วย

$$P = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

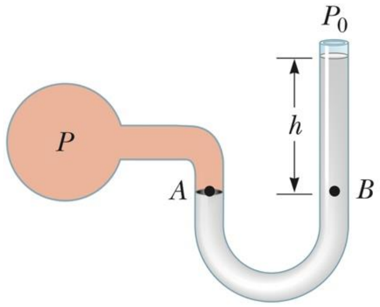
○ Pressure Measurements

อาศัยหลักการที่ว่า

สำหรับของไหลสถิตชนิดเดียวกัน ที่ติดกัน จะได้ว่าที่ระดับความสูงเดียวกัน ย่อมมีความดันสัมบูรณ์ที่เท่ากัน



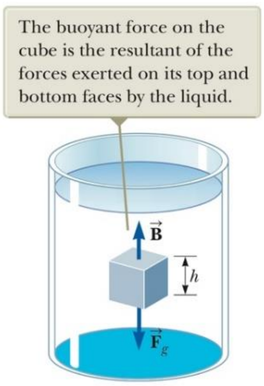
$$P_0 = \rho g h$$



$$P = P_0 + \rho g h$$

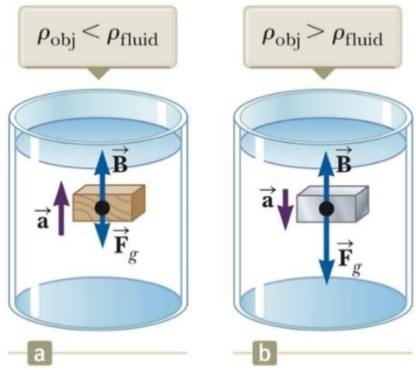
○ Buoyant Force: หลักของอาร์คิมิดีส

"แรงลอยตัวของวัตถุที่จมอยู่ในของไหลจะมีค่าเท่ากับน้ำหนักของของไหลที่ถูกแทนที่ด้วยวัตถุนั้น"



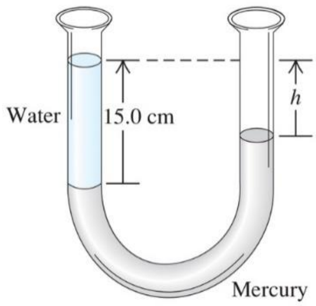
$$B = (P_{bot} - P_{top})A = \rho g h A$$

$$\boxed{B = \rho_{fluid}\, g V_{disp}}$$



แบบฝึกหัดของไหลสถิต

1. (Young and Freedman) หลอดรูปตัว U หลอดหนึ่งเปิดสู้อากาศที่ปลายทั้งสองข้าง ค่อยๆเทน้ำปริมาตรหนึ่งลงไปในแขนข้างซ้ายของหลอดจนกระทั่งความสูงแนวดิ่งของลำน้ำเท่ากับ 15.0 cm ดังรูป
    a.) ความดันเกจที่รอยต่อระหว่างน้ำ – ปรอทมีค่าเท่าใด
    b.) จงคำนวณความสูงแนวดิ่ง h จากด้านบนของปรอทในแขนข้างขวาของหลอดไปยังด้านบนของน้ำในแขนด้านซ้าย (กำหนดให้ปรอทมีความหนาแน่น 13,580 kg/m^3)



a) $P = \rho g h$

$= 1000 \cdot 9.8 \times \frac{15}{100}$

$= 1470$ Pa

b) $P_w = P_m$

$1000 \cdot \cancel{g} \cdot 15 = 13580 \cdot \cancel{g} \cdot (15-h)$

2. (แนวข้อสอบปี 54 และ ปี 63) จงแสดงว่าความดันอากาศ ที่ความสูง h ใด ๆ จากระดับน้ำทะเล มีค่า $P = P_0 e^{-\alpha h}$ โดยที่ $\alpha = \frac{\rho_0 g}{P_0}$ โดยที่ P_0 และ ρ_0 คือความดัน และความหนาแน่นที่ h=0 ตามลำดับ โดยที่ความดันแปรผันตรงกับความหนาแน่น

$$dP = -\rho g\, dh \qquad P = k\rho$$

$$= -\frac{P}{P_0}\cdot\rho_0 g\, dh \qquad \frac{P}{P_0} = \frac{\rho}{\rho_0}$$

$$\int_{P_0}^{P} \frac{1}{P}\, dP = \int -\frac{\rho_0 g}{P_0}\, dh \qquad \rho = \frac{P}{P_0}\cdot\rho_0$$

$$\ln\frac{P}{P_0} = -\frac{\rho_0 g}{P_0} h$$

$$\frac{P}{P_0} = e^{-\alpha h}$$

$$P = P_0 e^{-\alpha h}$$

3. จงประมาณความสูงของชั้นบรรยากาศวัดจากระดับน้ำทะเล กำหนดให้ที่ระดับน้ำทะเลมีความดันบรรยากาศเท่ากับ 101,325 Pa และอากาศมีความหนาแน่น 1.23 kg/m^3 คงที่

$P = \rho g h$

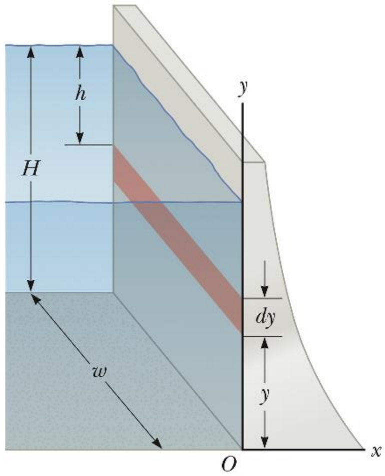
$\frac{101,325}{1.23 \cdot 9.81} = h = 8397.35 \text{ m} \approx 8.4 \text{ km}$

4. พิจารณาเขื่อนที่มีน้ำอยู่สูงจากพื้น H และเขื่อนกว้าง w ดังภาพ กำหนดให้น้ำมีความหนาแน่น ρ

    1. จงแสดงว่าแรงดันเนื่องจากน้ำในเขื่อนมีค่าเท่ากับ

    $$F = \frac{1}{2}\rho g w H^2$$

    2. จงแสดงว่าทอร์กเนื่องจากน้ำในเขื่อนรอบจุด O มีค่าเท่ากับ $\tau = \frac{FH}{3}$



$dA = w\,dy$

$dF = P\,dA$

$dF = -\rho g h\,dA$

$dF = -\rho g h w\,dh$

$\int_0^F dF = \int_h^0 -\rho g h w\,dh$

$= \int_0^h \rho g h w\,dh$

$F = \frac{1}{2}\rho g w h^2$ $\quad dF = \rho g w h\,dh$

$\tau = Fr$

$d\tau = r\,dF = (H-h)\rho g w h\,dh$

$\int_0^\tau d\tau = \rho g w \int_0^H Hh - h^2\,dh$

$= \rho g w \left[\frac{H^3}{2} - \frac{H^3}{3}\right]_0^h$

$\tau = \rho g w\left(\frac{H^3}{6}\right)$

$\tau = \frac{FH}{3}$

5. (Serway) อะลูมิเนียมทรงกลมมีมวล 1.26 kg โดยที่ด้านในมีโพรงทรงกลมที่ใช้จุดศูนย์กลางร่วมกัน (ทรงกลมกลวง) ลอยอยู่ปริ่มน้ำ จงหา
    a.) รัศมีของวงกลม
    b.) รัศมีของโพรง กำหนดให้อะลูมิเนียมมีความหนาแน่น 2,700 kg/m^3

a) $\Sigma F = 0$

$mg = \rho V g$

$1.26 = 1000 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$

$r = 0.067$ m

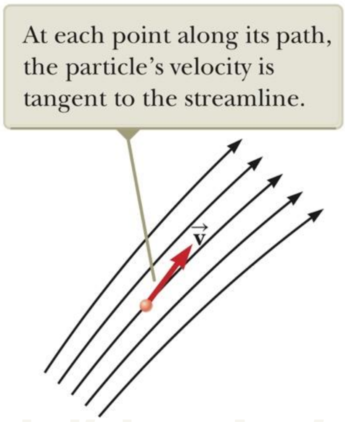
b) $2700\left(\frac{4}{3}\pi(0.067^3 - r^3)\right) = 12.348$

$r = 0.057$

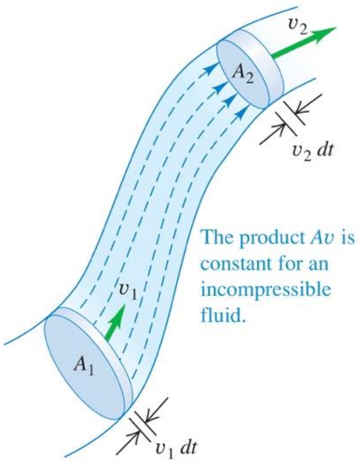
Fluid dynamics

- **คุณสมบัติของของไหลอุดมคติ**
  1. ของไหลไม่มีความหนืด
  2. มีการไหลสม่ำเสมอ
  3. ของไหลนั้นถูกบีบอัดไม่ได้
  4. การไหลไม่เกิดการหมุนวน

เราจะเรียกเส้นทางที่อนุภาคนั้นเคลื่อนที่หรือไหลว่า “เส้นกระแส (Streamline)” และเรียกกลุ่มของเส้นกระแสว่า“ท่อการไหล (Tube of Flow)”



- **สมการความต่อเนื่อง (Equation of Continuity for Fluids)**



พิจารณามวลน้ำเล็กๆที่ไหลเข้า $dm_1 = \rho dV_1 = \rho A_1 v_1 dt$

พิจารณามวลน้ำเล็กๆที่ไหลออก $dm_2 = \rho dV_2 = \rho A_2 v_2 dt$

เนื่องด้วยเป็นของไหลในอุดมคติจึงมีการไหลสม่ำเสมอและบีบอัดไม่ได้

ถ้าพิจารณามวล dm_1 และ dm_2 ในช่วงเวลา dt เดียวกัน

จะได้ $dm_1 = dm_2$

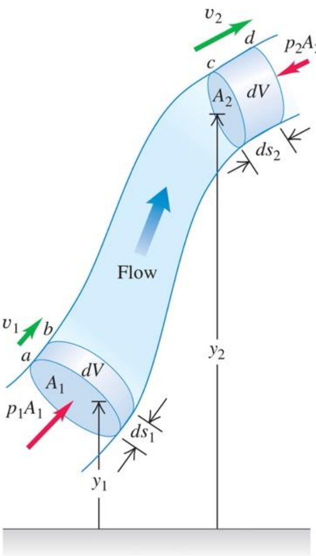
$$\rho A_1 v_1 dt = \rho A_2 v_2 dt$$

$$\boxed{A_1 v_1 = A_2 v_2}$$ สมการความต่อเนื่อง

ซึ่งถ้าพิจารณา Av จะเป็นปริมาณที่บอกว่าปริมาตรที่ไหลไหลผ่านพื้นที่ไปด้วยอัตราเท่าใด ทำให้ $\frac{dV}{dt} = Av$

- **Bernoulli's Equation**

สำหรับของไหลอุดมคติใด ๆ ที่ไหลบน streamline เดียวกัน ย่อมประพฤติตนตามสมการแบร์นูลลี ซึ่งเป็นสมการที่บอกความสัมพันธ์ของความดัน อัตราเร็วและความสูง บนเส้น streamline นั้น ๆ



$$dW = P_1A_1ds_1 - P_2A_2ds_2 = (P_1 - P_2)dV$$

$$dK = \frac{1}{2}\rho dV\left(v_2^2 - v_1^2\right)$$

$$dU = \rho g dV\left(y_2 - y_1\right)$$

จากทฤษฎีงาน – พลังงาน

$$dW = dk + dU$$

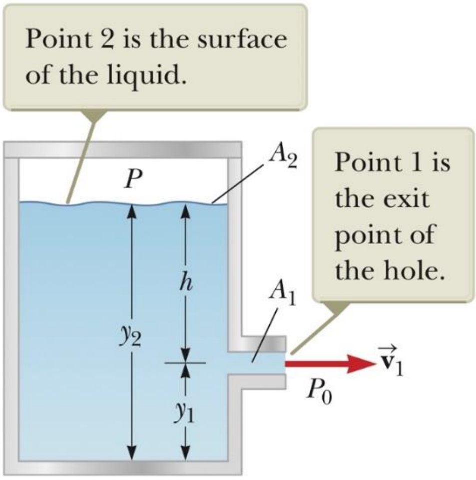
$$(P_1 - P_2)dV = \frac{1}{2}\rho dV\left(v_2^2 - v_1^2\right) + \rho g dV\left(y_2 - y_1\right)$$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho\left(v_2^2 - v_1^2\right) + \rho g\left(y_2 - y_1\right)$$

$$\boxed{P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2}$$ สมการแบร์นูลลี่

Other Applications of Fluid dynamics

○ Torricelli's Law



จากสมการความต่อเนื่อง $A_1v_1 = A_2v_2$

$$v_2 = \frac{A_2}{A_1}v_1$$

จาก Bernoulli's Equation

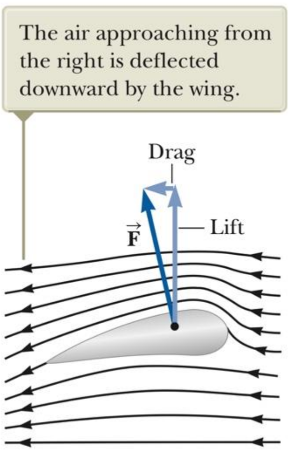
$$P_0 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P + \frac{1}{2}\rho\left(\frac{A_2}{A_1}v_1\right)^2 + \rho gh$$

$$v_1^2\left(1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right) = \frac{2(P-P_0)}{\rho} + 2gh$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\left[\frac{(P-P_0)}{\rho}+gh\right]}{1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}}$$

ถ้า $A_2 \ll A_1$ จะได้ $v_1 = \sqrt{2\left[\frac{(P-P_0)}{\rho}+gh\right]}$ และถ้าเปิดฝา $P = P_0$ จะได้ $v_1 = \sqrt{2gh}$

○ แรงยกปีกเครื่องบิน



เมื่อเครื่องบิน บินในอากาศ ลองดูภาพเส้นกระแสที่ผ่านปีกเครื่องบิน

ด้านบนปีก จะเห็นว่าเส้นกระแสจะยิ่งติดกันมากในบริเวณใกล้ปีกและโค้งรับกับรูปร่างปีก ทำให้ความดันบริเวณเหนือปีกน้อยกว่าความดันบรรยากาศ

ด้านล่างปีก จะเห็นว่าเส้นกระแสจะห่างกว่าปกติในบริเวณใต้ปีกและโค้งออกกับรูปร่างปีก ทำให้ความดันบริเวณใต้ปีกมากกว่าความดันบรรยากาศ

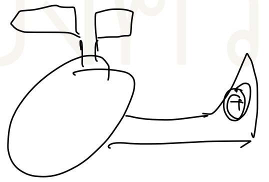
เมื่อความดันใต้ปีกมากกว่าความดันเหนือปีก ก็จะเกิดแรงยกปีกขึ้นมา ทำให้เครื่องบินลอยได้

6. (แนวข้อสอบปี 56) จงบอกว่าสถานการณ์ต่อไปนี้สามารถใช้สมการต่อเนื่อง/สมการแบร์นูลลี่ได้หรือไม่เพราะเหตุใด

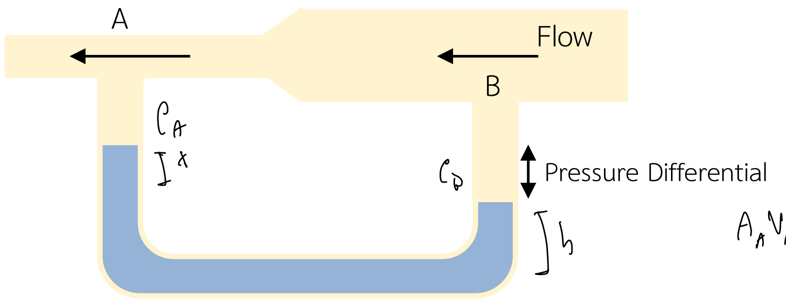
    i. การไหลของน้ำในแม่น้ำเจ้าพระยา

    ii. การไหลของน้ำหวานในหลอดดูดน้ำ

    iii. การไหลเวียนของอากาศบริเวณปีกของเฮลิคอปเตอร์



7. (แนวข้อสอบปี 57) ในการทดลองบนดาวอังคาร สมมติให้ก๊าซไนโตรเจนเป็นของไหลในอุดมคติ และเคลื่อนที่ในท่อแก้วดังรูป อัตราเร็วของก๊าซที่ตำแหน่ง B คือ 10 m/s ถ้าพื้นที่หน้าตัดท่อ ณ ตำแหน่ง B มีขนาดเป็นสองเท่าของพื้นที่หน้าตัดที่ตำแหน่ง A จงระบุความต่างของระดับน้ำทางด้านซ้ายมือและด้านขวามือภายในท่อตัวยูในภาพ (ให้ความหนาแน่นของน้ำมีค่า 1,000 kg/m^3 , ก๊าซไนโตรเจนมีความหนาแน่น 1 kg/m^3 และความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงบนดาวอังคารมีค่าเท่ากับ 3 m/s^2)



$2A \quad 10$

$A_A V_A = A_B V_B$

$\rho g(h+x) + P_A = \rho g(h) + P_B$

$\rho g x + P_A = P_B$

$\rho g x + P_A = P_A + 150$

$\rho g x = 150$

$1000 \cdot 3 \cdot x = 150$

$x = 0.05$

$P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2$

$P_A + \frac{1}{2} \cdot 400 = P_B + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 100$

$P_A + 200 = P_B + 50$

8. (แนวข้อสอบปี 56) กำหนดให้เลือดในร่างกายมีความหนาแน่น 1×10^{3} kg/m^{3} ความดันเลือดมีค่า 1.3×10^{5} N/m^{2} และความเร็วในการไหลของเลือดในหลอดเลือดมีค่าน้อยมาก ยุงตัวหนึ่งต้องการจะดูดเลือด โดยยุงตัวนี้มีปากไว้ดูดเลือดเป็นท่อยาว 1 cm และรัศมีของปากเป็น 10^{-7} m จงหาว่ายุงตัวนี้จะต้องออกแรงในการดูดเลือดเท่าใด (กำหนดให้เลือดไม่มีความหนืด)

$P_{\text{ย}} + \rho g h = P_{\text{ล}}$

$\frac{F}{A} + 1000 \cdot 9.8 \cdot 0.01 = 1.3\times10^{5}$

$\frac{F}{\pi(10^{-7})^{2}} = 129902$

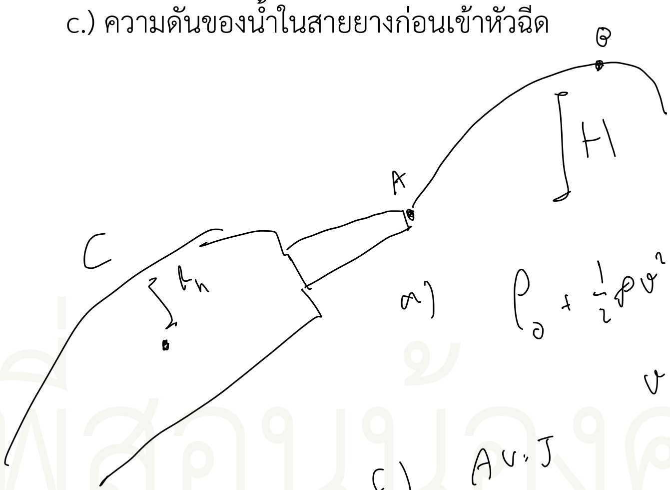
$F = 4.08\times10^{-9}$ N

9. (สอวน. ค่าย 1 ม.4 ปี 56) พนักงานดับเพลงใช้สายยางงรัศมีภายใน R_h และมีหัวฉีดต่ออยู่ที่ปลาย อัตราการไหลเชิงปริมาตรของน้ำในสายยางเท่ากับ J พนักงานดับเพลิงสามารถฉีดน้ำไปถึงจุดที่สูงที่สุดซึ่งอยู่สูงจากระดับหัวฉีดเท่ากับ H กำหนดให้น้ำมีความหนาแน่น ρ , ความดันบรรยากาศเท่ากับ P_0 และความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกเท่ากับ g จงหา

a.) อัตราเร็วของน้ำที่ออกจากหัวฉีด $Av = J$

b.) รัศมีภายในของหัวฉีด

c.) ความดันของน้ำในสายยางก่อนเข้าหัวฉีด



a) $P_0 + \frac{1}{2}\rho v^2 = P_0 + \rho g h$

$v = \sqrt{2gh}$

b) $Av = J$

$\pi r^2 = \frac{J}{\sqrt{2gh}}$

$r = \sqrt{\frac{J}{\pi\sqrt{2gh}}}$

$Av = Av$

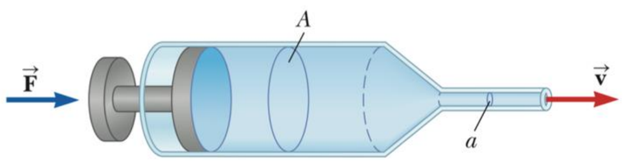
$J = \pi R_h^2 v$

$v = \frac{J}{\pi R_h^2}$

d) $P_c + \frac{1}{2}\rho v_c^2 = P_0 + \rho g h$

$P_c = P_0 + \rho g H - \frac{1}{2}\rho \frac{J^2}{\pi^2 R_h^4}$

10. (Serway) กระบอกฉีดยาอันหนึ่งมียาบรรจุอยู่ โดยยามีค่าความหนาแน่นเท่ากับความหนาแน่นของน้ำ ตัวกระบอกฉีดยามีพื้นที่หน้าตัด $A = 2.50\times10^{-5}\ m^2$ และเข็มฉีดยามีพื้นที่หน้าตัด $a = 1.00\times10^{-8}\ m^2$ ในกรณีที่ไม่มีแรงกระทำต่อก้านสูบ ความดันที่ตำแหน่งต่างๆ จะเท่ากันคือ 1.00 atm เมื่อมีขนาดของแรง $\vec{F}$ ที่กระทำต่อก้านสูบเท่ากับ 2.00 N ทำให้ยาถูกฉีดออกในแนวระนาบจากปลายเข็ม จงหาอัตราเร็วของยาขณะพุ่งออกจากปลายเข็มฉีดยา



$Av_A = Av_a$

$v_A = (4\times10^{-4})\,v_a$

$P = \frac{F}{A} = \frac{2}{2.50\times10^{-5}} = 80000\ Pa$

$\cancel{P_0} + 80000 + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = \cancel{P_0} + \frac{1}{2}\rho v_a^2$

$80000 + \frac{500 \cdot v_a^2}{2500^2} = 500\, v_a^2$

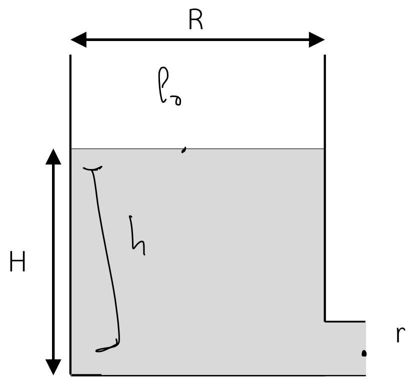
$v_a = 12.65$

11. (แนวข้อสอบปี 54) ถังน้ำขนาดใหญ่มีรัศมี R มีฝาบนเปิดและบรรจุน้ำไว้สูง H หากมีรูเจาะรัศมี r (r << R) ที่ฐานด้านล่างของถังดังภาพ จงแสดงว่าเวลาที่น้ำจะไหลออกจากถังจนหมดมีค่า $t = \left(\frac{R}{r}\right)^2 \sqrt{\frac{2H}{g}}$ ไม่ต้องพิจารณาผลของความหนืด

$\pi R^2 v_R = \pi r^2 v_r$

$\left(\frac{R}{r}\right)^2 = \frac{v_r}{v_R}$

$\frac{H}{v_R}$



$\cancel{P_0} + \rho g(H-r) = \cancel{P_0} + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g r$

$\rho g(h) + \frac{1}{2}\rho v_R^2 = \frac{1}{2}\rho v_r^2$

$\frac{1}{2}\rho \frac{r^4}{R^4} v_r^2 = \frac{1}{2}\rho v_r^2$

$\rho g H = \frac{1}{2}\rho\left(1 - \frac{r^4}{R^4}\right) v_r^2$

$v_r = \sqrt{2gh}$

h ใดๆ

$Q = \frac{dV}{dt} = -\frac{\pi R^2 dh}{dt} = Av = \pi r^2 \sqrt{2gh}\, dt$

$\pi R^2 dh$

$\int_0^H \frac{1}{\sqrt{h}} dh = \int_0^t \frac{r^2}{R^2} \sqrt{2g}\, dt$

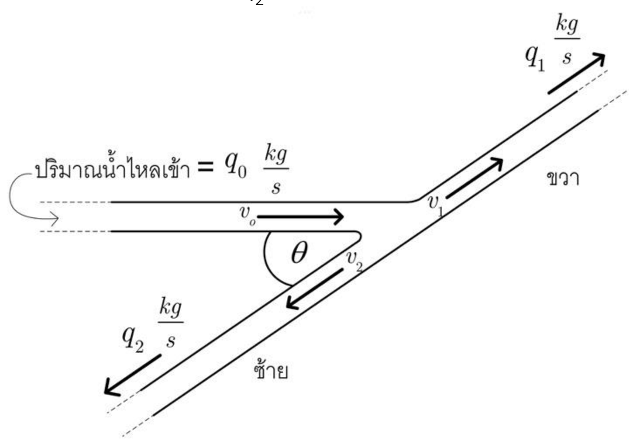
$2\sqrt{H} = \frac{r^2}{R^2}\sqrt{2g}\, t$

$\frac{R^2}{r^2}\sqrt{\frac{2H}{g}} = t$

12. (สอวน. ค่าย 1 ปี 61-62) น้ำซึ่งมีความหนาแน่นคงที่กำลังไหลในรางเปิด โดยราววางตัวในระนาบระดับ น้ำไหลแยกออกเป็นสองทางน้ำไหล ในรางต้นทางน้ำไหลด้วยความเร็ว v_0 m/s และแยกไปทางขวาด้วยความเร็ว v_1 แยกไปทางซ้ายด้วยความเร็ว v_2

    1. จงใช้สมการของ Bernoulli’s equation หาความสัมพันธ์ระหว่าง v_1, v_2 กับ v_0
    2. จงใช้สมการของความต่อเนื่อง (หรืออาจเรียกว่าสมการที่บ่งถึงการอนุรักษ์มวลสารของน้ำ) หาความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณของน้ำที่ไหลไปทางขวา (ใช้สัญลักษณ์ q_1) กับปริมาณที่ไหลไปทางซ้าย (q_2)
    3. จงใช้หลักอนุรักษ์โมเมนตัมผสมกับผลจากข้างบน หาค่าของอัตราส่วน $\frac{q_1}{q_2}$ ในเทอมของมุม θ
    4. พลังงานจลน์ของการไหลนี้อนุรักษ์หรือไม่

$\Sigma E_1 = \Sigma E_2$

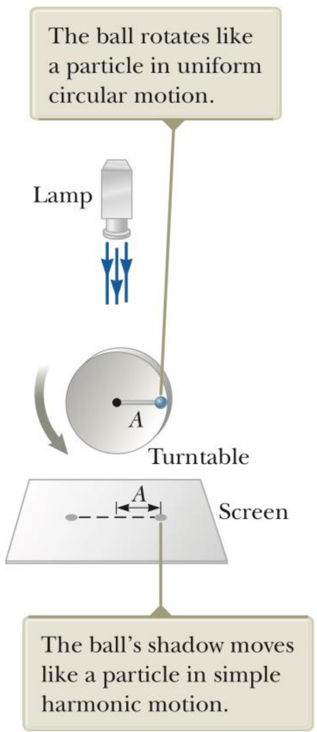


Oscillation

Overview

- Simple harmonic motion
  - Mass with spring
  - Simple pendulum
  - Physical pendulum
  - Torsion pendulum
  - + กรณีอื่นๆ น่าสนใจ
- Damped oscillation
  - Underdamped oscillation
- Forced oscillation and resonance

Simple harmonic motion

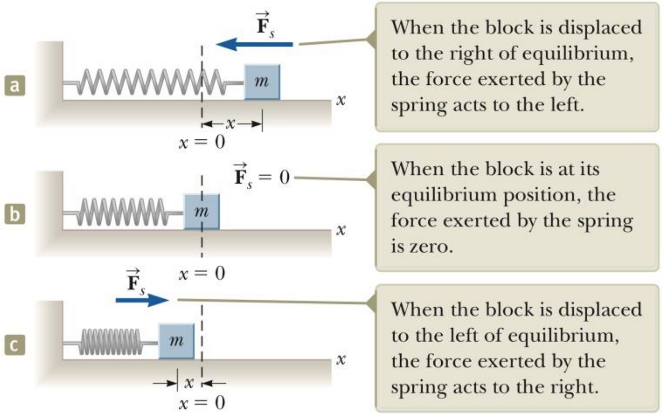


ถ้าเรามีวัตถุที่กำลังเคลื่อนที่เป็นวงกลมสม่ำเสมอ เมื่อเราฉายแสงลงไป เงาของวัตถุจะเคลื่อนที่แบบ SHM.

ซึ่งการเคลื่อนที่แบบ SHM. จะมีความเร่ง แปรผันตาม การกระจัด แต่ทิศทางตรงกันข้าม

[ในทางกลับกัน ถ้าเรามี SHM. เราสามารถสร้างวงกลมอ้างอิงสมมติ เพื่ออธิบายการเคลื่อนที่แบบ SHM.]

Mass with spring



จาก Hooke's Law

$$\vec{F}_s = -k\vec{x}$$

เรียก $\vec{F}_s$ ว่า restoring force

< แรงคืนตัว >

จากกฎข้อที่ 2 ของนิวตัน $\left[\sum \vec{F} = m\vec{a}\right]$ **โดยที่** $a = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \qquad \text{โดย } \frac{k}{m} \equiv \omega^2$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x} \quad \text{หรือเขียน } \ddot{x} = -\omega^2 x$$

ผลเฉลยของสมการ : $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$; φ คือ Phase constant

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$$

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi)$$

โดย ω (ความถี่เชิงมุม) สัมพันธ์กับ f (ความถี่) และ T(คาบ)

$$\boxed{\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}} \;;\; \boxed{f = \frac{1}{T}} \rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

มวลติดสปริงในแง่พลังงาน

$$E = K + U$$; เรารับรู้ว่า E(พลังงานกลของระบบ) คงตัว

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$; $v = \dot{x}$

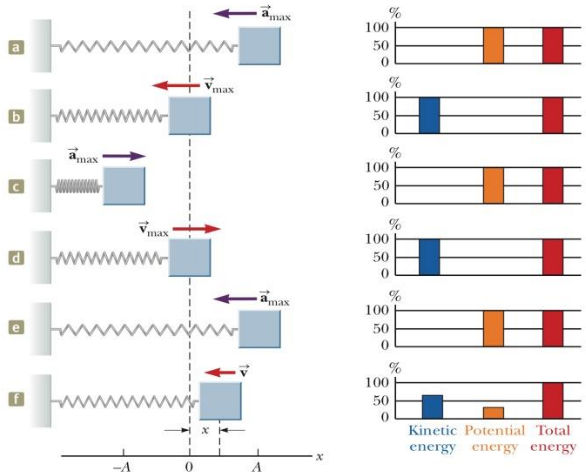
$$\frac{d}{dt}E = 0 = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x}$$

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$ ⟶ ผลลัพธ์เหมือนข้างบน! แสดงว่า เราสามารถวิเคราะห์ SHM. จากพลังงานได้

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi) = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi)$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)$$

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \longrightarrow v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$



t	x	v	a	K	U
0	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$\frac{T}{4}$	0	$-\omega A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
$\frac{T}{2}$	$-A$	0	$\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$\frac{3T}{4}$	0	ωA	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
T	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
t	x	v	$-\omega^2 x$	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}kx^2$

<u>เพิ่มเติม</u> การต่อสปริง

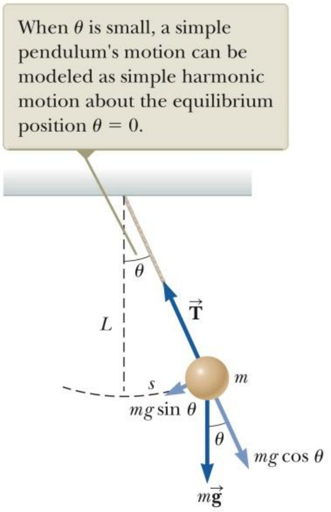
- อนุกรม $\frac{1}{k_t} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$
- ขนาน $k_t = k_1 + k_2$

Simple pendulum

การเคลื่อนที่แบบลูกตุ้มโดยทั่วไปจะไม่เป็น SHM. <a จะไม่แปรผันตาม x>

แต่ถ้าเป็น Simple pendulum แกว่งด้วยมุมเล็กๆ <เราจะประมาณ a $\propto$ x ได้>

การประมาณที่สำคัญ ถ้า θ เป็นมุมเล็กๆ จะได้ว่า $\theta \approx \sin\theta \approx \tan\theta$



2nd Law; $\sum F_T = ma_T$

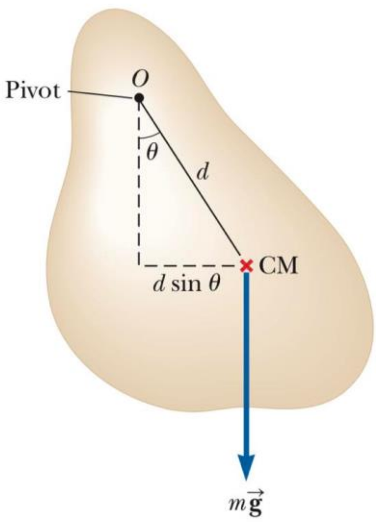
$$-mg\sin\theta = m\frac{d^2s}{dt^2} \;;\; \theta_{\text{น้อยๆ}} \longrightarrow \theta \approx \sin\theta \,,\; s = L\theta$$

$$-g\theta = L\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta$$

ผลเฉลยของสมการ จะได้ $\theta = \theta_{max}\cos(\omega t + \varphi)$ โดยที่ $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \longrightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$

Physical pendulum



$$\sum \tau_{ext} = I\alpha$$

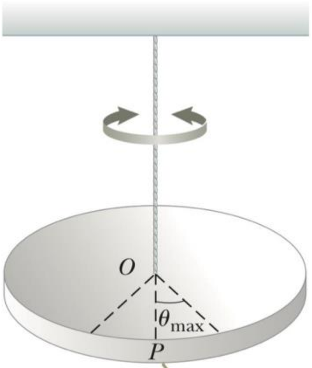
$$-mgd\sin\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \;;\; \theta_{\text{น้อย}} \longrightarrow \sin\theta \approx \theta$$

$$-mgd\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \longrightarrow \text{ผลเฉลย } \theta = \theta_{max}\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \longrightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}}$$

อาจใช้ทฤษฎีแกนขนานช่วย $I = I_{cm} + Mx^2$

Torsion pendulum (ลูกหมุนบิด)



The object oscillates about the line OP with an amplitude θ_{max}.

$\tau \propto \theta$ (ทอร์กแปรผันตรงกับมุมที่บิดไป)

$\tau = -\kappa\theta$; κ คือค่าคงที่การบิด Torsion constant

เครื่องหมาย – ไอเดียคล้ายๆลูกตุ้มเมื่อบิดไปทางหนึ่ง จะเกิด τ เพื่อบิดกลับอีกทาง

จาก $$\sum \tau = I\alpha \quad ; \alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta}$$

$$-\kappa\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\kappa}{I}\theta \rightarrow \text{นั่นคือ} \quad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}}$$

หากเจอ SHM อื่นๆ

1. **วิเคราะห์ด้วย** $\sum \vec{F} = m\vec{a}$, $\sum \vec{\tau} = I\vec{\alpha}$ **หรือ** $E = K + U$ $<\frac{dE}{dt} = 0>$

2. **พยายามโยงให้เข้ารูปแบบ SHM :** $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$ **หรือ** $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta$

อาจต้องใช้การประมาณมุม $\theta \approx \sin\theta \approx \tan\theta$ **(θเล็ก ๆ)**

Damped Oscillations

- Damped แดมป์ $\longrightarrow$ คือการเคลื่อนที่แบบสั่นที่พิจารณาแรงไม่อนุรักษ์ด้วย

Case study : การสั่นในของเหลวหนืดมีแรงต้าน $\vec{R} = -b\vec{v}$

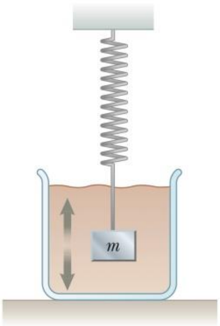


Figure 15.20 One example of a damped oscillator is an object attached to a spring and submersed in a viscous liquid.

จาก $\left[\sum \vec{F} = m\vec{a}\right]$

$$-kx - bv = ma$$

$$-kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0}$$

แก้สมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$ <เป็นวิธีพิสูจน์ ในข้อสอบบอกสูตรแก้เสร็จให้>

เราจะให้ $x = Ae^{\alpha t} \longrightarrow \frac{dx}{dt} = A\alpha e^{\alpha t} \longrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = A\alpha^2 e^{\alpha t}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$A\alpha^2 e^{\alpha t} + \frac{b}{m}A\alpha e^{\alpha t} + \frac{k}{m}Ae^{\alpha t} = 0$$

$$m\alpha^2 + b\alpha + k = 0$$

$$\alpha = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$$

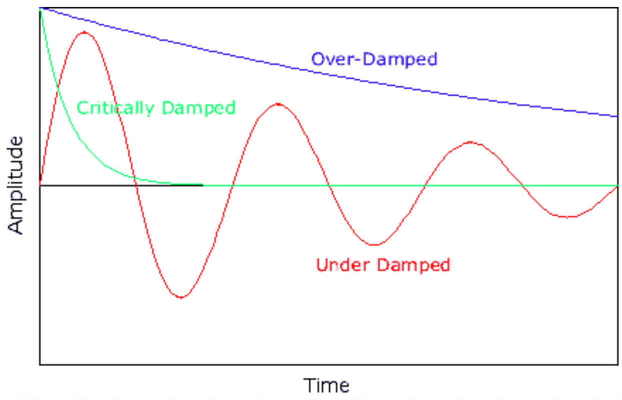
จะได้ $x(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t} \cdot e^{\pm\frac{\sqrt{b^2-4mk}}{2m}t}$

ถ้า $b^2 - 4mk > 0$ เป็น **Overdamped** ไม่มีการสั่นกลับสู่สมดุล [$\frac{b}{2m} > \omega_N$]

$b^2 - 4mk = 0$ เป็น **Critical damping** ไม่มีการสั่นกลับสู่สมดุลเร็วที่สุด [$\frac{b}{2m} = \omega_N$]

$b^2 - 4mk < 0$ เป็น **Underdamped** สั่นแบบแอมพลิจูดลดลงๆ [$\frac{b}{2m} < \omega_N$]

โดย $\omega_N = \sqrt{\frac{k}{m}}$ และ $\frac{b}{2m} = \gamma$ (ค่าคงตัวการหน่วง)

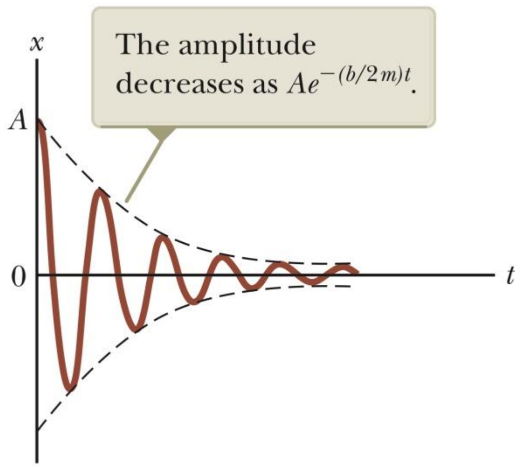


ในปี1 เราจะสนใจ Underdamped เป็นพิเศษ

ถ้าเราแก้สมการ $x(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t} \cdot e^{\pm\frac{\sqrt{b^2-4mk}}{2m}t}$ ต่อภายใต้เงื่อนไข Underdamped

จะได้ $\boxed{x(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t} \cdot \cos(\omega' t + \varphi)}$; Underdamped

โดย $\boxed{\omega' = \sqrt{\omega_N^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}}$



ปล. เวลาทำโจทย์จริง เราเทียบสัมประสิทธิ์จาก

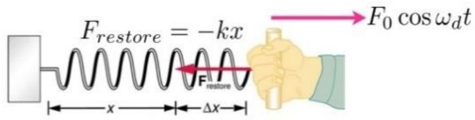
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

มาแทนในสูตรได้เลย ไม่จำเป็นต้องแก้สมการอนุพันธ์!

Forced oscillation and Resonance

เราทราบว่าการเพิ่มแรงต้าน จะทำให้พลังงานกลในการสั่นของ damp ลดลง ถ้าเรานำแรงภายนอกกระทำให้เกิดงาน เพื่อชดเชยพลังงานกลที่สูญเสีย

Case study 1: แรงที่เราออกเป็นไปตามฟังก์ชัน $F(t)=F_0\cos(\omega_d t)$ ที่สปริง<ไม่คิดแรงต้านอากาศ>



2nd Law: $\sum \vec{F}=m\vec{a} \longrightarrow F_0\cos(\omega_d t)-kx=m\dfrac{d^2x}{dt^2}$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=\frac{F_0}{m}\cos(\omega_d t)}$$

<พิสูจน์ใช้สมการเชิงอนุพันธ์>

$$x(t)=A\cos(\omega_d t)\ ,\ \frac{dx}{dt}=-\omega_d A\sin(\omega_d t)\ ,\ \frac{d^2x}{dt^2}=-\omega_d^2A\cos(\omega_d t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=\frac{F_0}{m}\cos(\omega_d t)$$

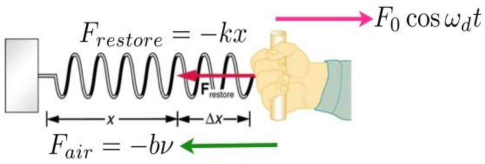
$$-\omega^2A\cos(\omega_d t)+A\frac{k}{m}\cos(\omega_d t)=\frac{F_0}{m}\cos(\omega_0 t)$$

$$A\left[\frac{k}{m}-\omega_d^2\right]=\frac{F_0}{m}\ ;\ \omega_N=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\boxed{A=\frac{F_0/m}{\left|\omega_N^2-\omega_d^2\right|}}$$

- $\omega_N \gg \omega_d : A=\dfrac{F_0}{k}$
- $\omega_N \ll \omega_d : A\rightarrow 0$
- $\omega_N=\omega_d : A\rightarrow\infty$ (Resonance)

Case study 2: แรงที่เราออกเป็นไปตามฟังก์ชัน $F(t) = F_0\cos(\omega_d t)$ ที่สปริง<คิด $f_{air} = -bv$ >



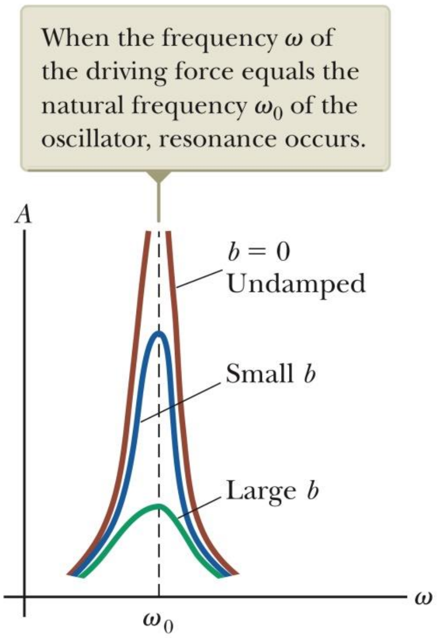
2nd Law: $\sum \vec{F} = m\vec{a} \longrightarrow F_0\cos(\omega_d t) - kx - bv = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \omega_N^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega_d t)$$

ได้ผลเฉลยสมการ $x(t) = A\cos(\omega_d t + \varphi)$

โดย $\boxed{A = \dfrac{(F_0/m)}{\sqrt{(\omega_N^2 - \omega_d^2)^2 + \dfrac{b^2}{m^2}\omega_d^2}}}$

Resonance ที่ A_{max} : $\dfrac{dA}{d\omega_d} = 0 \longrightarrow$ จะได้ว่า $\omega_d = \sqrt{\omega_N^2 - \left(\dfrac{b}{2m}\right)^2}$



ถ้าไม่มีการหน่วง (b=0) $\omega_d = \omega_N$

$A \longrightarrow \infty$ <เราให้ความถี่ใกล้เคียงความถี่ธรรมชาติ>

• สรุป Oscillation motion

Simple harmonic motion

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)\ ,\ \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f\ ,\ T = \frac{1}{f}$$

- Mass with spring → $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\ ,\ T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$
  → $E = K + U = \frac{1}{2}kA^2$
- Simple pendulum → $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}\ ,\ T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$
- Physical pendulum → $\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}\ ,\ T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$
- Torsion pendulum → $\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}}\ ,\ T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}$

Damped Oscillations

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0}$$

$b^2 - 4mk > 0$ เป็น Overdamped $[\frac{b}{2m} > \omega_N]$

$b^2 - 4mk = 0$ เป็น Critical damping $[\frac{b}{2m} = \omega_N]$

$b^2 - 4mk < 0$ เป็น Underdamped $[\frac{b}{2m} < \omega_N]$

Underdamped: $\boxed{x(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega' t + \varphi)}$ $\boxed{\omega' = \sqrt{\omega_N^2 - (\frac{b}{2m})^2}}$

Forced Oscillation

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{b}{m}\frac{dx}{dt}+\omega_N^2 x=\frac{F_0}{m}\cos(\omega_d t)}$$

$x(t)=A\cos(\omega_d t+\varphi)$ โดยที่ $\boxed{A=\dfrac{(F_0/m)}{\sqrt{(\omega_N^2-\omega_d^2)^2+\dfrac{b^2}{m^2}\omega_d^2}}}$

แบบฝึกหัด Oscillation motion

1. (Serway) ลูกสูบของเครื่องยนต์เครื่องหนึ่งเคลื่อนที่แบบฮาร์โมนิกอย่างง่ายซึ่งตำแหน่งของลูกสูบสามารถอธิบายได้ด้วยสมการ $x = 5.00\cos(2t + \frac{\pi}{6})$ เมื่อ x วัดในหน่วยเซนติเมตร และ t วัดในหน่วยวินาที ณ เวลา t=0 จงหา

   (a) ตำแหน่งของลูกสูบ $x = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

   (b) ความเร็ว $v = -5$

   (c) ความเร่ง $a = -10\sqrt{3}$

   (d) คาบและแอมพลิจูดของการเคลื่อนที่

$v = -10\sin(2t + \frac{\pi}{6})$

$a = -20\cos(2t + \frac{\pi}{6})$

$T = \pi$ $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$A = 5$

2. (Serway) ตำแหน่งเริ่มต้น ความเร็ว และความเร่งของวัตถุที่เคลื่อนที่แบบฮาร์โมนิกอย่างง่าย คือ x_i , v_i และ a_i ตามลำดับ ถ้าความถี่เชิงมุมของการสั่นคือ ω

(a) จงแสดงให้เห็นว่า ตำแหน่ง และความเร็วของวัตถุสามารถอธิบายได้ดังสมการ

$$x(t) = x_i\cos(\omega t) + \left(\frac{v_i}{\omega}\right)\sin(\omega t)$$

$$v(t) = -x_i\omega\sin(\omega t) + v_i\cos(\omega t)$$

(b) กำหนดให้ A คือแอมพลิจูดของการเคลื่อนที่ จงแสดงให้เห็นว่า

$$v^2 - ax = v_i^2 - a_i x_i = \omega^2 A^2$$

$a = -A\omega^2\cos(\omega t+\phi)$

$x = A\cos(\omega t+\phi)$

$v = -A\omega\sin(\omega t+\phi)$

$t = 0$

$x_i = A\cos\phi$

$v_i = -A\omega\sin\phi$

$a_i = -A\omega^2\cos\phi$

$x(t) = A\cos(\omega t+\phi)$

$= A(\cos\omega t\cos\phi - \sin\omega t\sin\phi)$

$= x_i\cos\omega t - \frac{A}{\omega}\omega\sin\omega t\sin\phi$

$= x_i\cos\omega t - \frac{v_i}{\omega}\sin\omega t$

$v(t) = -A\omega\sin(\omega t+\phi)$

$= -A\omega(\sin\omega t\cos\phi + \sin\phi\cos\omega t)$

$= -x_i\omega\sin\omega t + v_i\cos\omega t$

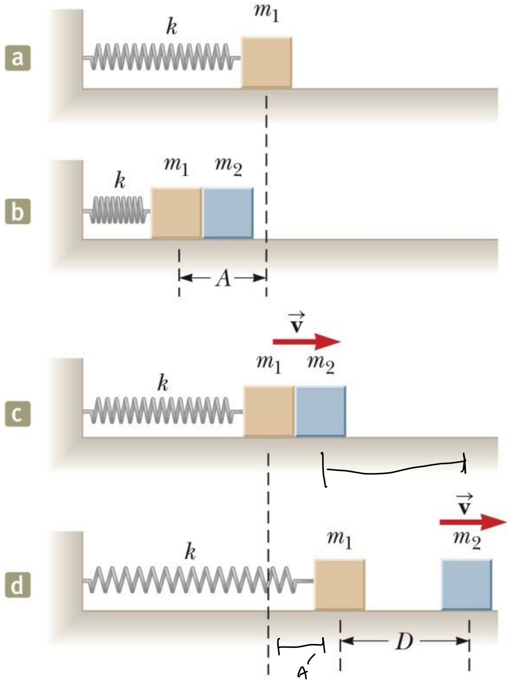
$v^2 - ax = A^2\omega^2\sin^2(\omega t+\phi) + A^2\omega^2\cos^2(\omega t+\phi)$

$= A^2\omega^2$

$v_i^2 - a_i x_i = A^2\omega^2\sin^2\phi + A^2\omega^2\cos^2\phi$

$= A^2\omega^2$

3. (Serway) มวล m_1 = 9.00 kg อยู่ในสภาวะสมดุล ต่อกับ สปริงเบาที่มีค่าคงที่สปริง k=100N/m กับกำแพงดังภาพ (a) ต่อมานำวัตถุ m_2 = 7.00 kg ดันมวล m_1 เข้าไปช้าๆ ทำให้ m_1 ถูกอัดเป็นระยะ A = 0.200 ดังภาพ (b) หลังจากที่เราปล่อยให้มวลทั้งสองเคลื่อนที่ไปทางขวา <กำหนดว่าพื้นผิวไม่มีความเสียดทาน> จงหา
   1. เมื่อ m_1 เคลื่อนมาอยู่ที่ตำแหน่งสมดุลดังภาพ (c) <โดยที่ m_1 ยังติดกับ m_2> ด้วยความเร็ว v จงหาค่า v
   2. วัตถุทั้งสองสองจะอยู่ห่างเท่าใด เมื่อสปริงยืดออกมากที่สุดเป็นครั้งแรก (D=?)



$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2$

$100\cdot(0.2)^2 = 16v^2$

$v = \frac{10\cdot 0.2}{4} = \frac{1}{2}$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{100}{9}}} = \frac{3\pi}{5}$

$t = \frac{\frac{3\pi}{5}}{4} = \frac{3\pi}{20}$

$\frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2 = \frac{1}{2}kA'^2 + \frac{1}{2}m_2v^2$

$4 = 100A'^2 + \frac{7}{4}$

$\sqrt{\frac{25}{800}} = A'$

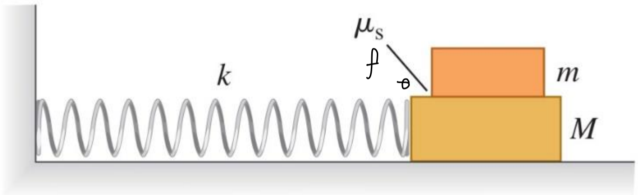
$\frac{3}{20} = A'$

$D = S - A'$

$= vt - A'$

$= \frac{3\pi}{40} - \frac{3}{20} = 0.0856$

4. (Young and Freedman) ก้อนวัตถุมวล M วางนิ่งอยู่บนพื้นผิวลื่นและผูกติดกับขดสปริงระดับซึ่งมีค่าคงตัวสปริง k ปลายอีกข้างหนึ่งของสปริงผูกติดอยู่กับกำแพง ก้อนวัตถุก้อนที่สองมวล m วางอยู่ด้านบนของก้อนแรก สัมประสิทธิ์ความเสียดทานสถิตระหว่างก้อนวัตถุทั้งสองคือ μ_s จงหาแอมพลิจูดสูงสุดของการสั่นที่ทำให้ก้อนวัตถุบนยังไม่ไถลบนวัตถุก้อนล่าง



$\omega = \sqrt{\frac{k}{m+M}}$

$f = ma$

$\mu_s N = ma$

$\mu_s g = A\omega^2$

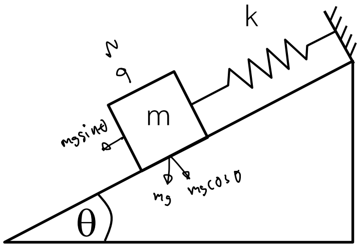
$\mu_s g = A \cdot \frac{k}{M+m}$

$A = \frac{(M+m)\mu_s g}{k}$

5. (แนวข้อสอบปี 54) วัตถุมวล m ถูกนำไปห้อยกับสปริงที่มีค่าคงที่สปริง k ที่ติดอยู่บนพื้นเอียงไร้ความเสียดทานซึ่งเอียงทำมุม θ ดังภาพ

   ก. ที่ตำแหน่งสมดุลสปริงจะยืดออกเป็นระยะเท่าใด

   ข. หากดึงสปริงตามแนวพื้นเอียงลงมาเป็นระยะเล็กน้อย สปริงจะเคลื่อนที่แบบแกว่งกวัดด้วยคาบเท่าใด



$kx = mg\sin\theta$

$x = \frac{mg\sin\theta}{k}$

$mg\sin\theta - kx = m\ddot{x}$

$kx_0 - kx = m\ddot{x}$

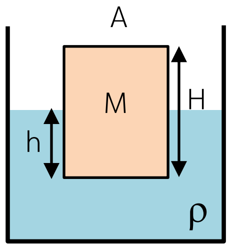
$-k(x - x_0) = m\ddot{x}$

$-ky = m\ddot{x}$

$-\frac{k}{m}y = \ddot{x} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{m}{k}}\,2\pi$

6. (แนวข้อสอบปี 57) พิจารณากล่องๆ หนึ่งมีพื้นที่หน้าตัด A มวล M มีความสูง H มีความหนาแน่นสม่ำเสมอ เมื่อนำไปลอยในของเหลวความหนาแน่น ρ พบว่าสามารถลอยน้ำได้โดยเมื่ออยู่ในสภาวะสมดุลมีส่วนที่จมน้ำมีความสูง h ดังรูป จากนั้นออกแรงกดเล็กน้อยลงไปบนผิวกล่องด้านบนแล้วปล่อยมือออก



1. จงพิสูจน์ว่าการเคลื่อนที่ขึ้นลงของกล่องเป็นไปแบบ Simple Harmonic Motion โดยไม่พิจารณาแรงหนืดของน้ำ

$Mg = \rho A h g$

$-\rho A g x + Mg = M\ddot{x}$

$-\frac{\rho A g}{M} x + g = \ddot{x}$

$\frac{-\rho A g + \rho A H g}{\rho A H} = \ddot{x}$

$-\frac{g}{H} x + g = \ddot{x}$

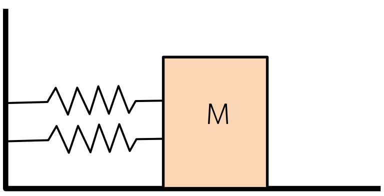
$\omega = \sqrt{\frac{g}{H}}$ $\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{H}{g}}$

2. หากทำการทดลองแบบนี้ โดยเปลี่ยนไปทำการทดลองในสถานที่ที่ความดันอากาศลดลง n% จงหาการเปลี่ยนแปลงของคาบ

ไม่ส่งผล

3. หากกล่อง ๆ เดียวกันนี้ไปติดกับสปริง 2 อันที่มีค่าคงที่ของสปริงเท่ากันดังรูป โดยพื้นลื่น แล้วทำให้เกิดการสั่นแบบ Simple Harmonic Motion โดยต้องการให้คาบของการสั่นเท่ากับตอนนำไปลอยในของเหลวในข้อ(1) จงหาค่าคงที่ของสปริงที่เหมาะสม

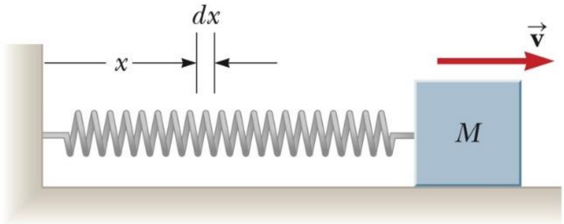
$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K+K}} = 2\pi\sqrt{\frac{H}{g}}$



$\frac{m}{2K} = \frac{H}{g}$

$\frac{mg}{2H} = K$

7. (Serway) มวลขนาด M ผูกติดอยู่กับสปริงซึ่งมีมวล m และกำลังกวัดแกว่งแบบซิมเปิลฮาร์มอนิกในแนวนอนดังแสดงในรูป กำหนดให้สปริงมีค่านิจเป็น k และมีความยาวขณะสมดุลเป็น l สมมติให้ทุกส่วนของสปริงแกว่งพร้อมกันโดยที่อัตราเร็วในแต่ละบริเวณที่มีความยาว dx ของสปริงมีค่าแปรผันกับระยะ x จากจุดตรึงกับกำแพง หรือกล่าวได้ว่า $v_x=(x/l)v$ และมวลของสปริงแปรผันกับส่วนของความยาวตามความสัมพันธ์ $dm = (m/l)dx$ จงคำนวณหา
    1. พลังงานจลน์รวมของระบบเมื่อมวล M มีอัตราเร็ว v
    2. คาบของการแกว่ง



$K_{ของM} = \frac{1}{2}Mv^2$

$dK_{ของสปริง} = \frac{1}{2}dm\,v_x^2 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{l}\right)^2 v^2\cdot\frac{m}{l}\cdot dx$

$K = \frac{1}{2}\cdot\frac{m}{l^3}v^2\int_0^l x^2\,dx$

$K = \frac{1}{2}\cdot\frac{m}{l^3}v^2\cdot\frac{l^3}{3}$

$K = \frac{1}{6}mv^2$

$E = K + U$

$E = \frac{1}{2}\dot{y}^2\left(M+\frac{m}{3}\right) + \frac{1}{2}ky^2$

$\frac{dE}{dt} = 0 = \dot{y}\ddot{y}\left(M+\frac{m}{3}\right) + 2\cdot\frac{1}{2}ky\dot{y}$

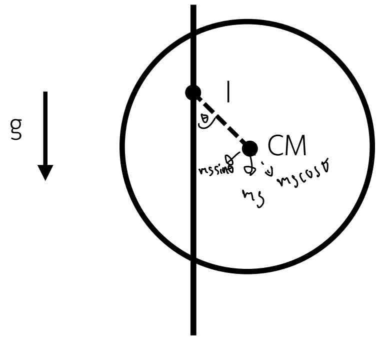
$\dot{y}\left(\ddot{y}\left(M+\frac{m}{3}\right) + ky\right) = 0$

$\ddot{y} = \frac{-k}{M+\frac{m}{3}}y$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{M+\frac{m}{3}}}$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{M+\frac{m}{3}}{k}}$

8. (หนังสือสอวน.ฟิสิกส์) จะต้องเจาะเหรียญรัศมี R (เช่นเหรียญบาท) ที่ตำแหน่งห่างจากศูนย์กลางเท่าไร เมื่อแขวนให้แกว่งได้คล่องในแนวระนาบของตัวเองแล้วจะแกว่งด้วยความถี่สูงสุด กำหนดให้เหรียญมีโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวล$=\frac{1}{2}MR^2$



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgl}{I}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{gl}{\frac{1}{2}R^2 + l^2}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2gl}{R^2+2l^2}}$$

$$\frac{df}{dl} = \frac{1}{2\pi}\cdot\left(\frac{\sqrt{2gl}}{\sqrt{R^2+2l^2}}\right)'$$

$$0 = \frac{(\sqrt{R^2+2l^2})(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{l}}) - \sqrt{2gl}\,(\frac{1}{2}\cdot\frac{4l}{\sqrt{R^2+2l^2}})}{R^2+2l^2}$$

$$0 = (\sqrt{R^2+2l^2})\frac{1}{2\sqrt{l}} - \sqrt{l}\left(\frac{2l}{\sqrt{R^2+2l^2}}\right)$$

$$4l^2 = R^2+2l^2$$

$$R^2 = 2l^2$$

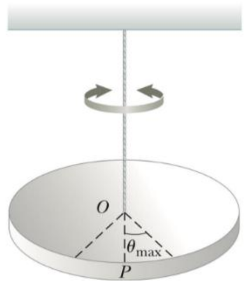
$$R = \sqrt{2}\,l$$

$$l = \frac{\sqrt{2}}{2}R$$

9. (แนวข้อสอบปี 56) การเคลื่อนที่ของ Torsion pendulum เป็นการเคลื่อนที่แบบ Simple Harmonic โดยมีความสัมพันธ์ของทอร์กคืนตัวและมุมบิดเป็น $\tau = I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\kappa\theta$ เมื่อ I คือโมเมนต์ความเฉื่อย และ κ เป็นค่าคงที่ และสามารถเขียนความสัมพันธ์ของมุมบิดกับเวลาได้เป็น

$$\theta(t) = \theta_m \cos(\xi t + \varphi)$$

1. จงหาค่า ξ และ φ ในรูปของ I และ κ เมื่อกำหนดให้ $\theta(t=0) = \theta_m$



$\omega = \sqrt{\frac{K}{I}} = \xi$

$\varphi = 0$

2. ถ้านำชุดการทดลองจุ่มลงในของเหลว ความสัมพันธ์ของทอร์กคืนตัวและมุมบิด จะเปลี่ยนเป็น $\tau = I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\kappa\theta - b\frac{d\theta}{dt}$ เมื่อ b เป็นค่าคงที่ของของเหลว ถ้ากำหนดให้ I=30, κ=5 และ b=0.3 จงหาว่าการเคลื่อนที่นี้เป็น damped แบบใด

$I\frac{d^2\theta}{dt^2} + b\frac{d\theta}{dt} + k\theta = 0$

$0.3 \quad 2\sqrt{5 \cdot 30}$

$0.3 \quad 2\sqrt{150}$

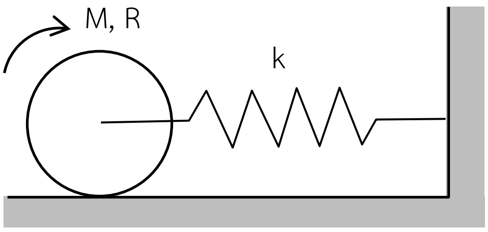
$\omega = \sqrt{\frac{K}{I} - \frac{b}{(2I)^2}}$

$\frac{1}{6} - \frac{0.3}{3600}$

$\frac{1}{6} - \frac{1}{12000}$

underdamped

10. (แนวข้อสอบปี 54) วัตถุทรงกระบอกตันถูกติดกับสปริงดังรูป ทรงกระบอกมีมวล M และรัศมี R และสปริงมีค่าคงที่สปริงเป็น k หากทรงกระบอกถูกยืดออกเป็นระยะระยะหนึ่ง แล้วปล่อยให้เคลื่อนที่ด้วยการกลิ้งแบบไม่มีการไถลและเป็นการเคลื่อนที่แบบแกว่งกวัด จงหาคาบการเคลื่อนที่ของการแกว่งกวัดนี้



$$E = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$E = \frac{1}{2}\frac{1}{2}mR^2\frac{v^2}{R^2} + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$E = \frac{3}{4}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$\frac{dE}{dt} = 0 = \frac{3}{2}m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x}$$

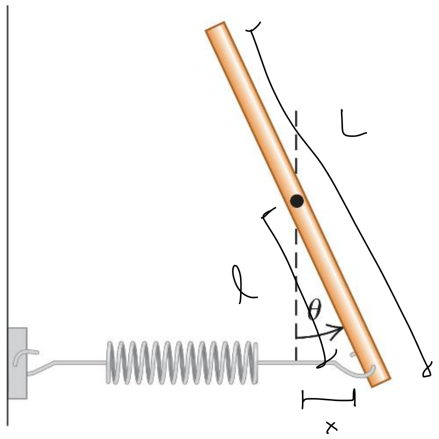
$$0 = \frac{3m}{2}\ddot{x} + kx$$

$$0 = \ddot{x} + \frac{2k}{3m}x$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{3m}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{2k}} = \pi\sqrt{\frac{6m}{k}}$$

11. (Young and Freedman) แขวนแท่งโลหะสม่ำเสมอบางมวล M ให้แกว่งได้โดยไม่มีความเสียดทานรอบแกนซึ่งผ่านจุดกึ่งกลางและตั้งฉากกับแท่งโลหะ มีสปริงแนวนอนซึ่งมีค่าคงตัวสปริง k ยึดอยู่ที่ปลายล่างของแท่ง ปลายอีกด้านหนึ่งของสปริงยึดอยู่กับที่รองรับแข็งเกร็ง ถ้าขยับแท่งวัตถุออกจากแนวดิ่งเป็นมุม Θ เล็ก ๆ แล้วปล่อย จงแสดงว่าวัตถุเคลื่อนที่แบบ SHM และให้หาคาบของการเคลื่อนที่



$\frac{1}{12}ML^2$

$\sin\theta \approx \theta$ $\qquad$ $\ell\sin\theta = x$

$x = \ell\theta$

$\tau = I\alpha = Fr$

$\frac{1}{12}mL^2\ddot{\theta} = -kx\cdot\ell$

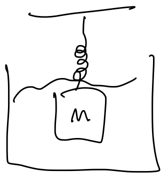
$\frac{1}{3}m\ell^2\ddot{\theta} = -k\ell^2\theta$

$\ddot{\theta} = -\frac{3k}{M}\theta$ เป็น

$\omega = \sqrt{\frac{3k}{M}}$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{3K}}$

12. (Serway) จงแสดงให้เห็นว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงพลังงานกลต่อเวลาของการแดมป์มีค่าเท่ากับ $dE/dt = -bv^2$ และมีค่าเป็นลบเสมอจากนั้นยืนยันผลที่ได้โดยหาอนุพันธ์ของพลังงานกลของระบบที่สั่นออสซิลเลต $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$ <สำหรับระบบมวลติดสปริงที่มีแรงต้าน $\vec{R} = -b\vec{v}$ >



$\Sigma F = ma$

$-kx - bv = ma$

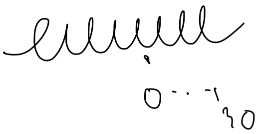
$-bv = ma + kx = m\ddot{x} + kx$

$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$

$\frac{dE}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot k \cdot x \cdot \dot{x}$

$= \dot{x}(m\ddot{x} + kx) = -b\dot{x}^2 = -bv^2$

13. (แนวข้อสอบปี 61) สปริงอันหนึ่งมีมวล 50 g , k = 25N/m โดยปล่อยห่างจากจุดเริ่มต้น 30 cm นำไป แช่ในน้ำ ซึ่งเมื่อเวลาผ่านไป 3 วินาทีแอมพลิจูดลดลงจากเริ่มต้นเหลือ 1.5 cm จงหาสัมประสิทธิ์ความหนืด (b)



$x(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega' t + \cancel{\phi})$ 0

$x(3) : 1.5 = 30e^{-\frac{3}{2(0.05)}b}$

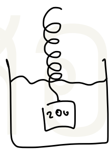
$\frac{1}{200} = e^{-30b}$

$\ln(0.05) = -30b$

$b \approx 0.1\ Nm^{-1}s$

14. (แนวข้อสอบปี 54) วัตถุมวล 200 g ถูกติดอยู่กับสปริงในแนวดิ่งซึ่งมีค่าคงตัวสปริง 100N/m สปริงมีการแกว่งภายใต้แรงต้านที่แปรผันกับความเร็วตามแนวดิ่งทำให้เป็นการเคลื่อนที่แบบ damped oscillation ซึ่งมีค่า b=0.1 Ns/m

1. จงหาว่าต้องใช้เวลานานเท่าใดที่อำพนของการกระจัดของการเคลื่อนที่นี้เหลือครึ่งหนึ่ง



$A(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t}$

$\frac{1}{2} = e^{-\frac{0.1}{0.4}t}$

$\ln(0.5) = -\frac{1}{4}t$

$t = 2.77$

2. จงหาว่าต้องใช้เวลานานเท่าใดที่พลังงานกลรวมของระบบนี้ลดลงเหลือเพียงครึ่งเดียว

ที่ $t = 0$

$E_0 = \frac{1}{2}kA_0^2$

$E_1 = \frac{1}{2}kA_1^2 = \frac{1}{4}kA_0^2$

$2\cancel{k}\cancel{A_0^2}e^{-\frac{bt}{m}} = \cancel{k}\cancel{A_0^2}$

$\ln(\frac{1}{2}) = -\frac{0.1}{0.2}t$

$t = 1.39$

15. (Serway) ผูกวัตถุมวล 2.00 kg ไว้กับสปริงแล้วผลักให้วัตถุเคลื่อนที่บนพื้นลื่น (b=0) ซึ่งแรงผลักอธิบายได้ดังสมการ $F = 3.00\sin(2\pi t)$ เมื่อ F มีหน่วยเป็นนิวตัน และ t มีหน่วยเป็นวินาที และค่าคงที่ของสปริงมีค่าเท่ากับ 20.0 N/m จงหา (a) ความถี่เชิงมุม (b) ความถี่เชิงมุมของแรงส่งของระบบ (c) แอมพลิจูดของการเคลื่อนที่

$\omega_0 = 2\pi$

$x = A\cos(\omega t)$

$a = -\omega^2 x$

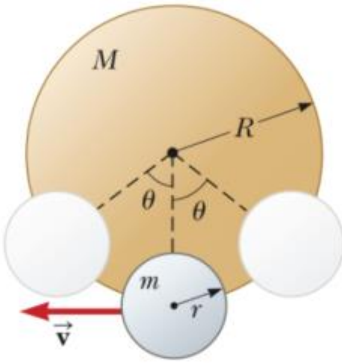
a) $\omega_N = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{20}{2}} = \sqrt{10}$

b) $\omega_0 = 2\pi$

c) $A = \dfrac{\frac{F_0}{m}}{|\omega_N^2 - \omega_0^2|} = \dfrac{\frac{3}{2}}{|10 - 4\pi^2|} = 0.0509$ m

Challenging Problem

16. (Serway) จานขนาดเล็กรัศมี r มวล m ติดอยู่กับด้านหนึ่งของจานขนาดใหญ่กว่าที่มีรัศมี R และมวล M โดยจุดศูนย์กลางของจานเล็กอยู่ที่ขอบของจานใหญ่พอดี จุดศูนย์กลางของจานใหญ่ตรึงอยู่กับแกนหมุนที่แกว่งได้อย่างอิสระไร้แรงเสียดทานตามรูป หากระบบเบี่ยงทำมุม θ จากสภาวะสมดุลและปล่อยให้แกว่ง จงแสดงว่า



1. อัตราเร็วของจุดศูนย์กลางของจานเล็กขณะผ่านจุดสมดุลมีค่าเป็น
$$v = 2\left[\frac{Rg(1-\cos\theta)}{(M/m)+(r/R)^2+2}\right]^{1/2}$$
2. คาบของการแกว่งเป็น $T = 2\pi\left[\frac{(M+2m)R^2+mr^2}{2mgR}\right]^{1/2}$

17. (แนวข้อสอบปี 58) อนุภาคมวล 5 กรัมเคลื่อนที่ตามแนวแกน x โดยอยู่ภายใต้อิทธิพลของแรงสองแรงคือ (1) แรงสู่สมดุลที่มีค่าแรงสู่สมดุลต่อระยะกระจัด (restoring force per unit displacement) เท่ากับ 40 g/s^2 และ (2) แรงต้านการเคลื่อนที่ซึ่งแปรผันตรงกับความเร็ว โดยมีค่าคงที่การแปรผันเท่ากับ 20 g/s กำหนดให้ตอนเริ่มต้น อนุภาคนี้อยู่นิ่งและห่างจากจุดสมดุลเป็นระยะทาง 20 เซนติเมตร จงหา

1. สมการการเคลื่อนที่ของอนภาคก้อนนี้ และเงื่อนไขเริ่มต้นของระบบในข้อนี้

2. กำหนดให้ $x=e^{\alpha t}$ เป็นคำตอบของสมการในข้อ 1 จงหาค่า α

3. หากคำตอบของสมการในข้อ 1 สามารถเขียนอยู่ในรูป $x = e^{\alpha_1 t}(A\cos\alpha_2 t + B\sin\alpha_2 t)$ โดยที่ $\alpha = \alpha_1 \pm i\alpha_2$ (จากข้อ 2) จงหาค่า A และ B

4. การเคลื่อนที่ของอนุภาคนี้เป็นแบบใด **Overdamped/ Critically damped/ Underdamped/ Undamped**

Wave

คลื่นรูปไซน์ (Sinusoidal wave) $\boxed{y(x,t) = A\sin(kx \mp \omega t + \varphi)}$

โดย $k \equiv \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}$ และ $\omega \equiv \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$

อัตราเร็วคลื่น $\boxed{v = f\lambda = \frac{\omega}{k}}$

$y = A\sin(kx - \omega t + \varphi)$: คลื่นเคลื่อนที่ไป +x

$y = A\sin(kx + \omega t + \varphi)$: คลื่นเคลื่อนที่ไป –x

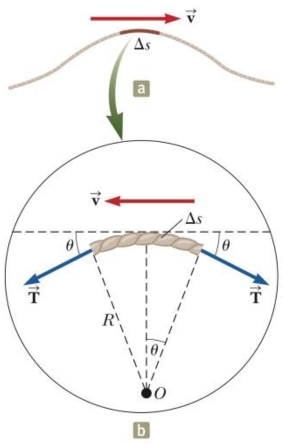
และอนุภาคบนคลื่นประพฤติตัวดั่ง SHM สามารถความเร็ว,ความเร่งของอนุภาคได้

$$y = A\sin(kx - \omega t + \varphi)$$

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A\cos(kx - \omega t + \varphi)$$

$$a_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A\cos(kx - \omega t + \varphi)$$

อัตราเร็วคลื่นในเส้นเชือก



จาก $F_c = \frac{mv^2}{R}$

$$2T\sin\theta = \frac{mv^2}{R}$$

ถ้า θ เป็นมุมเล็กๆ $2T\theta = \frac{mv^2}{R}$ -------- (1)

พิจารณา $m \rightarrow m = \mu \Delta s$ -------- (2)

โดย μ คืออัตราส่วนมวลต่อความยาว

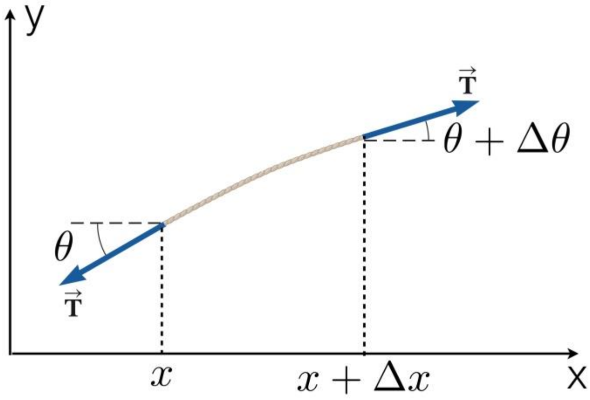
พิจารณา $\Delta s : 2\theta = \frac{\Delta s}{R}$ -------- (3)

จาก (1) : $T(\frac{\Delta s}{R}) = \mu\frac{\Delta s v^2}{R}$

$$T = \mu v^2$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}}$$

Wave equation



พิจารณาแกน y : $\left[\sum \vec{F} = m\vec{a}\right]$ $\quad ; m = \mu \Delta x$

$$T\sin(\theta + \Delta\theta) - T\sin\theta = (\mu\Delta x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\frac{T\sin(\theta + \Delta\theta) - T\sin\theta}{\Delta x} = \mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

θ เป็นมุมเล็ก ๆ $\sin\theta \approx \tan\theta$

$$T\left[\frac{\tan(\theta + \Delta\theta) - \tan\theta}{\Delta x}\right] = \mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$T\lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{\tan(\theta + \Delta\theta) - \tan\theta}{\Delta x}\right] = \mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\therefore \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$$

Ex. พิจารณาว่าฟังก์ชัน $y = \ln[3(x - vt)]$ —①

$y = e^{2(x-vt)}$ —②

ฟังก์ชันใดเป็นผลเฉลยของสมการคลื่นบ้าง

① $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{3(x-vt)} = \frac{1}{(x-vt)}$ $\qquad \frac{dy}{dt} = \frac{-3v}{3(x-vt)} = -\frac{v}{(x-vt)}$

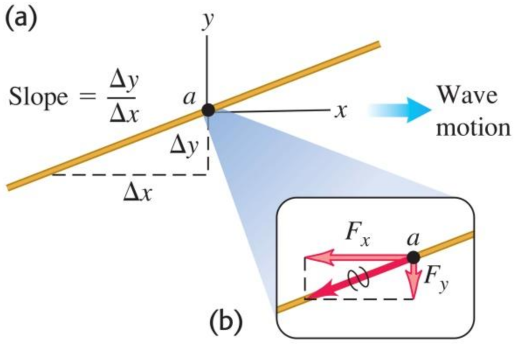
$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-1}{(x-vt)^2}$ $\qquad = -\frac{v^2}{(x-vt)^2}$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

② $\frac{\partial y}{\partial x} = e^{2(x-vt)} \cdot 2$ $\qquad \frac{\partial y}{\partial t} = -2v\, e^{2(x-vt)}$

$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 4e^{2(x-vt)}$ $\qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 4v^2 e^{2(x-vt)}$

อัตราการส่งพลังงานในคลื่น



พิจารณาอนุภาคบนตัวกลาง

จาก $[P = \vec{F}\cdot\vec{v}]$

$$P(x,t) = F_y v_y \ ; \ F_y = -F\frac{\partial y}{\partial x}$$

$$P(x,t) = -F\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

สำหรับคลื่นรูปไซน์ที่บรรยายด้วย $y = A\sin(kx-\omega t)$

$$P(x,t) = +Fk\omega(A\cos(kx-\omega t))(A\cos(kx-\omega t))$$

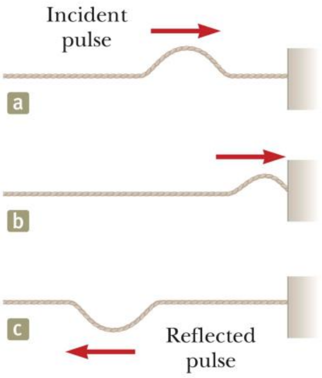
$$P(x,t) = Fk\omega A^2\cos^2(kx-\omega t)$$

$$P(x,t) = \mu\omega^2 A^2 v\cos^2(kx-\omega t)$$

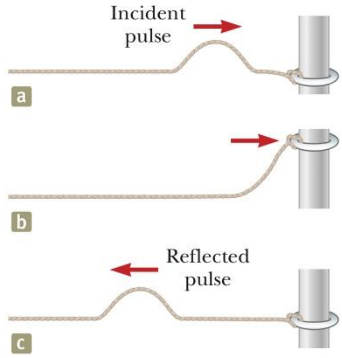
$$\boxed{P_{av} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 v}$$

การสะท้อนของคลื่นในเส้นเชือก

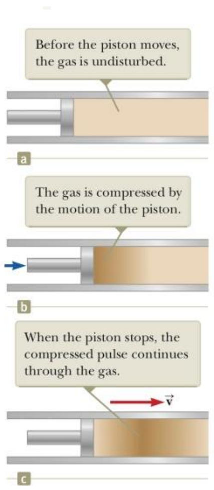
ปลายตรึง

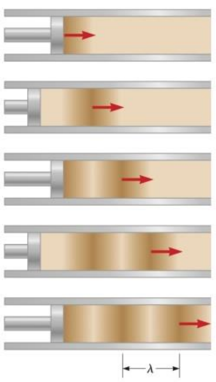


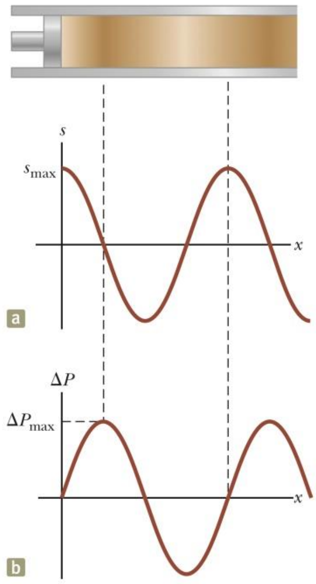
ปลายอิสระ



Sound







เสียงเป็นคลื่นตามยาว (ตัวกลางสั่นขนานกับการเคลื่อนที่ของคลื่น)

แต่ละตำแหน่งที่เสียงผ่านจะมีความดันไม่เท่ากัน → การกระจัดมาก : ความดันจะต่ำ

การกระจัดน้อย : ความดันจะสูง

$$S(x,t) = S_{max} \cos(kx - \omega t)$$

$$\Delta P(x,t) = \Delta P_{max} \sin(kx - \omega t)$$

Bulk Modulus

$$\boxed{B \equiv \frac{-\text{ความดันที่เปลี่ยนแปลง}}{\text{อัตราส่วนปริมาตรที่เปลี่ยนแปลง}} = \frac{-\Delta P}{\Delta V / V_i}}$$

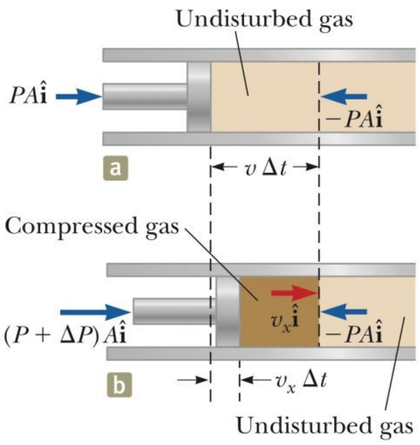
$$\Delta P = -B\frac{\Delta V}{V_i} = -B\frac{A\Delta s}{A\Delta x}$$

$$= -B\frac{\partial s}{\partial x} \ ; \ S = S_{max}\cos(kx - \omega t)$$

$$\Delta P = BkS_{max}\sin(kx - \omega t)$$

$$\Delta P = \Delta P_{max}\sin(kx - \omega t)$$

อัตราเร็วเสียงในของไหล



$$\text{การดลตามยาว} = \Delta\vec{P} = \sum \vec{F}\cdot\Delta t$$

$$= \Delta PA\Delta t\hat{i} \ ; \ \Delta P = -B\frac{\Delta V}{V_i} = \frac{-B\Delta S}{\Delta x} = \frac{Bv_x}{v}$$

$$\Delta\vec{P} = A\frac{Bv_x}{v}\Delta t\hat{i}$$

$$\Delta\vec{P} = m\Delta\vec{v} = \rho V_i(v_x\hat{i} - 0) = \rho v v_x A\Delta t\hat{i}$$

$$A\frac{Bv_x}{v}\Delta t\hat{i} = \rho v v_x A\Delta t\hat{i}$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}}$$

อัตราเร็วเสียงในแก๊ส

ตั้งสมมติฐานว่า เวลาเสียงเคลื่อนที่ในแก๊สจะเกิดการอัดขยายแบบ adiabatic (ในความเป็นจริง เสียงที่ความถี่ 20-20000 Hz การแผ่รังสีเกือบเป็น adiabatic มาก)

Adiabatic: PV^{γ} = ค่าคงที่

$$\frac{d}{dv}\left(PV^{\gamma}\right) = 0$$

$$\frac{dP}{dv} + \frac{\gamma P}{V} = 0$$

$$\gamma P = -V\frac{dP}{dv} = B$$

จาก $v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$ จะได้ว่า $\boxed{v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}}$

ความเข้มเสียงและระดับเสียงในหน่วยเดซิเบล

$$I = \frac{P}{A} = \frac{1}{2}\rho v \omega^2 S_{max}^2$$

$$\beta = (10\text{dB})\log\frac{I}{I_0} \quad ; I_0 = 1.0 \times 10^{-12}\ \text{w/m}^2$$

Doppler Effect

ถ้าผู้ฟังกับแหล่งกำเนิดมีการเคลื่อนที่สัมพัทธ์กัน จะทำให้ผู้ฟังได้ยินเสียงความถี่แตกต่างจากความถี่ของแหล่งกำเนิด

$$f' = \left(\frac{v \pm v_0}{v \mp v_s}\right) f$$

f' คือความถี่ที่ผู้ฟังได้ยิน

f คือความถี่จากแหล่งกำเนิด

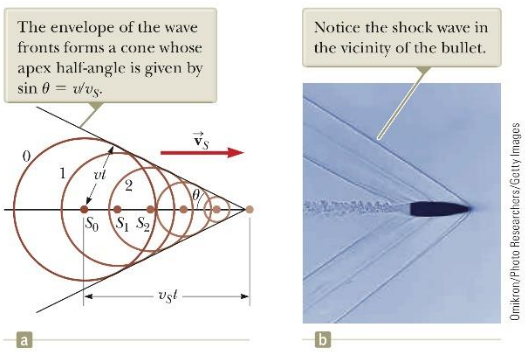
v คืออัตราเร็วเสียง

v_0 คืออัตราเร็วผู้ฟัง

v_s คืออัตราเร็วแหล่งกำเนิด

Shock Waves

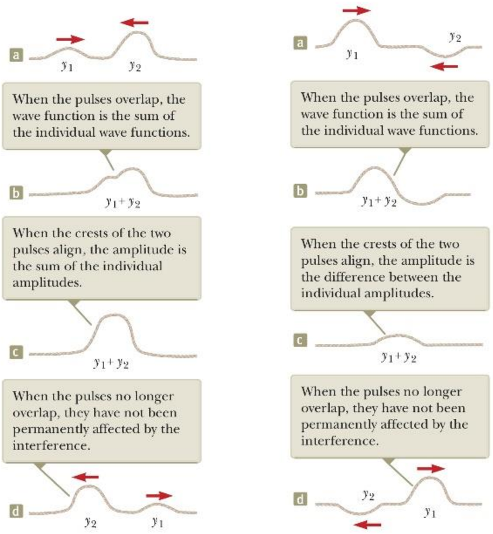
เกิดเมื่อแหล่งกำเนิดเสียงเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว v_s กำเนิดเสียงด้วยอัตราเร็ว v ซึ่ง $v_s > v$



Mach Number: $\mu = \frac{v_s}{v}$

$$\sin\theta = \frac{vt}{v_s t} = \frac{1}{\mu}$$

Superposition of Waves



$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$

คลื่นนิ่งบนเชือกตรึง

พิจารณาคลื่นสองขบวนเคลื่อนที่สวนทางกัน โดยมี f, A, λ เท่ากัน

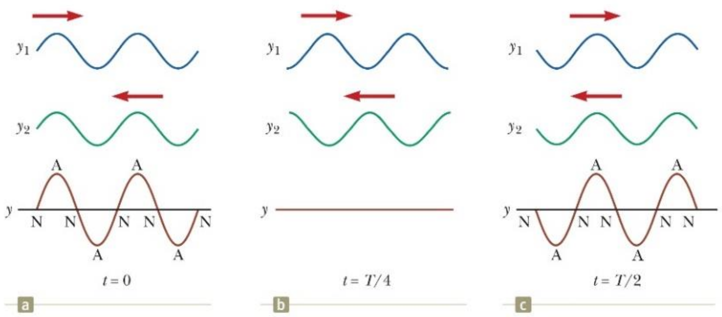
$y_1(x,t) = A\sin(kx-\omega t)$

$y_2(x,t) = A\sin(kx+\omega t)$

จาก $\sin(a)+\sin(b)=2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$y = y_1+y_2 = A\sin(kx-\omega t) + A\sin(kx+\omega t)$

$\boxed{y = 2A\sin(kx)\cos(\omega t)}$



จุดที่ y=0 เราจะเรียกว่าจุดบัพ (Node)

จุดที่มีแอมพลิจูดมากที่สุดเรียกว่าจุดปฏิบัพ (Antinode)

คลื่นนิ่งจะมีตำแหน่งบัพและปฏิบัพที่เดิมตลอด ไม่ว่าเวลาใดๆ

<u>หาตำแหน่งบัพ</u> จาก $y = 2A\sin(kx)\cos(\omega t)$

เงื่อนไข $y = 0$ ได้ว่า $\sin(kx) = 0$

$kx = 0, \pi, 2\pi, \ldots\ ;\ k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

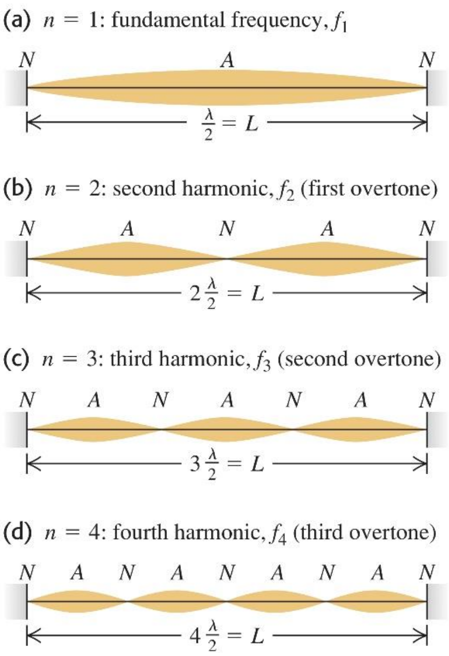
ดังนั้น $x = 0, \dfrac{\lambda}{2}, \lambda, \dfrac{3\lambda}{2}, \ldots$

<u>หาตำแหน่งปฏิบัพ</u>

เงื่อนไข $\sin(kx) = \pm 1$

$kx = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}, \ldots\ ;\ k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

$x = \dfrac{\lambda}{4}, \dfrac{3\lambda}{4}, \dfrac{5\lambda}{4}, \ldots$



$$f_1 = \frac{1}{2L}v = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

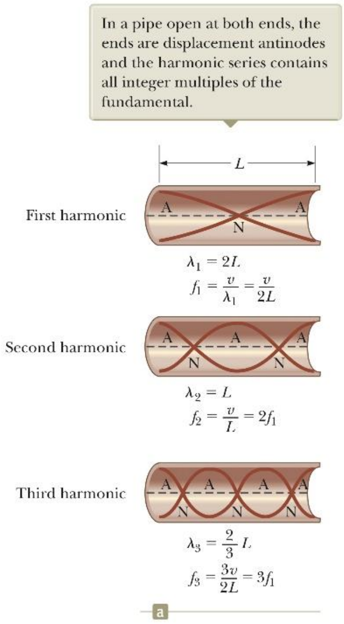
$$f_2 = \frac{1}{L}v = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

$$f_3 = \frac{3}{2L}v = \frac{3}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Thus, $\boxed{f_n = \frac{n}{2L}v = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}\ ;\ n \in \mathbb{Z}^+}$

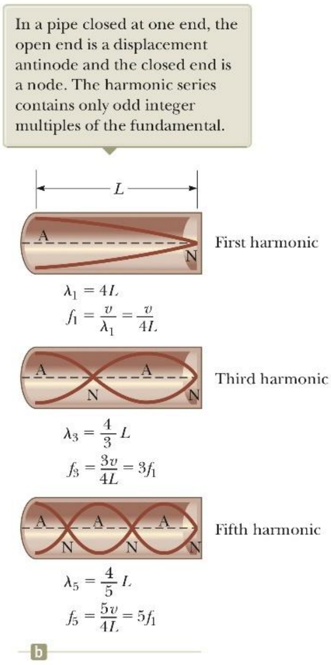
คลื่นนิ่งในท่ออากาศ

ปลายเปิด



$$\boxed{f_n = \frac{nv}{2L};\ n \in \mathbb{Z}^+}$$

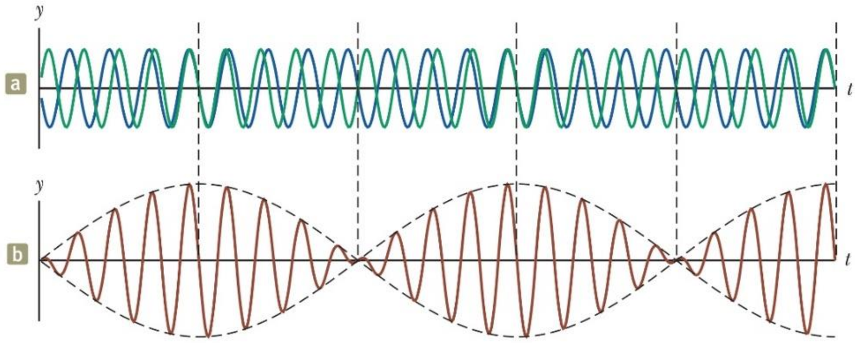
ปลายปิด



$$\boxed{f_n = \frac{(2n-1)v}{4L};\ n \in \mathbb{Z}^+}$$

Beats

เมื่อคลื่นที่มาซ้อนทับกันมีความถี่ต่างกันเล็กน้อย ผลลัพธ์ที่ได้คือที่ตำแหน่งต่างกันจะมีแอมพลิจูดต่างกัน ดังภาพ เช่นถ้าเรานำส้อมเสียงที่ความถี่ต่างกันมาเคาะ เราจะได้ยินเสียงดังค่อยสลับกัน เรียกปรากฏการณ์นี้ว่า **beating (บีท)** และเรียกความถี่ของการสลับดังค่อยว่า**ความถี่บีท**



ถ้าเราสนใจที่ตำแหน่ง x=0 และให้คลื่นทั้งสองมีเฟสเท่ากัน (หรือตำแหน่งอื่นก็ได้ แต่ในที่นี้จะใช้ x=0 เพื่อความง่าย)

$y_1 = A\sin(\omega_1 t)$ $\quad y_2 = A\sin(\omega_2 t)$

$y_1 = A\sin(2\pi f_1 t)$ $\quad y_2 = A\sin(2\pi f_2 t)$

$$y = y_1+y_2 = A\left(\sin(2\pi f_1 t)+\sin(2\pi f_2 t)\right)$$

$$y = 2A\cos\left(2\pi\left(\frac{f_1-f_2}{2}\right)t\right)\sin\left(2\pi\left(\frac{f_1+f_2}{2}\right)t\right)$$

โดยแอมพลิจูดจะเปลี่ยนแปลงช้าๆด้วยความถี่ $\frac{|f_1-f_2|}{2}$ ซึ่งเวลาเราได้ยิน เราจะได้ยิน 1 รอบ จะมีการเปลี่ยนแปลงแอมพลิจูดสูงสุดสองรอบ จึงสามารถนิยาม $f_{beat} = |f_1-f_2|$ และคลื่นลัพธ์จะมีความถี่ $\frac{f_1+f_2}{2}$

แบบฝึกหัด คลื่น และเสียง

1. (Serway) ฟังก์ชั่นคลื่นสำหรับคลื่นบนเส้นเชือก (ในหน่วยมาตรฐาน SI) อธิบายดังสมการ

$$y(x,t) = 0.350\sin\left(10\pi t - 3\pi x + \frac{\pi}{4}\right)$$

(a) จงหาอัตราเร็วและทิศทางการเคลื่อนที่ของคลื่น $v = \frac{\omega}{k} = \frac{10\pi}{3\pi} = \frac{10}{3}$

(b) จงหาตำแหน่งในแนวดิ่งของส่วนย่อยของเส้นเชือกที่ t=0, x=0.100 m $y = -0.0548$ m

(c) จงหาความยาวคลื่นและความถี่ของคลื่น

(d) จงหาอัตราเร็วตามขวางสูงสุดของส่วนย่อยของเส้นเชือก

$-\frac{3\pi}{10} + \frac{\pi}{4}$

$\frac{-6\pi + 5\pi}{20}$ $-\frac{\pi}{20}$

$v(x,t) = 0.35 \cdot 10\pi \, \underline{\cos(10\pi t - 3\pi x + \frac{\pi}{4})}$

$= 3.5\pi$ $\quad 1$

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ $\quad \omega = 2\pi f$

$\lambda = \frac{2\pi}{3\pi}$ $\quad f = 5$

2. (แนวข้อสอบปี 56) กำหนดสมการคลื่นสองสมการ $y_1 = 0.05\sin(0.5x+5t)$ และ $y_2 = 0.05\sin(9x+5t)$ จงตอบคำถามต่อไปนี้

$v = \frac{\omega}{k}$

   (a) ความเร็วของคลื่นใดมีค่ามากกว่า เพราะเหตุใด

   (b) ความถี่ของคลื่นใดมีค่ามากกว่า เพราะเหตุใด เท่า

   (c) ความยาวคลื่นของคลื่นใดมีค่ามากกว่า เพราะเหตุใด 1

   (d) อัตราการส่งพลังงานของคลื่นใดมีค่ามากกว่า เพราะเหตุใด 1

   (e) เมื่อคลื่นสองขบวนแทรกสอดกัน จงหาค่าความเร็วเฟสและความเร็วกลุ่มของคลื่นรวม พร้อมวาดรูปประกอบ

$\lambda = \frac{2\pi}{k}$

$$y_1 + y_2 = 0.05\left(\sin(0.5x+5t) + \sin(9x+5t)\right)$$

$$= 0.05\cos(4.25x)\sin(\overset{k_{av}}{4.75}x + \underset{\omega_{av}}{5}t)$$

$$v_p = \frac{\omega_{av}}{k_{av}} = \frac{5}{4.75} = 1.05 \text{ m/s}$$

$$v_g = 0 \quad (\text{คลื่นนิ่ง})$$

3. (สอวน.ปลายค่าย2 ม.4 2556) เชือกเส้นหนึ่งมีค่ามวลต่อความยาว 0.2 kg/m ถูกขึงด้วยแรง 500 N

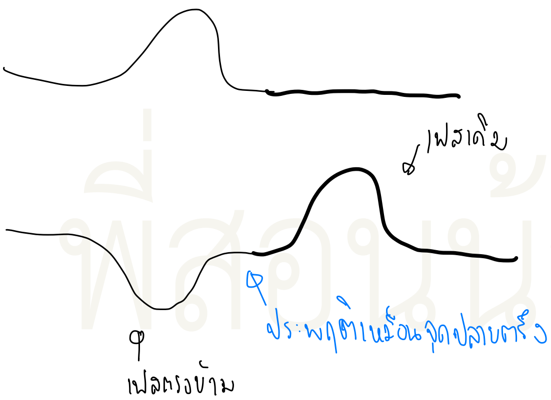
(a) จงหาอัตราเร็วของคลื่นตามขวางบนเส้นเชือก $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{500}{0.2}} = 50$ m/s

(b) จงหากำลังที่ใช้ในการสั่นเชือกเพื่อให้เกิดคลื่นเคลื่อนที่ที่มีแอมพลิจูด 10 mm และความยาวคลื่น 0.50 m $A = 10 \times 10^{-3}$ $\omega = 200\pi$ $P = \frac{1}{2} \cdot 0.2 \cdot (200\pi)^2 \cdot (10 \times 10^{-3})^2 \cdot 50 = 5 \cdot 400\pi^2 \times 10^{-4} = 20\pi^2$

(c) เมื่อนำเชือกเส้นนี้ไปผูกติดกับเชือกอีกเส้นที่มีค่ามวลต่อความยาว 0.8 kg/m และขึงเชือกด้วยแรงตึงที่เท่าเดิม จงหาอัตราส่วนระหว่างกำลังของคลื่นบนเส้นเชือกที่ผ่านรอยต่อกับกำลังของคลื่นตกกระทบ และเฟสของคลื่นสะท้อนและคลื่นที่ผ่านรอยต่อเหมือนหรือต่างกับเฟสของคลื่นตกกระทบอย่างไร

$v = f \cdot 0.5$ $\omega = 200\pi$

$f = 100$



$v_{ใหม่} = \sqrt{\frac{500}{0.8}} = 25$

$\frac{P_1}{P_2} = \frac{20\pi^2}{10\pi^2}$

4. (แนวข้อสอบปี 58) เชือกเส้นหนึ่งยาว L มีค่าความหนาแน่นคงที่ ρ_0 มีเส้นผ่านศูนย์กลางที่เปลี่ยนแปลงไปตามระยะทางจากปลายด้านหนึ่งเป็นไปตามสมการ $d = d_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ โดย $0 \le x \le L$ เมื่อเชือกเส้นนี้ถูกดึงด้วยความตึง T จงหา

$A = \pi r^2 = \frac{\pi d_0^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{4}$

$V = \frac{\pi d_0^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{4}$

(a) มวลต่อความยาวของเชือกเส้นนี้

(b) ความเร็วของคลื่นในเส้นเชือกของเชือกเส้นนี้

(c) เวลาที่คลื่นในเส้นเชือกจะเคลื่อนที่จากปลายด้านหนึ่งไปถึงปลายอีกด้านหนึ่ง

a) $\mu = \frac{dm}{dx} = \rho_0 \frac{dV}{dx} = \int_0 \frac{A\,dx}{dx} = \frac{\rho_0 \pi d_0^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{4}$

b) $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{T}{\rho_0 \pi}} \cdot \frac{2}{d_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)}$

c) $v = \frac{dx}{dt}$

$\int_0^t dt = \int_0^L \frac{1}{v}\,dx = \int_0^L \sqrt{\frac{\rho_0 \pi}{T}} \cdot \frac{d_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{2}\,dx$

$= \sqrt{\frac{\rho_0 \pi}{T}} \cdot \frac{d_0}{2} \left[-\frac{L}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right]_0^L$

$= \sqrt{\frac{\rho_0 \pi}{T}} \cdot \frac{2L}{\pi} \cdot \frac{d_0}{2} = \frac{d_0}{\pi}\sqrt{\frac{\rho_0 \pi}{T}}$

5. (แนวข้อสอบปี 57) พิจารณาคลื่นในเส้นเชือกขบวนหนึ่งซึ่งปลายเชือกถูกตรึงไว้เคลื่อนที่ไปในแนวแกน x
   (a) จงเขียนฟังก์ชั่นคลื่นที่มีแอมพลิจูด 0.03 เมตร ความเร็วเฟส 100 เมตรต่อวินาที ความถี่ 200 เฮิร์ตและเคลื่อนที่ไปในทิศ +x $A = 0.03$ $v = \frac{\omega}{k} = 100$ $f = 200$ $\omega = 2\pi f$
   (b) เมื่อคลื่นในข้อ (a) เคลื่อนที่ไปถึงจุดตรึง เกิดการสะท้อนและรวมตัวกันกับคลื่นที่วิ่งเข้าหาจุดตรึงนั้น จงเขียนสมการบรรยายคลื่นลัพธ์ที่ได้และอธิบายคุณสมบัติของคลื่นลัพธ์
   (c) จงหาการกระจัดที่มากที่สุดของมวลของเส้นเชือกที่ตำแหน่ง x = 0.5 cm
   (d) หากการสะท้อนที่จุดตรึงนั้นทำให้คลื่นขบวนใหม่ออกมา แต่มีแอมพลิจูดเป็น n เท่าของคลื่นเดิม โดยที่ $0 < n \leq 1$ จงแสดงว่าคลื่นลัพธ์ที่ได้สามารถเขียนอยู่ในรูปของการรวมตัวกันของคลื่นนิ่งสองขบวนได้ โดยคำตอบจะต้องอยู่ในรูปของฟังก์ชั่นคลื่นนิ่งสองฟังก์ชั่น

a) $y = 0.03\sin(4\pi x - 400\pi t)$

b) $y' = -0.03\sin(4\pi x + 400\pi t)$

$\varphi = 0.03(\sin(4\pi x - 400\pi t) - \sin(4\pi x + 400\pi t))$

$= 0.03[2\cos 4\pi x \sin(-400\pi t)]$

$= -0.06\cos 4\pi x \sin 400\pi t$

c) $\varphi_{max} = 0.06\cos 4\pi(0.5)$

$\varphi_{max} = 0.06\ m$

d) $y'' = -0.03n\sin(4\pi x + 400\pi t)$

$y + y'' = 0.03\sin(4\pi x - 400\pi t) - 0.03n$

6. (Serway) คลื่นดลในเส้นเชือกที่มีความหนาแน่นเชิงเส้น μ สามารถอธิบายได้โดยฟังก์ชั่น $y=A_0e^{-bx}\sin(kx-\omega t)$ เมื่อให้ A_0e^{-bx} เป็นแอมพลิจูดของคลื่นนี้ จงหา

   (a) กำลังของคลื่นที่ตำแหน่ง x หรือ P(x)

   (b) กำลังของคลื่นที่จุดกำเนิด หรือ P(0)

   (c) อัตราส่วนระหว่าง P(x) และ P(0)

a) $P(x) = \frac{1}{2}\mu A^2\omega^2 v$

$= \frac{1}{2}\mu A_0^2 e^{-2bx} \frac{\omega^3}{k}$

b) $P(0) = \frac{1}{2}\mu A_0^2 \frac{\omega^3}{k}$

(c) $\frac{P(x)}{P(0)} = e^{-2bx}$

7. (แนวข้อสอบปี 54) คลื่นเสียงหนึ่งมีแอมพลิจูดของการกระจัดเท่ากับ s_m เคลื่อนที่ในอากาศที่มีความหนาแน่น ρ ด้วยความถี่ของคลื่นเสียง f และความเร็ว v กำหนดให้แอมพลิจูดของความดัน $\Delta P_m = \rho v \omega s_m$

   (a) จงหาสมการทั่วไปของการกระจัด $s(x,t)$ ของคลื่นนี้

   (b) จงหาสมการทั่วไปของความดัน $\Delta P(x,t)$ ของคลื่นนี้

   (c) หาก $\Delta P(0,0) = 0.5\,\Delta P_m$ แล้ว $\Delta s(0,0)$ มีค่าเท่าใด

$v = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{k}$

$k = \frac{2\pi f}{v}$

a) $s(x,t) = s_m \cos\left(\frac{2\pi f}{v}x - 2\pi f t + \phi\right)$

$\rho \quad v \quad A$

b) $P(x,t) = \rho v \cdot 2\pi f\, s_m \sin\left(\frac{2\pi f}{v}x - 2\pi f t + \phi\right)$

c) $0.5\,\Delta P_m = \Delta P_m \quad \sin\phi$

$\sin\phi = \frac{1}{2}$

$\phi = \frac{\pi}{6}$

$s(0,0) = s_m \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

8. (แนวข้อสอบปี 56) กำหนดให้ $v=\sqrt{\frac{B}{\rho}}$ และ $B=-V\frac{\delta P}{\delta V}$ จงพิสูจน์ว่า $v=\sqrt{\frac{\gamma RT}{m_a}}$ เมื่อ v คือ อัตราเร็วเสียงในแก๊ส, B คือค่า Bulk Modulus, ρ คือความหนาแน่นของแก๊ส, P คือความดันแก๊ส, R คือ ค่าคงที่ของแก๊ส, T คืออุณหภูมิ, V คือปริมาตรของแก๊ส, m_a คือมวลอะตอมของแก๊ส, γ คืออัตราส่วนของ ความร้อนจำเพาะ พร้อมทั้งหาค่า v ที่ 0 องศาเซลเซียส

$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$

เสียงผ่านอากาศ

อากาศ ⊖ Adiabatic

$PV^{\gamma} = K$

$\frac{d\,PV^{\gamma}}{dV} = \cancel{K}$

$\gamma P V^{\gamma-1} + V^{\gamma}\frac{dP}{dV} = 0$

$V^{\gamma}\frac{dP}{dV} = -\gamma P V^{\gamma-1}$

$\frac{dP}{dV} = \frac{-\gamma P}{V}$

$v = \sqrt{\frac{-V\frac{\delta P}{\delta V}}{\rho}}$

$= \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$

$= \sqrt{\frac{\gamma RT}{m_a}}$

$PV = nRT$

$PVm_a = MRT$

$\frac{P}{\rho} = \frac{RT}{m_a}$

9. กำหนดให้ $v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$ และ $B = -V\frac{\delta P}{\delta V}$ เมื่อ v คืออัตราเร็วเสียงในอากาศ, B คือค่า Bulk Modulus, ρ คือความหนาแน่นของแก๊ส, P คือความดันแก๊ส, V คือปริมาตรของแก๊ส สมมติให้การเคลื่อนที่ของเสียงผ่านอากาศและการอัดขยายของอากาศเป็นกระบวนการที่อุณหภูมิคงตัว จงหาอัตราเร็วเสียง

$Q = -W$

T คงที่

$B = P$

$v = \sqrt{\frac{P}{\rho}}$

$PV = K$

$\frac{d\,PV}{dV} = 0$

$P + V\frac{dP}{dV} = 0$

$\frac{V\,dP}{dV} = -P$

$\frac{dP}{dV} = -\frac{P}{V}$

$PV = nRT$

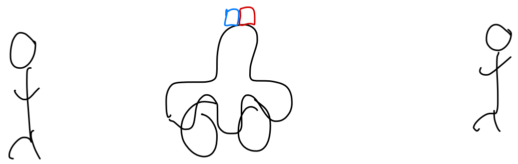
$\frac{P}{\rho} = \frac{RT}{M_n}$

10. (แนวข้อสอบปี 61) รถพยาบาลมีความเร็ว 20 เมตรต่อวินาที ปล่อยเสียงไซเรนที่ความถี่ 500 เฮิร์ต ซึ่งมีผู้ฟังอยู่นิ่ง จงหา

(a) ความยาวคลื่นที่แตกต่างกันระหว่างคลื่นเสียงหน้ารถและหลังรถ

(b) กำหนดให้ความเร็วเสียงมีค่า 340 m/s หากมีคนยืนนิ่งๆอยู่หน้ารถ จงหาความถี่ที่คนนี้ได้ยิน

(c) หากมีกำแพงอยู่ด้านหน้าและคลื่นเสียงสะท้อนกลับมา จงหาความถี่บีตที่อยู่บนรถ (ผู้ฟังอาจไม่ได้ยินเสียงความถี่บีตนี้ก็ได้)



ก) ห $\lambda - \frac{v}{f}$

ล $\lambda + \frac{v}{f}$

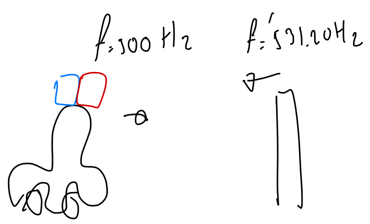
$v = f\lambda$

ล-ห $= \frac{2v}{f} = \frac{40}{500} = 0.08$ m

$f_ห = \left(\frac{340}{340-20}\right)500$

$= \frac{17}{16} \times 500$

$= 531.20$ Hz



$f'' = \left(\frac{340+20}{340}\right)531.20$

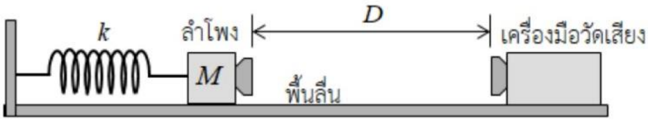
$= 562.4$ Hz

$f_b = 62.4$ Hz

11. (สอวน ปลายค่าย2 61-62) ลำโพงมวล M ติดอยู่กับสปริงที่มีค่าคงตัวสปริง k ดังภาพ และสั่นในแนวระดับบนพื้นลื่นด้วยแอมพลิจูด A ห่างออกไปมีเครื่องมือวัดเสียงวางอยู่ โดยที่ระยะห่างระหว่างลำโพงและเครื่องมือวัดเสียงที่สั้นที่สุดเท่ากับ D ลำโพงปล่อยคลื่นความถี่ f ตลอดเวลา พบว่าระดับความเข้มเสียงสูงสุดที่วัดได้มีค่า β เดซิเบล โดยที่ขณะนั้นอัตราเร็วของเสียงในอากาศเท่ากับ u จงหา

(a) ความถี่ของเสียงต่ำและสูงสุดที่เครื่องมือวัดเสียงวัดได้มีค่าเท่าใด

(b) ระดับความเข้มเสียงที่ต่ำที่สุดที่เครื่องมือวัดเสียงวัดได้มีค่ากี่เดซิเบล



a)

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}Mv^2$$

$$\pm\sqrt{\frac{k}{M}}A = v$$

สูง $f' = \frac{u}{u - \sqrt{\frac{k}{M}}A} f$

ต่ำ $f'' = \frac{u}{u + \sqrt{\frac{k}{M}}A} f$

b)

$$\beta = 10 \log \frac{P}{A_1} + 120$$

$$\beta = 10 \log \frac{P}{\pi(D-A)^2} + 120$$

$$10^{\frac{\beta}{10} - 12} = \frac{P}{\pi(D-A)^2}$$

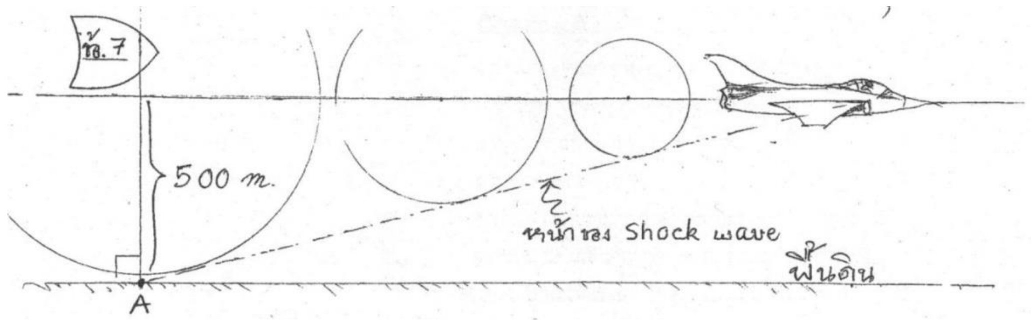
$$\frac{(D-A)^2}{(D+A)^2} \cdot 10^{\frac{\beta}{10} - 12} = \frac{P}{\pi(D+A)^2} = I_{m}$$

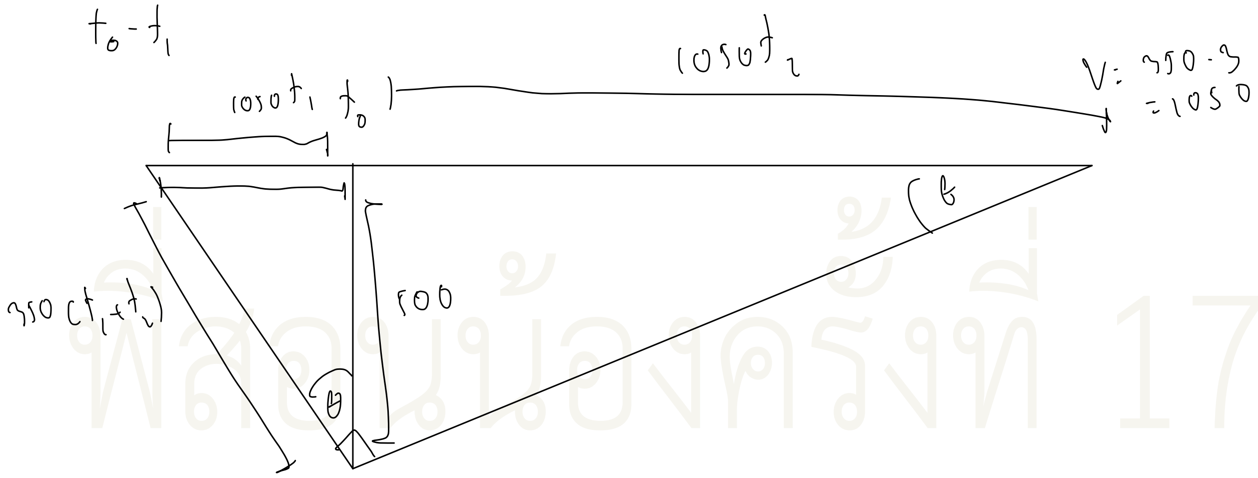
$$\beta_m = 10 \log \frac{(D-A)^2}{(D+A)^2} + \frac{\beta}{10} - 12 + 120$$

$$= 20 \log \frac{D}{D+2A} + \beta$$

$$= \beta - 20 \log \frac{D+2A}{D}$$

12. (คัดเข้าค่ายสอวน ม.5 58) เครื่องบินบินในแนวระดับที่ความสูง 500 m ด้วยความเร็ว 3 เท่าของความเร็วเสียง ผ่านเหนือหัว A ที่เวลา t = 0 วินาที A จะได้ยินเสียง sonic boom ที่เวลา t = ? (อัตราเร็วเสียงมีค่า 350 m/s) **<u>คำใบ้</u>**: 500/350 **ไม่ใช่**คำตอบ





$$\frac{500}{1050 t_1} = \frac{1050 t_2}{500}$$

$$500^2 = 1050^2 t_1 t_2$$

$$\frac{500^2}{1050^2 t_1} = t_2$$

$$\frac{10^2}{21^2 t_1} = t_2$$

$$\frac{350}{1050} = \frac{1050 t_1}{350(t_1+t_2)}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{3 t_1}{t_1+t_2}$$

$$t_1 + t_2 = 9 t_1$$

$$t_2 = 8 t_1$$

$$t_1 = \frac{t_2}{8}$$

$$\frac{10^2 \cdot 8}{21^2} = t_2^2 \qquad t_2 = 1.35$$

13. (แนวข้อสอบปี 54) คลื่นนิ่งที่เกิดจากการรวมตัวกันของคลื่น 2 ขบวนที่มีเฟสตรงกันแต่เคลื่อนที่ตรงข้ามกันถูกแสดงด้วยสมการ y = 8.0(sin3.0x)(cos2.0t) โดยที่ x และ y มีหน่วยเป็นเซนติเมตรและ t มีหน่วยเป็นวินาที

(a) จงหาสมการคลื่นของคลื่นแต่ละขบวน $Y_1 = 4\sin(3x - 2t)$, $Y_2 = 4\sin(3x+2t)$

(b) จงหาจุดที่เกิดบัพ (Node) ถ้ากำหนดให้ปลายของเส้นเชือกข้างหนึ่งอยู่ที่จุด x=0

(c) ที่เวลา t=0 หากถ่ายภาพเส้นเชือกที่มีความยาวตั้งแต่ x=0 ถึง x=$\frac{3\pi}{2}$ จะได้ภาพเป็นอย่างไร

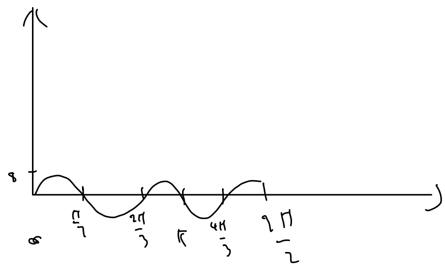
$Y_1 = A\sin(kx - \omega t + \phi)$ $\quad Y_2 = A\sin(kx + \omega t + \phi)$

$Y = 2A(\sin kx)(\cos \omega t)$

$Y = 8\sin 3x \cos 2t$

$x = \frac{2}{3}\pi + n\pi$

$Y = 8\sin 3x$



14. (แนวข้อสอบปี 54) คลื่นสองขบวนที่เคลื่อนที่อยู่บนเส้นเชือกเดียวกันมีสมการดังนี้

$$y_1 = \frac{4}{(3x-4t)^2+2555}, \quad y_2 = \frac{-4}{(3x+4t-6)^2+2555}$$

(a) คลื่นทั้งสองมีทิศการเคลื่อนที่เทียบกับแกน x อย่างไร $y_1 : +x \quad y_2 : -x$

(b) ที่เวลา t เท่าไหร่ที่เราจะมองไม่เห็นลูกคลื่นเลย $t = \frac{3}{4}$

(c) ที่ตำแหน่งใดบนแกน x ที่คลื่นทั้งสองจะหักล้างกันเสมอ

$$(b) \quad y_1 + y_2 = 0 = \frac{4}{(3x-4t)^2+2555} - \frac{4}{(3x+4t-6)^2+2555}$$

$$-4t = 4t-6$$
$$8t = 6$$
$$t = \frac{3}{4}$$

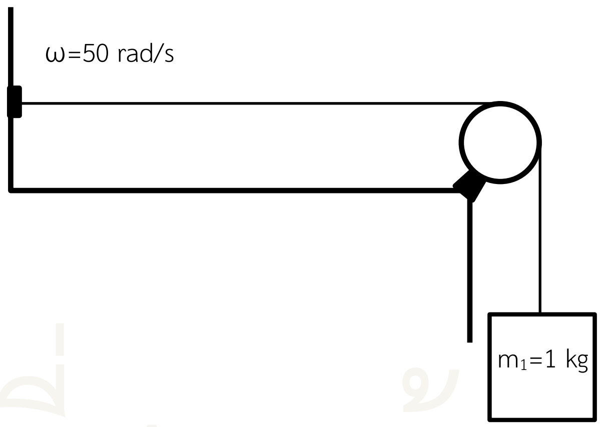
$$(c) \quad -3x = 3x-6$$
$$6 = 6x$$
$$x = 1$$

15. (แนวข้อสอบปี 61) แหล่งกำเนิดคลื่นความถี่เชิงมุม 50 rad/s ผูกไว้กับเชือกมวล 10 g ยาว 1 m ซึ่งห้อยมวล 1 kg ซึ่งเริ่มสั่นจาก y = -1 mm ไปจนถึง y = 1 mm โดยห่างจากตำแหน่ง y = 0 mm จงหา

(a) สมการคลื่นในรูป $y = A\sin(kx \pm \omega t + \Phi)$

(b) ความยาวเชือกที่สั้นที่สุดที่ทำให้เกิดคลื่นนิ่ง

(c) หากมวล 1 kg ทำให้เกิดคลื่นนิ่งซึ่งเป็น harmonic ที่ 1 จงหาว่าที่มวลเท่าใดที่ทำให้เกิดคลื่นนิ่งซึ่งเป็น harmonic ที่ 3



$\frac{10^{-2}}{1}$

$v = \sqrt{\frac{9.8}{10^{-2}}} = 31.30$ m/s

$v = \frac{\omega}{k}$

$\phi \uparrow$ $T = mg$

$k = \frac{50}{31.3} = 1.6$

$y = \sin(1.6x - 50t + \frac{3}{2}\pi)$

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ $\lambda = \frac{2\pi}{1.6} = \frac{5\pi}{4}$

$L = \frac{\lambda}{2} = \frac{5\pi}{8}$

c) $L = \frac{3\lambda}{2} = \frac{5\pi}{8}$

$3\lambda = \frac{5\pi}{4}$ $\lambda = \frac{5}{12}\pi$

$f = \frac{\omega}{2\pi}$ $v = f\lambda = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

$= \frac{50}{2\pi} \cdot \frac{5\pi}{12} = \sqrt{\frac{x \cdot 9.8}{10^{-2}}}$

$= \left(\frac{250}{24}\right)^2 \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{9.8} = x$

Challenging Problem

16. (สอวน.ปลายค่าย2 52-53) คลื่นเสียง Ψ_1 และ Ψ_2 มีแอมพลิจูดไม่เท่ากันและความถี่ต่างกัน ε ซึ่ง ε << f ดังสมการ $\Psi_1 = A_1\sin(2\pi ft)$ และ $\Psi_2 = A_2\sin(2\pi(f+\varepsilon)t)$ จงวิเคราะห์การบีตของคลื่นทั้งสองเพื่อหา

(a) คลื่นลัพธ์ ψ ในรูป ψ=a sin(2πft+b) ซึ่ง a และ b ต่างก็เป็นฟังก์ชั่นของ A_1 ,A_2 ,ε ,t

(b) a มีค่าน้อยที่สุดเท่าใด

(c) a มีค่ามากที่สุดเท่าใด

(d) ความถี่บีตมีค่าเท่าไหร่

$$\cos\frac{\pi}{2}-\theta = \sin\theta$$
$$\theta-\frac{\pi}{2}=x$$

<u>คำใบ้สุดพิเศษ</u>: $A\sin\theta + B\cos\theta = \sqrt{A^2+B^2}\sin\left(\theta + \arctan\frac{B}{A}\right)$

$$\Psi_1+\Psi_2 = A_1\sin(2\pi ft) + A_2\sin(2\pi(f+\varepsilon)t)$$
$$+A_2\sin(2\pi ft)\cos(2\pi\varepsilon t) + A_2\cos(2\pi ft)\sin(2\pi\varepsilon t)$$

$$=(A_1+A_2\cos 2\pi\varepsilon t)\sin(2\pi ft) + A_2\sin(2\pi\varepsilon t)\cos(2\pi ft)$$

$$=\underbrace{\sqrt{(A_1+A_2\cos 2\pi\varepsilon t)^2+A_2^2\sin(2\pi\varepsilon t)^2}}_{a}\cdot\sin\left(2\pi ft+\underbrace{\arctan\frac{A_2\sin(2\pi\varepsilon t)}{(A_1+A_2\cos 2\pi\varepsilon t)}}_{b}\right)$$

$$a = \sqrt{A_1^2+2A_1A_2\cos 2\pi\varepsilon t+A_2^2}$$