KINETIC

จลนศาสตร์ใน 1 มิติ

- Position (X) ⟶ บอกตำแหน่งวัตถุ
- Velocity (v) ⟶ บอกความรวดเร็วในการเปลี่ยนตำแหน่งเทียบกับเวลา
- Acceleration (a) ⟶ บอกความรวดเร็วในการเปลี่ยนแปลงความเร็วเทียบกับเวลา
- Displacement (Δx) : $\Delta x = x_f - x_i$

เฉลี่ย	ณ ขณะใดขณะหนึ่ง
$v_{avg} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$	$v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{dx}{dt}$
$a_{avg} = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$	$a = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$

จลนศาสตร์ใน 2 มิติและ 3 มิติ

เวกเตอร์บอกตำแหน่ง $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ⟶ การกระจัด : $\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i$

$$\vec{v} = \frac{d}{dx}\vec{r} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} \rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

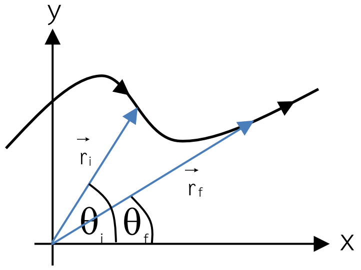
$$\vec{a} = \frac{d}{dx}\vec{v} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k} \rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

- กรณีความเร่งคงที่ ⟶

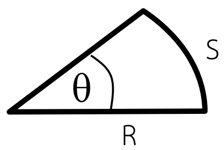
$$\vec{r}_f - \vec{r}_i = \vec{v}_i t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \;,\; v_f^2 = v_i^2 + 2\vec{a}\cdot(\vec{r}_f - \vec{r}_i)$$

$$\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}t \;,\; \vec{r}_f - \vec{r}_i = \frac{1}{2}(\vec{v}_i + \vec{v}_f)t$$

การเคลื่อนที่เชิงมุม

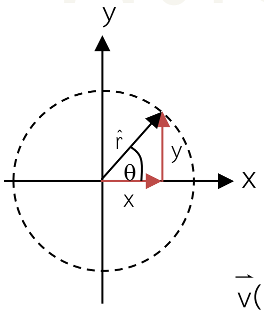


$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_i \quad ; \quad \theta = \frac{S}{R}$$



เฉลี่ย	ณ ขณะใดขณะหนึ่ง
$\omega_{avg} = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$ $\alpha_{avg} = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$	$\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$ $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt}$

การเคลื่อนที่แนววงกลมอย่างสม่ำเสมอ (ω คงที่)



$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} \rightarrow \vec{r}(t) = R(\cos(\omega t)\hat{i} + \sin(\omega t)\hat{j}) \rightarrow \vec{r} = R\hat{r}$$

โดยที่ $\hat{r} = \dfrac{\vec{r}}{R} = \cos(\omega t)\hat{i} + \sin(\omega t)\hat{j}$ เวกเตอร์ 1 หน่วยทิศเดียวกับ $\vec{r}$

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \omega R(-\sin(\omega t)\hat{i} + \cos(\omega t)\hat{j}) = \omega R\hat{\theta}$$

โดย $\hat{\theta} = -\sin(\omega t)\hat{i} + \cos(\omega t)\hat{j}$

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \omega^2 R(-\cos(\omega t)\hat{i} - \sin(\omega t)\hat{j}) = -\omega^2 R\hat{r}$$

และ สำหรับวงกลมสม่ำเสมอ หาคาบและความถี่ได้จาก $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f$

$$v = \omega R \quad , \quad a_c = \omega^2 R$$

▶ การเคลื่อนที่แนววงกลมอย่างไม่สม่ำเสมอ(ω ไม่คงที่)

$$\vec{r}(\theta) = R(\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}) = R\hat{r}$$

โดย $\hat{r} = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}$

$$\vec{v}(\theta) = \frac{d}{dt}\vec{r} = R\frac{d\theta}{dt}(-\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}) = \omega R(-\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}) = \omega R\hat{\theta}$$

$$\vec{a}(\theta) = \frac{d}{dt}\vec{v} = \omega^2 R(-\cos\theta\hat{i} - \sin\theta\hat{j}) + (-\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j})\alpha R = -\omega^2 R\hat{r} + \alpha R\hat{\theta}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_c + \vec{a}_T$$

โดยที่ a_c คือ ความเร่งเข้าสู่ศูนย์กลาง มีขนาดเท่ากับ $\omega^2 R$

a_T คือ ความเร่งแนวเส้นสัมผัส มีขนาดเท่ากับ $|\alpha| R$

แบบฝึกหัด Kinetic

1. กำหนดให้ตำแหน่ง x (เมตร) ของอนุภาคหนึ่งในระบบอ้างอิงเฉื่อย OX ที่เวลา t (วินาที) ใด ๆ เป็น

$x = x(t) = 1 - 2(t) + 3t^2$ (หนังสือกลศาสตร์ สอวน.)

ก) จงหาค่าของ x ที่จุดตั้งต้น (ให้ถือ t = 0 เป็นเวลาตั้งต้น)

ข) จงหาค่าของความเร็วต้นของอนุภาค

ค) ความเร็วของอนุภาคเป็นศูนย์ที่ขณะเวลา t เท่าไร

ง) ความเร่งของอนุภาคมีค่าคงที่หรือไม่ และมีความเร็วเท่าไร

จ) ที่เวลา $t = \frac{2}{3}$ วินาที อนุภาคอยู่ที่ไหน และมีความเร็วเท่าไร

ฉ) อัตราเร็วในข้อ จ) กับอัตราเร็วเมื่อ t = 0 เท่ากันหรือไม่

2. วัตถุชิ้นหนึ่งเคลื่อนที่ในแนวตรงโดยเริ่มต้นจากจุดหยุดนิ่ง ความเร่งที่เวลา 0 ถึง 3 วินาทีเป็น 3t (m/s^2) และ ความเร่งที่เวลา 3 วินาทีเป็นต้นไป เป็น 3 m/s^2 จงหาการกระจัดที่เวลาใด ๆ (แนวข้อสอบปี 57)

3. อนุภาคหนึ่งกำลังเคลื่อนที่โดยมีอัตราเร่งเป็น $a = 1 + x \ m/s^2$ โดยที่ x มีหน่วยเป็นเมตร จงหาอัตราเร็วและตำแหน่งที่เวลาใดๆของอนุภาคนี้ กำหนดให้ที่เวลา t = 0 วินาที วัตถุอยู่ที่ตำแหน่ง x = 1 เมตร และมีอัตราเร็ว 1 m/s ที่ตำแหน่ง x = 0 เมตร (แนวข้อสอบปี 61)

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$a = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}$$

$$a = \frac{dv}{dx} \cdot v$$

$$\int_0^x a\,dx = \int_1^v v\,dv$$

$$\left[x + \frac{x^2}{2}\right]_0^x = \left[\frac{v^2}{2}\right]_1^v$$

$$x + \frac{x^2}{2} = \frac{v^2}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2} = \frac{v^2}{2}$$

$$x^2 + 2x + 1 = v^2$$

$$v = (x+1)$$

$$\frac{dx}{dt} = (x+1)$$

$$\int_1^x \frac{dx}{(x+1)} = \int_0^t dt$$

$$\ln(x+1) - \ln(2) = t$$

$$\ln(x+1) = t + \ln(2)$$

$$x+1 = e^{t+\ln 2}$$

$$x = 2e^t - 1 \qquad x = 1 = 2e^t - 1$$

$$2 = 2e^t$$

$$t = 0$$

$$v = \frac{dx}{dt} = 2e^t$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 2e^t$$

4. อนุภาคหนึ่งเคลื่อนที่ในระนาบ XY โดยที่เวกเตอร์ตำแหน่ง $\vec{r}$ ขึ้นกับเวลาดังนี้ (แนวข้อสอบปี 57)

$$\vec{r}(t) = R(\omega t - \sin\omega t)\hat{i} + R(1 - \cos\omega t)\hat{j}$$ โดย R และ ω เป็นค่าคงที่

ก) จงหาความเร็วและความเร่งของอนุภาคที่เวลาใด ๆ

ข) อนุภาคหยุดนิ่งชั่วขณะที่เวลาเท่าไร

ค) จงหาความเร่งของอนุภาค ณ เวลาที่หาได้จากข้อ ข)

$\vec{v}(t) = R(\omega - \omega\cos\omega t)\hat{i} + R\omega\sin\omega t\,\hat{j}$

$\vec{a}(t) = \omega^2\sin\omega t\,\hat{i} + R\omega^2\cos\omega t$

$0 = R(\omega - \omega\cos\omega t)$ $\quad R\cos\omega t = R$

$\cos\omega t = 1$

$0 = R\omega\sin\omega t$ $\quad t = 0, \frac{2\pi}{\omega}$

$t = 0, \frac{2\pi}{\omega}$

$\vec{a}(\frac{2\pi}{\omega}) = \omega^2\sin 2\pi\,\hat{i} + R\omega^2\cos 2\pi\,\hat{j}$

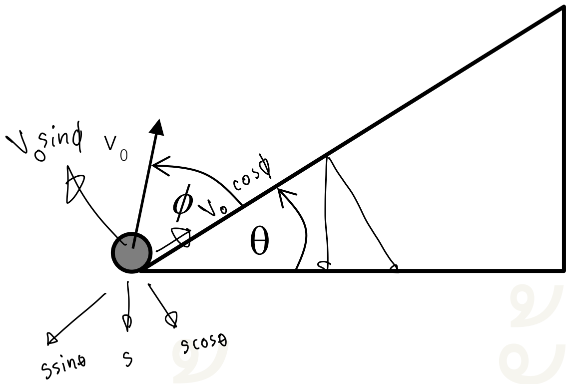
$\vec{a}(\frac{2\pi}{\omega}) = R\omega^2\hat{j}$

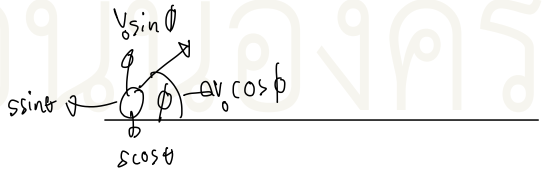
5. ลูกเบสบอลลูกหนึ่งได้รับความเร็วต้นขนาด V_0 ในทิศที่ทำมุม ϕ เหนือผิวของพื้นเอียงพื้นหนึ่งซึ่งทำมุม θ เหนือแนวระดับอีกที (Young and Freedman)

ก) จงคำนวณระยะที่วัดตามพื้นเอียงจากจุดที่ยิงไปถึงจุดที่ลูกเบสบอลตกกระทบพื้นเอียง ให้ตอบในรูปของ

v_0 , g , θ และ ϕ

ข) จงหามุม ϕ ที่ให้พิสัยตามพื้นเอียงมีค่ามากที่สุด





$u = V_0 \sin\phi \quad a = -g\cos\theta \quad t = ? \quad s = 0$

$s = ut + \frac{1}{2}at^2$

$0 = V_0 \sin\phi \, t - \frac{g}{2}\cos\theta \, t^2$

$t = \dfrac{V_0 \sin\phi}{\frac{g}{2}\cos\theta}$

$u = V_0 \cos\phi \quad a = -g\sin\theta \quad t = \dfrac{V_0 \sin\phi}{\frac{g}{2}\cos\theta} \quad s = ?$

$s = ut - \frac{1}{2} g\sin\theta \, t^2$

$s = \dfrac{V_0^2 \cos\phi \sin\phi}{\frac{g}{2}\cos\theta} - \cancel{\frac{1}{2}} \cancel{g} \sin\theta \dfrac{V_0^2 \sin^2\phi}{\frac{g^{\cancel{2}}}{\cancel{4}}\cos^2\theta}$

$= \dfrac{2 V_0^2 \cos\phi \sin\phi}{g\cos\theta} - \dfrac{2 V_0^2 \sin\theta \sin^2\phi}{g\cos^2\theta}$

$= \dfrac{2V_0^2 \cos\phi \sin\phi \cos\theta - 2V_0^2 \sin\theta \sin^2\phi}{g\cos^2\theta}$

$= \dfrac{2V_0^2 \sin\phi \left[\cos(\phi)\cos\theta - \sin\theta \sin\phi \right]}{g\cos^2\theta}$

$= \dfrac{2V_0^2 \sin\phi \cos(\phi + \theta)}{g\cos^2\theta}$

Dynamics

- Newton's Law of Motion
  - Law I: ในกรอบอ้างอิงเฉื่อย วัตถุจะยังคงรักษาสภาพการเคลื่อนที่ที่วัตถุนั้นอยู่นิ่งหรือเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงตัว ตราบเท่าที่ไม่มีแรงมากระทำต่อวัตถุนั้น
  - Law II: $\sum \vec{F} = m\vec{a}$
  - Law III: $\vec{F}_{Action} = -\vec{F}_{Reaction}$ => $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

6. มวล m ถูกผลักจากหยุดนิ่งโดยแรง f(x) ที่เปลี่ยนแปลงกับระยะทาง x ที่ m เคลื่อนที่ไปตามสูตร $f(x) = f_0 e^{-\lambda x}$ ซึ่ง f_0 กับ λ เป็นค่าบวกและคงที่ จงหาความเร็วสุดท้ายของ m หลังจากถูกผลักอยู่เป็นระยะทางยาวมาก ๆ (หนังสือฟิสิกส์กลศาสตร์ สอวน)

$$f_0 e^{-\lambda x} = m\vec{a}$$

$$f_0 e^{-\lambda x} = m \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dx}{dx}$$

$$f_0 e^{-\lambda x} = m v \frac{dv}{dx}$$

$$\int_0^x f_0 e^{-\lambda x}\, dx = \int_0^v m v\, dv$$

$$f_0 \left[-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \right]_0^x = \frac{mv^2}{2}$$

$$f_0 \left(-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \right) = \frac{mv^2}{2}$$

$$v(x) = \sqrt{\frac{2f_0}{m\lambda}\left(1 - e^{-\lambda x}\right)}$$

$$\lim_{x\to\infty} v(x) = \sqrt{\frac{2f_0}{m\lambda}}$$

7. สมมติว่าแรงต้านที่กระทำต่อนักสเก็ตมีค่าแปรผันตรงกับค่ากำลังสองของอัตราเร็ว v ของนักสเก็ต ดังสมการ $f = -kmv^2$ เมื่อ k คือค่าคงที่และ m คือมวลของนักสเก็ต โดยนักสเก็ตเคลื่อนที่ข้ามเส้นชัยของการแข่งขันสเก็ตทางตรงด้วยอัตราเร็ว v_i และหลังจากนั้นอัตราเร็วก็ค่อยๆลดลงโดยการปล่อยให้เคลื่อนที่ต่อไปจนหยุดนิ่ง จงแสดงให้เห็นว่าอัตราเร็วของนักสเก็ต ณ เวลา t ใด ๆ ภายหลังจากเข้าเส้นชัยแล้ว มีค่าเท่ากับ $v(t) = \frac{v_i}{(1+ktv_i)}$ (Serway)

$$\cancel{m}a = -k\cancel{m}v^2$$

$$a = -kv^2$$

$$\frac{dv}{dt} = -kv^2$$

$$\int -\frac{1}{kv^2}\,dv = \int dt$$

$$\int_{v_i}^{v} \frac{1}{kv} = t$$

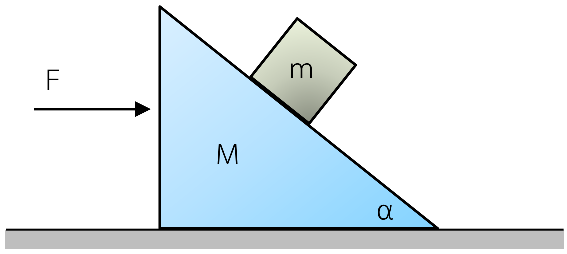
$$\frac{1}{k}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_i}\right) = t$$

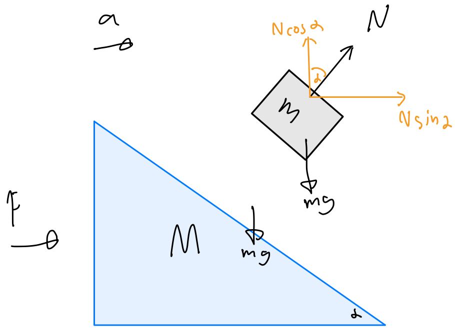
$$\frac{1}{v} = kt + \frac{1}{v_i}$$

$$\frac{1}{v} = \frac{v_i kt + 1}{v_i}$$

$$v = \frac{v_i}{1 + kv_i t}$$

8. กล่องมวล m วางอยู่บนพื้นเอียงมวล M ซึ่งทำมุม α กับแนวระดับ กำหนดให้ทุกผิวสัมผัสเป็นผิวสัมผัสลื่น จงหาว่าต้องออกแรง F เท่าไหร่ต่อพื้นเอียง จึงทำให้กล่องเคลื่อนที่ไปพร้อมกับพื้นเอียงได้โดยไม่ลื่นไถลบนพื้นเอียง (แนวข้อสอบปี 57)





X: $N\sin\alpha = ma$ —(1)

Y: $mg = N\cos\alpha$ —(2)

(1) ÷ (2): $a = g\tan\alpha$

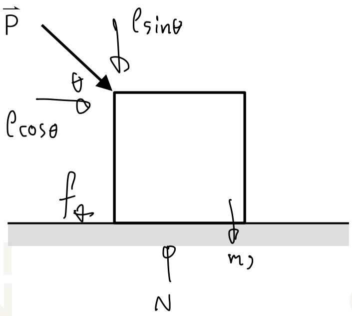
$F = (M+m)a = (M+m)\,g\tan\alpha$

9. วัตถุก้อนหนึ่งมีมวล m ถูกผลักไปด้วยแรง $\vec{P}$ ไปบนพื้นราบดังภาพ ถ้าสัมประสิทธิ์ความเสียดทานสถิตของพื้นกับวัตถุมีค่าเท่ากับ μ_s และแรง $\vec{P}$ ทำมุมกับแนวราบ θ (แนวข้อสอบปี 54)

ก. จงแสดงว่าขนาดของแรง P ที่น้อยที่สุดที่ทำให้วัตถุเคลื่อนที่มีค่าเท่ากับ

$$P = \frac{\mu_s mg\sec\theta}{1-\mu_s\tan\theta}$$

ข. จงหาค่าของ θ ในเทอมของ μ_s ที่ทำให้กล่องไม่สามารถเคลื่อนที่ได้ไม่ว่า P จะมีค่าเท่าไหร่ก็ตาม



$P\sin\theta + mg = N$

$P\cos\theta - f = ma$

$P\cos\theta - \mu_s(P\sin\theta + mg) = 0$

$P\cos\theta - \mu_s P\sin\theta - mg\mu_s = 0$

$P(\cos\theta - \mu_s\sin\theta) = mg\mu_s$

$P = \frac{mg\mu_s}{\cos\theta - \mu_s\sin\theta}$

$P = \frac{mg\mu_s\sec\theta}{1-\mu_s\tan\theta}$

$1-\mu_s\tan\theta = 0$

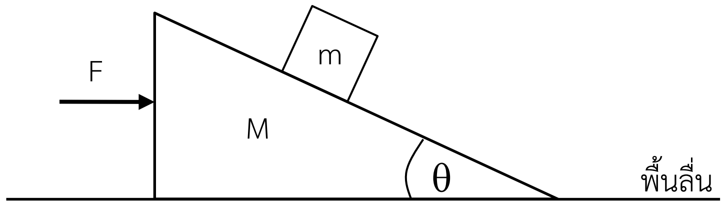
$1 = \mu_s\tan\theta$

$\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mu_s}\right) = \theta$

10. กล่องมวล m วางอยู่บนพื้นเอียงที่มีมวล M และทำมุม θ กับแนวราบ ถ้าพื้นเอียงมีสัมประสิทธิ์ความเสียดทาน μ จงแสดงว่าแรง F ที่ทำให้มวล m วางนิ่งอยู่บนพื้นเอียงได้คือ

$$(m+M)g\frac{\tan\theta-\mu}{1+\mu\tan\theta}\leq F\leq(m+M)g\frac{\tan\theta+\mu}{1-\mu\tan\theta}$$

โดย g คือความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก (แนวข้อสอบปี 54)

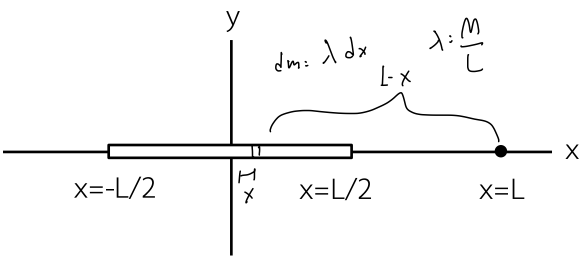


คิดเป็น 2 เคส

1). m พยายามขึ้น

2). m พยายามลง

11. แท่งวัตถุยาว L มวล M มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดและอนุภาคมวล m อยู่ที่ตำแหน่ง x = L ดังรูป จงหาแรงที่แท่งวัตถุกระทำต่ออนุภาค (แนวข้อสอบปี 54)



$dm = \lambda dx$

$dF = \frac{GM\,dm}{(L-x)^2}$

$\int dF = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{GM\lambda dx}{(L-x)^2}$

$F = GM\lambda \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{1}{(L-x)^2} dx$

$= GM\lambda \left(-\frac{1}{L-x} \Big|_{-\frac{L}{2}}^{x=\frac{L}{2}} \right)$

$= GM\lambda \left(-\frac{2}{L} + \frac{2}{3L} \right)$

$= GM\lambda \left(-\frac{4}{3L} \right)$

$= -\frac{4GmM}{3L^2}$

$F = \frac{GMm}{R^2}$ ✗

$dF = \frac{Gm\,dM}{(L-x)^2} = \frac{Gm\lambda dx}{(L-x)^2}$

$F = \int \frac{Gm\lambda dx}{(L-x)^2}$

$= Gm\lambda \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{dx}{(L-x)^2}$

$= Gm\lambda \left[\frac{-1}{x-L} \right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}$

$= Gm\lambda \left[\frac{1}{\frac{L}{2}} - \frac{1}{\frac{3L}{2}} \right]$

$= Gm\lambda \left[\frac{6}{3L} - \frac{2}{3L} \right]$

$= Gm\lambda \left(\frac{4}{3L} \right)$

$= \frac{4GmM}{3L^2}$

$\vec{F} = -\frac{4GMm}{3L^2}\hat{i}$

Dynamics

- งาน
  - กรณี $\vec{F}$ คงที่: $W = \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}||\vec{s}| \cos\theta$; θ คือมุมระหว่าง $\vec{F}$ และ $\vec{s}$
  - กรณี $\vec{F}$ ไม่คงที่: $W_{A \to B} = \int_{\vec{r}=\vec{r}_A}^{\vec{r}=\vec{r}_B} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ = พื้นที่ใต้กราฟ ($\vec{F}$ - $\vec{r}$)

- กำลัง
  - กำลังเฉลี่ย: $P_{avg} = \dfrac{\Delta W}{\Delta t}$
  - กำลังขณะใดๆ: $P = \dfrac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

- ทฤษฎีพลังงานจลน์
  - $W_{net} = K_f - K_i$; พลังงานจลน์คือ $K = \dfrac{1}{2} mv^2$

Ex. ออกแรง 40 N ดันกล่องมวล 10 kg บนพื้นที่มีสัมประสิทธิ์ความเสียดทานจลน์ 0.2 ให้เคลื่อนไปข้างหน้าเป็นระยะทาง 5 เมตร จงหา (a) งานจากแรงที่ออก (b) งานจากแรงเสียดทาน (c) งานลัพธ์

Ex. เครื่องสูบน้ำ สูบน้ำบาดาลลึก 10 m ให้พ่นออกไปด้วยความเร็ว 10 m/s ได้ ถ้าท่อมีพื้นที่หน้าตัดเท่ากับ 0.5 ตารางเมตรแล้ว จงหากำลังของเครื่องสูบน้ำเครื่องนี้

Ex. วัตถุมวล m ถูกดีดจากจุด x=0 ด้วยความเร็วต้น v_0 ไปทาง +X ในบริเวณที่มีสนามแรง $\vec{F} = -Ax^3\hat{i}$ N จงหาบริเวณที่วัตถุจะมีความเร็วเป็น 0 ครั้งแรก

$\Sigma F = ma$

$ma = -Ax^3$

$a = \frac{-Ax^3}{m}$

$\frac{dv}{dt}$

$\frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$

$\int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_0^x -\frac{Ax^3}{m}\,dx$ $\qquad \cancel{\frac{v^2}{2}} - \frac{v_0^2}{2} = -\frac{Ax^4}{4m}$ $\qquad 2mv_0^2 = Ax^4$

$\sqrt[4]{\frac{2mv_0^2}{A}} = X$

Ex. วัตถุถูกบังคับให้เคลื่อนที่ไปในสนามของแรง $\vec{F}_A = k\left[x^2\hat{i} + y^2\hat{j}\right]$ N จากตำแหน่ง (x,y) = (0,0) m ไปยังตำแหน่ง (x,y) = (1,1) m

จงหางานเนื่องจากแรง $\vec{F}_A$ เมื่อวัตถุใช้เส้นทาง a) x=y b) $y=x^2$ c) x=0 m, y=1 m

(1)

$dr = dx\,i + dy\,j$

$dr = dx\,i + dx\,j$

$dr = dx(i + j)$

$W = \int F \cdot dr$

$= \int kx^2[i+j] \cdot dx(i+j)$

$= \int_0^1 2kx^2\,dx = \frac{2kx^3}{3}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{2k}{3}$

(2)

$dr = dx\,i + dy\,j$ $\quad y = x^2$

$dy = 2dx$

$dr = dx\,i + 2x\,dx)$

$W = \int_{r(0,0)}^{r=(1,1)} k[x^2 i + x^4 j] \cdot dx(i + 2x j)$

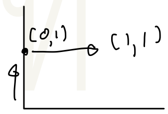
$= \int_{0,0}^{(1,1)} k(x^2 + 2x^5)\,dx$

$= k\left(\frac{x^3}{3} + \frac{2}{6}x^6\right)\Big|_0^1$

$= k\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{6}\right)$

$= \frac{2}{3}k$

(3)



$F = ky^2 j$ $\qquad dr = dy$

(1) $W = \int_0^1 ky^2 j\,dy$

$= \frac{ky^3}{3}\Big|_{y=0}^{y=1}$

(2) $W = \int_0^1 kx^2\hat{i} + 0\;dx\,i$

$= \frac{k}{3}$

Ex. วัตถุถูกบังคับให้เคลื่อนที่ไปในสนามของแรง $\vec{F}_B = k\left[y^2\hat{i} + x^2\hat{j}\right]$ N จากตำแหน่ง (x,y) = (0,0) m ไปยังตำแหน่ง (x,y) = (1,1) m

จงหางานเนื่องจากแรง $\vec{F}_B$ เมื่อวัตถุใช้เส้นทาง a) x=0 m, y=1 m b) y=0 m, x=1 m c) x=y

a) 1) $F_B = k y^2 \hat{i}$ $dr = \cancel{dx}i + dyj$

(0,0) → (0,1)

$W = \int_0^1 k y^2 \hat{i} \cdot dy\hat{j}$

$= 0$

2) $F_B = k(x^2\hat{j} + 1\hat{i})$ $dr = dxi + \cancel{dy}j$

$W = \int_{(0,1)}^{(1,1)} k(x^2\hat{j} + 1\hat{i}) \cdot dx\,i$

$= kx \Big|_{x=0}^{x=1}$

$= k$

b) 1) $F = k(x^2\hat{j})$ $dr = dxi + \cancel{dy}j$

$W = \int_{(0,0)}^{(1,0)} k(x^2\hat{j})\, dx\,i$

$= 0$

2) $F = k(1\hat{j} + y^2\hat{i})$ $dr = dxi + dyj$

$dr = dyj$

$W = \int_{(1,0)}^{(1,1)} k(1\hat{j} + y^2\hat{i})\, dy\,j$

$= k$

c) $F = k(x^2\hat{j} + y^2\hat{i})$ $dr = dxi + dyj = dx(i+j)$

$W = \int_{(0,0)}^{(1,1)} kx^2(\hat{j} + \hat{i})\, dx(\hat{i} + \hat{j})$

$= \frac{2kx^3}{3}\Big|_0^1$

$= \frac{2k}{3}$

- แรงอนุรักษ์ (Conservative force)
  - แรงอนุรักษ์คือแรงที่งานจะขึ้นกับจุดเริ่มต้นและจุดสุดท้ายเท่านั้น ไม่ขึ้นกับเส้นทางการเคลื่อนที่ (นั่นคือบอกเพียงแค่จุดเริ่มต้นและจุดสุดท้ายก็สามารถรู้งานของแรงนั้นได้)
  - อินทิเกรตตามเส้นทางของวงปิดใด ๆ ของแรงอนุรักษ์เป็น 0 $\oint_{C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

    (เพราะจุดเริ่มต้นกับจุดสิ้นสุดนั้นเป็นจุดเดียวกัน)

  - การพิสูจน์ว่าแรง $\vec{F}$ ใด ๆ เป็นแรงอนุรักษ์หรือไม่
    - หาเส้นทาง 2 เส้นทางที่แรง $\vec{F}$ นั้นทำงานไม่เท่ากัน (หาข้อขัดแย้ง) (พิสูจน์ว่าไม่เป็นแรงอนุรักษ์ได้อย่างเดียว)
    - หา Curl ของแรง $\vec{F}$ โดย $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$ เมื่อ $\vec{F}$ เป็นแรงอนุรักษ์

      โดย del operator $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$

      ดังนั้น $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$

- พลังงานศักย์ (Potential Energy)
  - พลังงานศักย์เป็นพลังงานที่ขึ้นกับตำแหน่งเพียงอย่างเดียว
  - พลังงานศักย์คืองานของแรงที่ต้านแรงอนุรักษ์ $\Delta U = \int_a^b \vec{F}_{\text{ต้าน}} \cdot d\vec{r} = \int_a^b (-\vec{F}_{CON}) \cdot d\vec{r}$
  - งานของแรงอนุรักษ์ $W_{CON,a\to b} = \int_a^b \vec{F}_{CON} \cdot d\vec{r} = -(\Delta U) = U_1 - U_2$

    งานของแรงอนุรักษ์ คือผลต่างระหว่าง ค่าเริ่มต้น และค่าสุดท้าย ของพลังงานศักย์

  - $\vec{F} = m\vec{g}$ พลังงานศักย์โน้มถ่วง: $U = mgh$
  - $\vec{F} = -k\vec{x}$ พลังงานศักย์ยืดหยุ่น: $U = \frac{1}{2}kx^2$

- $\vec{F} = \frac{-GMm}{r^2}\hat{r}$ พลังงานศักย์โน้มถ่วง: $U = -\frac{GMm}{r}$

- ความสัมพันธ์ของแรงอนุรักษ์จากพลังงานศักย์
  - กรณี 1 มิติ (แทนด้วยแกน X): $F_{con,x} = -\frac{d}{dx}U(X)$
  - กรณี 3 มิติ: $\vec{F}_{con} = -\left[\frac{\partial}{\partial x}U\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}U\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}U\hat{k}\right] = -\vec{\nabla}U = -\mathrm{grad}\,U$

    โดย $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$

Ex. วัตถุอยู่ในบริเวณที่มีผิวศักย์ $U(x, y, z) = x^2 y z^3$ J

(a) ถ้าต้องการลากวัตถุจากตำแหน่ง (3, 5, 2) m ไปยัง (4, 3, 3) m ต้องออกงานเท่าไหร่

(b) ที่จุด (4, 3, 3) m ต้องออกแรงเท่าไหร่เพื่อให้วัตถุอยู่ในสภาวะสมดุล

$U(3,5,2) = 9 \cdot 5 \cdot 8 = 360$

$U(4,3,3) = 16 \cdot 3 \cdot 27 = 1296$

$U_{แรก} + W = U_{หลัง}$

$W = U_{หลัง} - U_{แรก}$

$W = 1296 - 360$

$W = 936$

$U(x,y,z) = x^2 y z^3$

$F = -\nabla U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right)$

$= -\left[(2xyz^3)\hat{i} + (x^2 z^3)\hat{j} + (3x^2 y z^2)\hat{k}\right]$

$F_{(4,3,3)} = -\left[(2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 27)\hat{i} + (16 \cdot 27)\hat{j} + (3 \cdot 16 \cdot 3 \cdot 9)\hat{k}\right]$

$= -\left[24 \cdot 27\hat{i} + (16 \cdot 27)\hat{j} + (48 \cdot 27)\hat{k}\right]$

$U = 3x^3 y - 7x$ $\quad F_{(x,y)} = ?$

$F = -\vec{\nabla} U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j}\right)$

$= -\left[(9x^2 y - 7)\hat{i} + (3x^3)\hat{j}\right]$

$F = -F(4,3,3)$

- ทฤษฎีงาน-พลังงาน
  - $W_{non-con} = \Delta K + \Delta U$

- กฎอนุรักษ์พลังงาน ($W_{non-con} = 0$)
  - เมื่อไม่มีแรงไม่อนุรักษ์ (ทั้งภายในและภายนอก) มากระทำกับระบบ $\Delta K = -\Delta U$

$F_{(x)} = -\alpha x - \beta x^2 = -x(\alpha + \beta x) =$

$U_{(x)} = ?$ $\quad x=0,\ U=0$

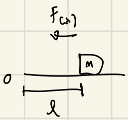
$F = -\frac{dU}{dx}$

$F\,dx = -dU$

$\int_0^x F\,dx = -\int_0^U dU$

$-\frac{\alpha x^2}{2} - \frac{\beta x^3}{3} = -U$

$U = \frac{\alpha x^2}{2} + \frac{\beta x^3}{3}$



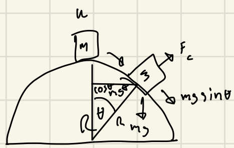
$F=0$ $\quad v_{\frac{L}{2}} = ?$

$\Sigma E = \Sigma E$

$\frac{\alpha L^2}{2} + \frac{\beta L^3}{3} = \frac{\alpha L^2}{8} + \frac{\beta L^3}{24} + \frac{1}{2} M v_{\frac{L}{2}}^2$

$\frac{3\alpha L^2}{8} + \frac{7\beta L^3}{24} = \frac{1}{2} M v_{\frac{L}{2}}^2$

$\sqrt{\frac{3\alpha L^2}{4M} + \frac{7\beta L^3}{12M}} = v_{\frac{L}{2}}$



$\theta : ?$

$N = F_c + \cos\theta\, mg$

$N = \frac{mv^2}{R} + mg\cos\theta$

$\Sigma F = \frac{mv^2}{R}$

$\cos\theta\, \cancel{m}g = \frac{\cancel{m}v^2}{R}$

$\cos\theta = \frac{v^2}{gR} = \frac{2\cancel{gR}(1-\cos\theta)}{\cancel{gR}}$

$\cos\theta = 2 - 2\cos\theta$

$3\cos\theta = 2$

$\cos\theta = \frac{2}{3}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$

$\cancel{m}gR = \cancel{m}gR\cos\theta + \frac{1}{2}\cancel{m}v^2$

$2gR(1-\cos\theta) = v^2$

$\cancel{m}gR + \frac{1}{2}\cancel{m}u^2 = \cancel{m}gR\cos\theta + \frac{1}{2}\cancel{m}v^2$

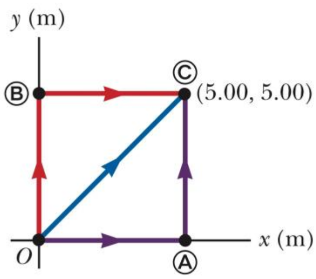
$2gR(1-\cos\theta) + u^2 = v^2$

แบบฝึกหัดงาน-พลังงาน

12.แรงหนึ่งกระทำกับอนุภาคให้เคลื่อนที่บนระนาบ xy ให้แรง $\vec{F} = (2y\hat{i} + x^2\hat{j})$ ให้แรง $\vec{F}$ หน่วยนิวตัน และ x และ y ในหน่วยเมตร โดยที่อนุภาคนี้เริ่มต้นจากจุดกำเนิด ไปยังจุดสุดท้ายคือ $x = 5.00\,m$ และ $y = 5.00\,m$ ดังรูป

12.1 จงคำนวณงานที่กระทำโดยแรง F บนอนุภาคตามเส้นทางต่างๆ คือ เส้นทางสีม่วง เส้นทางสีแดง และเส้นทางสีน้ำเงิน

12.2 จงบอกว่าแรง F นี้เป็นแรงอนุรักษ์หรือไม่อนุรักษ์ พร้อมอธิบายเหตุผล (Serway)



13. แรงหนึ่งกระทำต่ออนุภาคโปรตอนคือ $\vec{F} = -\alpha x^2 \hat{i}$ โดยที่ α = 12 N/m^2

a) แรง $\vec{F}$ ทำงานเท่าใดเมื่อโปรตอนเคลื่อนที่ตามเส้นทางตรงจากจุด (0.10m,0) ไปยังจุด (0.10m,0.40m) 0

b) แรง $\vec{F}$ ทำงานเท่าใดเมื่อโปรตอนเคลื่อนที่ตามเส้นทางตรงจากจุด (0.10m,0) ไปยังจุด (0.30m,0)

c) แรง $\vec{F}$ ทำงานเท่าใดเมื่อโปรตอนเคลื่อนที่ตามเส้นทางตรงจากจุด (0.30m,0) ไปยังจุด (0.10m,0)

d) แรง $\vec{F}$ เป็นแรงอนุรักษ์หรือไม่ จงอธิบาย ถ้า $\vec{F}$ เป็นแรงอนุรักษ์ ฟังก์ชันพลังงานศักย์ U(x,y,z) ของ $\vec{F}$ มีรูปแบบอย่างไร ให้ เมื่อ U (x=0) = 0 (Young and Freedman)

b) $W = \int_{0.1}^{0.3} F \cdot dx = \int_{0.1}^{0.3} -12x^2\, dx = [-4x^3]_{0.1}^{0.3} = -0.108 + 0.004$

$= -0.104$ J

c) $W = 0.104$ J

d) $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \rightarrow 0 = 0$

$\frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z} \rightarrow 0 = 0$

$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \rightarrow 0 = 0$

$\vec{F}$ เป็นแรงอนุรักษ์

$F = -\frac{dU}{dx}$

$\int_0^U dU = \int_0^x -F\,dx$

$U = \frac{\alpha x^3}{3}$ ※

14. พลังงานศักย์ของระบบที่มีแรงสองมิติกระทำอยู่มีค่า $U = 3x^3y - 7x$ จงหาแรงที่กระทำที่จุด (x, y) (แนวข้อสอบปี 54)

$$\vec{F} = -\left[\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j}\right]$$

$$= -\left((9x^2y - 7)\hat{i} + 3x^3\hat{j}\right)$$

15.สปริงขดหนึ่งไม่ทำตัวตามกฎของฮุค สปริงขดนี้ออกแรงคืนตัว $F_x(x) = -\alpha x - \beta x^2$ เมื่อสปริงถูกยืดหรือถูกอัด โดยที่ $\alpha = 60.0\ \mathrm{N/m}$ และ $\beta = 18.0\ \mathrm{N/m^2}$ สปริงมีมวลน้อยมาก

a) จงหาฟังก์ชันพลังงานศักย์ $U(x)$ สำหรับสปริงนี้ ให้ $U = 0$ เมื่อ $x = 0$

b) ยึดวัตถุมวล 0.900 kg บนผิวโต๊ะแนวระดับผิวเกลี้ยงไว้กับสปริงขดนี้ ดึงวัตถุไปทางขวา (ทิศ $+x$) เป็นระยะ 1.00 m เพื่อยืดสปริง แล้วปล่อยมือ จงหาอัตราเร็วของวัตถุเมื่อวัตถุอยู่ที่ระยะ 0.50 m ไปทางขวาของตำแหน่งสมดุล $x = 0$ (Young and Freedman)

$$F = -\frac{dU}{dx}$$

$$\int_0^U dU = \int_0^x -\vec{F}\,dx = -\left[-\frac{\alpha x^2}{2} - \frac{\beta x^3}{3}\right]_0^x$$

$$= \frac{\alpha x^2}{2} + \frac{\beta x^3}{3}$$

$$= 30x^2 + 6x^3$$

$$\Sigma E_i = \Sigma E_f$$

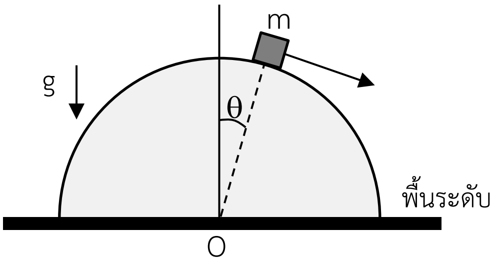
$$36 = \frac{30}{4} + \frac{6}{8} + \frac{1}{2}mv^2$$

$$36 = 7.5 + 0.75 + 0.45v^2$$

$$36 - 8.25 = 0.45v^2$$

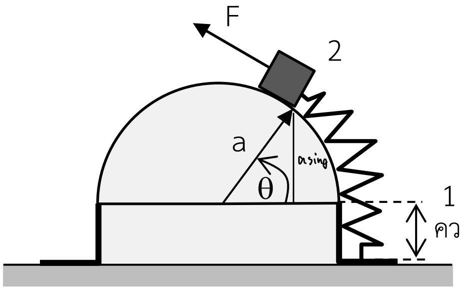
$$v \approx 7.85$$

16. m กำลังไถลลงตามผิวโค้งรูปทรงกลมที่มี O เป็นจุดศูนย์กลาง กำหนดว่าผิวโค้งนี้ลื่น และ m ตั้งต้นจากจุดหยุดนิ่งใกล้ๆยอดเนิน จงหาค่า θ ตรงจุดที่ m เริ่มเหินหลุดจากผิวโค้ง (หนังสือฟิสิกส์กลศาสตร์ สอวน.)



17.(ในรูปข้อ 16) ถ้าดีด m จากยอดเนินด้วยความเร็วต้น u มันจะหลุดจากผิวเนินเมื่อมุม θ เป็นเท่าไร กำหนดว่า $u^2 << Rg$ เมื่อ R เป็นรัศมีความโค้งของผิวเนิน

18. มีแรงไม่คงตัว $\vec{F}$ ทำในแนวสัมผัสกับผิวครึ่งทรงกลมลื่นผิวหนึ่ง เคลื่อนก้อนน้ำหนัก w และในขณะเดียวกันก็ยืดสปริงที่ยึดกับก้อนน้ำหนักจากตำแหน่งที่ 1 ไปยังตำแหน่งที่ 2 โดยการปรับเปลี่ยนแรงอย่างช้าๆ สปริงมีมวลน้อยมากและมีค่าคงตัวแรง k ปลายของสปริงเคลื่อนที่เป็นส่วนโค้งของวงกลมรัศมี a จงคำนวณงานที่แรง $\vec{F}$ กระทำ (Young and Freedman)



$\Sigma E_i = \Sigma E_f$

$W = \frac{1}{2}k(a\theta)^2 + ws\,a\sin\theta$

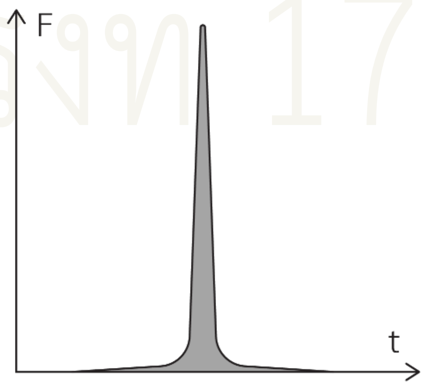
Momentum and Collision

- โมเมนตัม $\vec{p} = m\vec{v}$
    - จากกฎข้อที่ 2 ของนิวตัน $\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d(m\vec{v})}{dt} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$
- การดล คือ การเปลี่ยนแปลงโมเมนตัม $\vec{I} = \Delta\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\, dt$
- กฎอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้น

เมื่อไม่มีแรงภายนอกมากระทำแล้ว โมเมนตัมของระบบจะมีค่าคงที่เสมอ

$$\sum \vec{p_f} = \sum \vec{p_f}$$

- แรงดล (Impulse Force)
    - คือ แรงที่กระทำในช่วงสั้น ๆ ซึ่งมีค่าที่สูงมาก ๆ ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงของโมเมนตัมเชิงเส้นแบบทันทีทันใด



    - จึงสามารถละเลยผลของแรงอื่น ๆ (เช่น แรงโน้มถ่วง แรงเสียดทาน) ในช่วงที่เกิดแรงดลได้ เพราะแรงดลเป็นแรงที่มีค่าสูงมาก ๆ ผลจากแรงเหล่านี้แทบไม่มีผลต่อการเคลื่อนที่ (การเปลี่ยนแปลงโมเมนตัม)

- การชน (Collision)

การชนเป็นการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมแบบทันทีทันใด เมื่อเกิดการชนจะเกิดแรงดลภายในทำให้สามารถใช้กฎอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้นได้ และสามารถละเลยผลของแรงอื่น ๆ ในช่วงเวลาสั้น ๆ

- การชนแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์

  การชนแบบยืดหยุ่น เป็นการชนที่ระบบ อนุรักษ์พลังงาน

  $\sum \vec{p}_f = \sum \vec{p}_f$ และ $\sum K_i = \sum K_f$

  - สำหรับ 1D : $\vec{u}_1 + \vec{v}_1 = \vec{u}_2 + \vec{v}_2$

- การชนแบบไม่ยืดหยุ่น

  การชนแบบไม่ยืดหยุ่น เป็นการชนที่ระบบ ไม่อนุรักษ์พลังงาน

- การชนแบบไม่ยืดหยุ่นสมบูรณ์

  การชนแบบไม่ยืดหยุ่นสมบูรณ์ เป็นการชนที่ระบบ สูญเสียพลังงานมากที่สุด

  เป็นการชนที่วัตถุทั้งสองจะเคลื่อนที่ติดกันไป

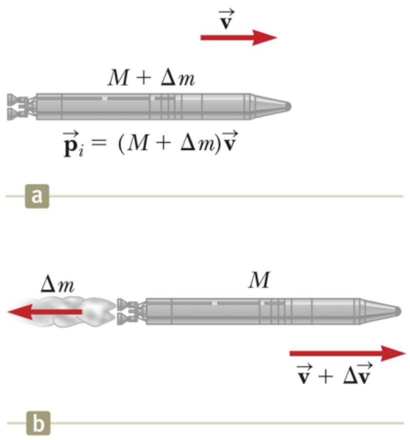
  $\sum \vec{p}_f = \sum \vec{p}_f$ และ $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$ (ชนแล้วติดกันไป)

*สำหรับการชน 2 มิติ เราสามารถมองแยกกันได้ $\sum \vec{p}_{xi} = \sum \vec{p}_{xf}$ และ $\sum \vec{p}_{yi} = \sum \vec{p}_{yf}$

โมเมนตัมของระบบ : $\vec{p}_{system} = \sum m_i \vec{v}_i = M_{system} \vec{v}_{cm.}$

< ถ้าผลรวมโมเมนตัมอนุรักษ์แล้ว $\vec{v}_{cm}$ ของระบบจะคงที่ >

<u>เพิ่มเติม</u> : Rocket Equation



Δm = มวลเชื้อเพลิง

$$\vec{p}_i = (M + \Delta m)\,\vec{v}$$

$$\vec{p}_f = M(\vec{v} + \Delta\vec{v}) + \Delta m(\vec{v} + \Delta\vec{v} - \vec{u})$$

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = M\Delta\vec{v} - \Delta m\vec{u} + \Delta m\Delta\vec{v}$$

$$\vec{F}_{EXT} = \frac{d}{dt}\vec{p} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\left[M\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} - \frac{\Delta m}{\Delta t}\vec{u} + \Delta m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\right] \quad ; \quad \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta m\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$ มีค่าน้อยมาก

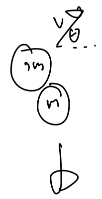
$$\vec{F}_{EXT} = M\frac{d}{dt}\vec{v} - \vec{u}\frac{d}{dt}m$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงของมวลจรวด $\dfrac{dM}{dt} = \dfrac{d}{dt}(M_0 - m) = \dfrac{dM_0}{dt} - \dfrac{dm}{dt} = -\dfrac{dm}{dt}$

$$\boxed{\vec{F}_{EXT} = M\frac{d}{dt}\vec{v} + \vec{u}\frac{d}{dt}M}$$: Rocket Equation

แบบฝึกหัดโมเมนตัมและการชน

19. มวล 3m มีความเร็ว 6m/s ในทิศ +x และมวล m มีความเร็ว 6m/s ในทิศ –x ทั้งสองชนกันอย่างยืดหยุ่น หลังจากการชนพบว่ามล m มีความเร็วในทิศ –y จงหาอัตราเร็วของ 3m หลังชน (แนวข้อสอบปี 57)



$$18m - 6m = 3m\, v_{3m}\cos\theta$$

$$4 = v_{3m}\cos\theta$$

$$3m v_{3m}\sin\theta = m v_m$$

$$3v_{3m}\sin\theta = v_m$$

$$\cancel{\tfrac{1}{2}}\cdot 3\cancel{m}\cdot 36 + \cancel{\tfrac{1}{2}}\cdot \cancel{m}\cdot 36 = \cancel{\tfrac{1}{2}}\cdot 3\cancel{m}\cdot v_{3m}^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}}\cdot \cancel{m}\cdot v_m^2$$

$$108 + 36 = 3v_{3m}^2 + v_m^2$$

$$144 = 3v_{3m}^2 + 9v_{3m}^2\sin^2\theta$$

$$= 3v_{3m}^2(1 + 3\sin^2\theta)$$

$$= 3v_{3m}^2(4 - 3\cos^2\theta)$$

$$= 12v_{3m}^2 - 9v_{3m}^2\cos^2\theta$$

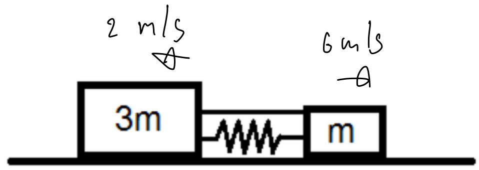
$$288 = 12v_{3m}^2$$

$$24 = v_{3m}^2$$

$$v_{3m} = 2\sqrt{6}$$

20. กล่องสองใบมีมวล m และ 3m วางอยู่บนพื้นราบที่ไม่มีแรงเสียดทาน สปริงเบาอันหนึ่งถูกติดไว้ที่มวล 3m จากนั้นมวลทั้งสองถูกกดติดกันผ่านสปริงโดยมีเชือกผูกวัตถุทั้งสองติดกันไว้ดังภาพ ถ้าเชือกที่ผูกวัตถุทั้งสองถูกตัดออก แล้ววัตถุมวล 3m เคลื่อนที่ไปทางซ้ายด้วยอัตราเร็ว 2.00 m/s เมื่อสปริงมีความยาวธรรมชาติ

(แนวข้อสอบปี 54)



ก. มวล m จะเคลื่อนที่ไปทางทิศใด ด้วยอัตราเร็วเท่าใด

$mv = mv$

$6m = m \cdot v$

$v = 6$

ข. จงหาพลังงานศักย์ยืดหยุ่นของสปริงก่อนที่เชือกจะถูกตัด โดยที่ m = 0.350 kg

$P.E = \frac{1}{2} \cdot 3m \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot 36$

$P.E = 6m + 18m$

$= 24 \cdot 0.35 = 12 \cdot 0.7 = 8.4$

ค. ก่อนเชือกจะถูกตัด สปริงถูกกดจนหดตัวเข้าไป 1.00 mm แล้วจงหาค่าคงที่ของสปริง

$8.4\ J = \frac{1}{2} kx^2$

$8.4 = \frac{1}{2} k(1)^2$

$k = 16.8\ J/mm$

ง. จงหาแรงตึงเชือกก่อนที่เชือกจะถูกตัด

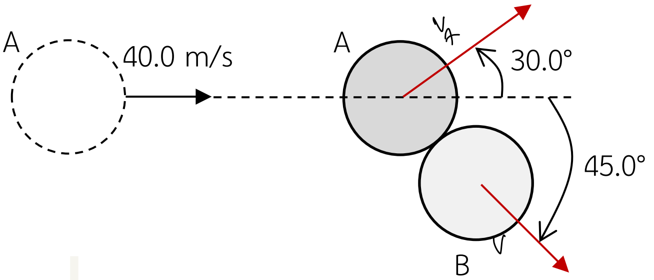
$T = F = kx = 16.8 \times 10^3\ N$

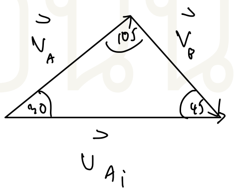
จ. หากพื้นมีแรงเสียดทาน การคำนวณจะได้ผลเหมือนกับข้อ ก. หรือไม่ เพราะเหตุใด

21. ลูกฮอกกี้ B อยู่นิ่งบนผิวน้ำแข็งลื่นและถูกชนด้วยลูกฮอกกี้ A ลูกที่สองซึ่งเดิมกำลังเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว 40.0 m/s ลูกฮอกกี้ A ถูกเบนไปจากแนวการเคลื่อนที่เดิมเป็นมุม 30.0° หลังจากการชนลูกฮอกกี้ B มีความเร็วในทิศทำมุม 45.0° กับแนวการเคลื่อนที่เดิมของ A ลูกฮอกกี้ทั้งสองจะมีมวลเท่ากัน (Young and Freedman)

a) จงคำนวณอัตราเร็วของลูกฮอกกี้แต่ละลูกหลังการชน

b) พลังงานจลน์เดิมของลูกฮอกกี้ A สูญเสียไปเป็นเศษส่วนเท่าใดในระหว่างการชนนี้





$$\frac{40}{\sin 105^\circ} = \frac{\vec{V}_A}{\sin 45^\circ} = \frac{\vec{V}_B}{\sin 30^\circ}$$

$$\frac{40}{\sin 60^\circ \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cos 60^\circ}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{160}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{\vec{V}_A}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \qquad \frac{160}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{\vec{V}_B}{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{80\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \vec{V}_A \qquad \vec{V}_B = \frac{80}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

$$\frac{80}{4}\sqrt{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2}) = \vec{V}_A \qquad \vec{V}_B = \frac{80}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

$$20 \cdot 2\sqrt{3} - 40 = \vec{V}_A \qquad = 20\sqrt{6} - 20\sqrt{2}$$

$$\frac{\frac{1}{2}mv_i^2 - \frac{1}{2}mv_f^2}{\frac{1}{2}mv_i^2} \times 100$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot 1600 - \frac{1}{2}(1600)(\sqrt{3}-1)^2}{\frac{1}{2} \cdot 1600} \times 100$$

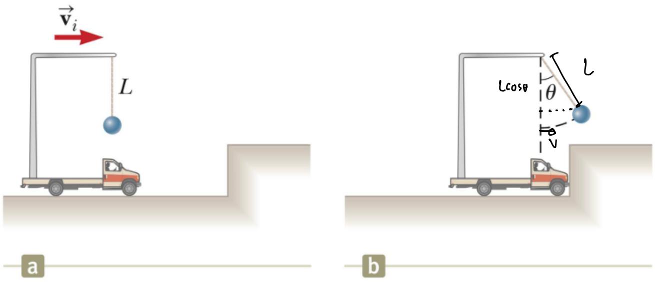
$$= \frac{800 - 800(4-2\sqrt{3})}{8}$$

$$= 100 - 100(4-2\sqrt{3})$$

22. อนุภาคถูกแขวนจากจุดบนสุดของรถลากโดยใช้เชือกมวลเบายาว L ตามที่แสดงในรูป รถลากและอนุภาคเคลื่อนที่ไปทางขวาด้วยความเร็วคงที่ v_i โดยที่เชือกอยู่ในแนวดิ่ง รถลากหยุดนิ่งทันทีเมื่อรถวิ่งชนกับกันชนตามรูป อนุภาคแกว่งด้วยมุม θ (Serway)

a) จงแสดงว่าความเร็วเริ่มต้นของรถลากสามารถคำนวณได้จากสมการ $v_i = \sqrt{2gL(1-\cos\theta)}$

b) ถ้ากันชนยังคงมีแรงกระทำในแนวราบในขณะที่อนุภาคที่ถูกแขวนเคลื่อนที่ไปข้างหน้าทำมุมมากที่สุดจากแนวดิ่ง กันชนจะหยุดแรงกระทำในแนวราบที่ตำแหน่งใด



$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$

$v = \sqrt{2gh}$

$= \sqrt{2gL(1-\cos\theta)}$