บทที่ 1 ฟิสิกส์และการวัด (Physics and Measurement)

ฟิสิกส์ คืออะไร ?

Visual dictionary อธิบายว่า

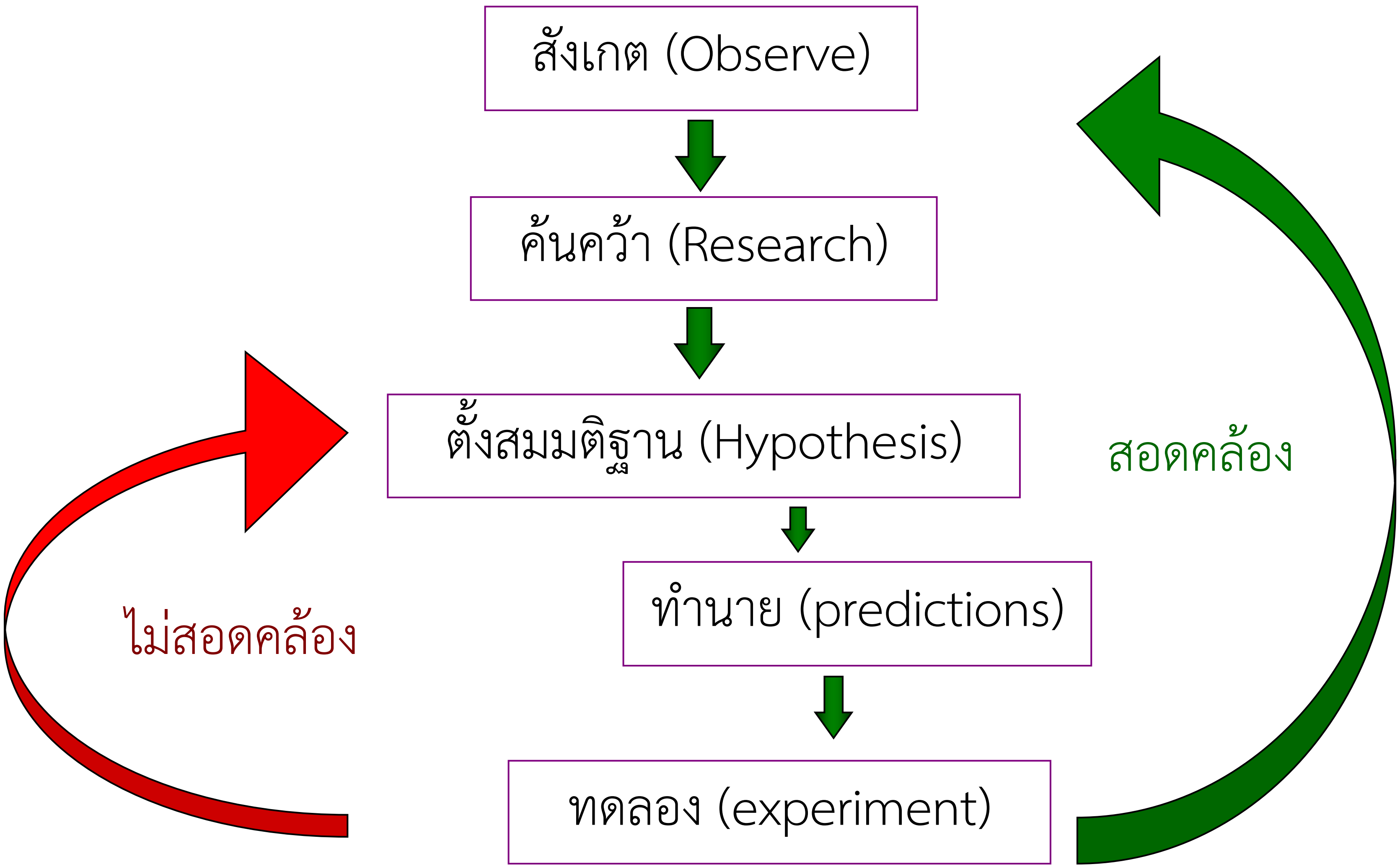
“ฟิสิกส์ มาจากคำในภาษากรีก “**Physikos**” หมายความถึงปรัชญาธรรมชาติซึ่งในอดีตนักฟิสิกส์มักจะถูกเรียกว่า *นักปรัชญาธรรมชาติ*

ในสายตาของนักฟิสิกส์ โลกประกอบไปด้วยสสารและพลังงาน นักฟิสิกส์ใช้เวลาส่วนใหญ่ไปในการสร้างสูตรและทดสอบทฤษฎีต่าง ๆ ซึ่งในการณ์นี้ต้องอาศัยกระบวนการเชิงทดลองเป็นจำนวนมาก การศึกษาฟิสิกส์รวมถึงการศึกษาในเรื่องของแรง การเคลื่อนที่ แสง เสียง ไฟฟ้าแม่เหล็ก และโครงสร้างของสสาร”

→ วิทยาศาสตรพื้นฐานที่ศึกษา และอธิบายระบบและสิ่งแวดล้อมทางกายภาพ ด้วย “ปริมาณ (quantities)” และ “การวัด (measurements)”

→ กระบวนการทางวิทยาศาสตร์ (scientific method)

กระบวนการทางวิทยาศาสตร์



ทำไมต้องเรียนฟิสิกส์ ?

☺ เป็นรากฐานของวิทยาการที่มีความสำคัญอย่างยิ่ง

☺ เป็นประโยชน์ต่อทุกสาขาอาชีพ

☺ ฝึกฝนการ “เข้าถึง” และ “มองหาคำตอบ” ของปัญหา

☺ ช่วยให้เข้าใจถึงความจริง และสิ่งที่เป็นไปได้

☺ ช่วยให้ได้เกรดที่ดีขึ้น (หากตั้งใจ และขวนขวาย)

หลากหลายสาขาของฟิสิกส์

1. กลศาสตร์ (Mechanics)

2. แม่เหล็กไฟฟ้า (Electromagnetism)

3. กลศาสตร์ควอนตัม (Quantum Mechanics)

4. กลศาสตร์สถิติ (Statistical Mechanics)

5. อุณหพลศาสตร์ (Thermodynamics)

6. สัมพัทธภาพ (Relativity)

7. นิวเคลียร์ (Nuclear)

8. ฟิสิกส์ประยุกต์ (Applied Physics)

9. ดาราศาสตร์ (Astronomy)

10. ฟิสิกส์สถานะของแข็ง (Solid State Physics)

11. ฟิสิกส์ดาราศาสตร์ (Astrophysics)

ฯลฯ

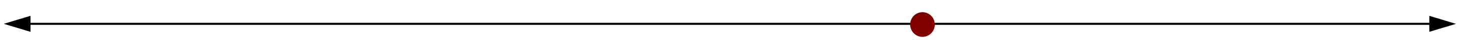
ฟิสิกส์ของนิวตัน (Newtonian physics)

เราจะเริ่มจากสิ่งที่เรียกว่า ฟิสิกส์ของนิวตัน (Newtonian physics)

- Isaac Newton พ.ศ.2213 (~ค.ศ.1670) เป็นพื้นฐานทางฟิสิกส์กว่า 346 ปี
- ใช้อธิบายปรากฏการณ์ในชีวิตประจำวันอย่างแม่นยำ
- คณิศาสตร์ไม่ซับซ้อน
- ใช้ไม่ได้เมื่อระบบมีอัตราเร็วมาก ๆ → สัมพัทธภาพ (Relativity)
- ใช้ไม่ได้เมื่อระบบมีขนาดเล็กมาก ๆ → กลศาสตร์ควอนตัม (Quantum Mechanics)

ใน Newtonian Physics เรามักพิจารณา “จุดเล็ก ๆ” และมักเริ่มจากการพิจารณา

การเคลื่อนที่ของอนุภาคในแนวเส้นตรง → ง่าย



ในฟิสิกส์ของนิวตัน แนวคิดที่ได้จากการพิจารณา

♠ ตำแหน่ง (อนุภาคอยู่ที่ไหน)

♠ การกระจัด (การเปลี่ยนตำแหน่ง)

♠ ความเร็ว (อัตราในการเปลี่ยนตำแหน่ง)

♠ ความเร่ง (อัตราในการเปลี่ยนความเร็ว)

การเคลื่อนที่โดยทั่วไปไม่จำกัดอยู่ในแนวเส้นตรง → เวกเตอร์ (Vector)

1.3 การวิเคราะห์เชิงมิติ (dimensional analysis)

มิติ (dimension) เป็นสมบัติเชิงกายภาพของปริมาณที่วัด เช่น ระยะทางที่ถูกวัดความยาวในหน่วย เมตร หรือฟุต ถือว่าเป็นระยะทาง อาจกล่าวได้ว่า มิติที่เป็นปริมาณเชิงกายภาพของระยะทางคือความยาว

มิติของปริมาณพื้นฐาน

ความยาว	ใช้สัญลักษณ์	L
มวล	ใช้สัญลักษณ์	M
เวลา	ใช้สัญลักษณ์	T

ความแตกต่างระหว่างมิติกับหน่วย (unit) คือ

เวลา ในมิติ (dimension) คือ $[T]$ อาจวัดในหน่วย วินาที (s) หรือชั่วโมง (hr) แต่มิติไม่เปลี่ยน

ความยาว ในมิติ (dimension) คือ $[L]$ อาจวัดในหน่วย เมตร (m) หรือฟุต (ft) แต่มิติไม่เปลี่ยน

มวล ในมิติ (dimension) คือ $[M]$ อาจวัดในหน่วย กิโลกรัม (kg) หรือกรัม (g) แต่มิติไม่เปลี่ยน

ประโยชน์ของการวิเคราะห์เชิงมิติ คือ

1. มิติของปริมาณที่จะนำมาบวกหรือลบกัน ต้องเหมือนกัน

2. มิติของสองฝั่งสมการ ต้องเหมือนกัน

เช่น สมการ $$x = ut + \frac{1}{2}at^2$$

$$[L] = \frac{[L]}{[T]}[T] + \frac{[L]}{[T]^2}[T]^2$$

$$[L] = [L] + [L]$$

* ตัวเลข ไม่มีมิติ (dimensionless)

Note 1: ถ้าสมการหนึ่งถูกพบว่ามี dimension ไม่ถูกต้องแล้ว แสดงว่าสมการนี้ไม่ถูกต้องด้วย

Note 2: ถ้าสมการหนึ่งถูกพบว่ามี dimension ถูกต้องแล้ว ไม่จำเป็นที่สมการนี้จะเป็นสมการที่ถูกต้อง

ตัวอย่าง 1.1

มิติของแรง $$[F] = ma = \frac{[M][L]}{[T]^2}$$

มิติของโมเมนตัม $$[p] = mv = \frac{[M][L]}{[T]}$$

มิติของค่า $\boldsymbol{G}$ $$F = \frac{GMm}{r^2}$$

$$[G] = \frac{Fr^2}{Mm} = \frac{[M][L][L]^2}{[T]^2[M]^2} = \frac{[L]^3}{[T]^2[M]}$$

ตัวอย่าง 1.2 กำหนดข้อมูลว่าเมื่ออนุภาคเคลื่อนที่เป็นวงกลมรัศมี r ด้วยอัตราเร็วคงที่ v จะมีความเร่ง a โดยขนาดความเร่งแปรผันกับ r^n และ v^m จงหาค่าของ n และ m แล้วเขียนรูปแบบของสมการอย่างง่ายสำหรับคำนวณหาความเร่ง

ตัวอย่าง 1.3 กำหนดให้ x มีมิติของระยะทาง, u มีมิติของความเร็ว, m มีมิติของมวล และ g มีมิติของความเร่ง

พิจารณาสมการต่อไปนี้ สมการใดที่มีมิติถูกต้อง

1. $$x = \frac{(4/3)ut}{1-(2gt^2/x)}$$

2. $$x = \frac{vt}{1-mgt^2}$$

1.4 การเปลี่ยนหน่วย (conversion of units)

SI units เช่น ความยาว – เมตร (m)

เวลา – วินาที (s)

ตัวอย่าง อัตราเร็ว 100 km/hr = ? m/s

$$\left(\frac{100 \;\; \mathrm{km}}{1 \;\; \mathrm{hr}}\right)\left(\frac{1{,}000 \;\; \mathrm{m}}{1 \;\; \mathrm{km}}\right)\left(\frac{1 \;\; \mathrm{hr}}{60 \;\; \mathrm{min}}\right)\left(\frac{1 \;\; \mathrm{min}}{60 \;\; \mathrm{s}}\right) = 27.8 \;\; \mathrm{m/s}$$

ตัวอย่าง 15 cm = ? in $\Rightarrow$ $$(15\ \text{cm})\left(\frac{1\ \text{in}}{2.54\ \text{cm}}\right) = 5.9\ \text{in}$$

125 g = ? kg $\Rightarrow$ $$(125\ \text{g})\left(\frac{1\ \text{k}}{1{,}000}\right) = 0.125\ \text{kg}$$

1.5 ค่าประมาณและอันดับของขนาด (estimates and order of magnitude calculations)

การหาอันดับของขนาด :

เขียนปริมาณที่ต้องการในรูป $a \times 10^n$ โดย $1.0 \le a < 10$

ถ้า $a < \sqrt{10}$ อันดับของขนาด คือ n

ถ้า $a > \sqrt{10}$ อันดับของขนาด คือ $n + 1$

ตัวอย่าง

$0.0086 = 8.6\times10^{-3}$ จะเห็นว่า $8.6 > 3.16$ แล้วอันดับของขนาด

คือ $-3+1=-2$

$215 = 2.15\times10^{2}$ จะเห็นว่า $2.15 < 3.16$ แล้วอันดับของขนาด

คือ 2

ตัวอย่าง จงประมาณอย่างคร่าว ๆ ว่า โดยเฉลี่ยแล้วคนหายใจประมาณกี่ครั้งในช่วงชีวิตหนึ่ง กำหนดให้คนหายใจประมาณ 10 ครั้งต่อนาที และอายุเฉลี่ยของคนอยู่ที่ 70 ปี

บทที่ 2 การเคลื่อนที่ใน 1 มิติ (motion in 1D)

2.1 ตำแหน่ง (position) ความเร็ว (velocity) และอัตราเร็ว (speed)

2.1.1 ตำแหน่ง (position) คือบริเวณที่ตั้งของวัตถุหรือสิ่งของ บอกได้ในระบบพิกัดต่าง ๆ

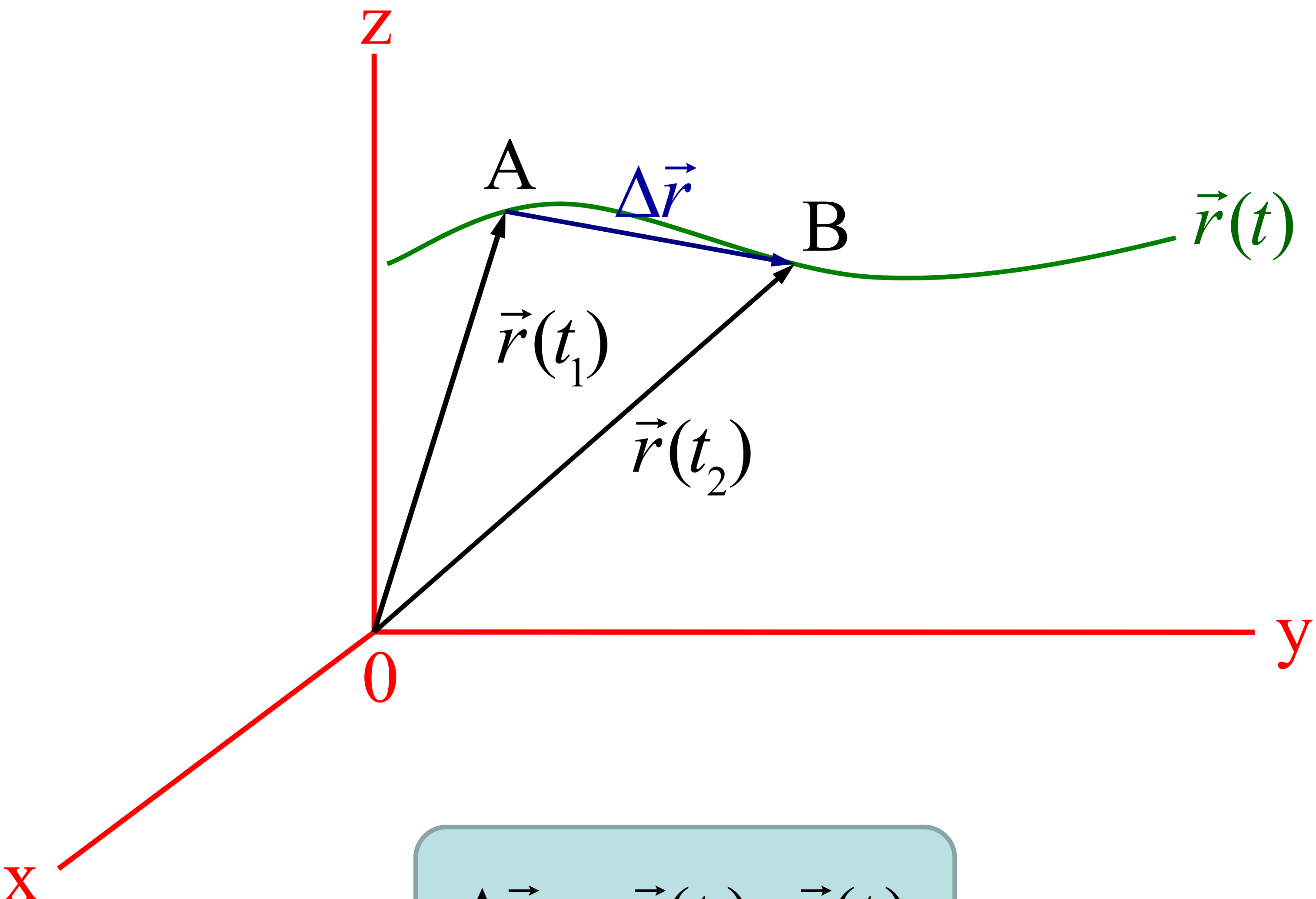
ในกรณีของระบบพิกัดฉาก การบอกตำแหน่งใน 1 มิติ บอกได้ด้วยสัญลักษณ์ $x(t)$ $y(t)$ หรือ $z(t)$

2.1.2 ระยะทาง (distance) คือระยะที่วัตถุเคลื่อนที่โดยไม่คำนึงถึงทิศทางการเคลื่อนที่ มีหน่วยเป็น เมตร (m)

ระยะทางเป็นปริมาณสเกลาร์ (scalar quantities)

2.1.3 การกระจัด (displacement) คือขนาดและทิศทางของวัตถุจากจุดเริ่มต้นถึงจุดสุดท้าย มีหน่วยเป็น เมตร (m)

การกระจัดเป็นปริมาณเวกเตอร์ (vector quantities)



$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$$

ใน 1 มิติ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

Δ [redacted]

บางครั้งเรานิยมละสัญลักษณ์เวกเตอร์ไว้และเขียนเพียง

$$\Delta x = x(t_f) - x(t_i) = x_f - x_i$$

ตัวอย่างที่ 2.1 เดินไปทางขวา 10 m ซ้าย 4 m

ระยะทาง $= 10$ m $+ 4$ m $= 14$ m

การกระจัด $\Delta x = x_f - x_i = 6 - 0 = 6$ m

2.1.4 ความเร็ว (velocity)

ความเร็ว (velocity) $\longrightarrow$ เป็นปริมาณเวกเตอร์ (vector)

อัตราเร็ว (speed) $\longrightarrow$ ขนาดของความเร็วเป็นปริมาณสเกลาร์ (scalar)

อัตราเร็วเฉลี่ย (average speed) $\longrightarrow$ เป็นปริมาณสเกลาร์ (scalar)

$$\text{อัตราเร็วเฉลี่ย} = \frac{\text{ระยะทางทั้งหมด}}{\text{เวลา}}$$

ความเร็ว (velocity) เป็นอัตราส่วนระหว่างการกระจัดต่อเวลา มีหน่วยเป็น

เมตรต่อวินาที (m/s)

ความเร็วเป็นปริมาณเวกเตอร์

2.1.5 ความเร็วหรือความเร็วเฉลี่ย (average velocity)

[redacted] $_{avg}$ Δt

ขนาดของความเร็วเฉลี่ย หรืออัตราเร็ว

$v = v_{avg} = \Big|$ [redacted] $_{avg}$ $\Big|\ \Delta t \Big| =$ [redacted] Δt

2.2 ความเร็วบัดดลหรือความเร็ว ณ ขณะหนึ่ง (instantaneous velocity)

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

$$\therefore \quad \boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}}$$

ใน 1 มิติ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

[redacted] หรือ [redacted] หรือ [redacted]

บางครั้งเรานิยมละสัญลักษณ์เวกเตอร์ไว้และเขียนเพียง

$$v = v_x = \frac{dx}{dt}$$

หรือ

$$v = v_y = \frac{dy}{dt}$$

หรือ

$$v = v_z = \frac{dz}{dt}$$

ในกรณี 2 หรือ 3 มิติ ให้ $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\,\hat{i} + \frac{dy}{dt}\,\hat{j} + \frac{dz}{dt}\,\hat{k}$$

$$\therefore \qquad \vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$$

โดยที่ขนาดของความเร็วหาจากองค์ประกอบของความเร็วตามแนวแกนต่าง ๆ

$$v = |\vec{v}| = \left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)^{1/2}$$

2.2 ความเร่ง (acceleration)

ความเร่ง (acceleration) เป็นอัตราส่วนระหว่างความเร็วต่อเวลา มีหน่วยเป็นเมตรต่อวินาที^{2} (m/s^2)

ความเร่งเป็นปริมาณเวกเตอร์ (vector quantities)

2.2.1 ความเร่งเฉลี่ย (average acceleration)

[redacted] $_{avg}$ [redacted] $\dfrac{\quad}{t_2 - t_1} = \dfrac{\quad}{\Delta t}$

อัตราเร่งเฉลี่ยหรือขนาดของ $\vec{a}_{av}$

$a_{avg} = |$ [redacted] $_{avg}|$ $\left|\dfrac{\quad}{\Delta t}\right| = \dfrac{\quad}{\Delta t}$

2.2.2 ความเร่งบัดดลหรือความเร่ง ณ ขณะหนึ่ง (Instantaneous acceleration)

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}}$$

ขนาดของ $\vec{a}$

$$a = |\vec{a}| = \left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right|$$

ในกรณี 1 มิติ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

[redacted] หรือ [redacted] หรือ [redacted]

บางครั้งเรานิยมละสัญลักษณ์เวกเตอร์ไว้และเขียนเพียง

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \text{ หรือ } a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \text{ หรือ } a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

ในกรณี 2 หรือ 3 มิติ ให้

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$

เมื่อ

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

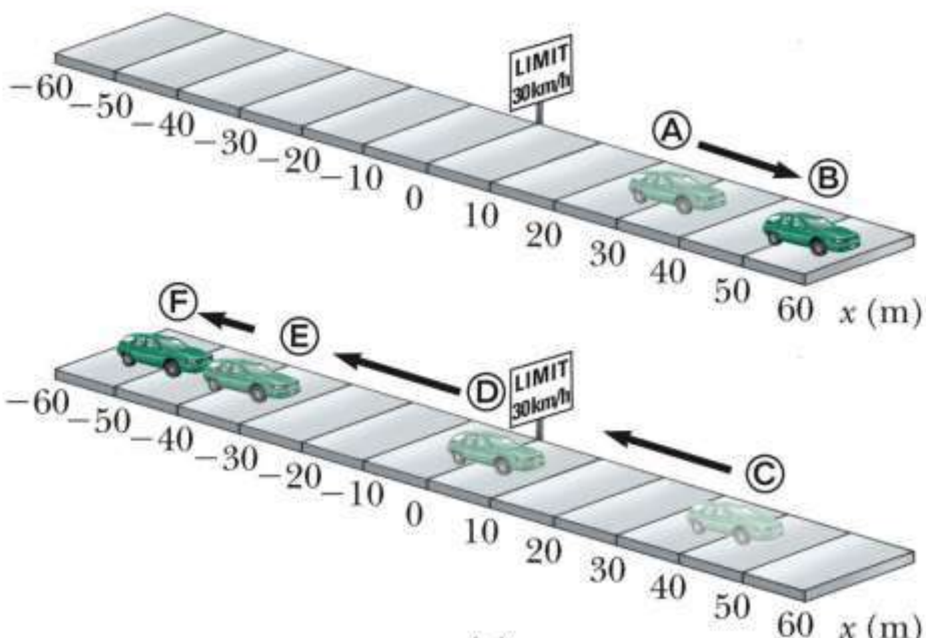
อัตราเร่งบัดดลหรืออัตราเร่ง ณ ขณะหนึ่ง

$$a = |\vec{a}| = \left(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2\right)^{1/2}$$

เครื่องหมาย + หรือ - บอกถึงทิศทาง

ขนาดจะเป็นบวกเสมอ

ตัวอย่างที่ 2.2



(a)

TABLE 2.1

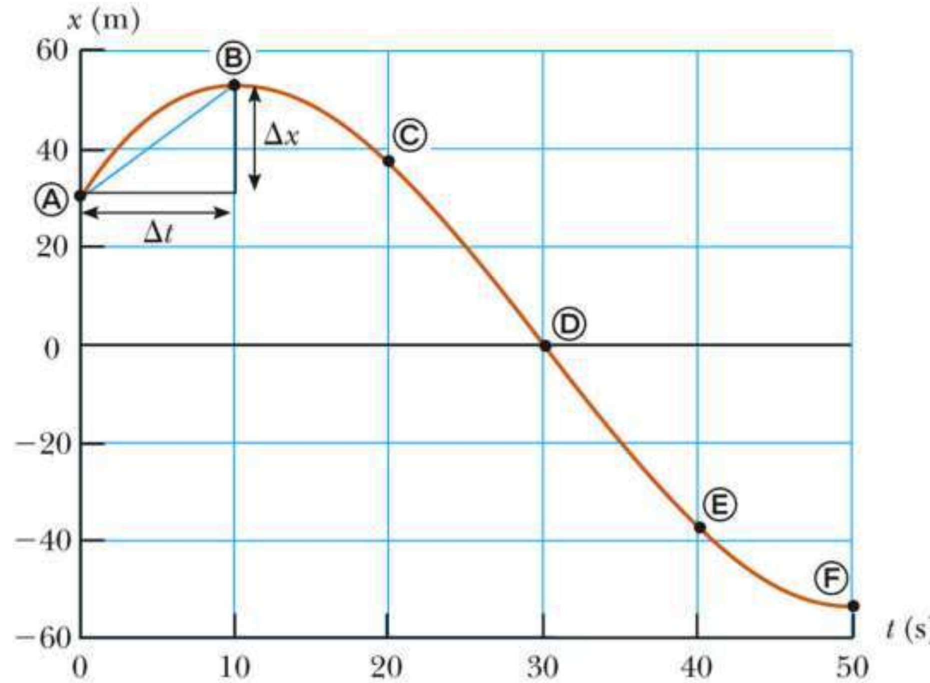
Position of the Car at Various Times

Position	t (s)	x (m)
Ⓐ	0	30
Ⓑ	10	52
Ⓒ	20	38
Ⓓ	30	0
Ⓔ	40	−37
Ⓕ	50	−53

TABLE 2.1

Position of the Car at Various Times

Position	t (s)	x (m)
Ⓐ	0	30
Ⓑ	10	52
Ⓒ	20	38
Ⓓ	30	0
Ⓔ	40	−37
Ⓕ	50	−53



(b)

จาก A $\longrightarrow$ B การกระจัด $\Delta x = ?$

ความเร็วเฉลี่ย $v_{x,avg} = ?$

จาก C $\longrightarrow$ D การกระจัด $\Delta x = ?$

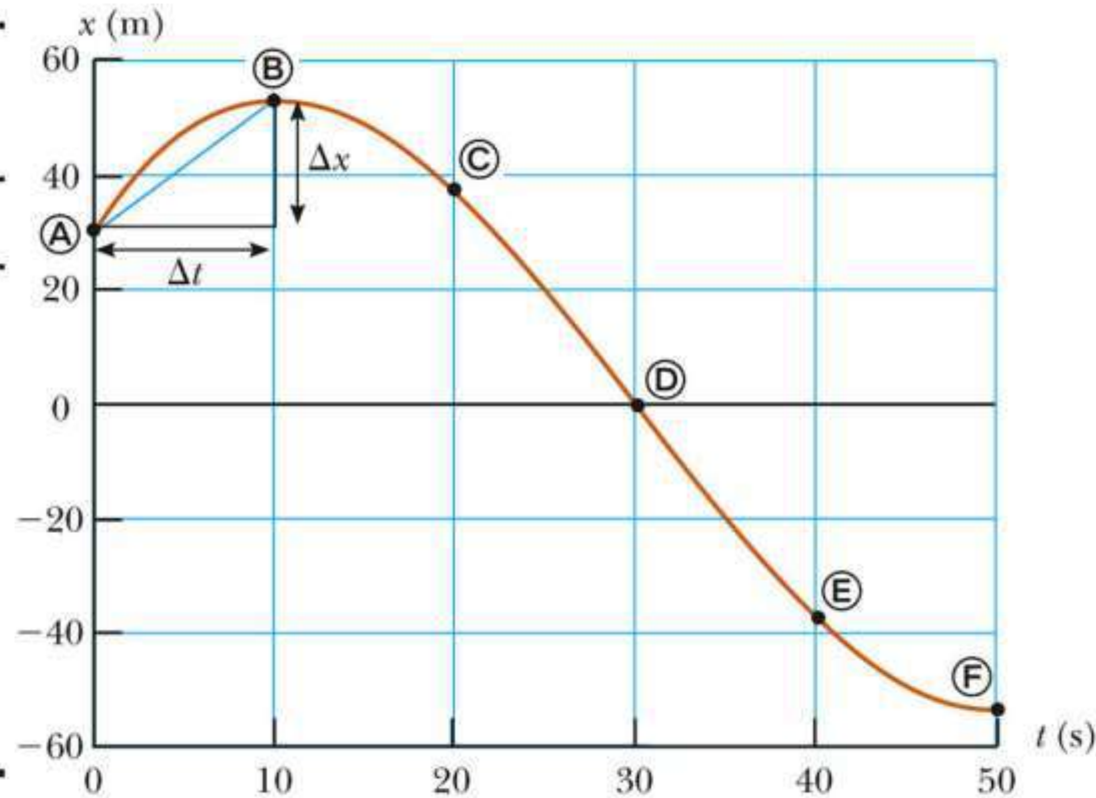
จากข้อมูลในตาราง จงหาการกระจัด ความเร็วเฉลี่ย และอัตราเร็วเฉลี่ยของรถในช่วง

จาก A ไปยัง F

TABLE 2.1

Position of the Car at Various Times

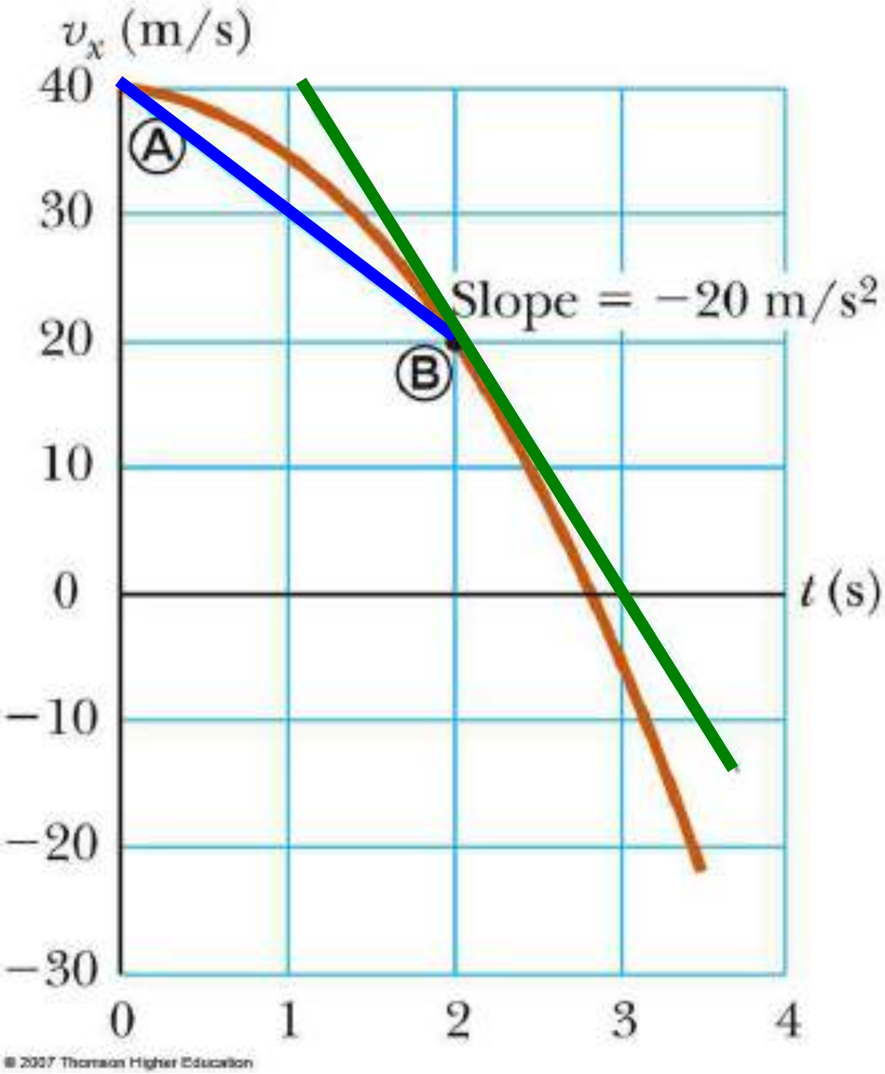
Position	t (s)	x (m)
Ⓐ	0	30
Ⓑ	10	52
Ⓒ	20	38
Ⓓ	30	0
Ⓔ	40	−37
Ⓕ	50	−53



(b)

ตัวอย่างที่ 2.6 อนุภาคเคลื่อนที่ตามแกน x ด้วยความเร็ว v_x ซึ่งขึ้นกับเวลา t s ตามสมการ $v_x(t) = 40 - 5t^2$ m/s จงหาความเร่งในช่วงเวลาจาก $t = 0$ ถึง $t = 2.0$ s และความเร่งที่เวลา $\mathrm{t} = 2.0$ s [-10 m/s^2, -20 m/s^2]

วิเคราะห์กราฟ $v_x(t) = 40 - 5t^2$



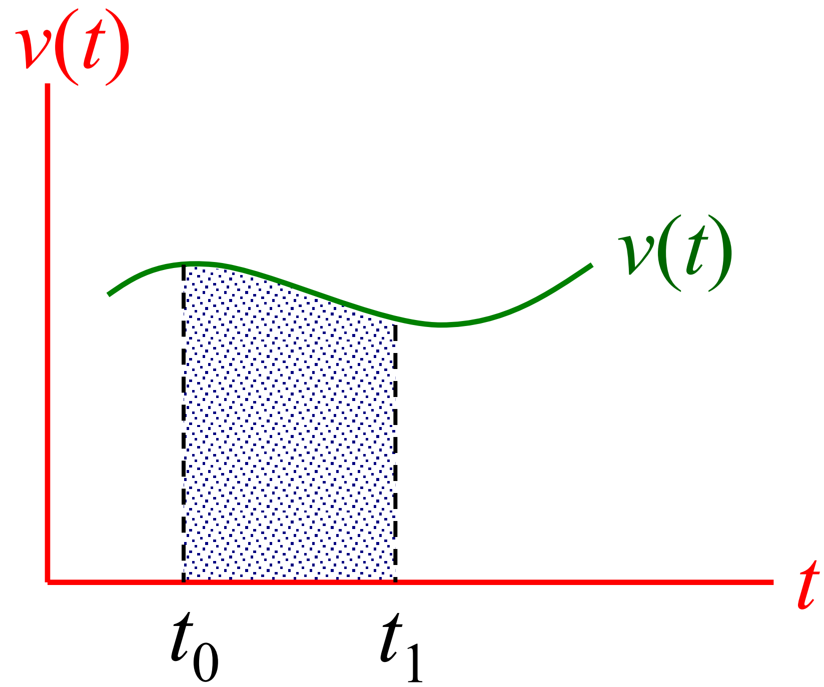
$a_{x,avg}$ ความชันเส้นสีน้ำเงิน

$a_x(t = 2\ \text{s})$ ความชันเส้นสีเขียว

กรณีความเร็วไม่คงที่

พิจารณา $v_x(t) = \dfrac{dx}{dt}$ $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} dx = \int_{t_0}^{t_1} v(t)\,dt$

นั่นคือ $\displaystyle x_1 - x_0 = \int_{t_0}^{t_1} v(t)\,dt$



$x_1 - x_0$ คือพื้นที่ใต้กราฟ

ระหว่าง t_0 และ t_1

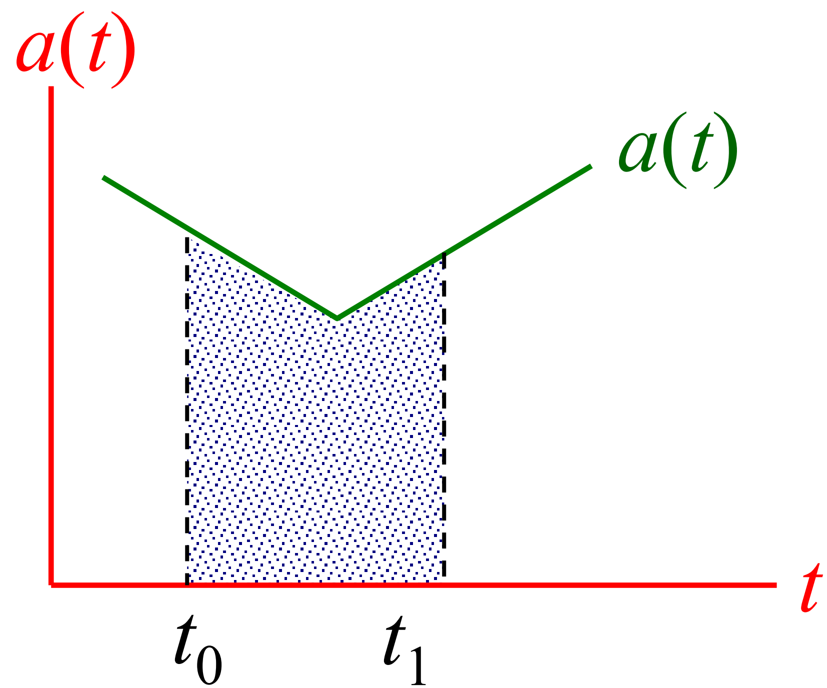
กรณีความเร่งไม่คงที่

พิจารณา $a(t) = \dfrac{dv(t)}{dt}$ $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_{v_0}^{v_1} dv = \int_{t_0}^{t_1} a(t)dt$

นั่นคือ $\displaystyle v_1 - v_0 = \int_{t_0}^{t_1} a(t)dt$

$v_1 - v_0$ คือพื้นที่ใต้กราฟ

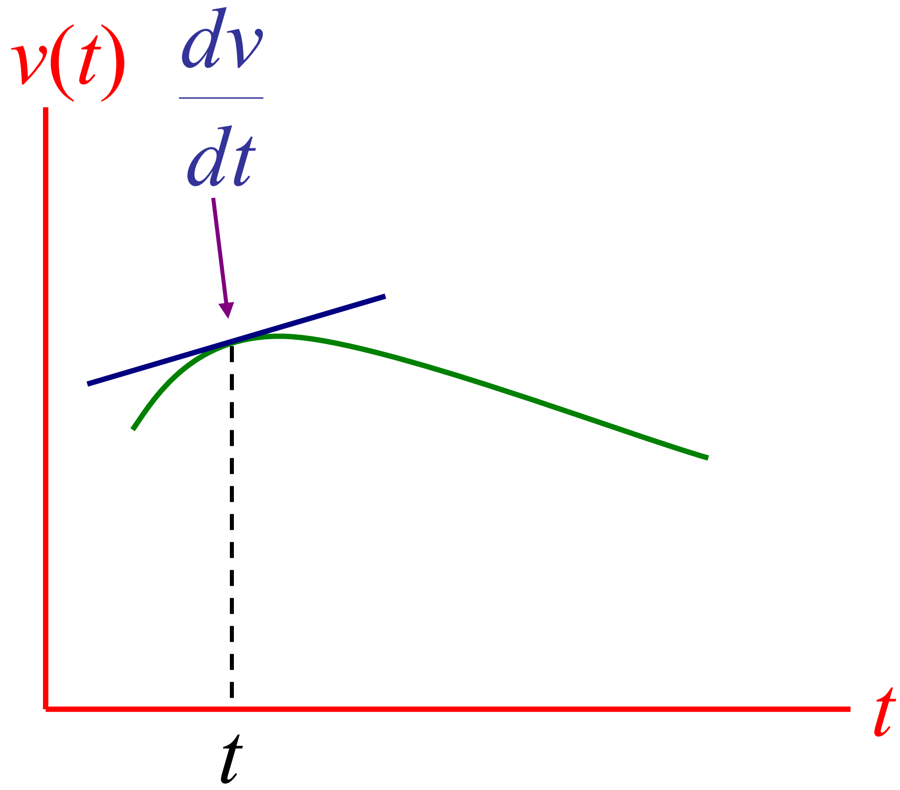
ระหว่าง t_0 และ t_1



ถ้า Δt น้อยมาก ๆ แล้ว

$a(t)$ คือความชันของ

$v(t)$ ที่เวลา t ใด ๆ



กรณีที่เรารู้ตำแหน่งแต่ไม่รู้เวลา

$$a(x) = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt}\left(\frac{dx}{dx}\right) = \frac{dx}{dt}\left(\frac{dv}{dx}\right) = v\frac{dv}{dx}$$

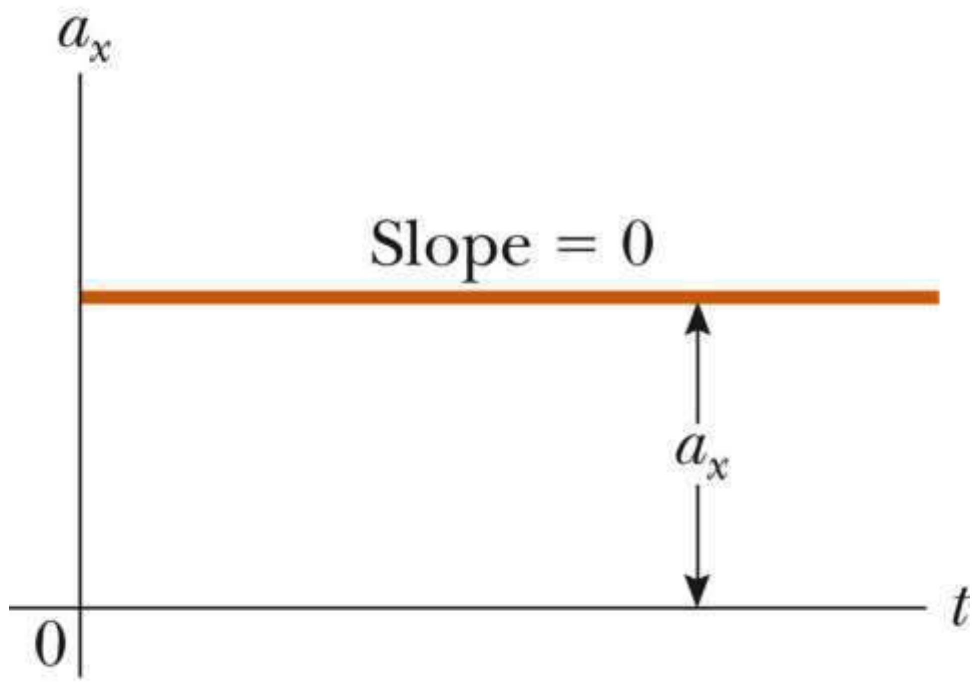
$$\int_{v_0}^{v_1} v\,dv = \int_{x_0}^{x_1} a(x)\,dx$$

นั่นคือ

$$\frac{1}{2}\left(v_1^2 - v_0^2\right) = \int_{x_0}^{x_1} a(x)\,dx$$

2.6 วัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงที่

ความเร่งเป็นค่าคงที่ ไม่ขึ้นกับเวลา $a_x \neq a_x(t)$



$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \text{constant}$$

หรือ $dv_x = a_x dt$

$$\int_{v_{xi}}^{v_{xf}} dv_x = \int_{t_i}^{t_f} a_x(t)dt$$

$\therefore$ $$v_{xf} - v_{xi} = a_x(t_f - t_i)$$

$$a_x = a_{x,avg} = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t_f - t_i}$$

Uniformly acceleration motion (special case: $a =$ constant)

สมมติให้ $v_{xi} = u$ ที่เวลา $t_i = 0$

$v_{xf} = v$ ที่เวลา $t_{f} = t$ ใด ๆ

ดังนั้น

$$a_x = a = \frac{v-u}{t-0}$$

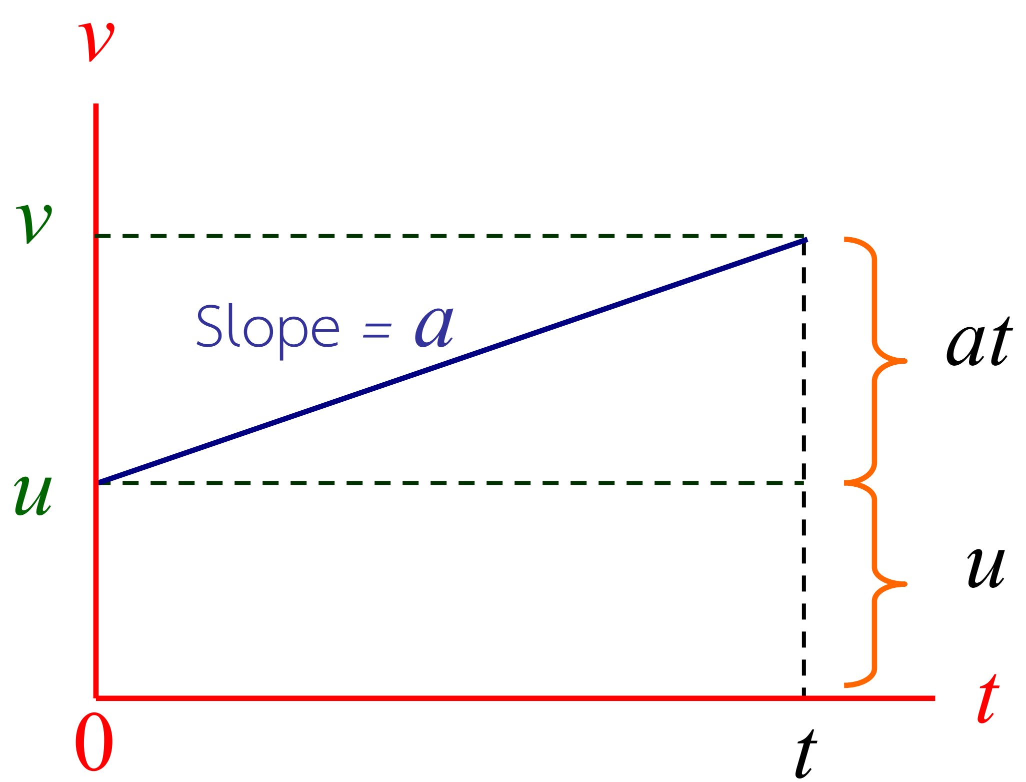
$$v - u = a_x(t - 0)$$

$$\therefore \quad v = v(t) = u + at \qquad \ldots(1)$$

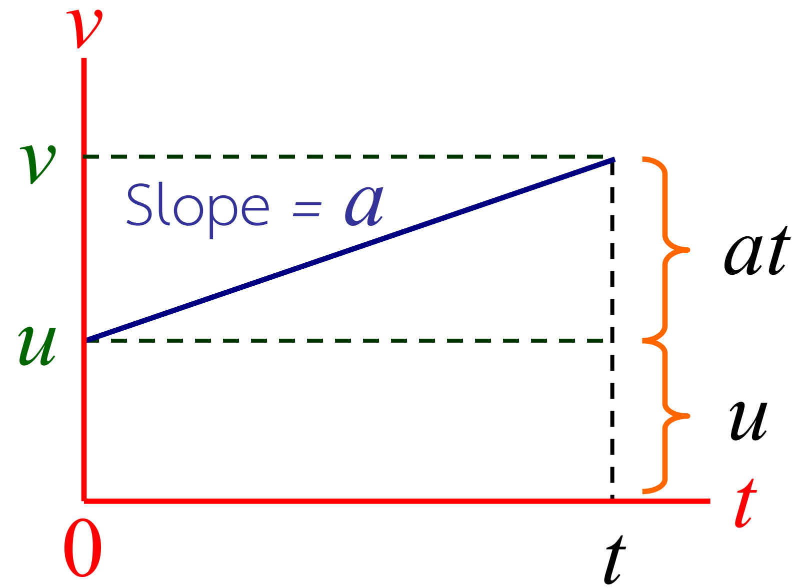
กราฟระหว่าง v กับ t เป็นกราฟเส้นตรง ?

จากสมการที่ (1) $$v = v(t) = u + at$$

กราฟระหว่าง v กับ t จะได้ว่า



จากกราฟ $v_{x,avg} = \dfrac{u + v}{2}$



จากนิยาม

$$v_{x,avg} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{x_f - x_i}{t}$$

$\therefore$

$$x_f = x(t) = x_i + \frac{1}{2}(u+v)t \qquad \text{...(2)}$$

กราฟระหว่าง x กับ t เป็นกราฟเส้นตรง ?

แทนสมการ (1), $v = u + at$ ในสมการ (2)

$$x_f = x(t) = x_i + \frac{1}{2}(u+v)t$$

$$x(t) = x_i + \frac{1}{2}\left[u+(u+at)\right]t$$

$$x(t) = x_i + ut + \frac{1}{2}at^2 \quad \text{...(3)}$$

โดยการจัดรูปจะได้ $$v^2 = u^2 + 2a(x_f - x_i)$$

กรณีการเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงที่

พิสูจน์ $x = vt - \frac{1}{2}at^2$

จาก $v = u + at$ และ $x = ut + \frac{1}{2}at^2$

$\therefore$ $u = v - at$

และ $x = (v - at)t + \frac{1}{2}at^2 = vt - at^2 + \frac{1}{2}at^2$

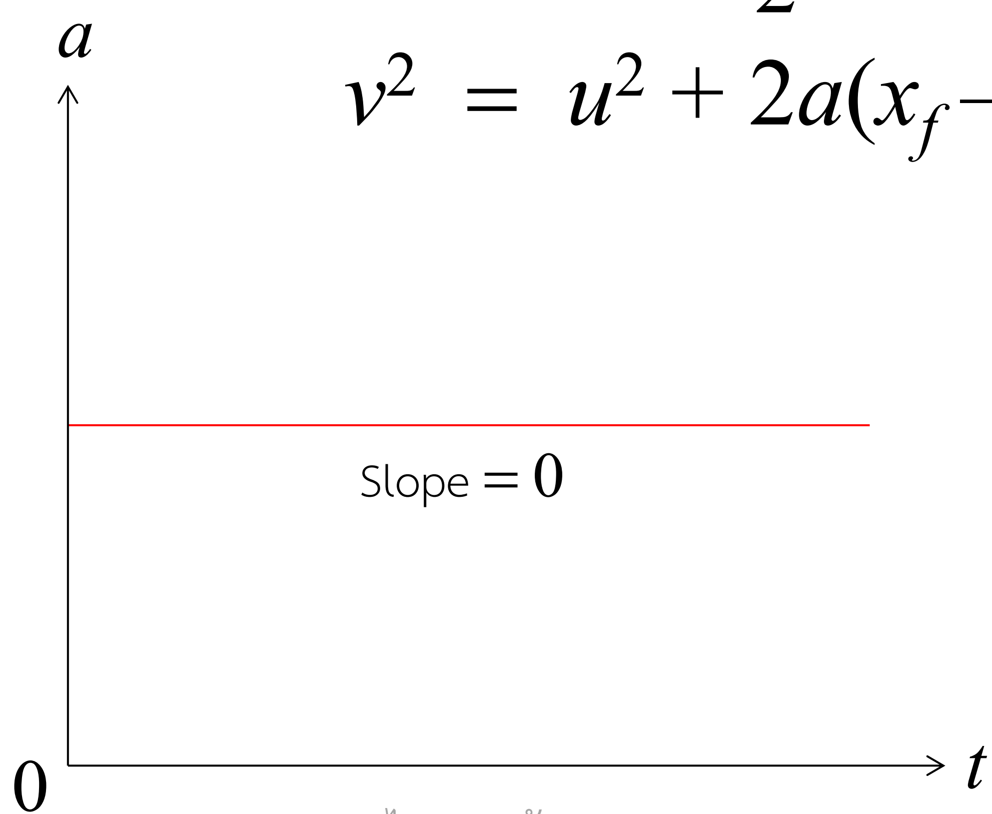
$$\boxed{x = vt - \frac{1}{2}at^2} \qquad \ldots(6)$$

สรุปกราฟ กรณีการเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงที่

กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอัตราเร่งกับเวลา กรณีการเคลื่อนที่ของวัตถุด้วยอัตราเร่งคงที่

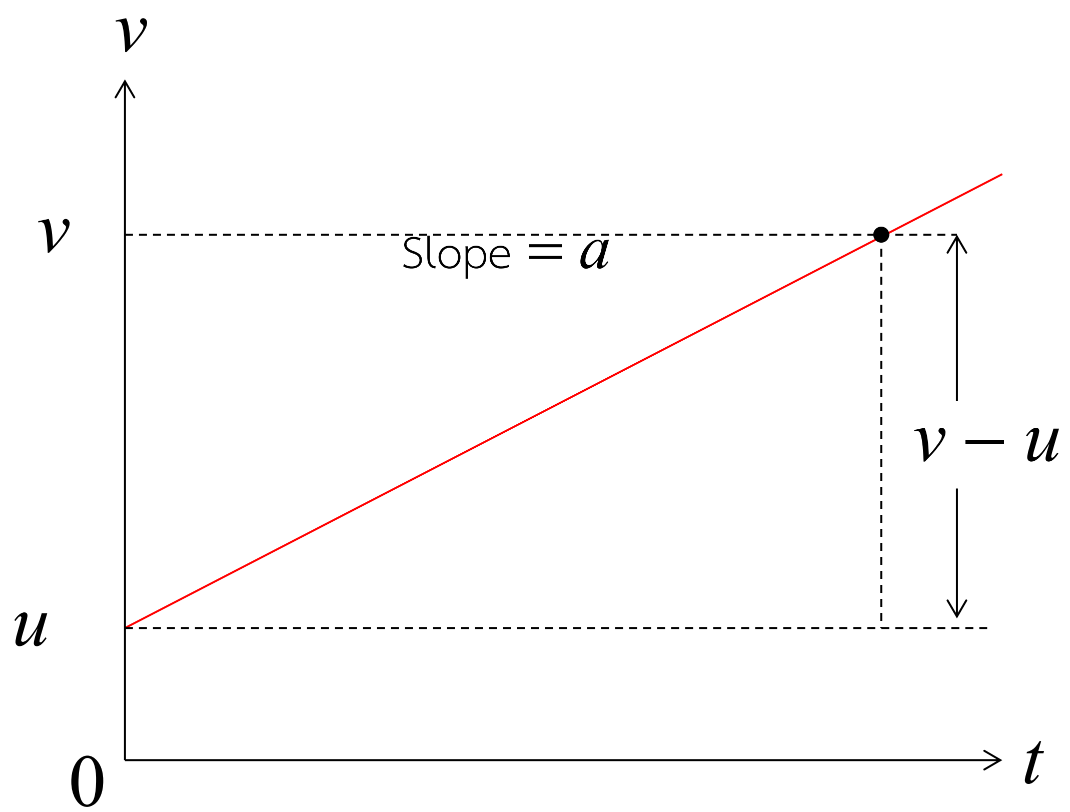
$$x(t) = x_i + \frac{1}{2}(u+v)t$$

$$v^2 = u^2 + 2a(x_f - x_i)$$



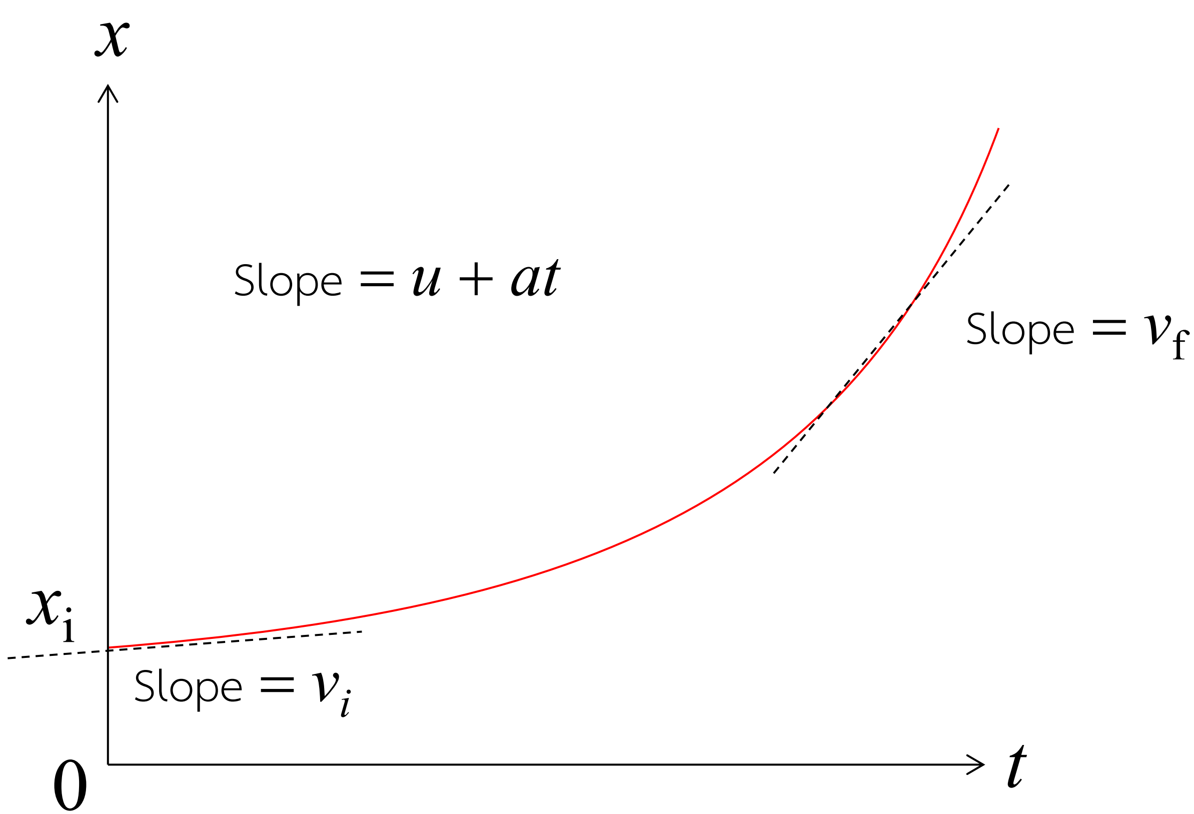
กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอัตราเร็วกับเวลา กรณีการเคลื่อนที่ของวัตถุด้วยอัตราเร่งคงที่

$$v(t) = u + at$$

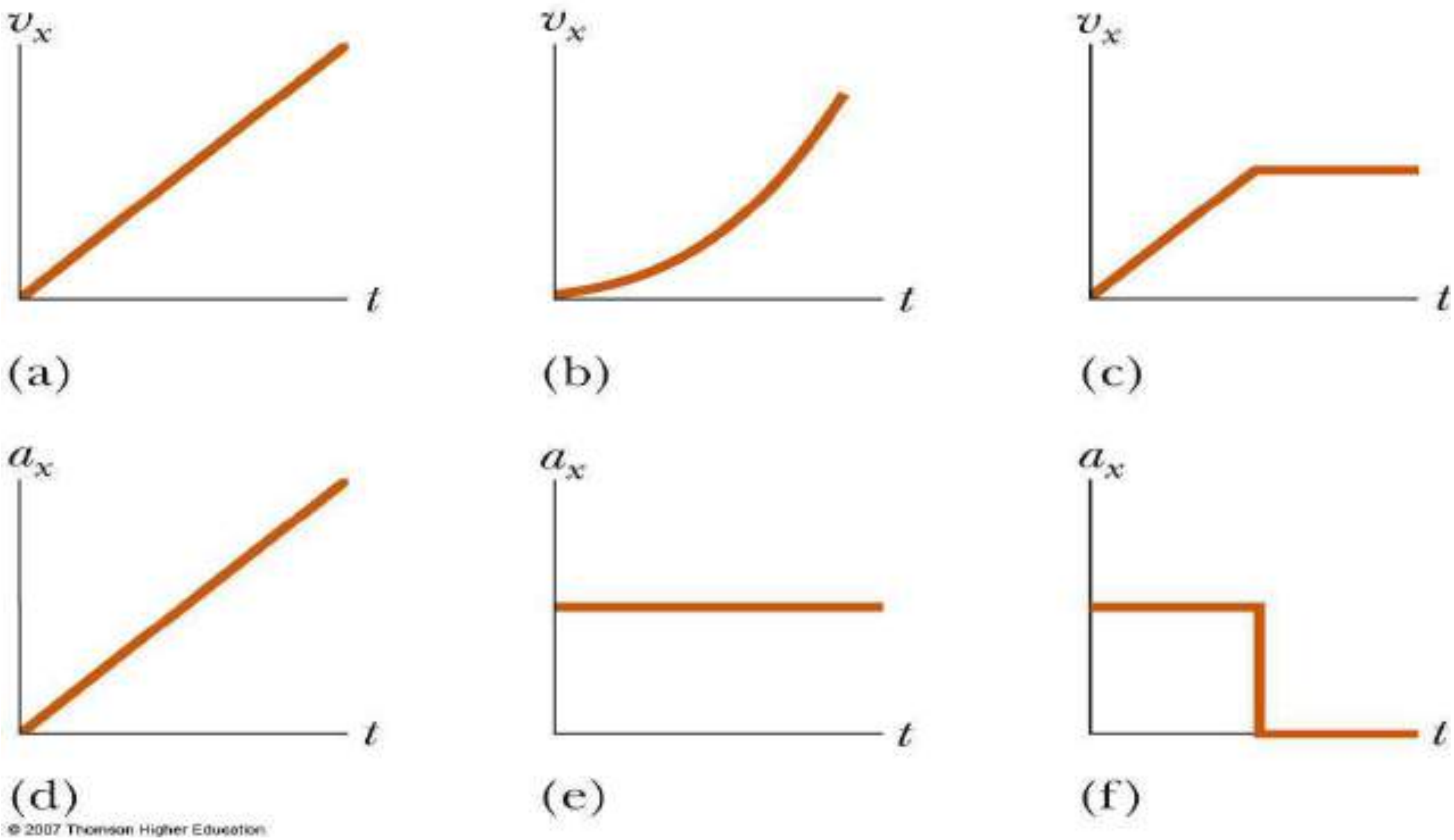


กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งกับเวลา กรณีการเคลื่อนที่ของวัตถุด้วยอัตราเร่งคงที่

$$x(t) = x_i + ut + \frac{1}{2}at^2$$



ตัวอย่างที่ 2.6 จงจับคู่กราฟ $a_x - t$ แถวล่าง ให้สอดคล้องกับกราฟ $v_x - t$



ตัวอย่างที่ 2 รถยนต์คันหนึ่งแล่นออกจากจุด ๆ หนึ่งด้วยอัตราเร็วต้นค่าหนึ่ง และมีอัตราเร่ง 2 m/s^2 เมื่อเวลาผ่านไป 10 s รถยนต์คันนั้นมีอัตราเร็ว 40 m/s รถยนต์คันดังกล่าวจะอยู่ห่างจากจุดที่รถแล่นออกมาครั้งแรกเป็นระยะทางเท่าใด

[300 m]

ตัวอย่างที่ 3 วัตถุหนึ่งเดิมอยู่นิ่ง แล้วทำให้เกิดอัตราเร่ง $3t$ m/s^2 เมื่อ t คือเวลา มีหน่วยเป็นวินาที จงหาอัตราเร่ง อัตราเร็ว และการกระจัด ภายหลังเมื่อเคลื่อนที่ได้นาน 5 s

[15 m/s^2, 37.5 m/s, 62.5 m]

ตัวอย่างที่ 2.4 อัตราเร่งของวัตถุซึ่งเคลื่อนที่ตามแกน x คือ $a(x) = 4x - 2$ m/s^2 เมื่อ x มีหน่วยเป็นเมตร กำหนดให้ $u = 10$ m/s เมื่อ $x_0 = 0$ จงหาอัตราเร็ว ณ ตำแหน่งใด ๆ

[$v(x) = 2\sqrt{x^2 - x + 25}$ m/s]

ตัวอย่างที่ 2.5 รถยนต์คันหนึ่งแล่นด้วยอัตราเร่งคงที่ผ่านจุด A และ B เมื่อผ่าน B รถยนต์คันนี้มีอัตราเร็ว 45 m/s ถ้าจุด A และ B อยู่ห่างกัน 180 m จงหา

1) อัตราเร็วขณะผ่านจุด A [15 m/s]

2) อัตราเร่งของรถยนต์ [5 m/s^2]

3) ระยะทางจากจุดเริ่มต้นไปยังจุด A [22.5 m]

เมื่อรถยนต์คันนี้วิ่งจาก A ไป B เป็นเวลา 6 วินาที

ตัวอย่างที่ 6 พิจารณาวัตถุที่เคลื่อนที่ตามแกน $\hat{y}$ โดยกำหนดให้ $a(t) = 5\sin\omega t$, $\omega = 0.7$ เรเดียนต่อวินาที และที่เวลา $t = 0$ วินาที วัตถุอยู่ที่ตำแหน่ง $y_0 = 2$ เมตร ซึ่งมีอัตราเร็ว $v_0 = -5$ เมตรต่อวินาที

1) $v(t)$ [$\frac{5}{7}(3-10\cos 0.7t)$ m/s]

2) $y(t)$ [$2+\frac{5}{7}(3t-\frac{100}{7}\cos 0.7t)$ m]

3) หาการกระจัดของวัตถุ Δy ระหว่าง $t = 0$ วินาที ถึง $t = 4$ วินาที

[5.15 m]

ตัวอย่างที่ 6 พิจารณาวัตถุที่เคลื่อนที่ตามแกน $\hat{y}$ โดยกำหนดให้ $a(t) = 5\sin\omega t$, $\omega = 0.7$ เรเดียน/วินาที และที่เวลา $t = 0$ วินาที วัตถุอยู่ที่ตำแหน่ง $y_0 = 2$ เมตร ซึ่งมีอัตราเร็ว $v_0 = -5$ เมตร/วินาที

4) หาระยะทางทั้งหมด s ในช่วงเวลา $t = 0$ วินาที ถึง $t = 4$ วินาที

[16.879 m]

ตัวอย่างที่ 7 พิจารณาวัตถุที่ผูกติดปลายสปริง และมีค่า $a(x) = -4x$ เมตร/วินาที^{2} โดยเมื่อเริ่มต้น ขณะที่วัตถุเคลื่อนที่ผ่านจุดสมดุลไปทางบวก วัตถุมีอัตราเร็ว $v_0 = 2$ เมตร/วินาที จงหา

1) $v(x)$ [$2\sqrt{1-x^2}$ m/s]

2) ที่เวลา $t = 1$ วินาที วัตถุมาอยู่ที่จุดสมดุล จงหา $x(t)$, $v(t)$ และ $a(t)$

[$x(t) = \sin(2t-2)$ m, $v(t) = 2\cos(2t-2)$ m/s, $a(t) = -4\sin(2t-2)$ m/s^2]

ตัวอย่างที่ 12 นักกระโดดไกลคนหนึ่ง ถีบตัวจากพื้นด้วยความเร็ว 11 เมตร/วินาที ทำมุม 20° กับพื้น จงหา

1) เขากระโดดได้ไกลเท่าไร [7.94 m]

2) เขากระโดดได้สูงสุดเท่าไร [0.722 m]

2.4 วัตถุตกอย่างเสรี (Freely Falling Objects)

วัตถุตกอย่างเสรี ภายใต้แรงโน้มถ่วง (สถานการณ์อุดมคติ ไม่มีแรงต้านอากาศ)

ความเร่งมีทิศชี้ลง ขนาดเท่ากับ g

ค่า g ขึ้นกับระดับความสูง ความสูงเพิ่ม g เพิ่ม หรือ ลด ?

ตัวอย่าง 2.10 ที่เวลา $t = 0$ วินาที โยนก้อนหินขึ้นตรง ๆ จากขอบดาดฟ้าของตึกสูง 50.0 เมตร ด้วยอัตราเร็ว 20.0 เมตร/วินาที จงหา

1. เวลาที่ก้อนหินขึ้นถึงจุดสูงสุด
2. ระยะสูงสุดจากจุดโยน
3. ความเร็วของก้อนหินเมื่อตกกลับมาถึงจุดโยน
4. ตำแหน่งและความเร็วของก้อนหินที่เวลา $t = 5.00$ วินาที

บทที่ 3 เวกเตอร์ (Vectors)

ในการศึกษาวิชาฟิสิกส์ เรามักจะพบปริมาณทางฟิสิกส์ เช่น การกระจัด ความเร็ว อัตราเร็ว ความเร่ง มวล น้ำหนัก อุณหภูมิ พลังงาน และปริมาณอื่น ๆ อีกมาก

ปริมาณบางอย่างบอกเพียงแค่ขนาดให้รู้ก็สามารถได้ความหมายสมบูรณ์ แต่ปริมาณบางอย่างบอกเพียงแต่ขนาดอย่างเดียวไม่ได้ จะต้องบอกทิศทางด้วยจึงจะได้ความหมายสมบูรณ์

ปริมาณสเกลาร์ (scalar quantities)

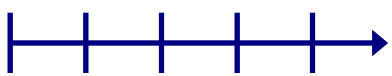
ปริมาณสเกลาร์ (scalar quantities) คือปริมาณที่มีแต่ขนาดอย่างเดียวไม่มีทิศทาง เช่น ความยาว อัตราเร็ว ปริมาตร มวล อุณหภูมิ พลังงาน ความร้อนจำเพาะ ความหนาแน่น เป็นต้น

ปริมาณเวกเตอร์ (vector quantities)

ปริมาณเวกเตอร์ (vector quantities) คือปริมาณที่มีขนาดและทิศทาง เช่น แรง ความเร็ว ความเร่ง น้ำหนัก สนามไฟฟ้า สนามแม่เหล็ก เป็นต้น

เวกเตอร์ แทนได้ด้วยเส้นตรงที่มีทิศทางโดยใช้ความยาวของเส้นตรงแทนขนาด และใช้หัวลูกศร เพื่อบอกทิศทาง

 เวกเตอร์ขนาด 1 หน่วย

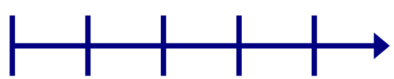
 เวกเตอร์ขนาด 5 หน่วย

สัญลักษณ์ของเวกเตอร์

สัญลักษณ์ของเวกเตอร์มีหลายแบบ เช่น $\vec{\mathrm{A}}$, $\overline{\mathrm{A}}$, $\mathbf{A}$, [redacted] หรือ $\underset{\sim}{\mathrm{A}}$

→ เวกเตอร์ขนาด 1 หน่วย

$\hat{\mathrm{A}}$

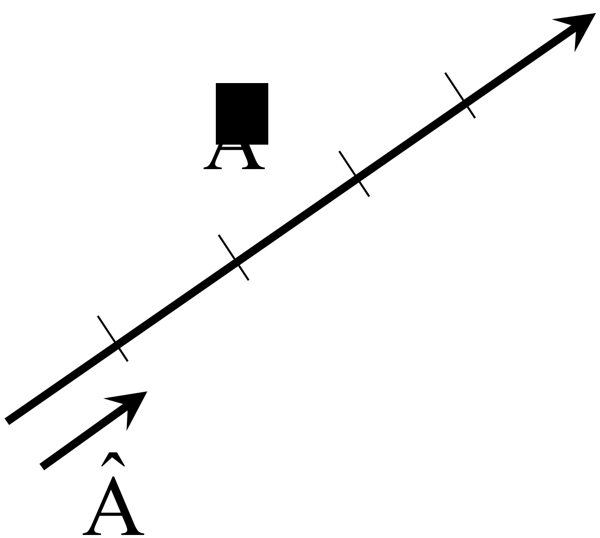


เวกเตอร์ขนาด 5 หน่วย

$\vec{\mathrm{A}}$

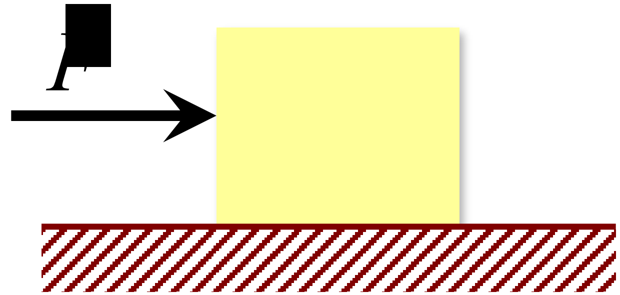
เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (unit vector)

เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วย และชี้ทิศเดียวกับเวกเตอร์ใด ๆ



$\hat{A} =$ [redacted]

[redacted]



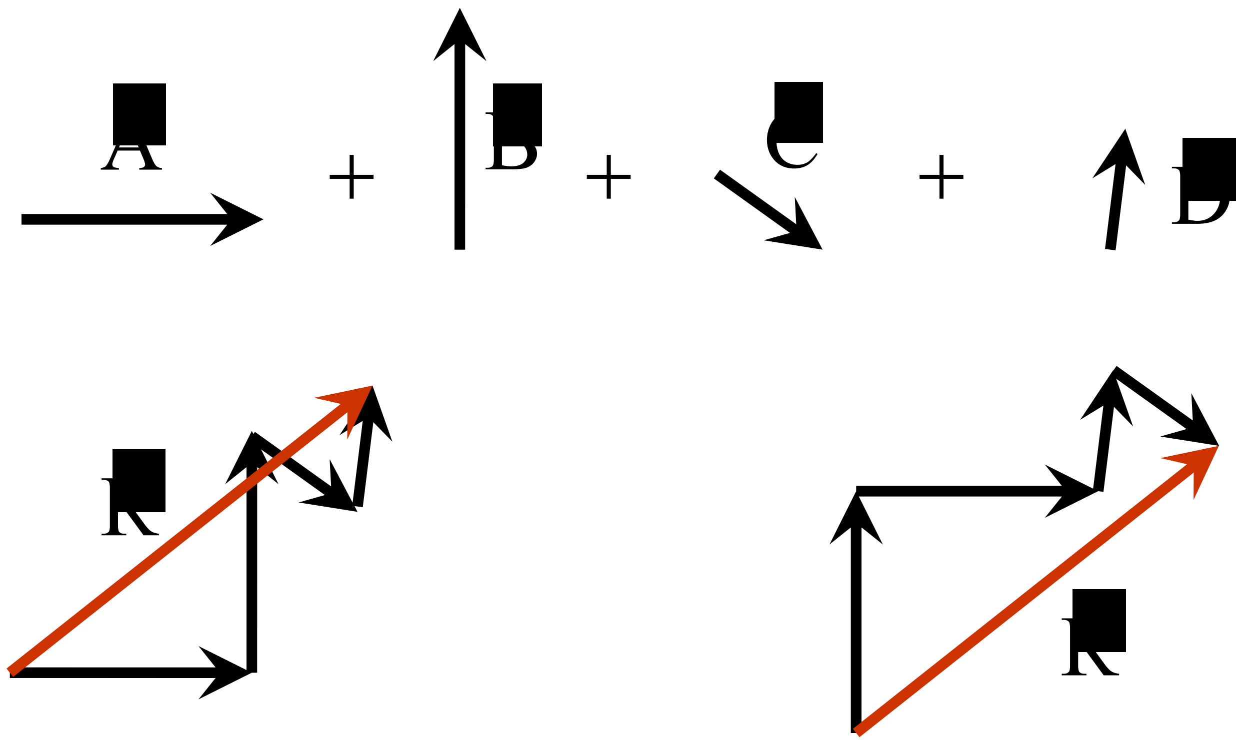
ขนาดของ [redacted]

$$F = 100 \text{ N}$$

[redacted] N

สมบัติของเวกเตอร์ (properties of vectors)

1. การบวกเวกเตอร์ (adding vectors)

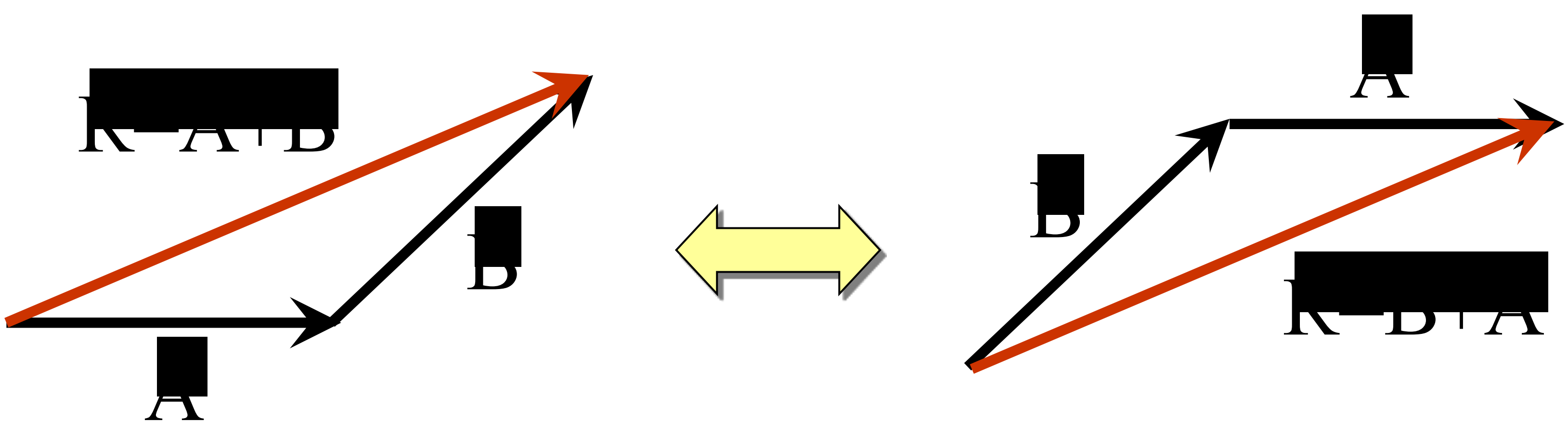


[redacted]

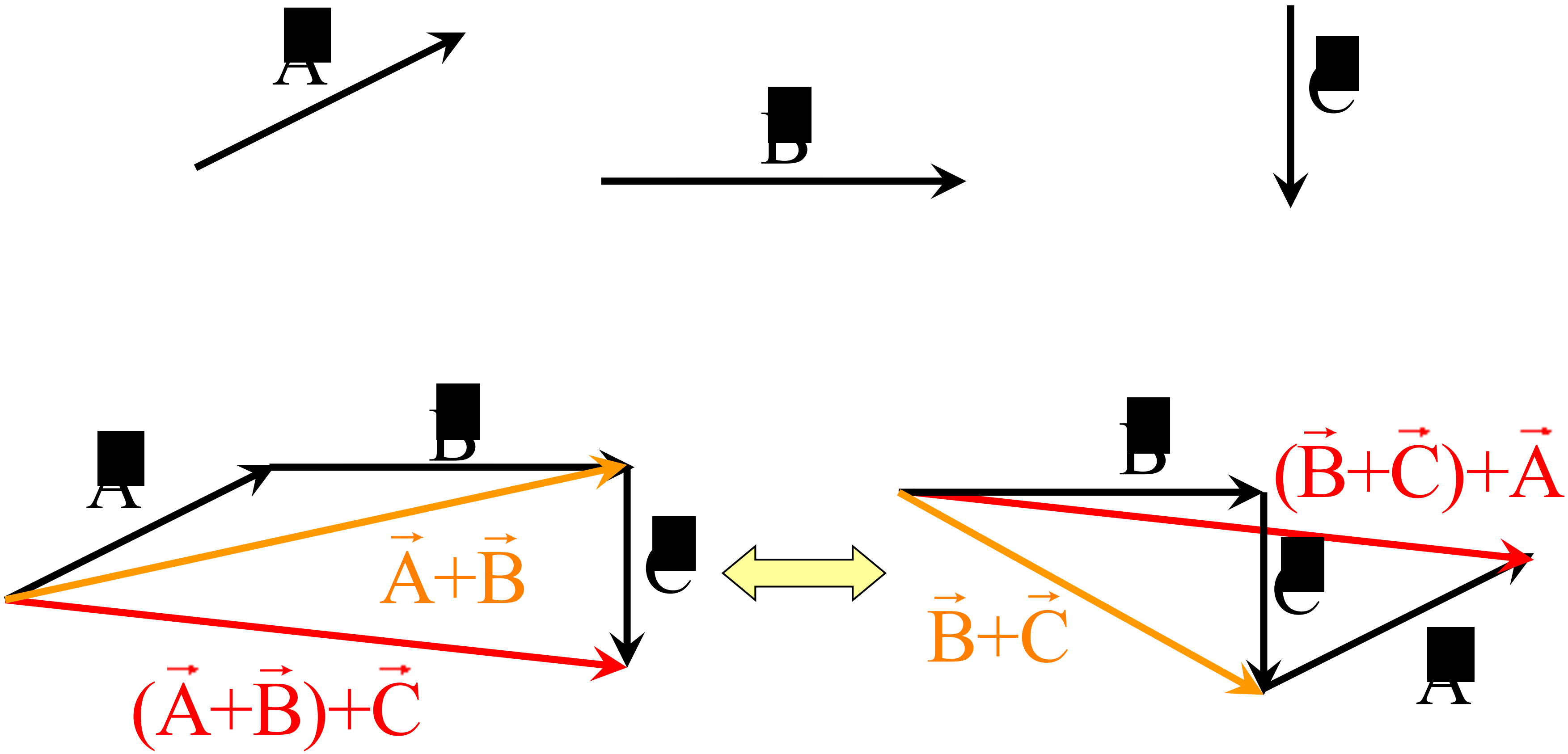
กฎการบวกเวกเตอร์

1. กฎการสลับที่

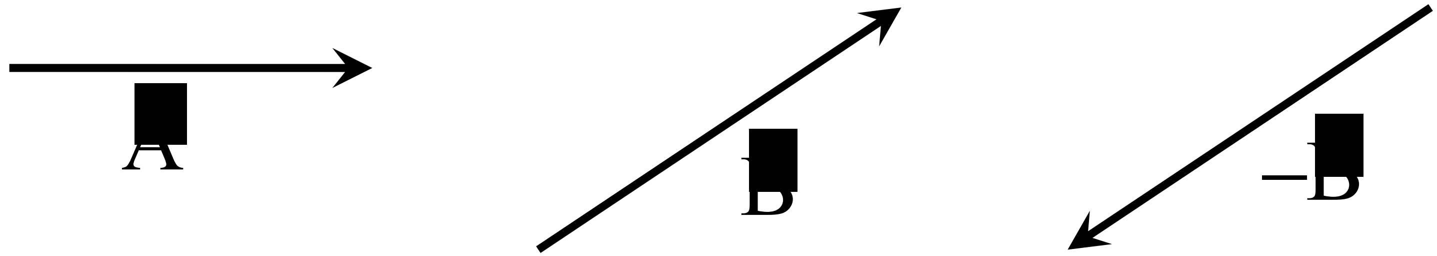
[redacted]



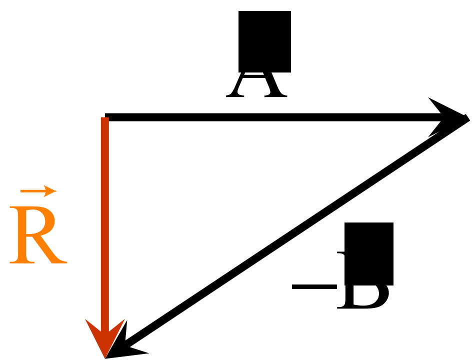
2. กฎการเปลี่ยนกลุ่ม



2. การลบเวกเตอร์

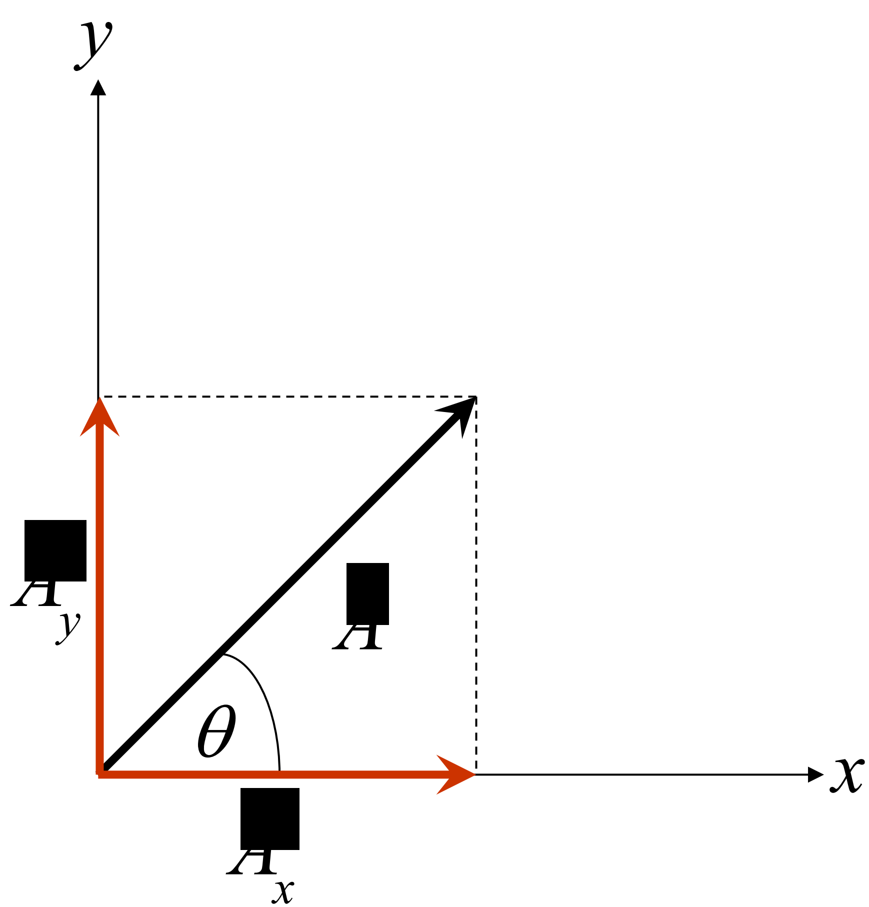


[redacted]



[redacted]

องค์ประกอบของเวกเตอร์ (components of a vector)

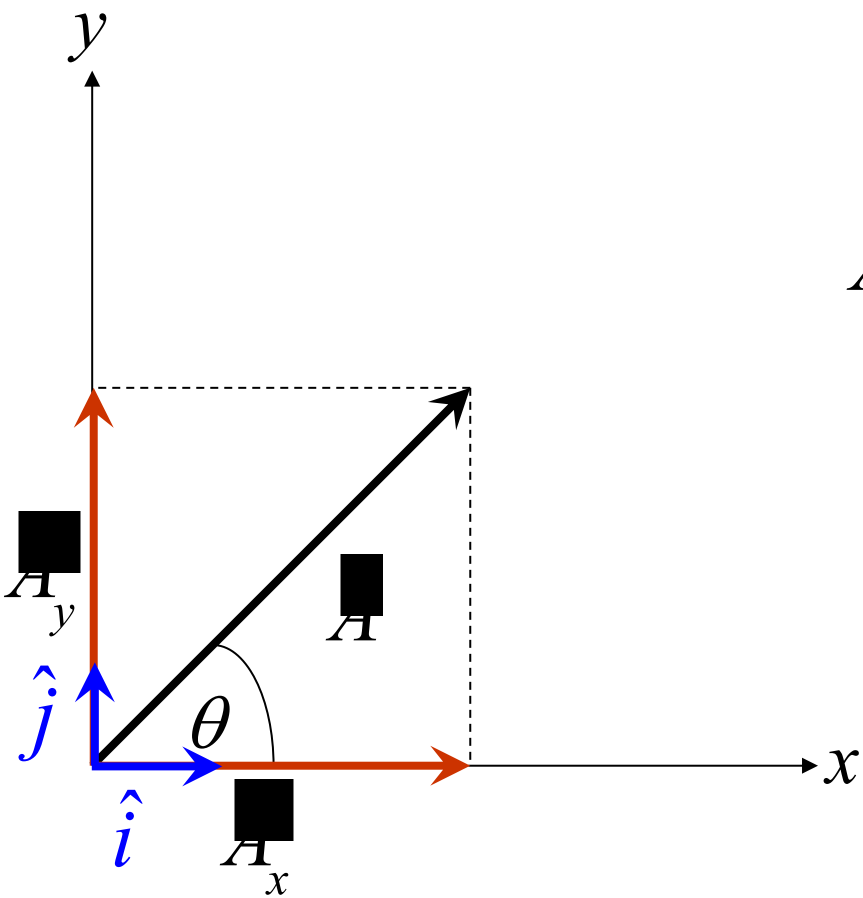


[redacted]

$$\boxed{\begin{aligned} A_x &= A\cos\theta \\ A_y &= A\sin\theta \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} A_x^2 + A_y^2 &= A^2\cos^2\theta + A^2\sin^2\theta \\ &= A^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \end{aligned}$$

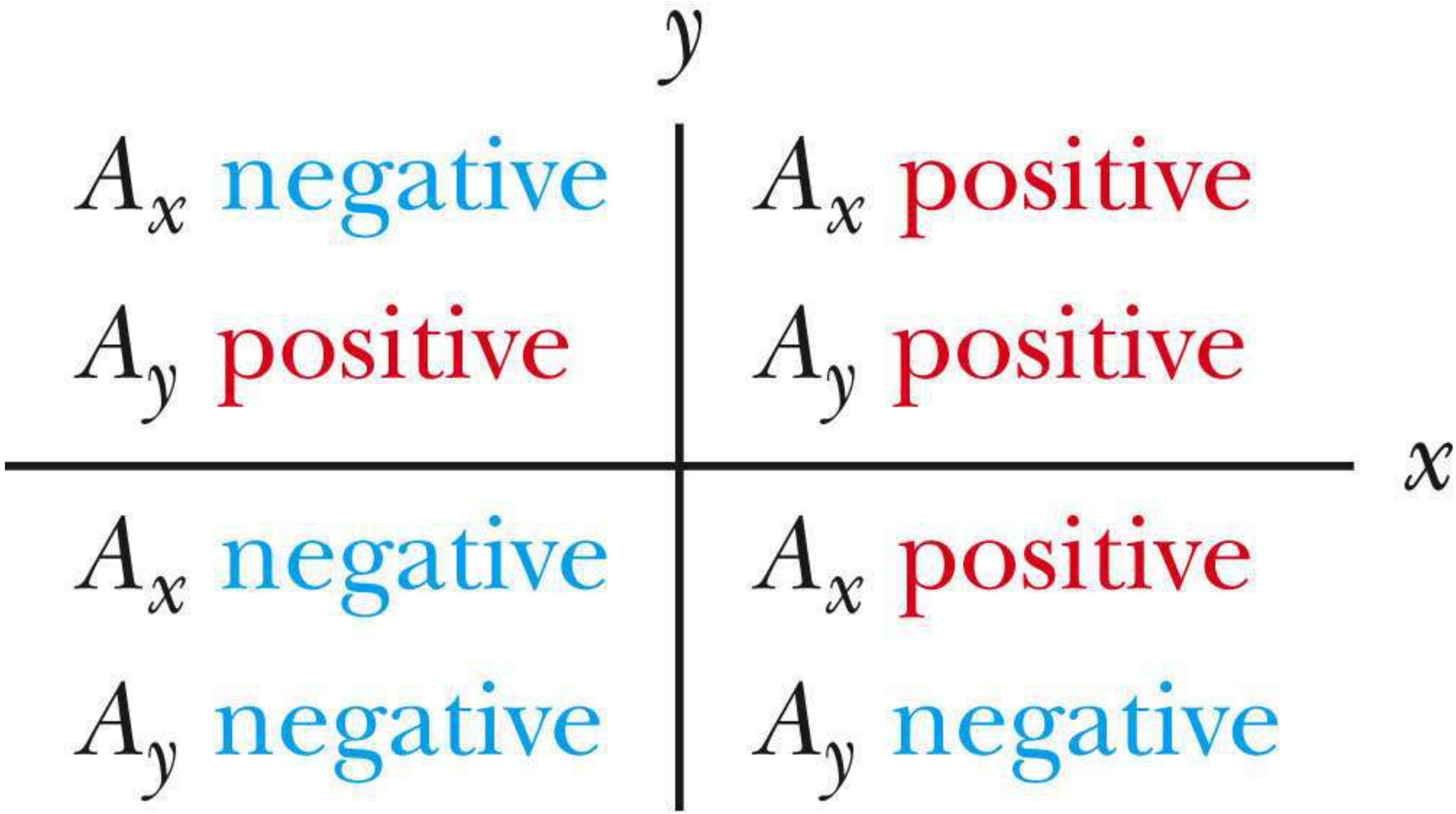
$$\boxed{A^2 = A_x^2 + A_y^2}$$



[redacted] $+A_y\,\hat{j}$

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2$$

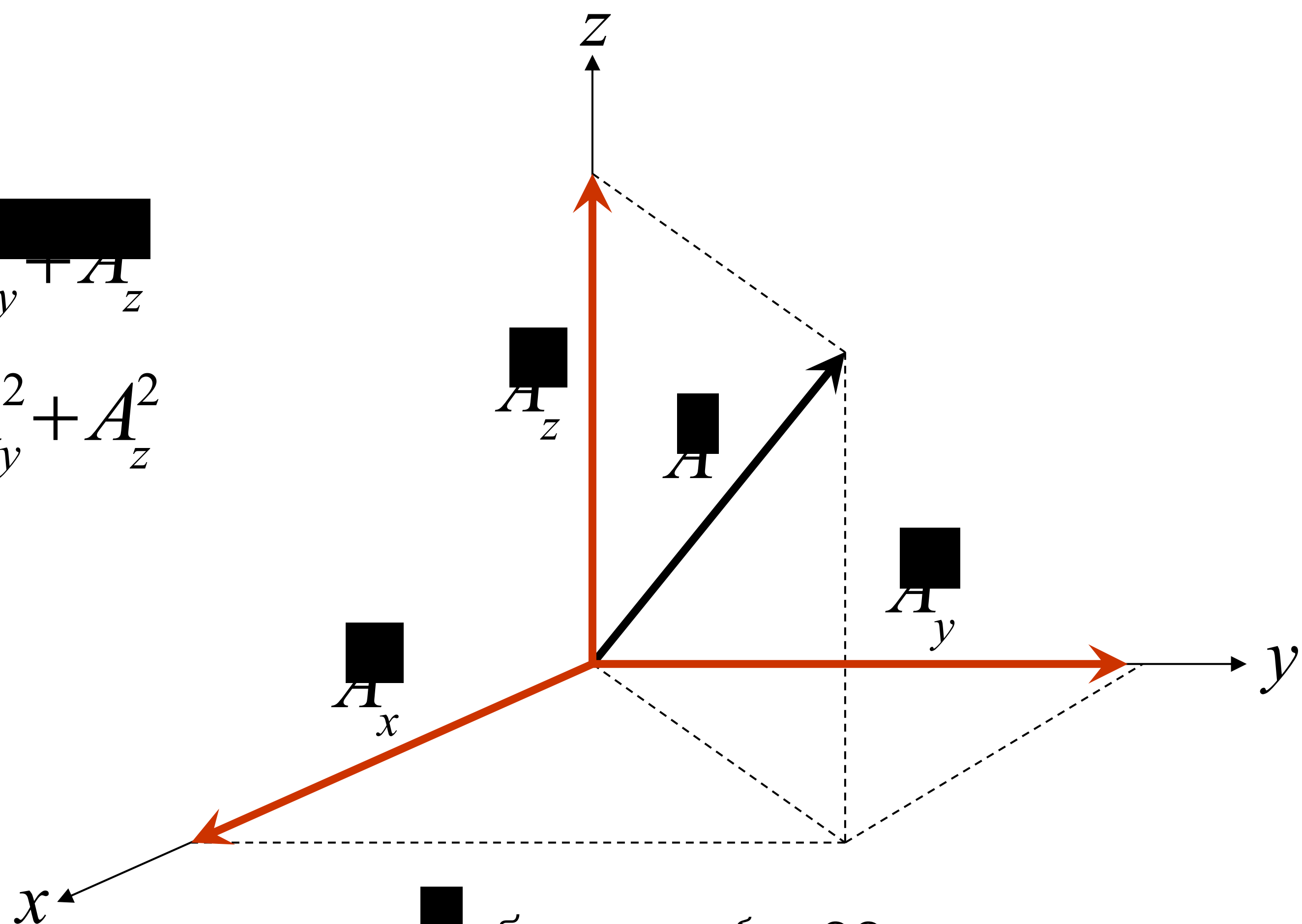
[redacted] เป็นเวกเตอร์สองมิติ


y
x
A_x negative
A_y positive
A_x positive
A_y positive
A_x negative
A_y negative
A_x positive
A_y negative

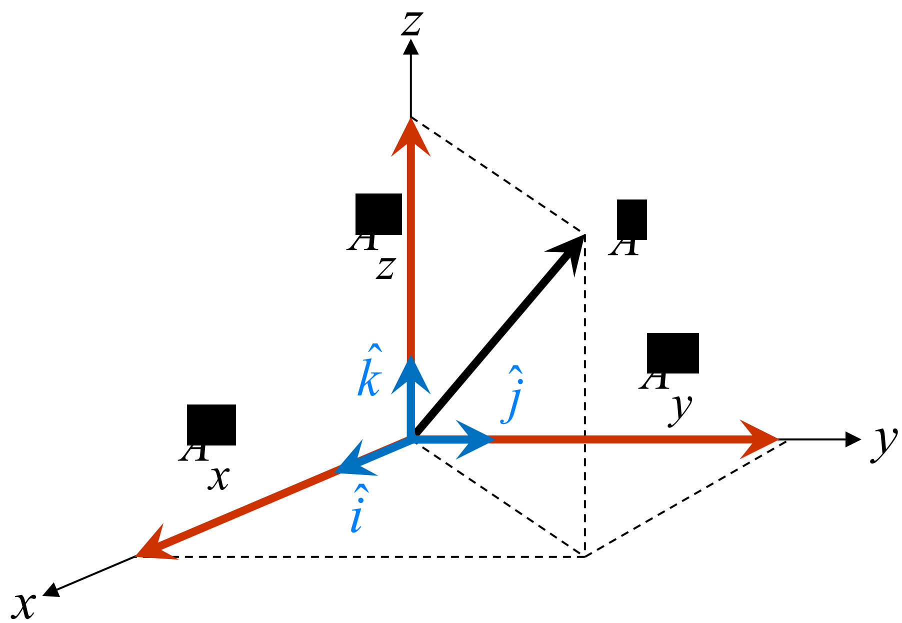
องค์ประกอบของเวกเตอร์ใน 3 มิติ

[redacted]

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$



[redacted] เป็นเวกเตอร์ 3 มิติ



[redacted] $A_y\hat{j}+A_z\hat{k}$

[redacted] $s\alpha)\hat{i}+(A\cos\beta)\hat{j}+(A\cos\gamma)\hat{k}$

การบวกลบเวกเตอร์ใน 3 มิติ

กำหนดให้

$$[redacted] + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

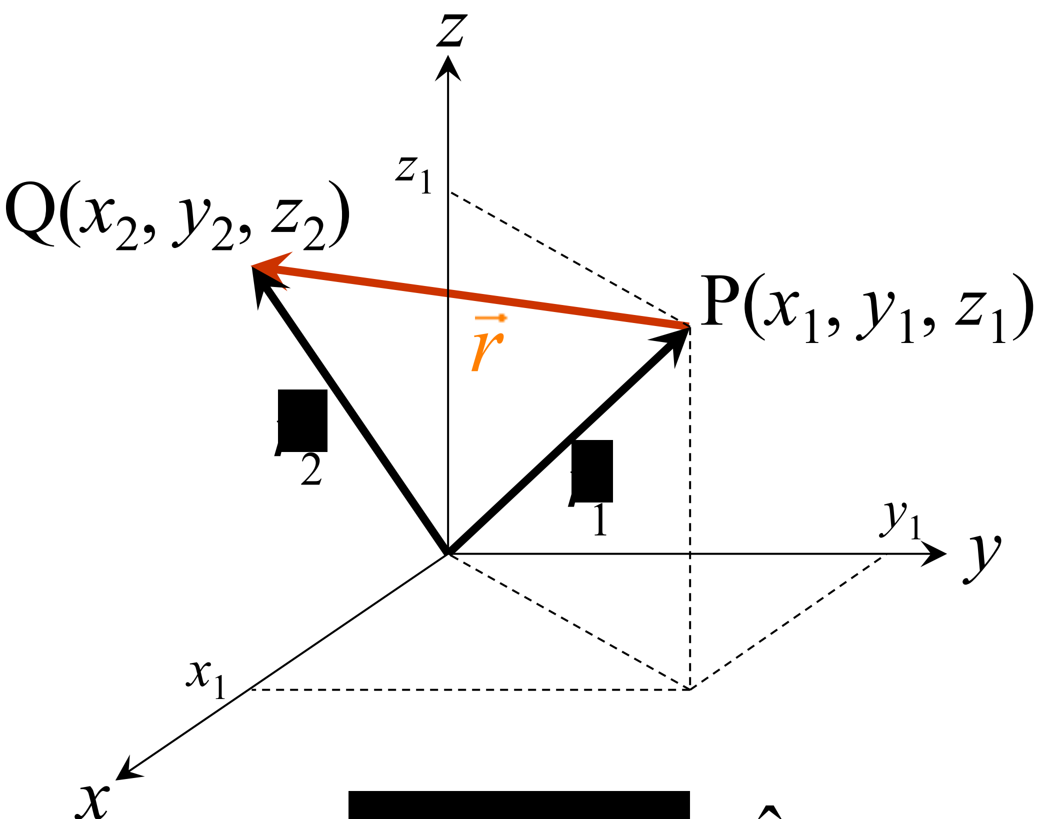
$$[redacted] B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$$

$$[redacted] B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_z)\hat{k}$$

$$[redacted] B_x)\hat{i} + (A_y - B_y)\hat{j} + (A_z - B_z)\hat{k}$$

เวกเตอร์ตำแหน่ง (Position vector)

เป็นเวกเตอร์ที่บอกตำแหน่งของจุดต่าง ๆ เทียบกับจุดกำเนิด



[redacted] $y_1\hat{j}+z_1\hat{k}$

[redacted] $y_2\hat{j}+z_2\hat{k}$

[redacted]

[redacted]

[redacted] $)\hat{i}+(y_2-y_1)\hat{j}+(z_2-z_1)\hat{k}$

เมื่อ [redacted] เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของจุด Q เทียบกับจุด P

ตัวอย่าง กำหนดจุด $P(4,-3,5)$ เมตร และ $Q(1,2,4)$ เมตร จงหา

ก) เวกเตอร์ตำแหน่งของจุด P และ Q

ข) เวกเตอร์ตำแหน่งของจุด Q เทียบกับ P

ตัวอย่าง 3.5 นักเดินป่าคนหนึ่งออกเดินทางจากรถไปทางทิศตะวันออกเฉียงใต้เป็นระยะทาง 25.0 กม. แล้วจึงหยุดกางเต๊นท์ค้างคืน วันที่ 2 เขาเดินจากเต๊นท์เป็นระยะ 40.0 กม. ในทิศตะวันออกเฉียงเหนือ โดยทำมุม 60 องศาเฉียงไปจากทิศตะวันออก (60 degree north of east) จึงไปพบหอคอย จงหา

1. องค์ประกอบของการกระจัดของนักเดินป่าในแต่ละวัน

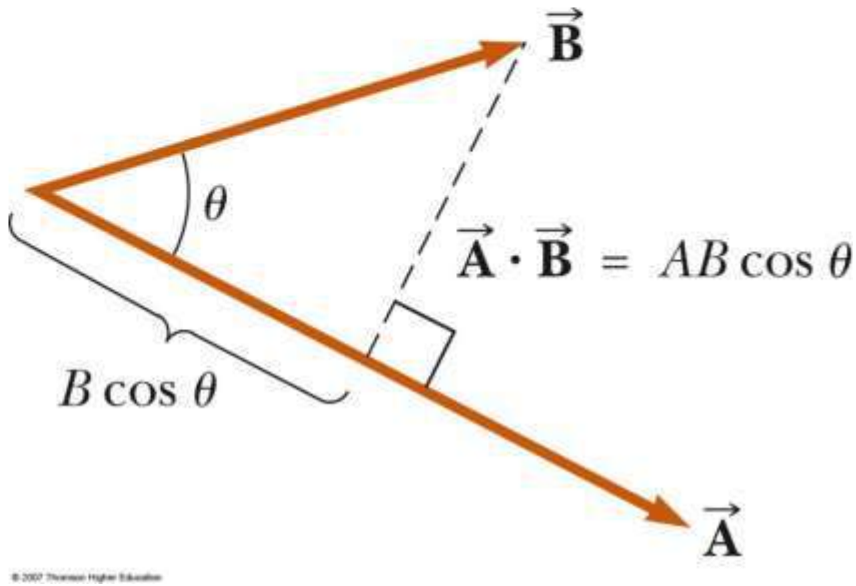
2. องค์ประกอบของการกระจัดรวมใน 2 วัน

3. เขียนเวกเตอร์แสดงการกระจัดรวม

การคูณเวกเตอร์

1. ผลคูณสเกลาร์ (Scalar Product or Dot Product)

ได้ผลลัพธ์เป็นสเกลาร์ ในการคูณกันใช้เครื่องหมาย · (dot)



นิยาม [redacted] $\cos\theta = BA\cos\theta$

ผลคูณสเกลาร์มีสมบัติดังนี้

1. [redacted] $\cos 0^\circ = A^2$

2. [redacted] กฎการสลับที่

3. [redacted] กฎการแจกแจง

4. $($[redacted]

   $=$ [redacted]

5. $a($[redacted] กฎการเปลี่ยนกลุ่ม

คำถาม

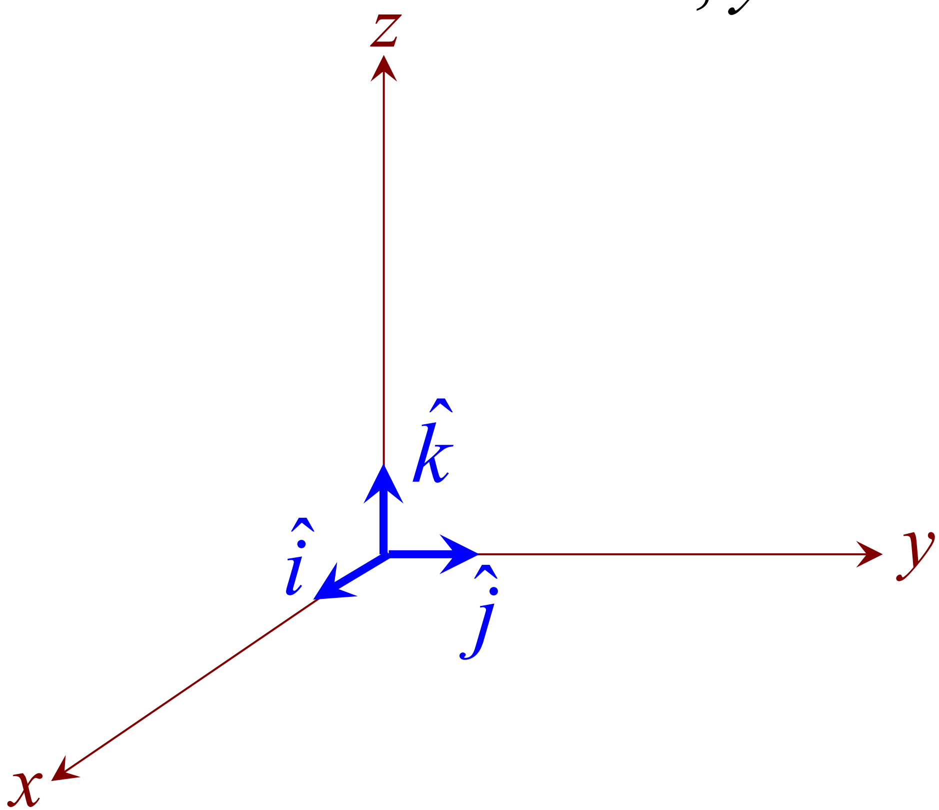
1. [redacted] ได้หรือไม่

2. [redacted] ได้หรือไม่

3. $\hat{i} \cdot \hat{i} = ?$

4. $\hat{i} \cdot \hat{j} = ?$

ถ้า $\hat{i}$, $\hat{j}$ $\hat{k}$ และ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวแกน x, y และ z



$$\hat{i}\cdot\hat{i} = |\hat{i}||\hat{i}|\cos 0^\circ = 1$$

$$\hat{i}\cdot\hat{j} = |\hat{i}||\hat{j}|\cos 90^\circ = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{i}\cdot\hat{i} &= \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1 \\ \hat{i}\cdot\hat{j} &= \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = 0 \end{aligned}}$$

ถ้ากำหนดให้ [redacted] $+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}$

[redacted] $+B_y\hat{j}+B_z\hat{k}$

[redacted] $+A_y\hat{j}+A_z\hat{k})\cdot(B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k})$

$$= A_xB_x(\hat{i}\cdot\hat{i})+A_xB_y(\hat{i}\cdot\hat{j})+A_xB_z(\hat{i}\cdot\hat{k})$$

$$+A_yB_x(\hat{j}\cdot\hat{i})+A_yB_y(\hat{j}\cdot\hat{j})+A_yB_z(\hat{j}\cdot\hat{k})$$

$$+A_zB_x(\hat{k}\cdot\hat{i})+A_zB_y(\hat{k}\cdot\hat{j})+A_zB_z(\hat{k}\cdot\hat{k})$$

[redacted] $+A_yB_y+A_zB_z$

ตัวอย่าง กำหนดให้เวกเตอร์

$$[redacted]\,\hat{j}+4\hat{k}$$

$$[redacted]\,\hat{j}+3\hat{k}$$

จงหา

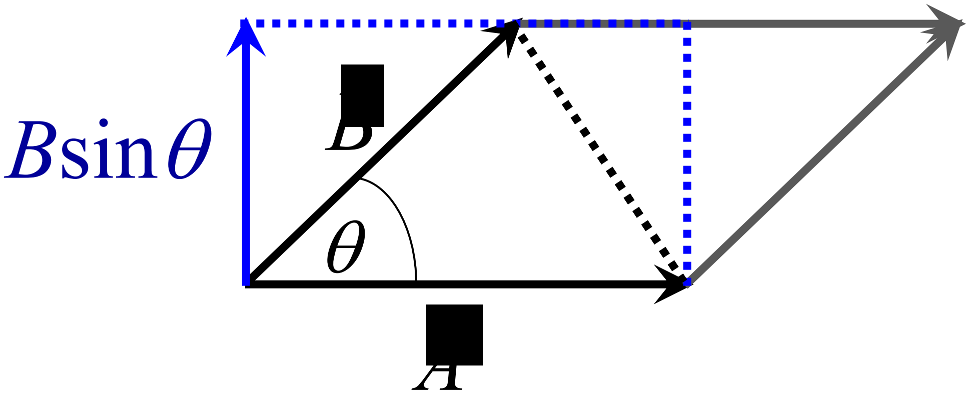
ก) [redacted]

ข) เงาของเวกเตอร์ [redacted] บน [redacted] และเงาของ [redacted] บน [redacted]

ค) มุมระหว่าง [redacted] และ [redacted]

2. ผลคูณเวกเตอร์ (Vector Product or Cross Product)

ได้ผลลัพธ์เป็นเวกเตอร์ ในการคูณกันใช้เครื่องหมาย × (cross)



ผลคูณเวกเตอร์

[redacted]

ขนาดของ [redacted] คือ

$C =$ [redacted]

ซึ่งก็พื้นที่สี่เหลี่ยม (เส้นสีน้ำเงิน) ที่มี A และ $B\sin\theta$ เป็นด้านประกอบ

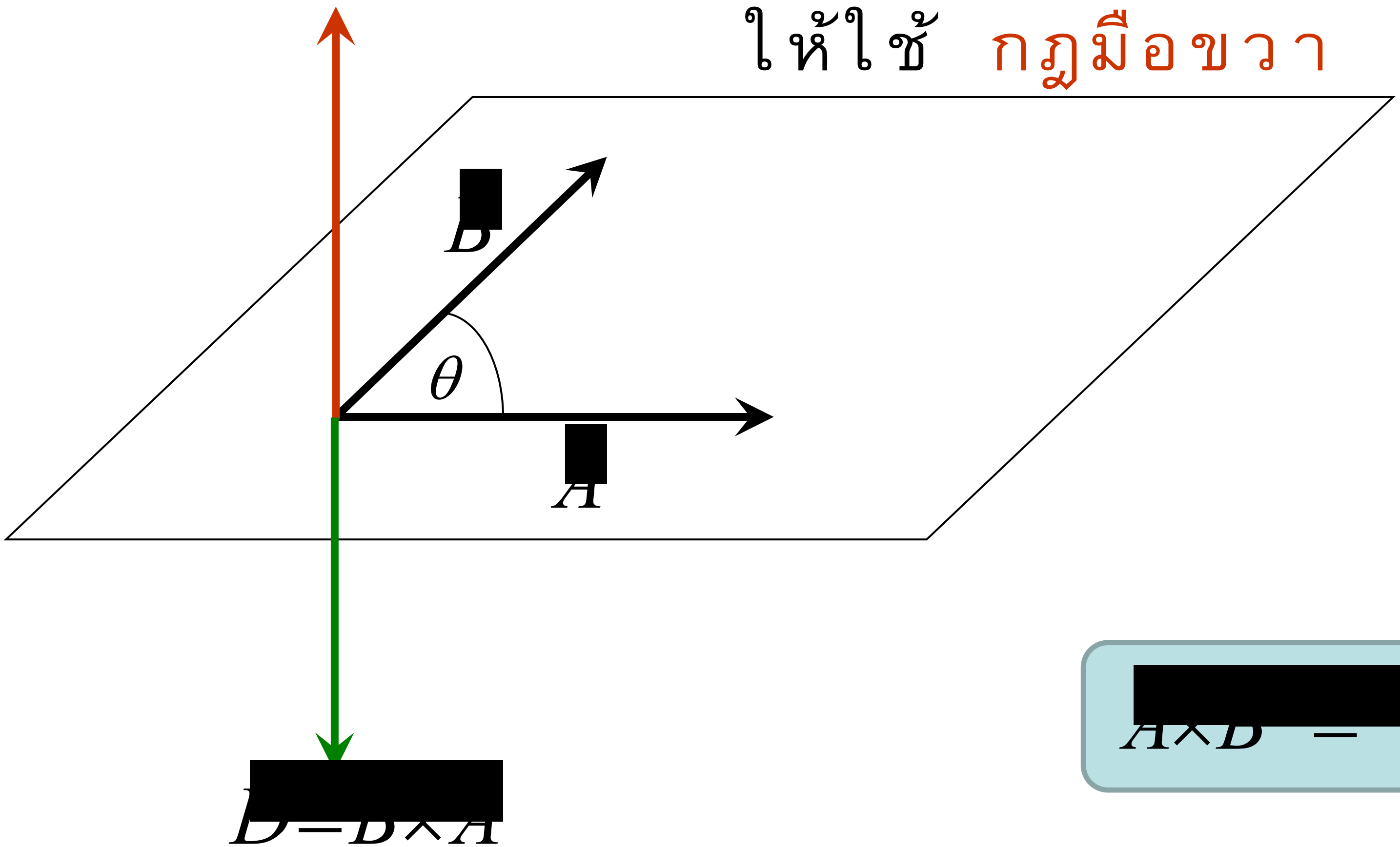
ดังนั้น |[redacted]| คือพื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี [redacted] และ [redacted] เป็นด้านประกอบ

และ $\frac{1}{2}$|[redacted]| คือพื้นที่สามเหลี่ยมที่มี [redacted] และ [redacted] เป็นด้านประกอบ

[redacted]

ทิศของ [redacted]

ให้ใช้ กฎมือขวา



[redacted]

ผลคูณเวกเตอร์มีสมบัติดังนี้

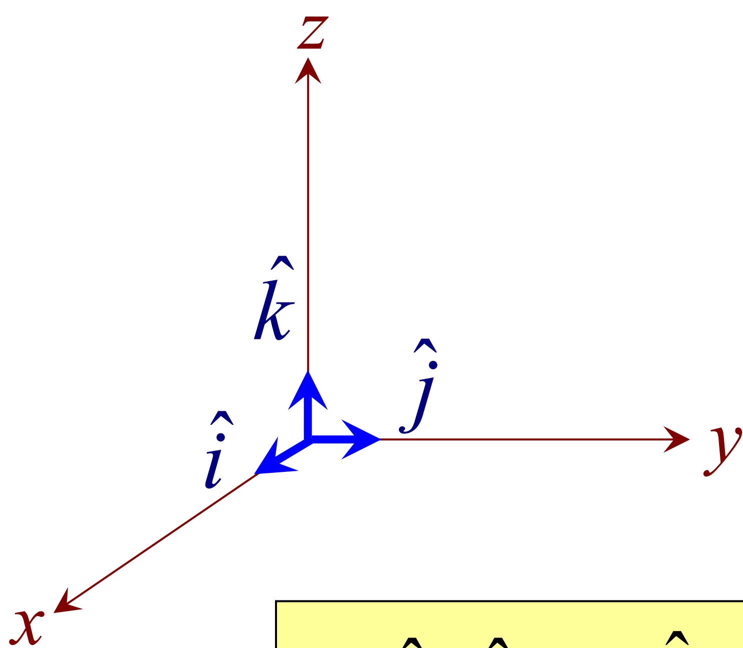
1. | [redacted]in$0^\circ = 0$

2. [redacted]

3. [redacted] กฎการแจกแจง

4. $a($ [redacted] กฎการเปลี่ยนกลุ่ม

สำหรับ $\hat{i}$, $\hat{j}$ และ $\hat{k}$ ผลคูณเวกเตอร์สามารถเขียนได้ดังนี้



$$\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = 0$$

$$|\hat{i}\times\hat{j}| = (1)(1)\sin 90^\circ = 1$$

$$\hat{i}\times\hat{j} = \hat{k} \qquad \hat{j}\times\hat{i} = -\hat{k}$$

$$\hat{j}\times\hat{k} = \hat{i} \qquad \hat{k}\times\hat{j} = -\hat{i}$$

$$\hat{k}\times\hat{i} = \hat{j} \qquad \hat{i}\times\hat{k} = -\hat{j}$$

[redacted] $A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$

[redacted] $B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$

[redacted] $+ A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \times (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k})$

$$= A_x B_x (\hat{i} \times \hat{i}) + A_x B_y (\hat{i} \times \hat{j}) + A_z B_z (\hat{i} \times \hat{k})$$

$$+ A_y B_x (\hat{j} \times \hat{i}) + A_y B_y (\hat{j} \times \hat{j}) + A_y B_z (\hat{j} \times \hat{k})$$

$$+ A_z B_x (\hat{k} \times \hat{i}) + A_z B_y (\hat{k} \times \hat{j}) + A_z B_z (\hat{k} \times \hat{k})$$

[redacted] $- A_x B_z \hat{j} - A_y B_x \hat{k} + A_y B_z \hat{i} + A_z B_x \hat{j} - A_z B_y \hat{i}$

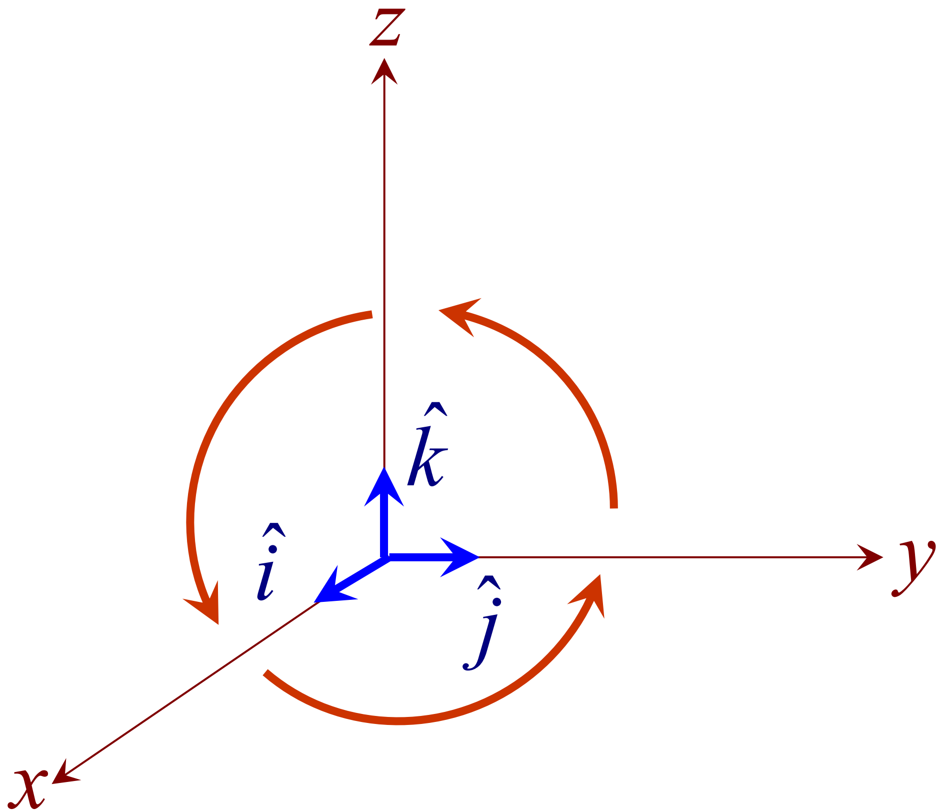
[redacted] $- A_z B_y)\hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{k}$

[redacted]

$$\begin{vmatrix} & \hat{j} & \hat{k} \\ & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \begin{matrix} \hat{i} & \hat{j} \\ A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{matrix}$$

[redacted] $-A_zB_y)\hat{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\hat{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\hat{k}$

ใช้กฎเวียนขวา



[redacted] $-A_zB_y)\hat{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\hat{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\hat{k}$

ตัวอย่าง กำหนดเวกเตอร์ [redacted] $+3\hat{k}$ m

[redacted] $-\hat{k}$ m

จงหา

ก. [redacted]

ข. เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับระนาบที่มี [redacted] และ [redacted]

ค. พื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี [redacted] และ [redacted] เป็นด้านประกอบ

ง. พื้นที่สามเหลี่ยมที่มี [redacted] และ [redacted] เป็นด้านประกอบ

อนุพันธ์ของผลบวกและผลคูณของเวกเตอร์

1. $\frac{d}{dt}$ [redacted]

2. $\frac{d}{dt}$ [redacted]

3. $\frac{d}{dt}$ [redacted]

4. $\frac{d}{dt}$ [redacted]

เมื่อ a เป็นสเกลาร์ฟังชันก์ที่แปรตาม t

4. การเคลื่อนที่ใน 2 มิติ (Motion in 2D)

เช่นการเคลื่อนที่บนระนาบ การเคลื่อนที่วิถีโค้ง (projectile) การเคลื่อนที่เป็นวงกลม เป็นต้น

ตัวอย่างที่ 4.1 อนุภาคเคลื่อนที่ในระนาบ xy โดยที่เวลาเริ่มต้น t = 0 วินาที อนุภาคอยู่ที่จุดกำเนิด มีองค์ประกอบความเร็วตามแกน x เป็น 20 เมตร/วินาที องค์ประกอบความเร็วตามแกน y เป็น –15 เมตร/วินาที ความเร่งมีองค์ประกอบเดียวคือ a_x = 4.0 เมตร/วินาที^{2} จงหา

1. ความเร็วของอนุภาคที่เวลา t ใด ๆ

   [$\vec{v}_f = [(20+4.0t)\hat{i} - 15\hat{j}]$ m/s]

2. ความเร็วและอัตราเร็วของอนุภาคที่ t = 5.0 วินาที

   [$\vec{v}_f(t=5) = (40\hat{i} - 15\hat{j})$ m/s , 43 m/s]

4.3 การเคลื่อนที่วิถีโค้ง (projectile motion)

การเคลื่อนที่ใน 2 D โดย $a_x = 0$ และ $a_y = -\mathrm{g}$

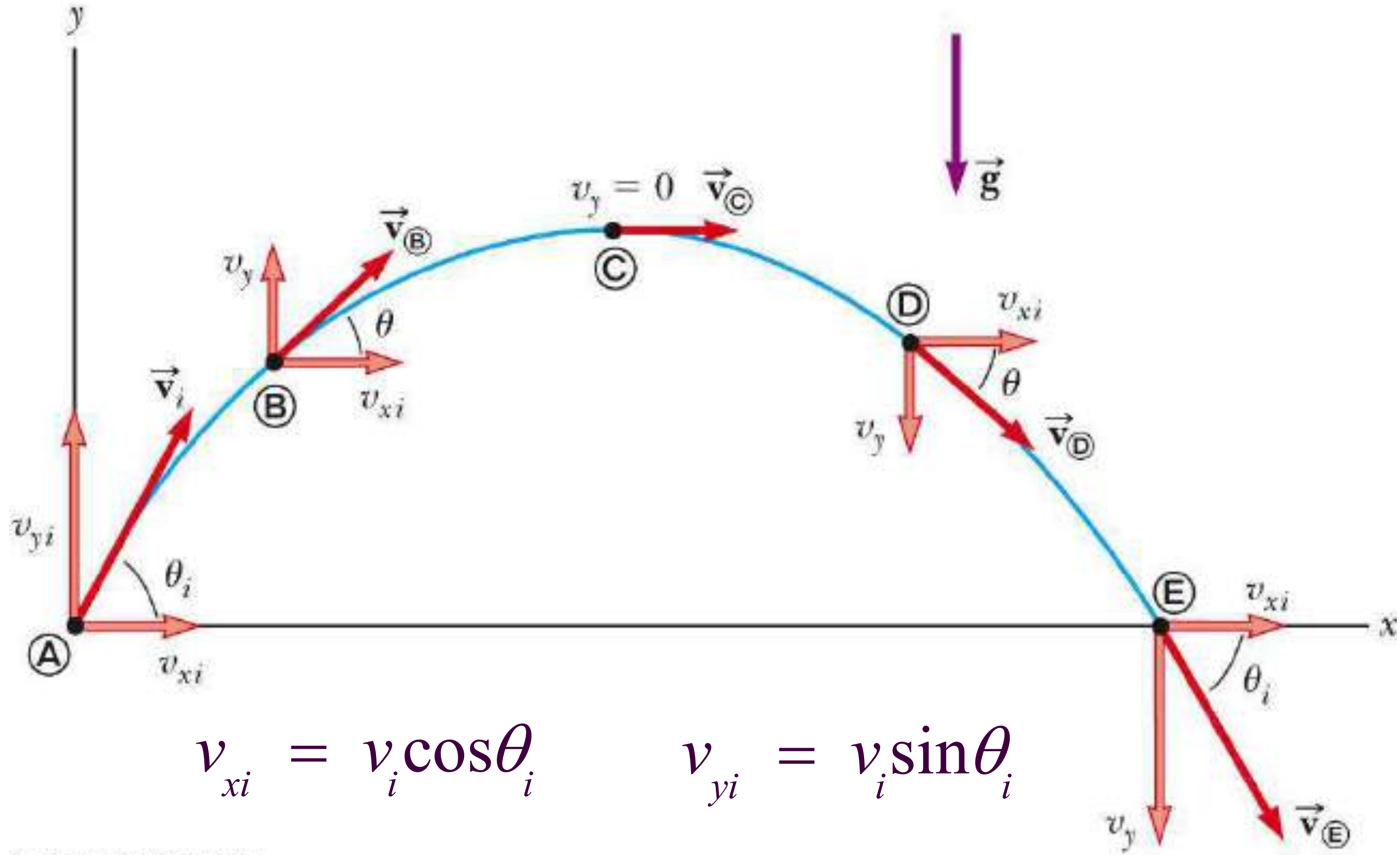
(สมมติ g คงที่ และไม่มีแรงต้านจากอากาศ)

$\rightarrow$ การเคลื่อนที่ภายใต้ความเร่งคงที่ $\vec{a} = -g\,\hat{j}$

เส้นทางการเคลื่อนที่เป็นพาลาโบลา

ระยะตามแนวราบ (horizontal range) $= R$

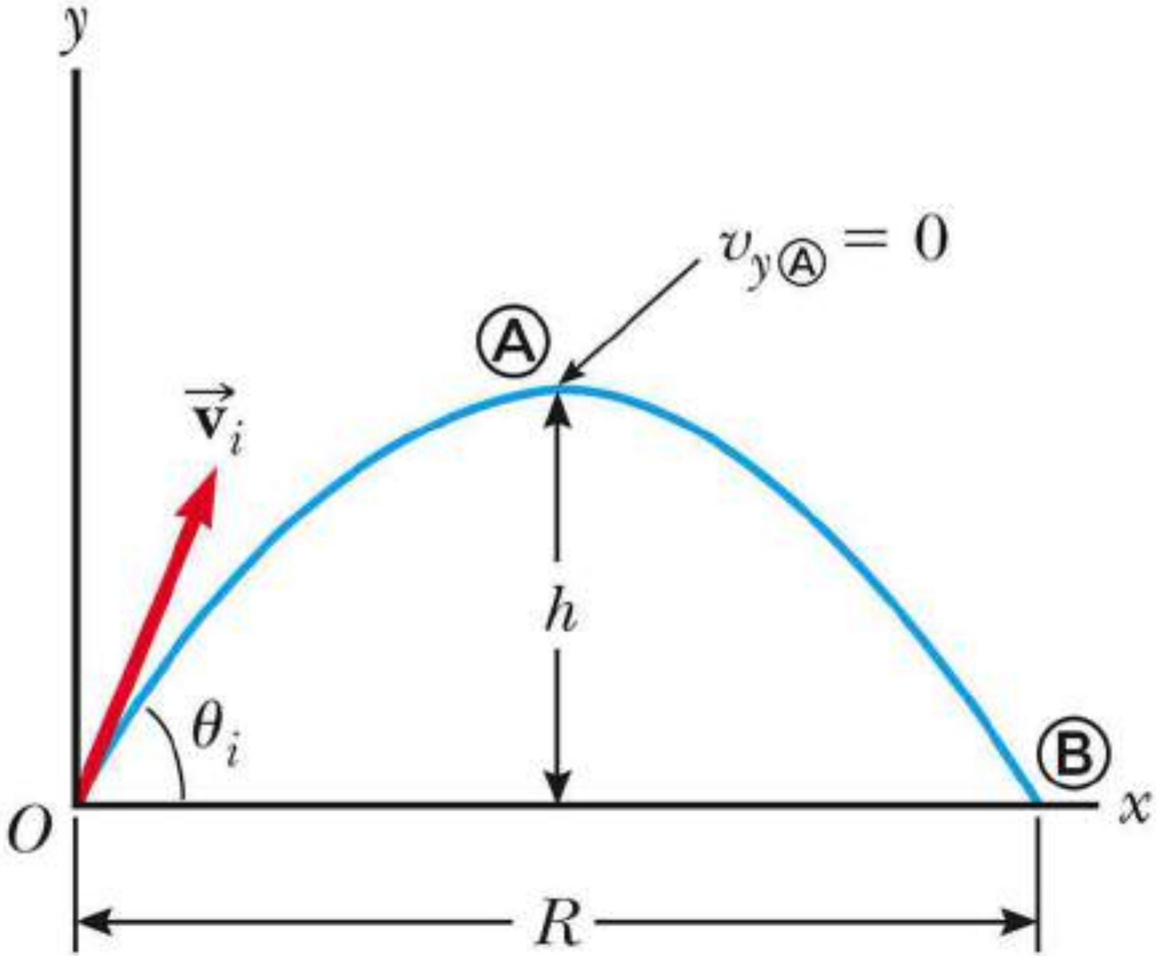
ระยะสูงสุด (maximum height) $= h$



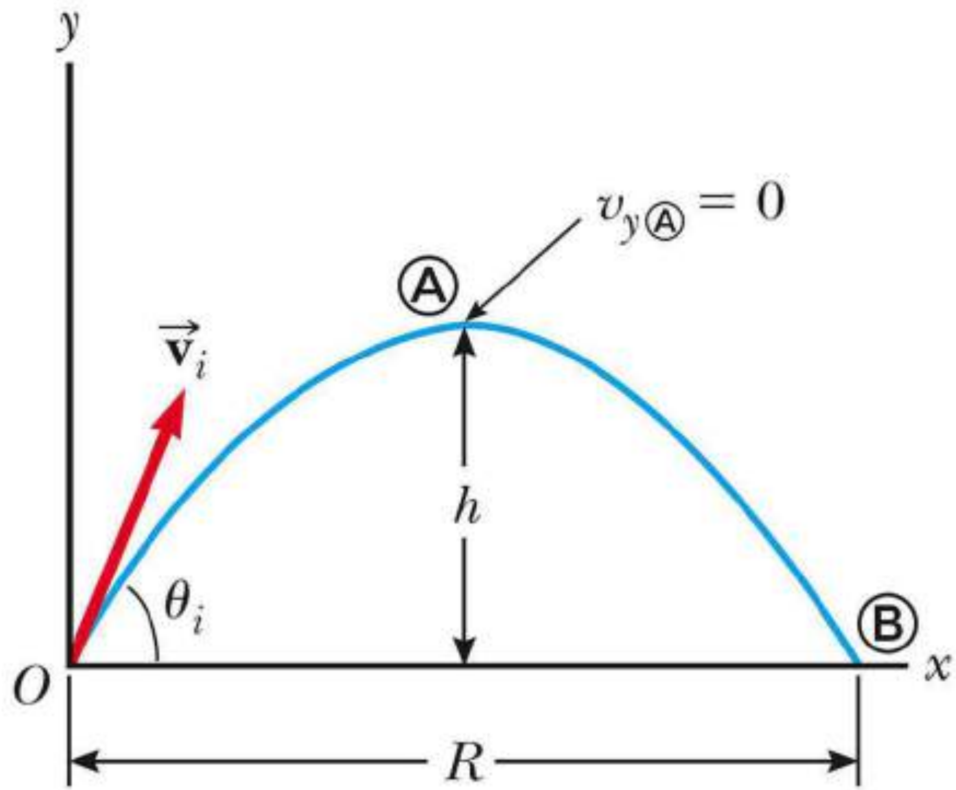
$$v_{xi} = v_i \cos\theta_i \qquad v_{yi} = v_i \sin\theta_i$$

ระยะตามแนวราบ (horizontal range) $= R$

ระยะสูงสุด (maximum height) $= h$



ตัวอย่างที่ 4.2 โยนก้อนหินขึ้นไปด้วยมุมเท่าใด จึงจะได้ระยะตามแนวราบเท่ากับระยะสูงสุด



ต้องการ θ_i ที่ทำให้ $R = h$

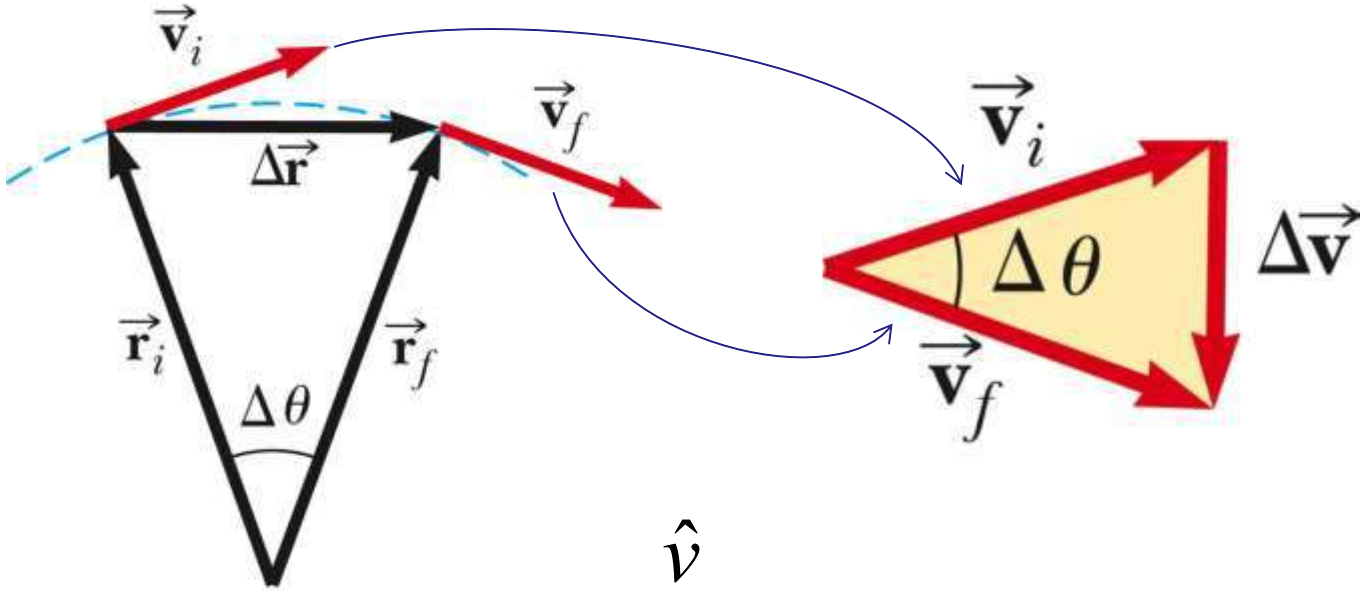
4.4 การเคลื่อนที่เป็นวงกลมด้วยอัตราเร็วคงที่

[redacted] ?

[redacted] dt $\rightarrow$ เนื่องจาก [redacted] ไม่คงที่

$\rightarrow$ $\hat{v}$ เปลี่ยนตามเวลา t

[redacted] $_{avg}$ Δt $\rightarrow$ $|$ [redacted] $_{avg}|$ $|\Delta t|$



$|\Delta$ [redacted] r $=$ v

$|\Delta$ [redacted] r

$\hat{v}$

ความเร็วอยู่ในแนวเส้นสัมผัส

[redacted] a_{avg} $|\Delta t|$ $=$ $\frac{v}{r}$ $|\Delta t|$ ถ้า $\Delta t \to 0$ แล้ว $|a$ [redacted] r

ทิศของความเร่ง : ทิศของ Δ [redacted] : ทิศสู่ศูนย์กลาง

ความเร่งสู่ศูนย์กลาง (centripetal acceleration)

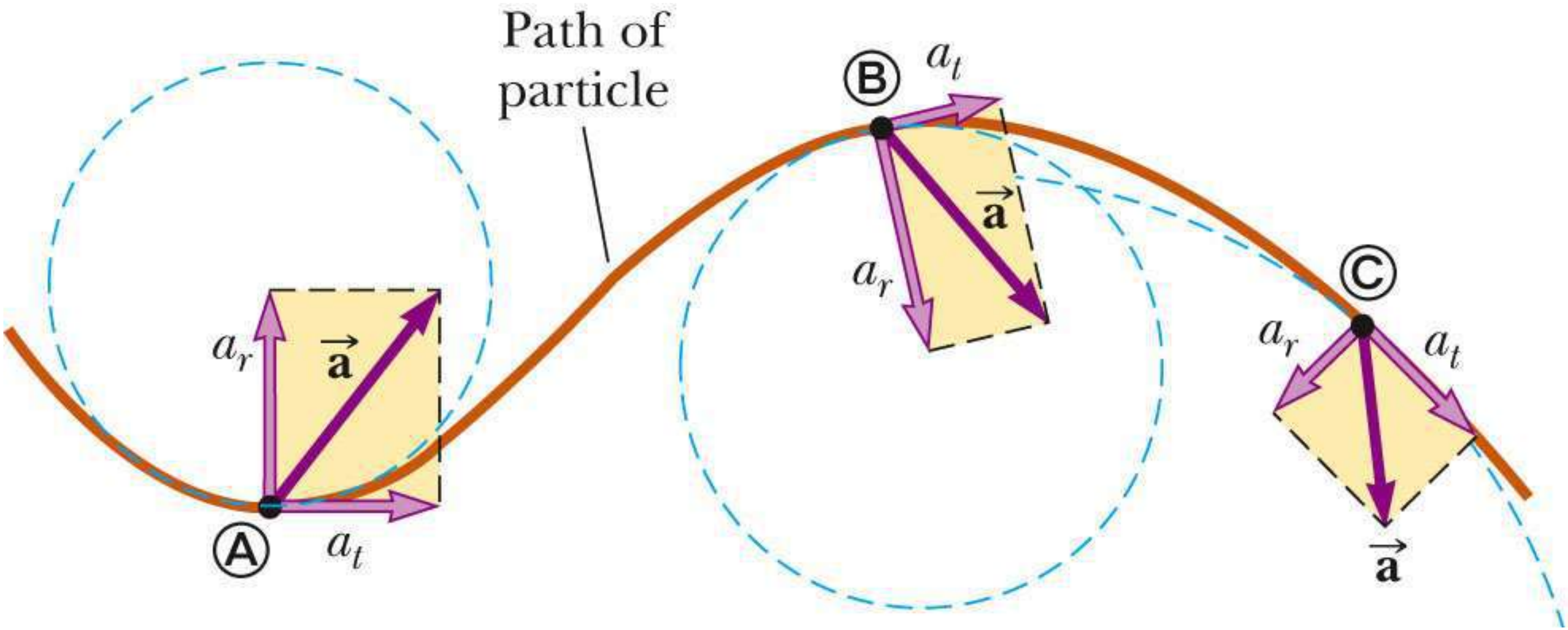
$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

คาบ (period): เวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ 1 รอบ

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

4.5 ความเร่งในแนวเส้นสัมผัสและความเร่งในแนวรัศมี (tangential and radial acceleration)

วัตถุเคลื่อนที่ตามทางโค้ง



[redacted] $\dfrac{\quad}{dt}$ [redacted] $\dfrac{\quad)}{dt} = v\dfrac{d\hat{v}}{dt} + \left(\dfrac{dv}{dt}\right)\hat{v}$

[redacted] $_{r}$ [redacted] $_{t}$

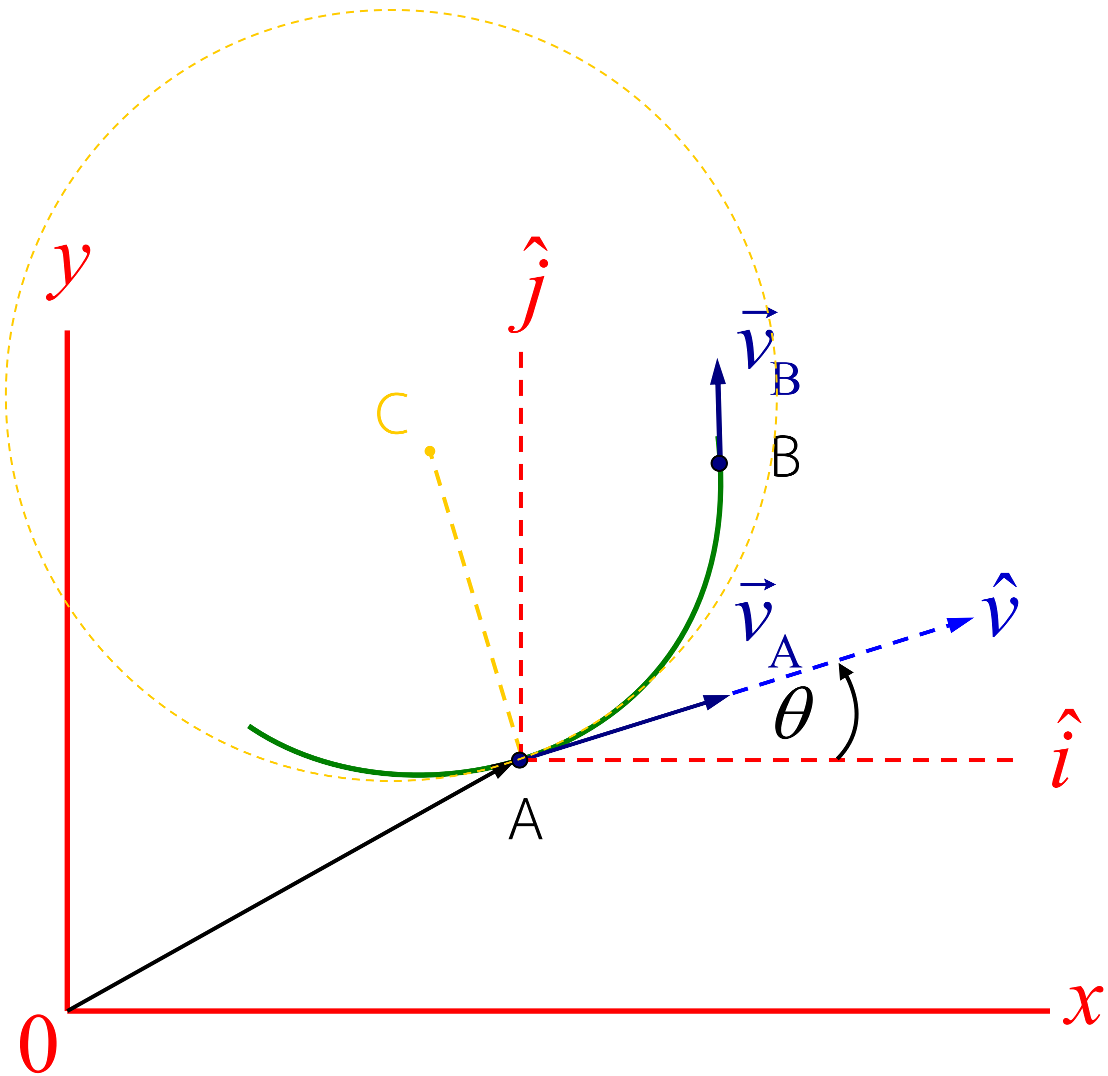
เมื่อ [redacted] $_{r}$ [redacted] dt คือ ความเร่งในแนวรัศมี (radial acceleration)

[redacted] $_{t}$ [redacted] $\left(dt\right)$ คือ ความเร่งในแนสเส้นสัมผัส (tangential acceleration)

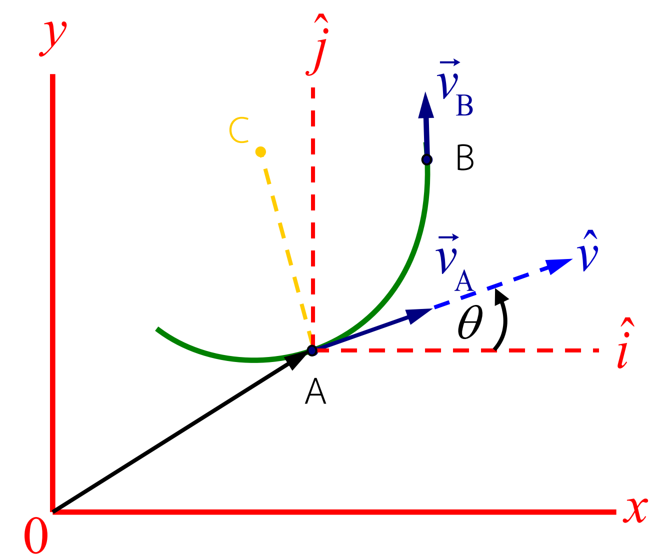
[redacted] $_{r}$ [redacted] r เมื่อ $\hat{r}$ ชี้ออกจากจุดศูนย์กลาง

[redacted] $_{r}$ [redacted] $a_t^2)^{\frac{1}{2}}$

จะพบว่า $\vec{v}_{\mathrm{A}}$ ทำมุม θ ที่จุด A กับแกน x



จากรูป ให้ $\vec{v}_A = \vec{v} = v\,\hat{v}$



และ $$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\hat{v})}{dt}$$

$$= \hat{v}\frac{dv}{dt} + v\frac{d\hat{v}}{dt} \qquad \ldots(*)$$

และจากรูป เราได้ว่า $\hat{v} = \cos\theta\ \hat{i} + \sin\theta\ \hat{j} \qquad \ldots(**)$

$$\frac{d\hat{v}}{dt} = \left(-\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}\right)\frac{d\theta}{dt} \qquad \ldots(***)$$

พิจารณา $\hat{v}\cdot\dfrac{d\hat{v}}{dt}$ จะได้ว่า

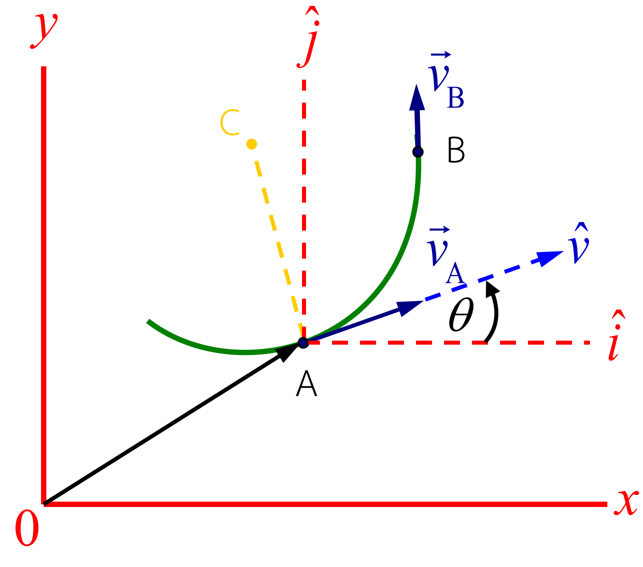
$$\hat{v}\cdot\frac{d\hat{v}}{dt}=(\cos\theta\;\hat{i}+\sin\theta\;\hat{j})\cdot(-\sin\theta\;\hat{i}+\cos\theta\;\hat{j})\frac{d\theta}{dt}$$

$$=(-\cos\theta\;\sin\theta+\sin\theta\;\cos\theta)\frac{d\theta}{dt}$$

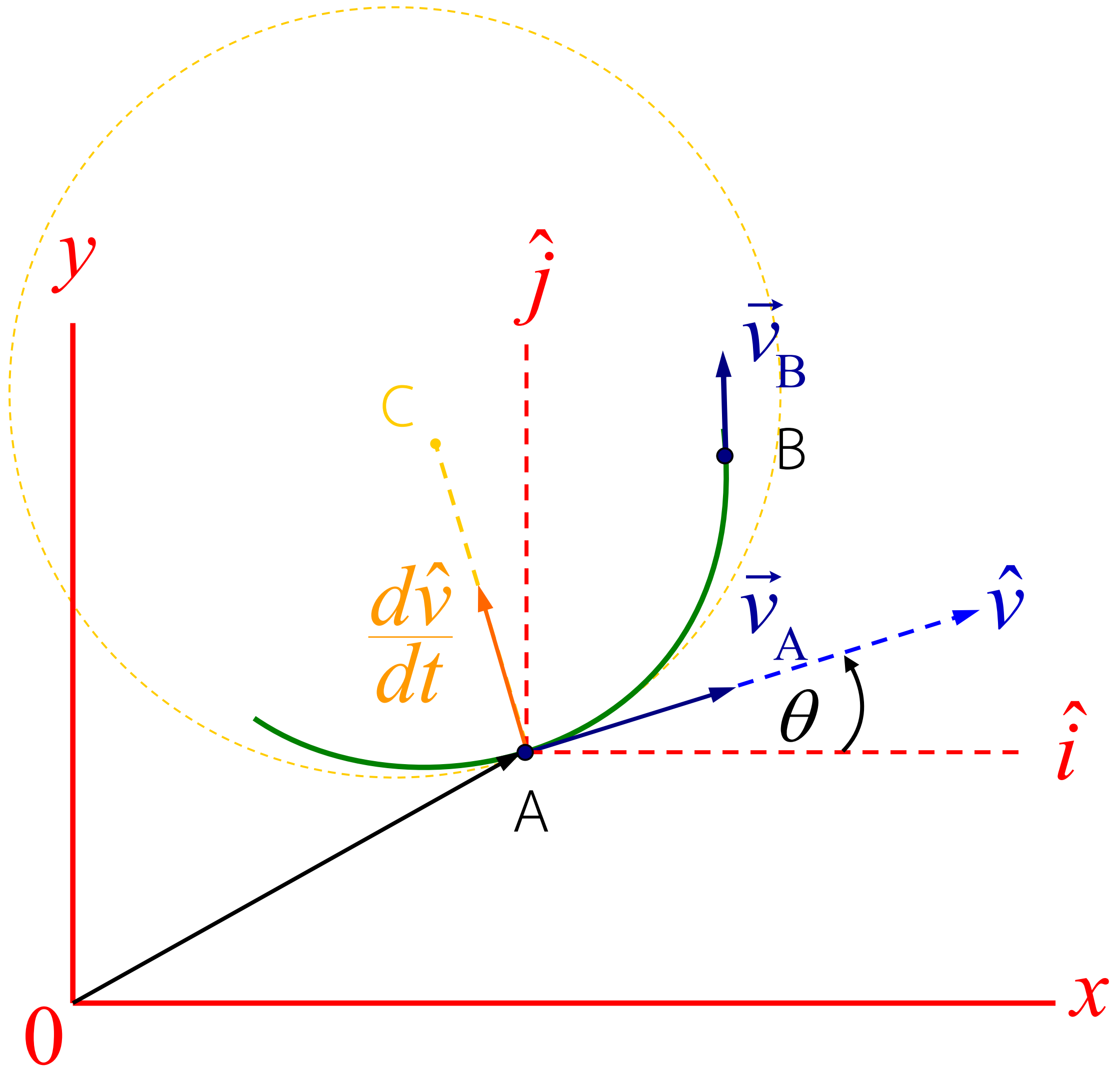
$$=0$$

ดังนั้นจะได้ว่า $\hat{v}\perp\dfrac{d\hat{v}}{dt}$ แล้ว

$\dfrac{d\hat{v}}{dt}$ จะมีทิศพุ่งเข้าหาจุดศูนย์กลาง C



$\dfrac{d\hat{v}}{dt}$ จะมีทิศพุ่งเข้าหาจุดศูนย์กลาง C



ดังนั้นถ้ากำหนดให้ $\hat{v}_{\mathrm{C}} = -\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}$

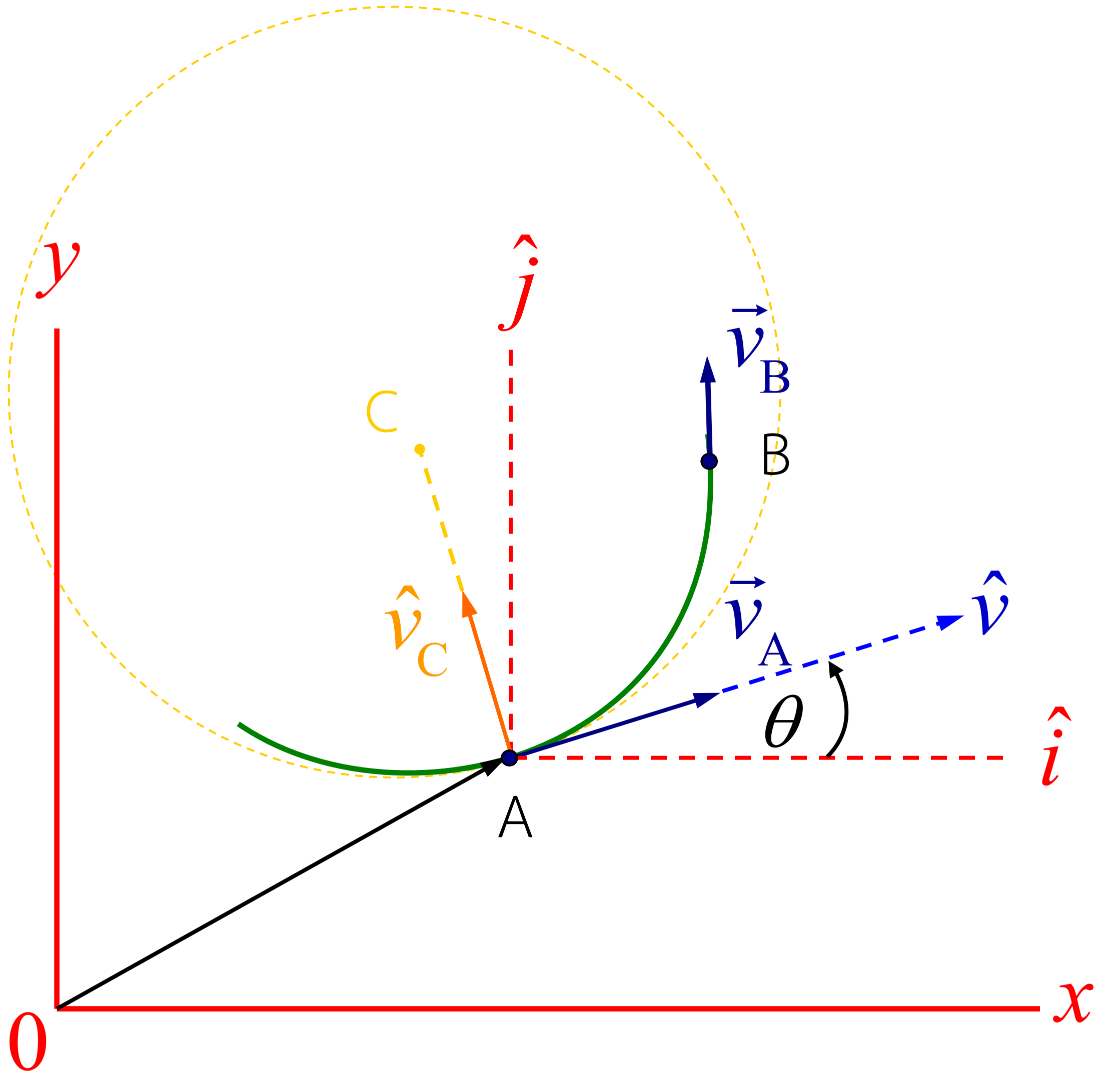
สมการ (***) จะได้ว่า

$$\frac{d\hat{v}}{dt} = \hat{v}_{\mathrm{C}}\,\frac{d\theta}{dt}$$

และแทนค่าในสมการ (*) จะได้

$$\vec{a} = \underbrace{\hat{v}\,\frac{dv}{dt}}_{\vec{a}_{\mathrm{T}}} + \underbrace{\hat{v}_{\mathrm{C}}\,v\,\frac{d\theta}{dt}}_{\vec{a}_{\mathrm{C}}}$$

$\hat{v}_C$ จะมีทิศพุ่งเข้าหาจุดศูนย์กลาง C



ความเร่งสู่ศูนย์กลาง (centripetal acceleration)

$$\vec{a}_C = v\frac{d\hat{v}}{dt} = v\frac{d\theta}{dt}\,\hat{v}_C$$

และจาก $$d\theta = \frac{ds}{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt} = \frac{v}{R}$$

$\therefore$ $$\boxed{\vec{a}_C = \frac{v^2}{R}\,\hat{v}_C = \omega^2 R\,\hat{v}_C}$$

$\vec{a}_C$ เป็นผลมาจากการเปลี่ยนแปลงทิศของความเร็ว

ความเร่งตามแนวเส้นสัมผัส (tangential acceleration)

$$\vec{a}_{\mathrm{T}} = \frac{dv}{dt}\,\hat{v}$$

และจาก $$\omega = \frac{v}{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha$$

$$\therefore \quad \boxed{\vec{a}_{\mathrm{T}} = R\frac{d\omega}{dt}\,\hat{v} = \alpha R\,\hat{v}}$$

$\vec{a}_{\mathrm{T}}$ เป็นผลมาจากการเปลี่ยนแปลงอัตราเร็ว

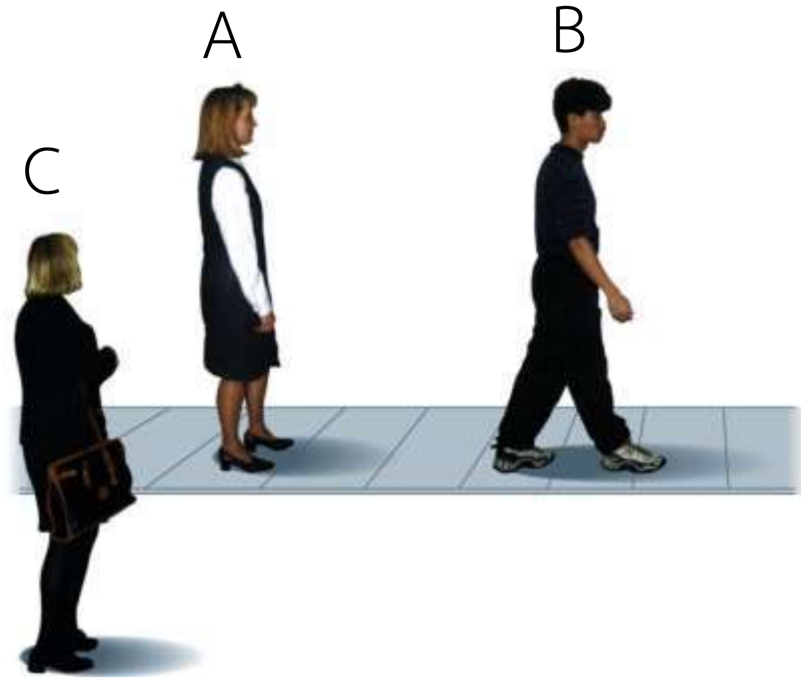
ขนาดของความเร่ง

$$a = \left(a_{\mathrm{C}}^2 + a_{\mathrm{T}}^2\right)^{1/2} = \left(\omega^4 R^2 + \alpha^2 R^2\right)^{1/2}$$

$$= \boxed{\left(\frac{v^4}{R^2} + \alpha^2 R^2\right)^{1/2}}$$

ตัวอย่างที่ 4.25 รถไฟขบวนหนึ่งกำลังเลี้ยวโค้งไปตามรางที่มีรัศมีความโค้ง 150 เมตร โดยระหว่างอยู่ในโค้งคนขับชะลอรถจาก 90.0 กิโลเมตร/ชั่วโมง เหลือ 50.0 กิโลเมตร/ชั่วโมง ภายในเวลา 15.0 วินาที จงหาความเร่งของรถไฟขณะที่มีอัตราเร็ว 50.0 กิโลเมตร/ชั่วโมง (ให้ถือว่าอัตราเร็วของรถไฟลดลงอย่างสม่ำเสมอ)

4.6 การเคลื่อนที่สัมพัทธ์ (relative motion)



จากรูป ผู้หญิง A อยู่บนทางเลื่อนอัตโนมัติสังเกต ผู้ชาย B กำลังเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ และผู้หญิง C ยืนนิ่งอยู่บนพื้นนอกทางเลื่อนแล้วสังเกตผู้ชาย B ผู้หญิงทั้งสองจะสังเกตเห็นผู้ชาย B เคลื่อนที่อย่างไร

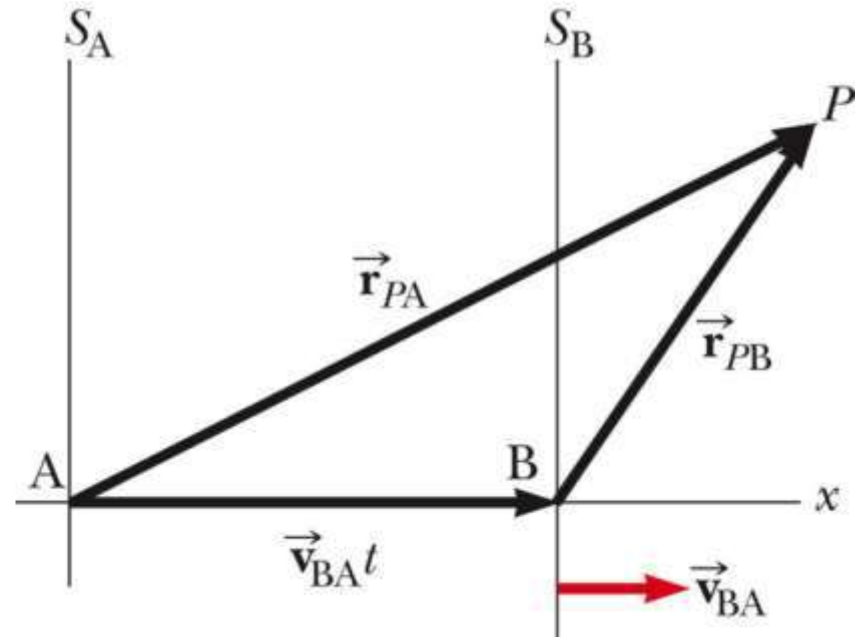
จากรูปขวา ถ้าให้

ผู้สังเกต A อยู่ในกรอบอ้างอิง S_A

ผู้สังเกต B อยู่ในกรอบอ้างอิง S_B

S_B เคลื่อนที่ด้วย [redacted] คงที่ เทียบ S_A

ผู้สังเกตทั้งสองกำลังสังเกตวัตถุที่จุด P



[redacted] คือเวกเตอร์ที่แสดงการเคลื่อนที่ของวัตถุ P เทียบกับผู้สังเกต A

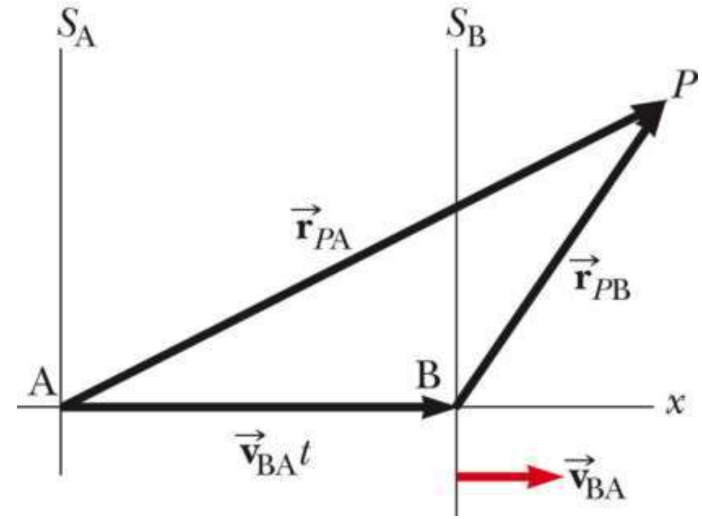
[redacted] คือเวกเตอร์ที่แสดงการเคลื่อนที่ของวัตถุ P เทียบกับผู้สังเกต B

จากรูป ผู้สังเกต A อยู่ในกรอบอ้างอิง S_A

ผู้สังเกต B อยู่ในกรอบอ้างอิง S_B

S_B เคลื่อนที่ด้วย [redacted] คงที่ เทียบ S_A

ผู้สังเกตทั้งสองกำลังสังเกตวัตถุที่จุด P

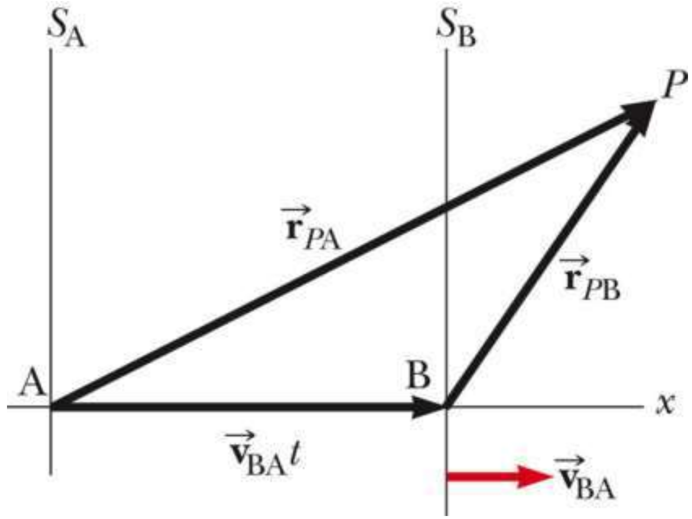


[redacted] หรือ [redacted]

เมื่อ [redacted]

แล้ว [redacted] หรือ [redacted]

สมการทั้งสองนี้เรียกว่า Galilean transformation equations



[redacted]

ความเร่งของอนุภาคที่ถูกวัดโดยผู้สังเกตในกรอบอ้างอิงของโลกเท่ากับที่ถูกวัดโดยผู้สังเกตอื่น ๆ ที่กำลังเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่สัมพัทธ์กับกรอบอ้างอิงของโลก

ตัวอย่างที่ 4.8 เรือข้ามฟากเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว 10.0 km/h เทียบกับน้ำในแม่น้ำ โดยน้ำในแม่น้ำกำลังไหลไปทางตะวันออกด้วยอัตราเร็วคงที่ 5.00 km/h เทียบกับโลก

1. ถ้าเรือเคลื่อนที่โดยหันหัวเรือไปทางเหนือ (รูป a) จงหาความเร็วเรือเทียบโลก

2. ถ้าต้องการให้เรือเคลื่อนไปทางเหนือ (รูป b) จะต้องหันหัวเรือทางใด

บทที่ 5 กฎการเคลื่อนที่ (the laws of motion)

เป็นการศึกษาถึงกฎเกณฑ์ต่าง ๆ ที่อธิบายการเคลื่อนที่นั้น ๆ อันเนื่องมาจากแรงซึ่งเป็นสาเหตุที่ทำให้เคลื่อนที่

ผู้ที่บุกเบิกคิดค้นถึงเหตุผล เพื่อหากฎเกณฑ์เกี่ยวกับการเคลื่อนที่ คือ กาลิเลโอ และในเวลาต่อมานิวตันได้ค้นคว้าเพิ่มเติมและได้เขียนเป็นกฎไว้ 3 ข้อเรียกว่า ***กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน*** (*Newton's laws of motion*)

แรง (force)

แรงเป็นอำนาจภายนอกที่มากระทำต่อวัตถุ เช่นฉุดหรือผลักวัตถุ แล้วมีผลทำให้ หรือ เกิดการพยายามที่จะทำให้สภาพการเคลื่อนที่ของวัตถุเปลี่ยนไป หรือทำให้รูปร่างของวัตถุเปลี่ยนไป

แรง (force) $\longrightarrow$ เป็นปริมาณเวกเตอร์ (vector)

$\longrightarrow$ มีหน่วยเป็น กิโลกรัม-เมตรต่อวินาที^{2}

หรือเรียกว่า นิวตัน (N)

5.2 กฎข้อที่ 1 ของนิวตันและกรอบอ้างอิงเฉื่อย

กฎข้อที่ 1 “วัตถุทุกชนิด จะคงสภาพหยุดนิ่ง หรือเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ ตราบใดที่ไม่มีแรงภายนอกมากระทำ” $\longrightarrow$ **กฎแห่งความเฉื่อย (Law of inertia)**

กรอบอ้างอิงที่มี [redacted] คงที่เทียบกับดาวที่อยู่ไกลออกไป

กรอบอ้างอิงที่มี [redacted] คงที่เทียบกับกรอบเฉื่อย

คำถาม 5.1 โลกเป็นกรอบเฉื่อยหรือไม่?

เป็น ถึงแม้โลกจะหมุนรอบตัวเอง แต่เมื่อเทียบกับแสง แล้วถือว่าน้อยมาก จึงสามารถตัดทิ้งได้

คำถาม 5.2 โดยธรรมชาติ วัตถุพยายามเข้าสู่สภาพหยุดนิ่ง ?

วัตถุพยายามจะเข้าสู่ ทิ $= 0$ เสมอ

5.3 มวล (mass)

มวล คือ สภาพต้านทานการเคลื่อนที่ของวัตถุ เป็นเนื้อของวัตถุ มวลของวัตถุใด ๆ มีค่าคงที่

5.4 กฎข้อที่ 2 ของนิวตัน

“ความเร่งของวัตถุ ($\vec{a}$) เป็นปฏิภาคโดยตรงกับแรงลัพธ์ ($\sum F$[redacted]) ที่กระทำต่อวัตถุโดยมีทิศทางเดียวกัน และเป็นปฏิภาคผกผันกับมวลของวัตถุ (m)”

$$\vec{a} \propto \frac{\sum \vec{F}}{m}$$

$$\sum \vec{F} \propto m\vec{a}$$

หรือ $$\sum \vec{F} = km\vec{a} = (1)m\vec{a}$$ S.I. unit

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

หน่วยของแรง คือ นิวตัน (N) มิติของแรง $[\mathrm{M}][\mathrm{L}][\mathrm{T}]^{-2}$

ตัวอย่าง 5.1 มวล 500 kg เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว 100 km/hr จงหาค่าของแรงคงที่ ที่ทำให้มวลหยุดนิ่งในเวลา 5 s [2,780 N]

$m = 500$ kg

$u = 100$ km/hr $= 27.8$ m/s

$$F = m\vec{a} = m\frac{(\vec{v}-\vec{u})}{t}$$

$$= 500\frac{(0-27.8)\hat{i}}{5}$$

$$= -2780\hat{i}\ N$$

ตัวอย่าง 5.2 ออกแรง 25 N ลากวัตถุหนัก 350 N จงหาความเร่งของวัตถุ และถ้าวัตถุเริ่มเคลื่อนที่จากหยุดนิ่ง จงหาระยะทางที่เคลื่อนที่ได้ใน 3 s แรก กำหนดให้ g = 9.8 เมตรต่อวินาที^{2} [0.70 m/s^2, 3.15 m]

$$m = \frac{350}{9.8} = 35.71$$

$$F = ma$$

$$a = \frac{F}{m} = \frac{25}{35.71} = 0.70$$

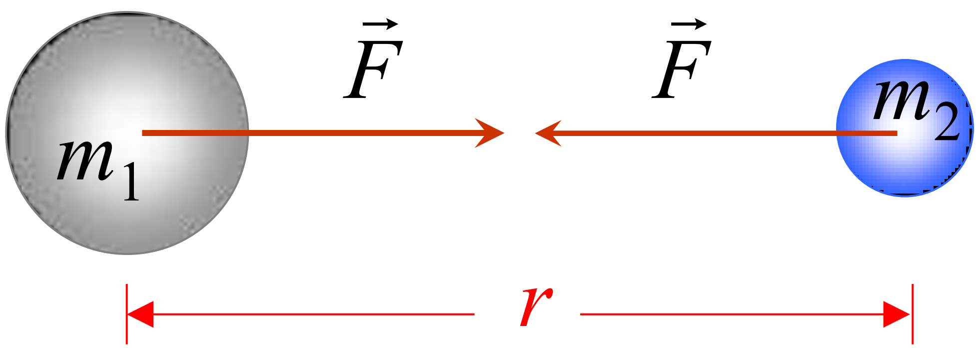
$$s = ut + \frac{1}{2}at^2$$

$$= 0 + \frac{1}{2} \cdot 0.7 \cdot 9$$

5.5 แรงโน้มถ่วงและน้ำหนัก (gravitational force and weight)

นิวตันเสนอทฤษฎีแรงดึงดูดระหว่างมวล เรียกว่า “กฎความโน้มถ่วงสากล”

จุดมวล m_1 และ m_2 วางห่างกันเป็นระยะ r จะมีแรงดึงดูดซึ่งกันและกัน



แรงนี้จะแปรผันกับผลคูณของ m_1 และ m_2 และแปรผกผันไปกับ r^2

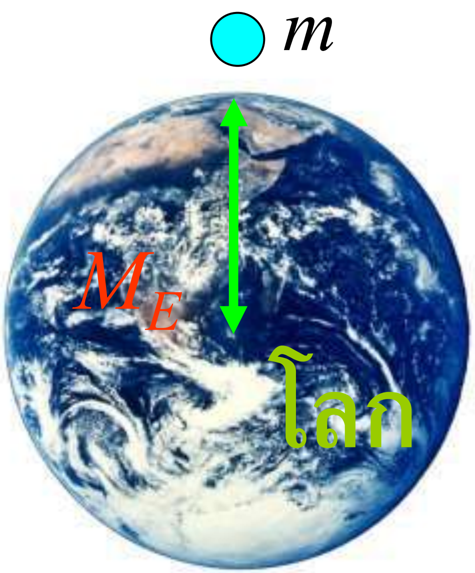
$$\vec{F} \propto \frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}$$

$$\therefore \qquad \boxed{\vec{F} = \frac{G m_1 m_2}{r^2}\hat{r}}$$

G คือค่านิจโน้มถ่วงสากล หรือ ค่าคงที่โน้มถ่วง (gravitational constant) = 6.67×10^{-11} Nm^2/kg^2

ในอดีต

การหาค่าความเร่ง g ณ ผิวโลก



$$F = \frac{GM_E m}{R_E^2}$$

$$W = \frac{GM_E m}{R_E^2}$$

$$mg = \frac{GM_E m}{R_E^2}$$

ความเร่งจากแรงดึงดูดของโลก

$$g = \frac{GM_E}{R_E^2} = \frac{6.67\times10^{-11}\times6.0\times10^{24}}{(6.4\times10^{6})^2} \approx 9.8 \text{ m/s}^2$$

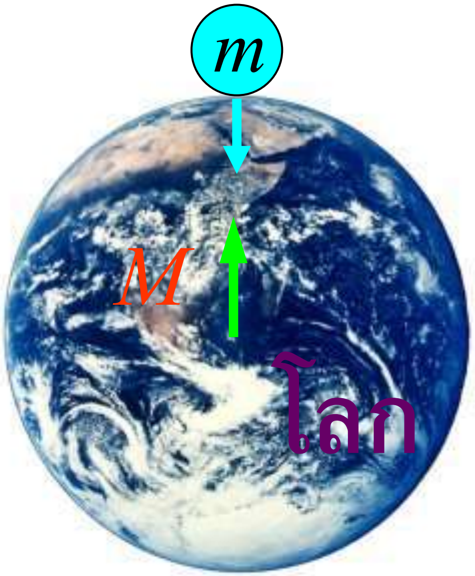
การหาค่าความเร่ง g ณ ผิวดาวอื่น

$$g_s = \frac{GM_s}{R_s^2}$$

$\therefore$ น้ำหนักของวัตถุที่ชั่งบนดาวอื่นคือ

$$W = mg_s$$

น้ำหนัก (weight) คือแรงดึงดูดหรือแรงโน้มถ่วงของโลก (ดาวเคราะห์) ที่กระทำต่อวัตถุ มีค่าไม่คงที่ มีหน่วยเป็นนิวตัน (N)

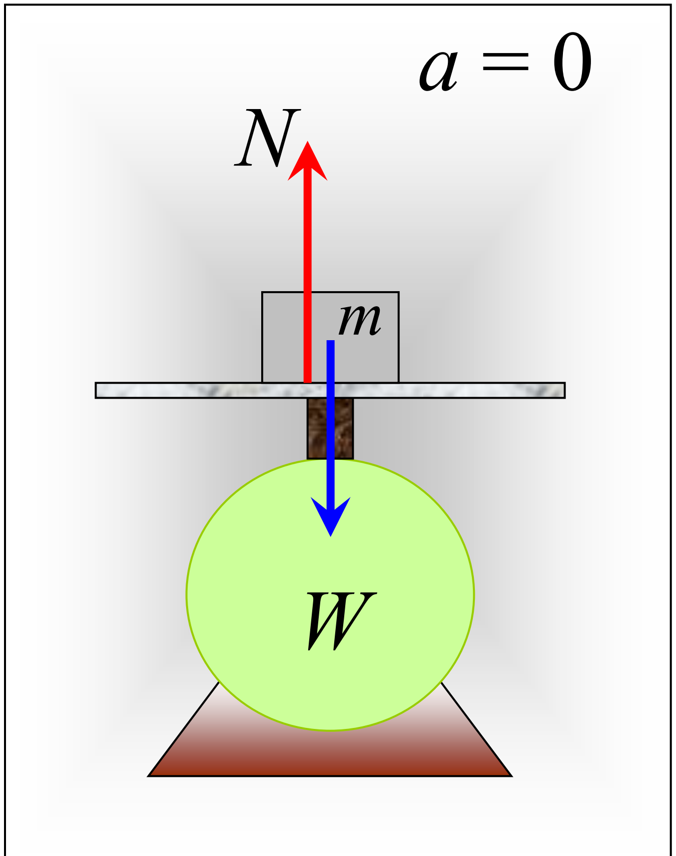


$$\vec{W} = m\vec{g}$$

$M =$ มวลของโลก, $m =$ มวลของวัตถุ, $R_E =$ รัศมีของโลก

การชั่งน้ำหนักขณะวัตถุมีความเร่ง

1. ในกรอบอ้างอิงเฉื่อย (อยู่กับที่หรือเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงตัว)



W เป็นน้ำหนักจริงของวัตถุ $W = mg$

N เป็นแรงปฏิกิริยาของเครื่องชั่งที่กระทำต่อวัตถุ

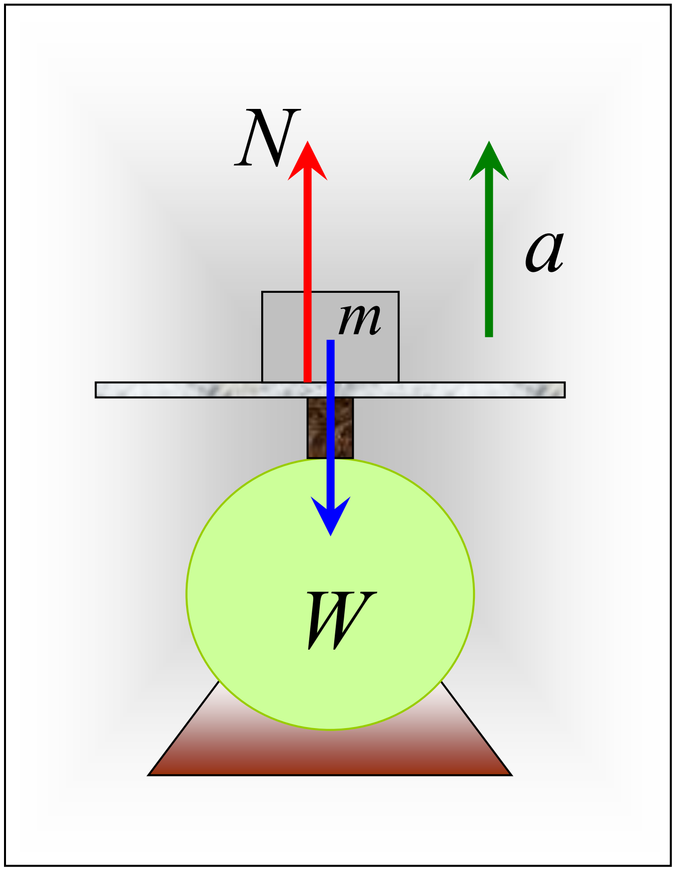
หรือ น้ำหนักวัตถุที่อ่านได้จากเครื่องชั่ง

หรือ น้ำหนักปรากฏ

ถ้า v มีค่าคงที่ $\boxed{N = W = mg}$

2. ในกรอบอ้างอิงที่มีความเร่ง เช่นลิฟต์ที่เคลื่อนที่ด้วยความเร่ง

2.1) ลิฟต์เคลื่อนที่ขึ้นด้วยความเร่ง a



จาก

$$\sum F = ma$$

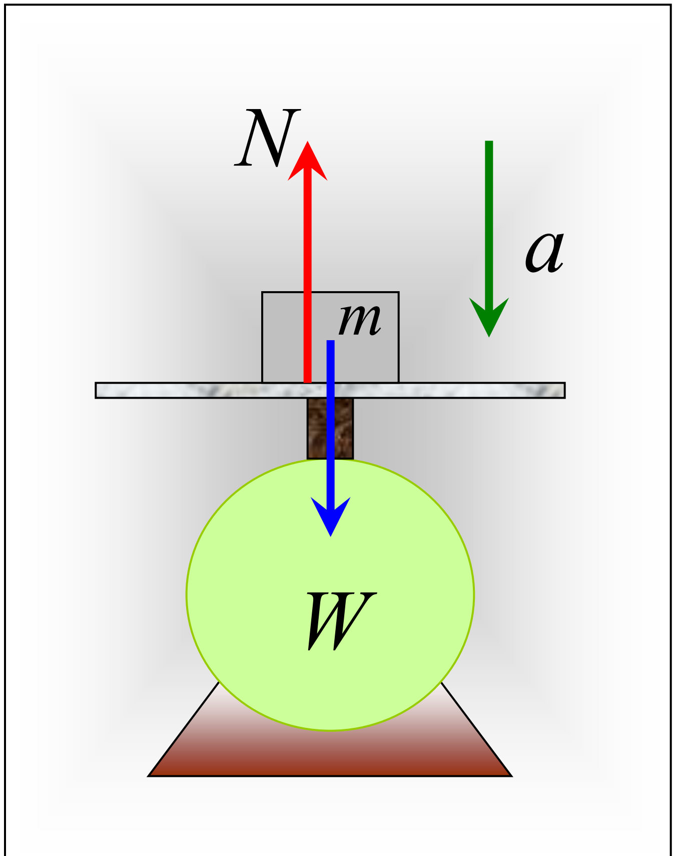
$$N - mg = ma$$

$$N = mg + ma$$

$$\boxed{N > mg}$$

น้ำหนักปรากฏมากกว่าน้ำหนักจริง

2.2) ลิฟต์เคลื่อนที่ลงด้วยความเร่ง a



จาก

$$\sum F = ma$$

$$mg - N = ma$$

$$N = mg - ma$$

$$N < mg$$

น้ำหนักปรากฏน้อยกว่าน้ำหนักจริง

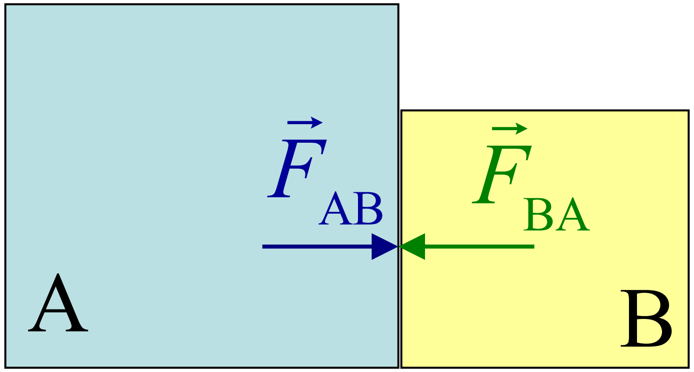
เมื่อ $a = g$ น้ำหนักปรากฏเป็นศูนย์

Conceptual Ex 5.2 เวลาเรายืนในลิฟท์ที่กำลังเคลื่อนที่ขึ้นด้วยความเร่ง เราจะรู้สึกว่าตัวหนักขึ้น และถ้าเอาเครื่องชั่งน้ำหนักไปวางบนพื้นลิฟท์แล้วเรายืนบนเครื่องชั่งก็จะพบว่าเครื่องชั่งอ่านน้ำหนักได้มากกว่าปกติ

ที่จริงแล้ว *น้ำหนัก* เรามากขึ้นหรือไม่

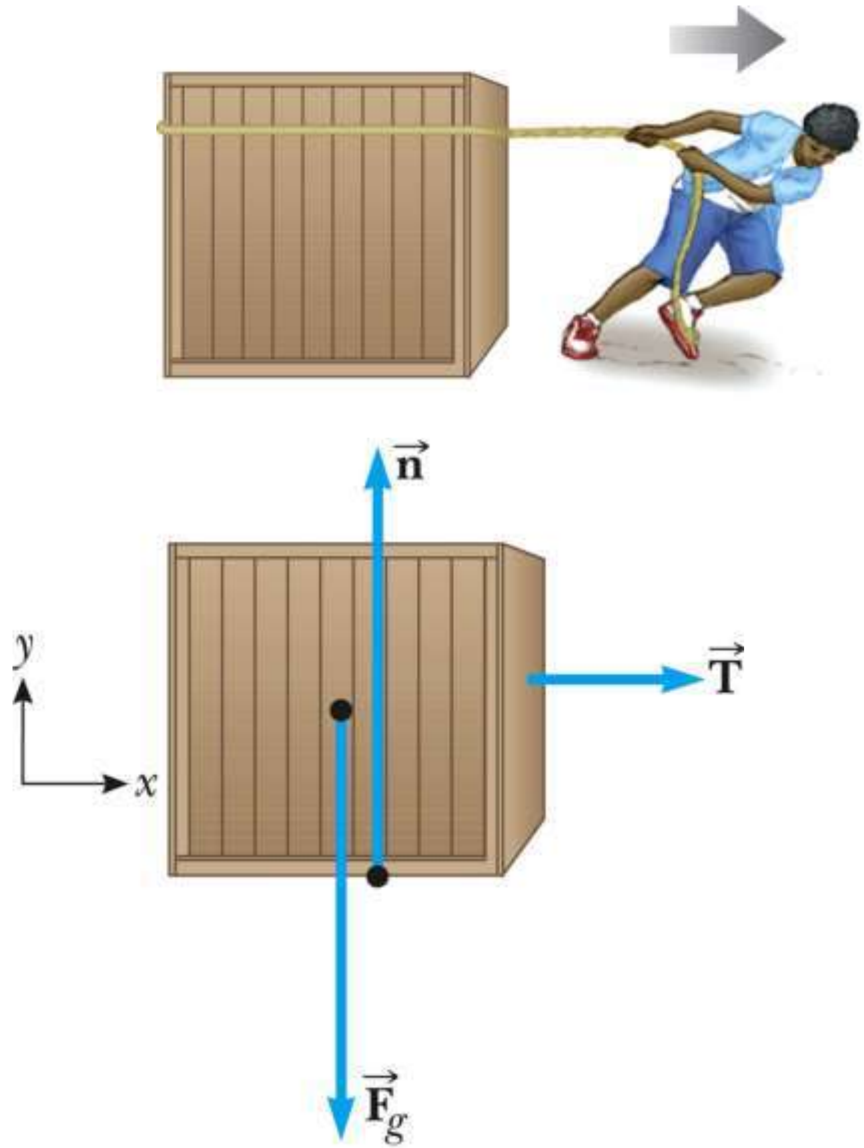
น้ำหนักของเรา	มากขึ้น	ลดลง	ไม่เปลี่ยน
แรงที่พื้นหรือเครื่องชั่งกระทำต่อคน	เปลี่ยน		ไม่เปลี่ยน

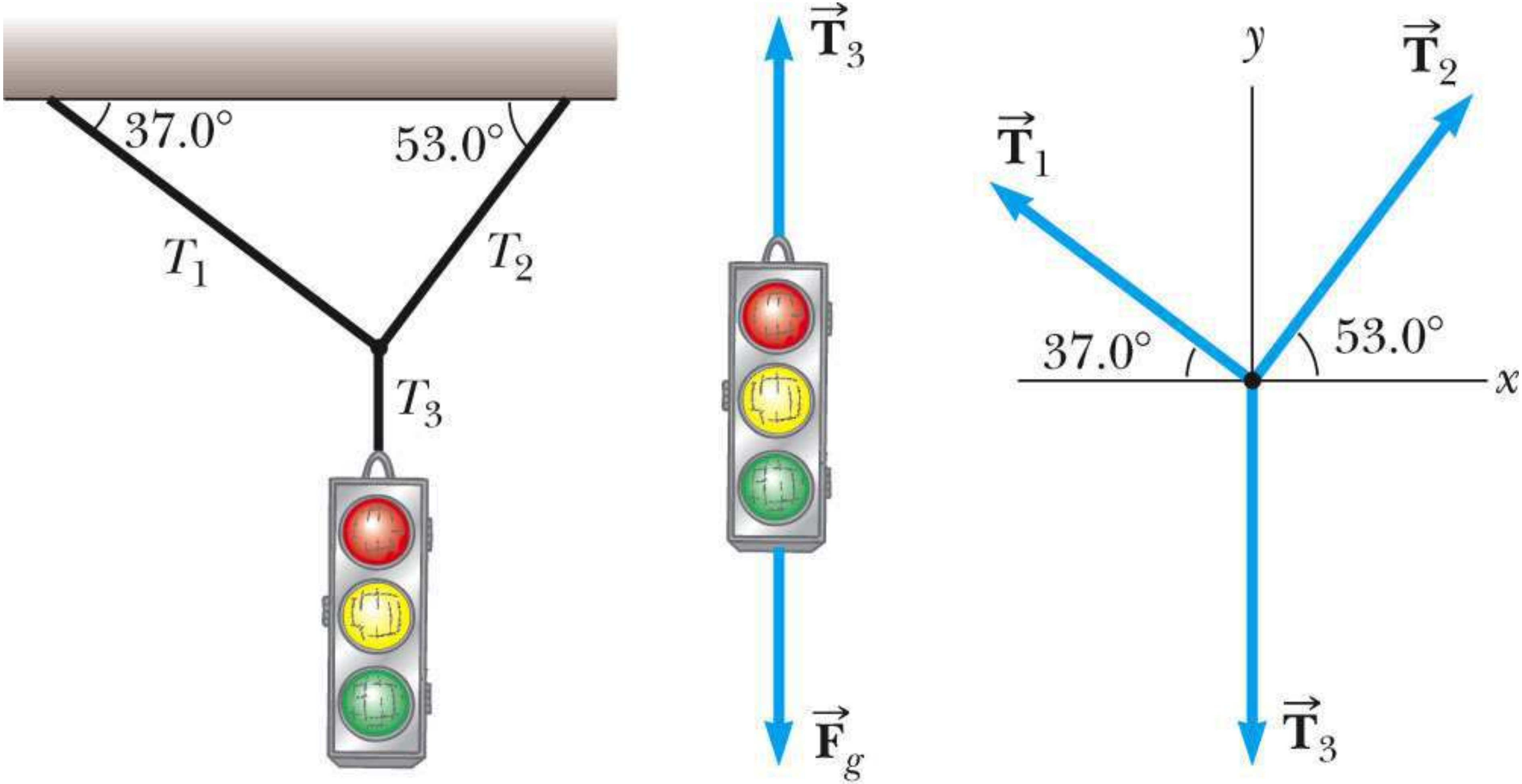
5.6 กฎข้อที่ 3 ของนิวตัน “ทุกแรงกิริยาย่อมมีแรงปฏิกิริยาซึ่งมีขนาดเท่ากัน แต่มีทิศตรงข้ามกันเสมอ” หรือ “แรงกระทำซึ่งกันและกันของวัตถุย่อมมีขนาดเท่ากัน แต่ทิศตรงข้าม”



$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

Action force $\leftrightarrow$ reaction force


$\vec{\mathbf{n}}$
$\vec{\mathbf{T}}$
$\vec{\mathbf{F}}_g$
y
x


37.0°
53.0°
T_1
T_2
T_3
$\vec{\mathbf{T}}_3$
$\vec{\mathbf{F}}_g$
y
x
$\vec{\mathbf{T}}_1$
$\vec{\mathbf{T}}_2$
37.0°
53.0°
$\vec{\mathbf{T}}_3$

Conceptual Ex 5.3 ผู้ใหญ่และเด็กยืนอยู่ด้วยกันบนพื้นน้ำแข็งราบลื่น ทั้งสองประกบมือเข้าด้วยกันแล้วออกแรงผลักกัน

1. ใครได้รับแรงขนาดมากกว่า

   เท่ากัน

2. ใครจะมีความเร่งมากกว่า เด็ก

3. ใครจะเคลื่อนที่ด้วยความเร็วมากกว่า เด็ก

4. ใครจะเคลื่อนที่ไปไกลกว่า (พิจารณาระหว่างที่มือยังประกบกัน)

   เด็ก

การทำโจทย์

1. วาดแผนภาพแสดงระบบ พร้อมแกนอ้างอิง

2. คิดทีละแกน แยกวัตถุเป็น 2 กลุ่ม

   2.1 วัตถุในสมดุล $\Sigma F = 0$

   2.2 วัตถุเคลื่อนที่ภายใต้แรง $\Sigma F = ma$

3. เขียน free-body diagram สำหรับวัตถุแต่ละชิ้น ใช้สมการจาก 2. แก้สมการหาปริมาณที่ต้องการ

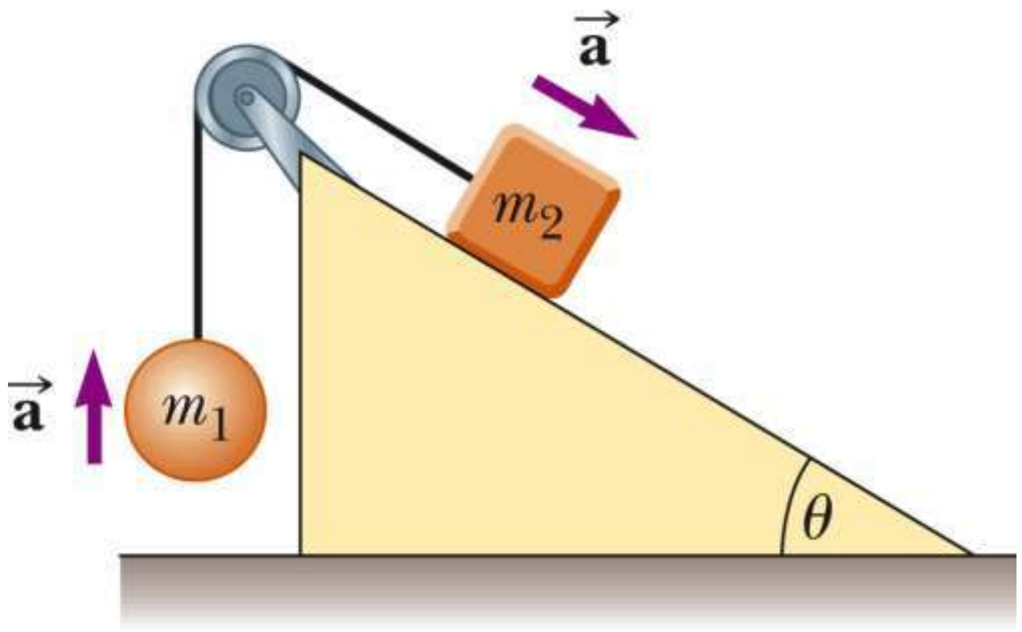
ตัวอย่างที่ 5.8 ชายคนหนึ่งต้องการชั่งปลามวล m โดยใช้เครื่องชั่งสปริงที่ห้อยจากเพดานลิฟท์

1. จงแสดงว่าถ้าลิฟท์เคลื่อนที่ขึ้นหรือลงด้วยความเร่ง เครื่องชั่งจะอ่านค่าไม่ตรงกับน้ำหนักปลา

2. สำหรับปลาหนัก 40.0 N เครื่องชั่งจะอ่านน้ำหนักเท่าใดถ้าลิฟท์มีความเร่ง a_y = 2.00 m/s^2

3. คำนวณข้อ 2. ซ้ำสำหรับกรณีลิฟท์เคลื่อนที่ด้วย a_y = –2.00 m/s^2

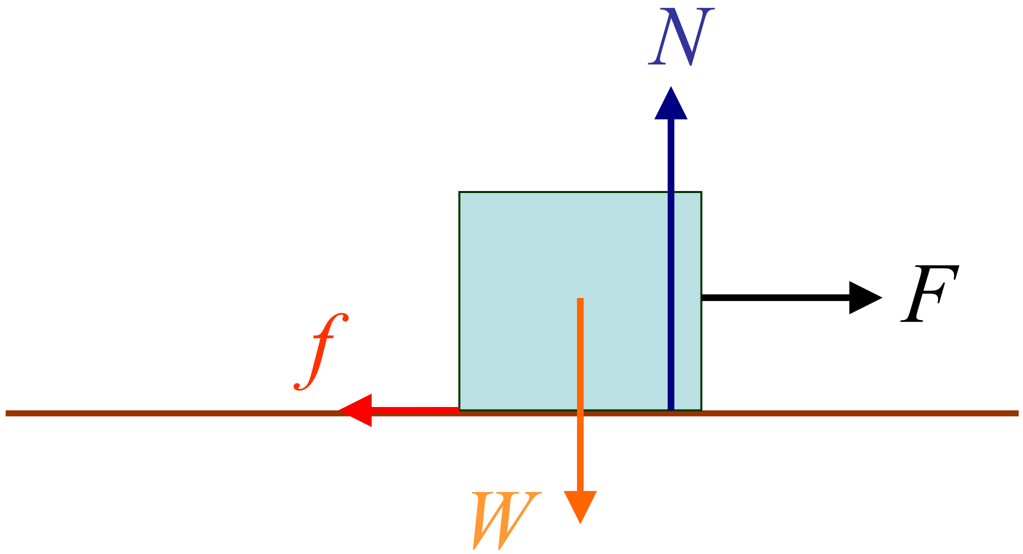
ตัวอย่างที่ 5.10 มวล m_2 วางอยู่บนพื้นเอียงลื่นที่ทำมุม θ กับแนวราบ เอาเชือกเบามาผูกมวลนี้ คล้องผ่านรอกเบาไม่มีความเสียดทาน แล้วไปผูกมวล m_1 จงหาความเร่งของมวลทั้งสอง และแรงตึงในเส้นเชือก



5.8 แรงของความเสียดทาน (force of friction)

- แรงเสียดทาน (friction force)

เมื่อวัตถุหนึ่งเคลื่อนที่โดยที่ผิวของวัตถุเสียดสีไปกับอีกวัตถุหนึ่ง จะมีแรงกระทำระหว่างวัตถุทั้งสอง โดยแรงนี้จะอยู่ในทิศซึ่งต้านการเคลื่อนที่ และมีแนวอยู่ในระนาบของผิวทั้งสองซึ่งเสียดสีกัน

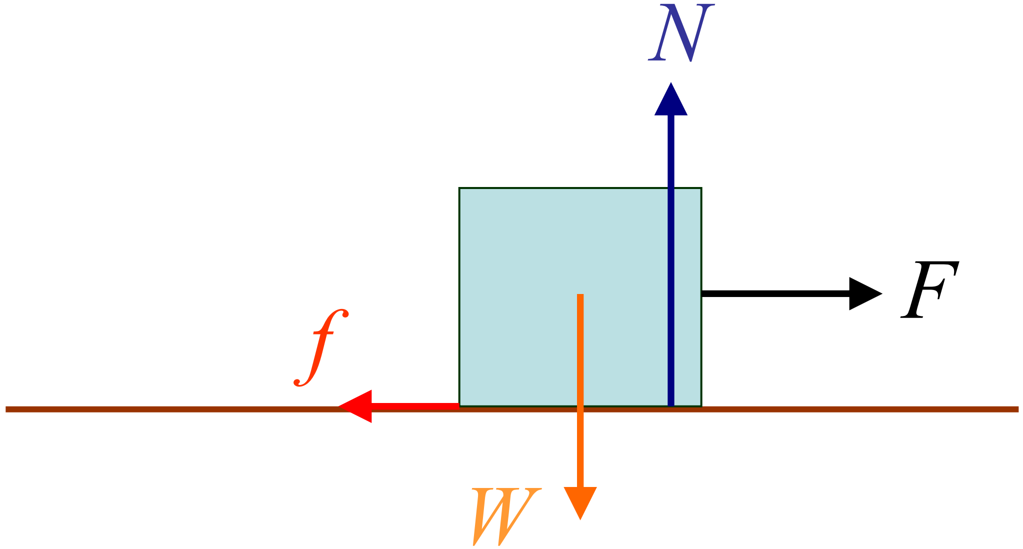


ถ้า F เป็นแรงที่กระทำต่อวัตถุ เพื่อให้วัตถุเคลื่อนที่ไปทางขวา

W เป็นน้ำหนักของวัตถุ

f เป็นแรงเสียดทาน

N เป็นแรงปฏิกิริยาของพื้นที่กระทำต่อวัตถุในทิศตั้งฉากกับพื้น



จากรูป $F = f$

$$f = \mu N$$

เมื่อ μ คือสัมประสิทธิ์การเสียดทาน

แรงเสียดทานมี 2 ชนิด

1. แรงเสียดทานสถิต (f_s)

แรงเสียดทานสถิต เกิดขึ้นขณะที่วัตถุยังไม่เคลื่อนที่หรือเริ่มเคลื่อนที่

ถ้าวัตถุเริ่มเคลื่อนที่

$$\boxed{f_s = \mu_s N}$$

μ_s คือ สัมประสิทธิ์ของความเสียดทานสถิต

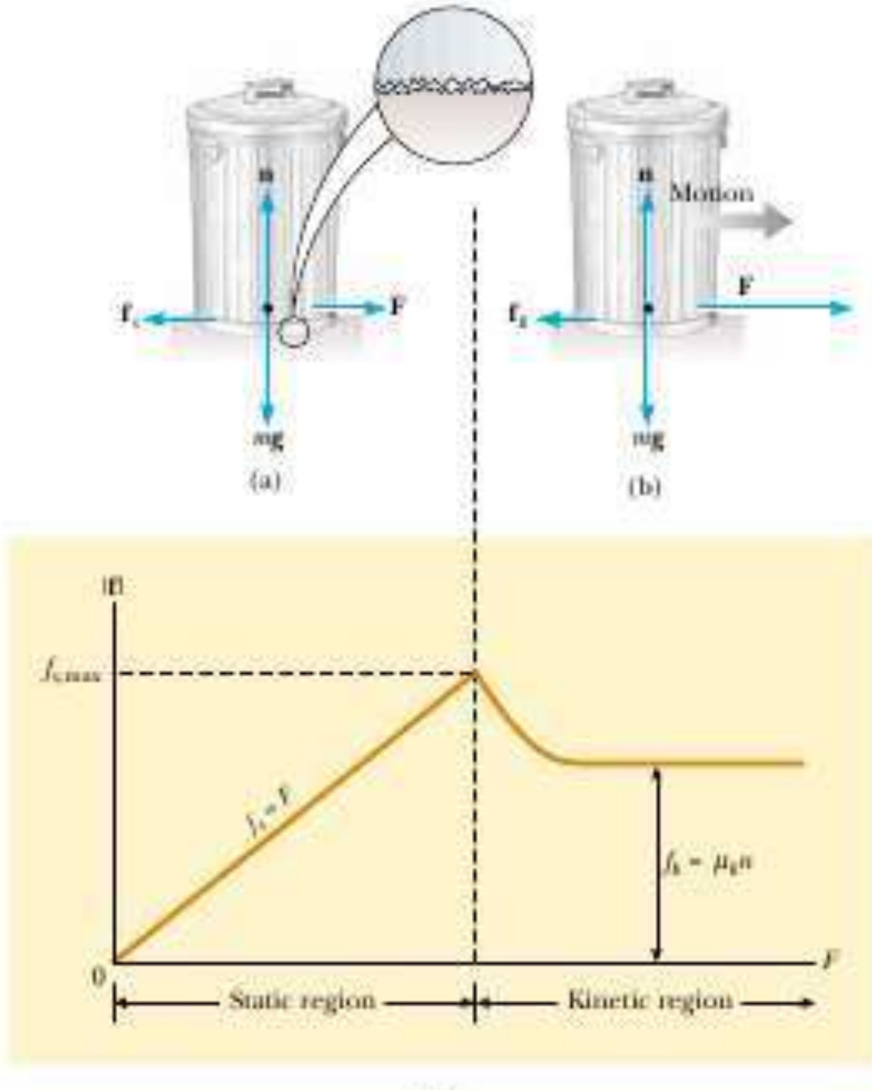
2. แรงเสียดทานจลน์ (f_k)

แรงเสียดทานจลน์ เกิดขึ้นขณะที่วัตถุกำลังเคลื่อนที่

$$f_k = \mu_k N$$

μ_k คือ สัมประสิทธิ์ของความเสียดทานจลน์

สำหรับผิวสัมผัสคู่หนึ่ง $\mu_s > \mu_k$



ที่มา: Physics for Scientists and Engineers, 6th Edn., R.A. Serway, J.W. Jewett, Thomson, 2004

Quick Quiz 5.6 ถ้าเอาหนังสือเล่มใหญ่ๆมากดราบไปกับผนังห้องที่อยู่ในแนวดิ่ง แรงเสียดทานที่ผนังกระทำต่อหนังสือจะอยู่ในทิศใด (เลือกได้มากกว่า 1 ข้อ)

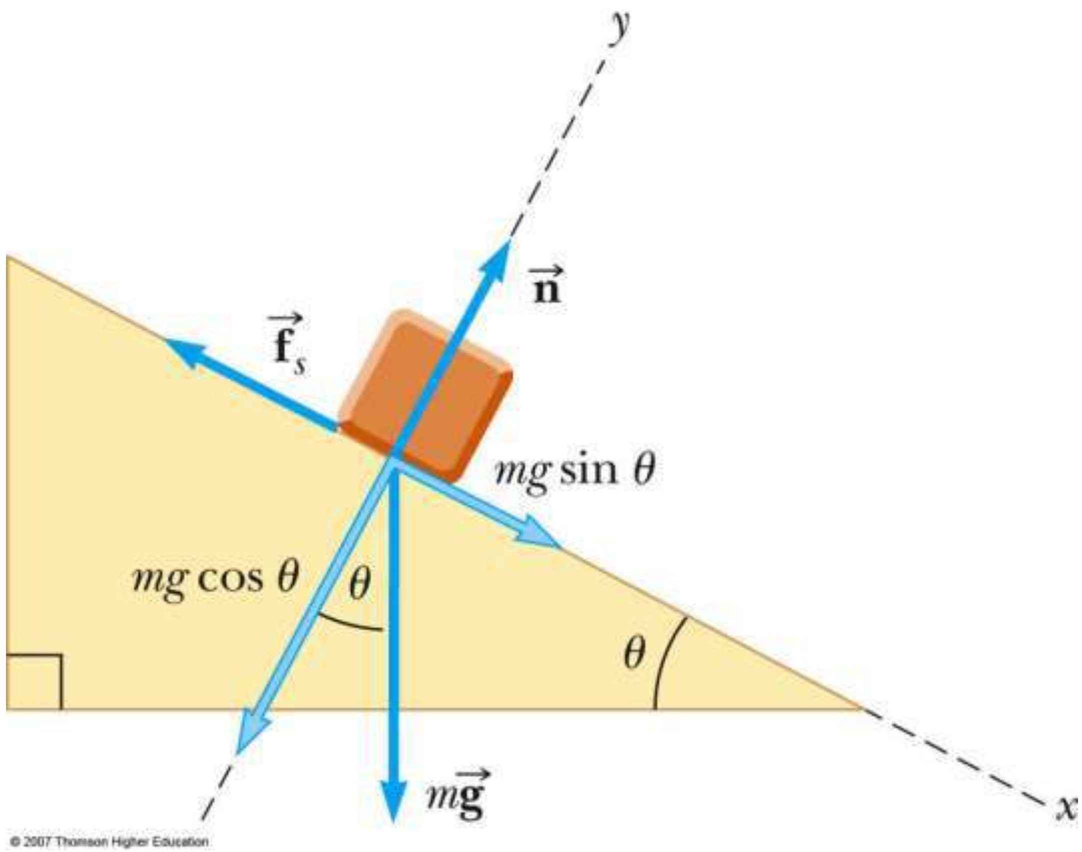
(ก) ชี้ลง

(ข) ชี้ขึ้น

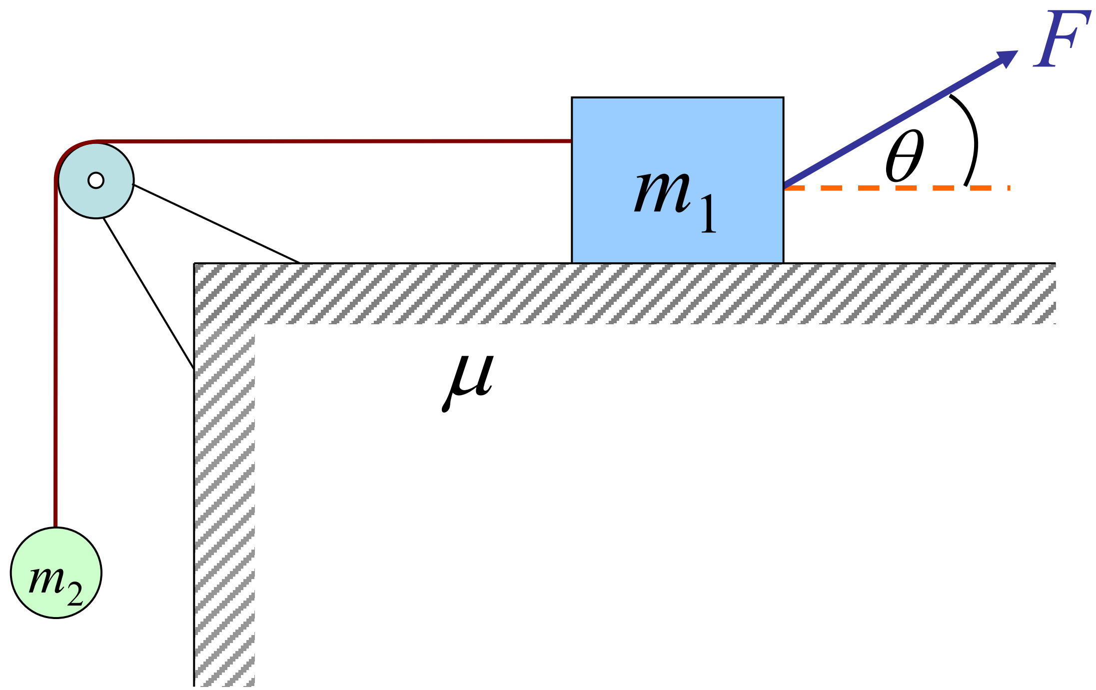
(ค) พุ่งออกจากผนัง

(ง) พุ่งเข้าผนัง

ตัวอย่างที่ 5.11 นำกล่องไปวางบนแผ่นไม้ ค่อยๆยกแผ่นไม้ขึ้นให้ทำมุม θ กับแนวราบ พบว่ากล่องเริ่มไถลลงขณะที่แผ่นไม้ทำมุม θ_c จงหาค่าสัมประสิทธิความเสียดทานสถิตย์ระหว่างแผ่นไม้กับกล่อง [$\mu_s = \tan\theta_c$]



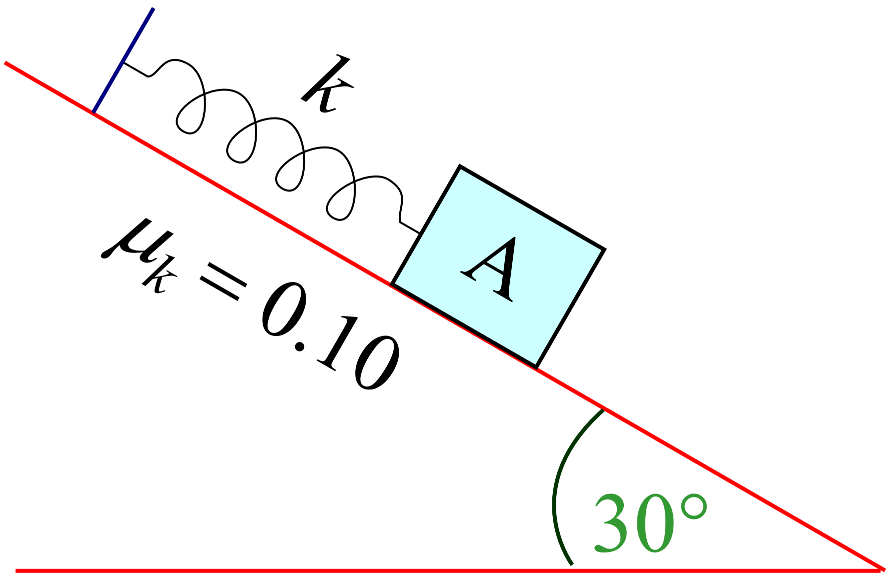
ตัวอย่าง 5.12 พิจารณาระบบดังรูป



เมื่อแรง F เป็นแรงที่เกิดจากการลากของผู้ทำการทดลอง จงหาค่าความเร่งของมวลในระบบ

$$a = \frac{F(\cos\theta + \mu\sin\theta) - g(m_2 + \mu m_1)}{m_1 + m_2}$$

ตัวอย่าง 5.13 จัดเครื่องมือทดลองดังรูป



กำหนดให้ ก้อน A หนัก 1,000 นิวตัน

ค่าคงที่สปริง $k =$ 102 นิวตันต่อเมตร จงหา

1) การกระจัดที่มากที่สุดที่ก้อน A (จาก $x = 0$) เคลื่อนที่ลงไปได้ตามระนาบเอียง [8 m]

2) ความเร็วของ A ที่ $x = 5$ m [$\sqrt{15}$ m/s]

3) เวลาที่ A ใช้ในการเคลื่อนที่จาก $x = 0$ ไปยัง $x = 6$ m [2.09 s]

4) ความเร่งของ A ขณะเริ่มเคลื่อนที่ขึ้น [-2.25 m/s^2]

บทที่ 6 การเคลื่อนที่แบบวงกลมและการประยุกต์อื่น ๆ ของกฎของนิวตัน

6.1 กฎข้อที่ 2 ของนิวตันสำหรับอนุภาคในการเคลื่อนที่แบบวงกลมคงที่

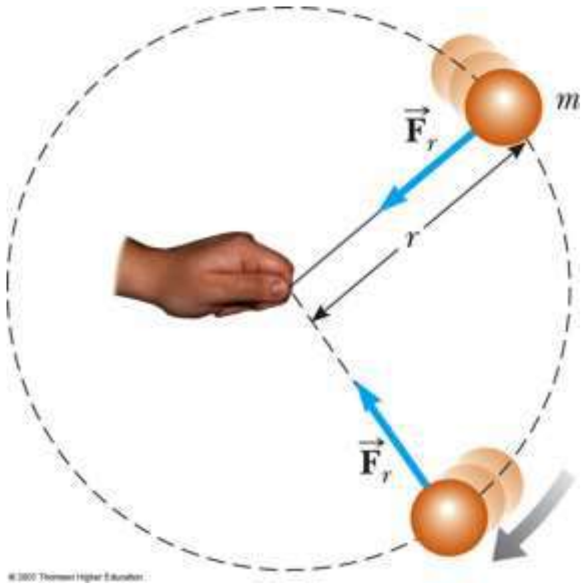
วัตถุเคลื่อนที่เป็นวงกลมด้วยอัตราเร็วคงที่ v รัศมี r จะมีความเร่งสู่ศูนย์กลาง a_c เมื่อ

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

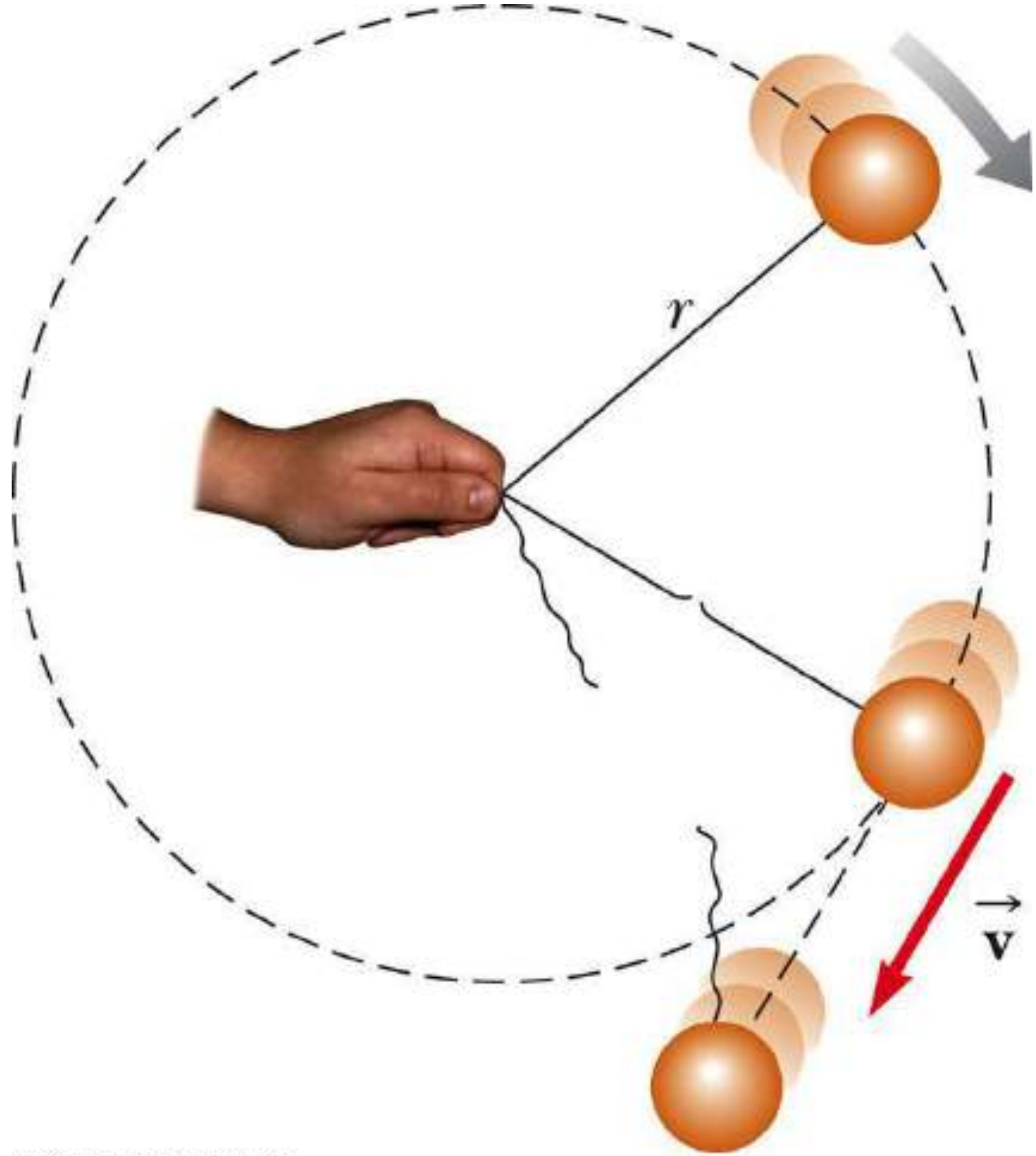
จากกฎข้อที่ 2 ของนิวตัน จะได้ว่า

$$\sum F = ma_c \quad \rightarrow \quad F_c = \frac{mv^2}{r} = F_r$$

เรียก F_r หรือ F_c ว่า แรงสู่ศูนย์กลาง (centripetal force)

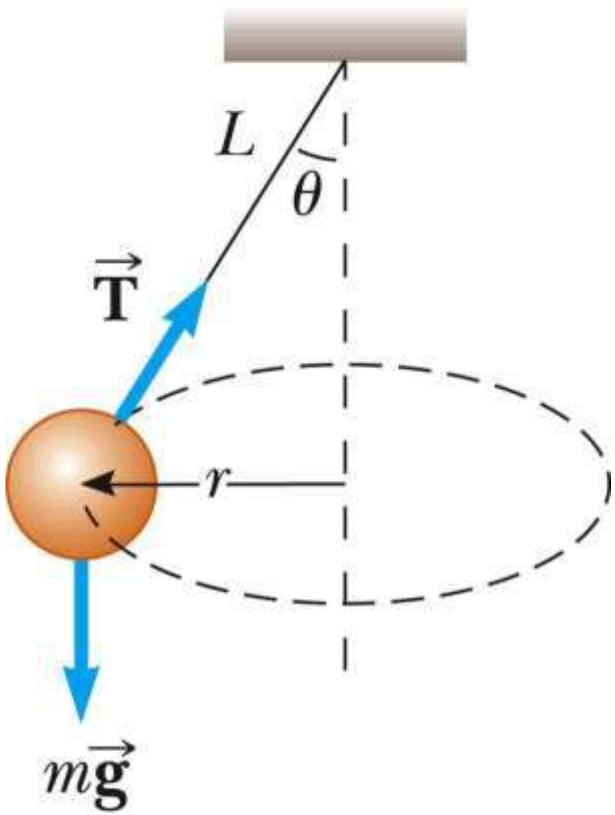


m
$\vec{F}_r$
r
$\vec{F}_r$



r
$\vec{v}$

ตัวอย่างที่ 6.1 ลูกบอลขนาดเล็กมวล m ผูกกับเชือกเบายาว L แกว่งให้เชือกทำมุม θ กับแนวดิ่ง และลูกบอลเคลื่อนที่เป็นวงกลมในแนวราบด้วยอัตราเร็วคงที่ v รัศมี r ดังรูป จงหาค่าของ v ในรูปของตัวแปรที่โจทย์กำหนด



6.2 การเคลื่อนที่ในการมีอยู่ของแรงต้าน (resistive force)

เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ในตัวกลางที่เป็นของเหลวหรือแก๊ส จะมีแรงที่กระทำตรงข้ามการเคลื่อนที่ เรียกว่า แรงต้าน (resistive force, $\vec{R}$)

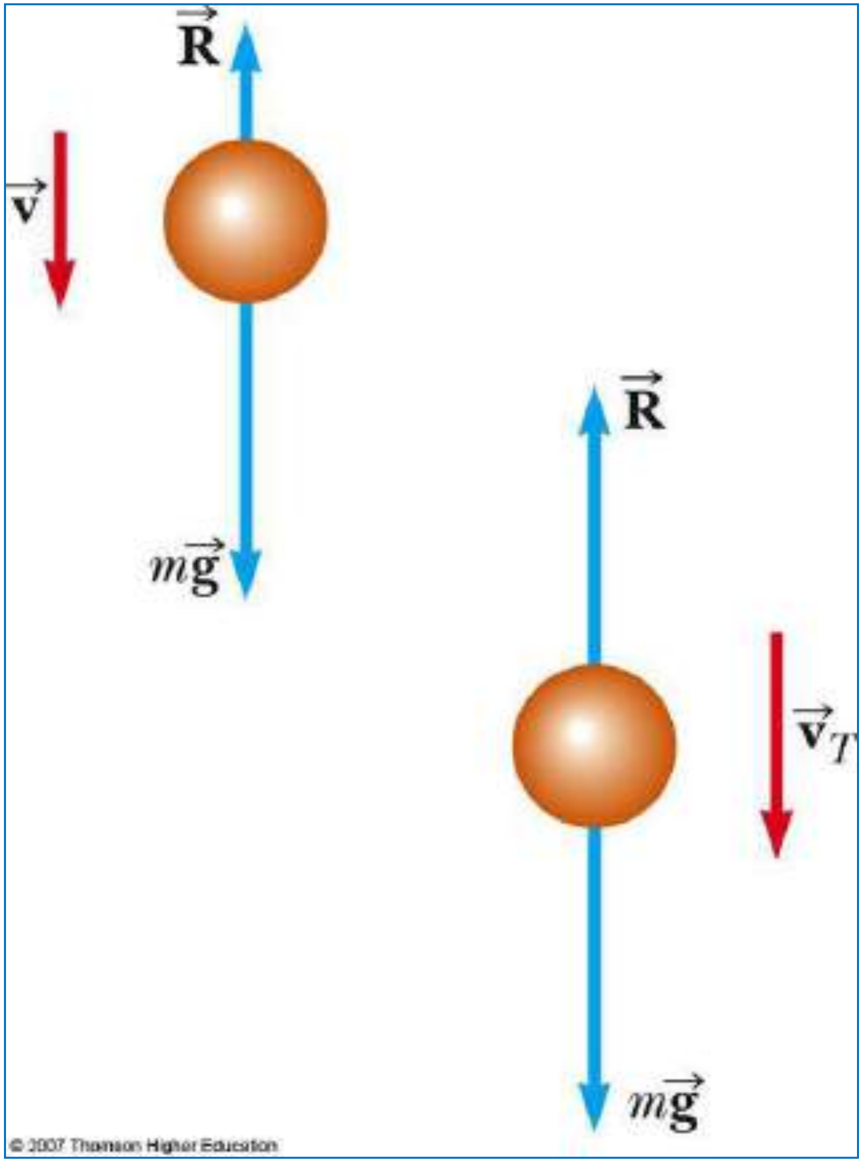
ผู้กระทำ : ตัวกลาง ผู้ถูกกระทำ : วัตถุ

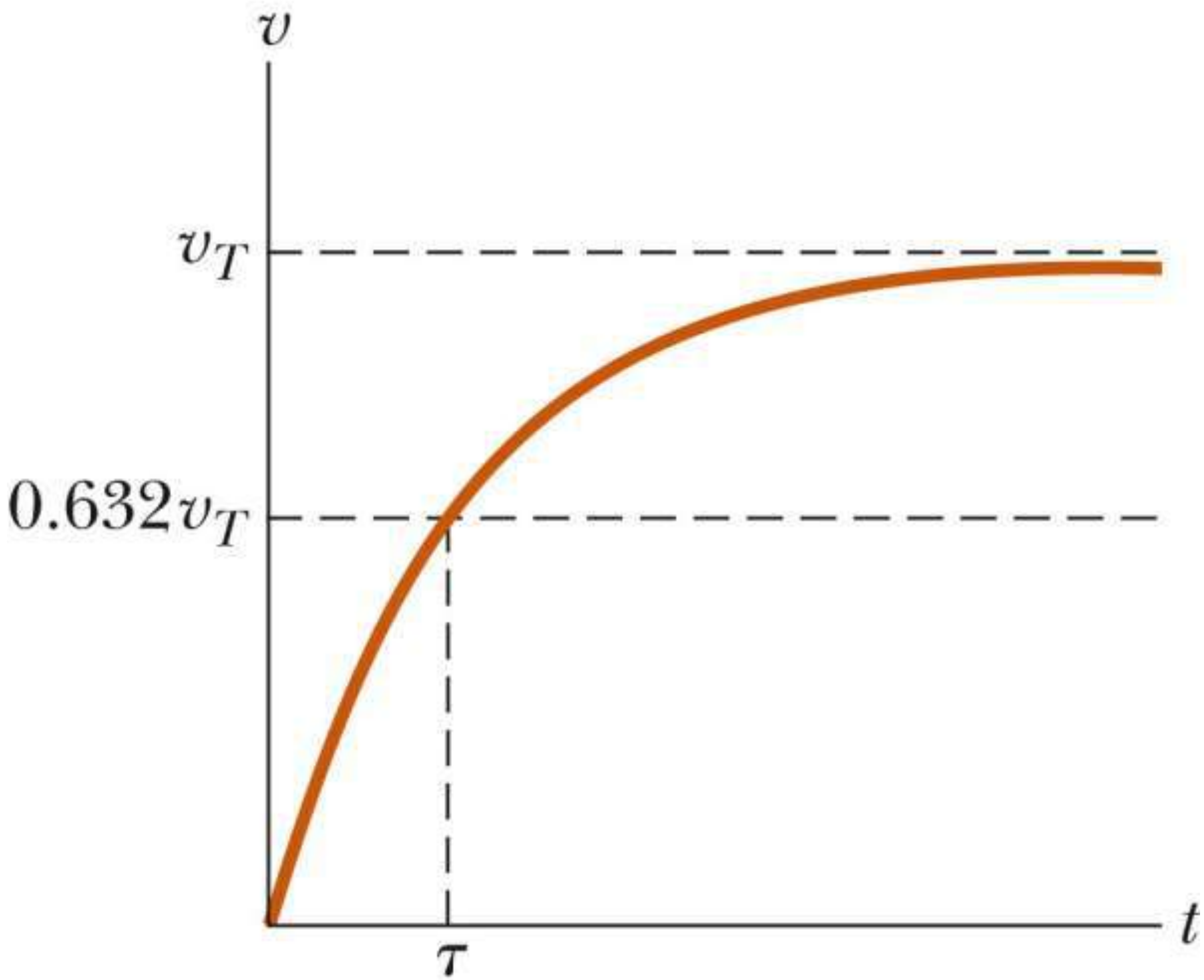
ทิศของแรงต้าน $\vec{R}$: ตรงข้ามกับทิศการเคลื่อนที่ของวัตถุ

ขนาดของแรงต้าน R : ขึ้นกับสมบัติของตัวกลาง รูปร่างของวัตถุ อัตราเร็วของวัตถุ

แรงต้านจากอากาศ : air drag / drag force

แรงต้านจากของเหลว : แรงหนืด (viscous force)


$\vec{R}$
$\vec{v}$
$m\vec{g}$
$\vec{R}$
$\vec{v}_T$
$m\vec{g}$
© 2007 Thomson Higher Education



(c)

กรณี $R \propto v$: [redacted] เมื่อ $b =$ ค่าคงที่

พิจารณาการเคลื่อนที่ของมวล m ภายใต้แรง m[redacted] และ [redacted]

จาก $$\Sigma F = ma$$

$$mg - R = ma$$ เมื่อ $a \neq$ ค่าคงที่

$$mg - bv = m\frac{dv}{dt} \quad \rightarrow \quad v(t) = ?$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{b}{m}v$$

$$\int \frac{dv}{g - \frac{b}{m}v} = \int dt$$

พิจารณา $\int \frac{dv}{g-\frac{b}{m}v} = \int dt$

ให้ $u = g-\frac{b}{m}v \quad \rightarrow \quad du = -\frac{b}{m}dv$

$$dv = -\frac{m}{b}du$$

$$\int \frac{dv}{g-\frac{b}{m}v} = -\frac{m}{b}\int \frac{1}{u}du = -\frac{m}{b}\ln u + \text{const.}$$

$$= -\frac{m}{b}\ln\left(g-\frac{b}{m}v\right) + \text{const.}$$

จาก $\int \frac{dv}{g-\frac{b}{m}v} = \int dt$ และเงื่อนไขเริ่มต้น $t = 0, v = 0$

จะได้

$$\boxed{v(t) = \frac{mg}{b}\left(1-e^{-\frac{bt}{m}}\right)}$$

จาก $$v(t) = \frac{mg}{b}\left(1-e^{-\frac{bt}{m}}\right)$$

เมื่อ t มีค่ามาก ($t \to \infty$)

$$v = v_T = \frac{mg}{b}$$

เมื่อ v_T คือ terminal speed

$$\therefore \quad \boxed{v(t) = v_T\left(1-e^{-\frac{bt}{m}}\right)}$$

และ $\tau = \frac{m}{b}$ คือค่าคงที่เวลา (time constant)

กรณี $R \propto v^2$:

$$R = \frac{1}{2} D \rho A v^2$$

เมื่อ $D =$ ค่าสัมประสิทธิ์แรงต้าน (drag coefficient) ขึ้นกับรูปร่างวัตถุ

$\rho =$ ความหนาแน่นตัวกลาง

$A =$ พื้นที่หน้าตัดของวัตถุ

จะได้

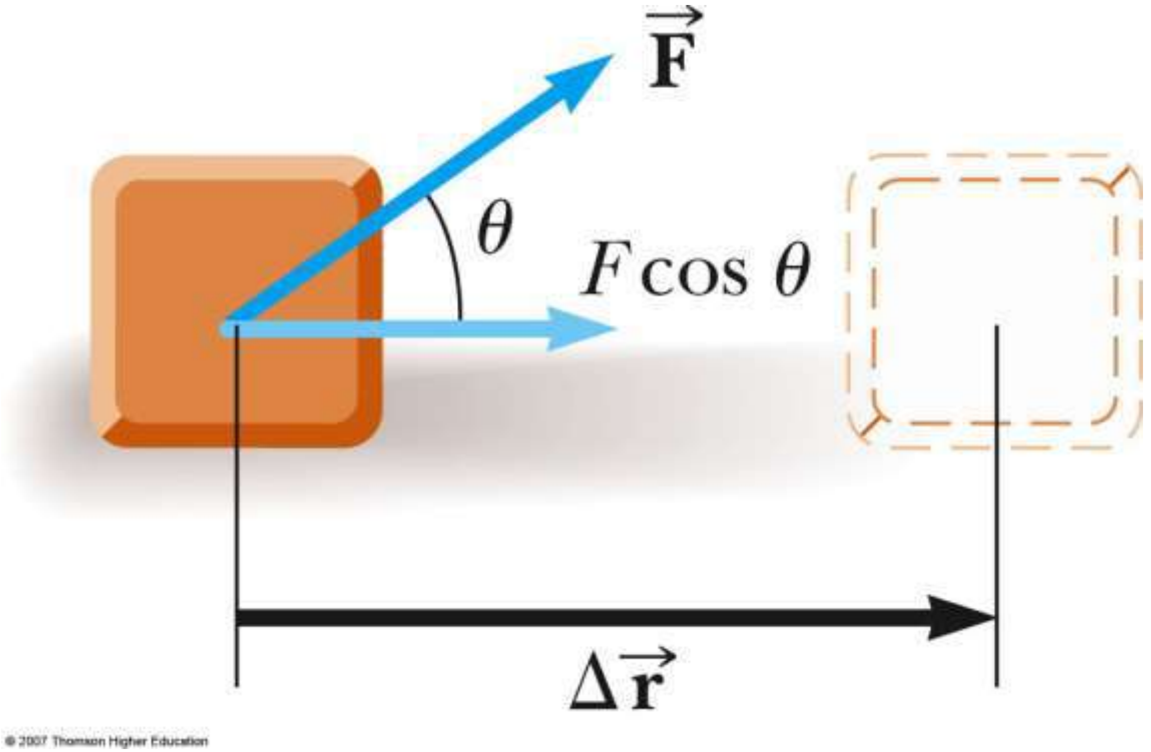
$$\boxed{v_T = \sqrt{\frac{2mg}{D \rho A}}}$$

บทที่ 7 พลังงานของระบบ (energy of a system)

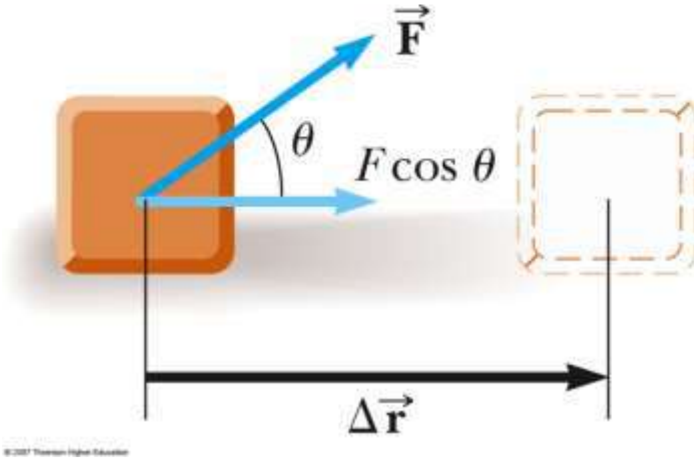
ระบบ (system)

ถ้าเราเลือกพิจารณาอนุภาคเดี่ยวหรือกลุ่มอนุภาค วัตถุก้อนเดียวหรือกลาย ๆ ก้อนก็ตาม เราเรียกสิ่งที่เรากำลังพิจารณารวม ๆ กันว่า ***ระบบ (system)*** แรงระหว่างอนุภาคหรือวัตถุภายในระบบ เรียกว่า ***แรงภายใน (internal force)*** แรงระหว่างอนุภาคหรือวัตถุภายในระบบกับสิ่งต่าง ๆ นอกระบบ เรียกว่า ***แรงภายนอก (external force)***

งาน



$\vec{F}$
θ
$F\cos\theta$
$\Delta\vec{r}$
© 2007 Thomson Higher Education



งานที่แรง [redacted] ทำต่อกล่อง

$$W \equiv (F\cos\theta)(\Delta r)$$

Dimension ของงาน ?   หน่วยของงาน ?

งานเป็นปริมาณสเกลาร์ (scalar) ที่คำนวณจากปริมาณเวกเตอร์ 2 ตัว

$$W = [redacted]$$

นิยามของงาน

“งานเท่ากับขนาดของการกระจัดคูณกับองค์ประกอบของแรงในแนวของการกระจัด”

หน่วยของงานในระบบ S.I. UNIT ได้แก่ นิวตัน·เมตร (N·m) หรือ กิโลกรัม·เมตร^{2}ต่อวินาที^{2} หรือเรียกว่า จูล (J)

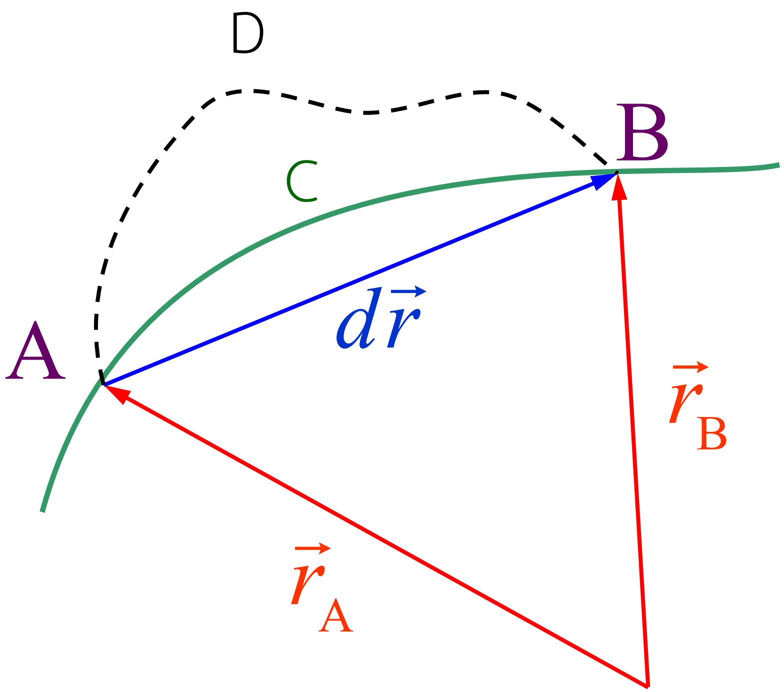
ถ้า $\Delta\vec{r}$ มีค่าน้อย ๆ แล้ว $\Delta\vec{r} \rightarrow d\vec{r}$ ดังนั้น

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

งานทั้งหมดที่แรง $\vec{F}$ กระทำต่อวัตถุจนวัตถุเคลื่อนที่จากจุด A ถึงจุด B หาได้จาก

$$\boxed{W = \int dW = \int_{A}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{r}}$$

7.1 งานเนื่องจากแรงคงที่



พิจารณาวัตถุที่ถูกกระทำด้วยแรง

$\vec{F}$ คงที่ทำให้เคลื่อนที่จากจุด A ไปยัง

จุด B ตามเส้นทาง C และ D

d [redacted]

งานในการเคลื่อนที่วัตถุจาก A ไป B ด้วยแรง $\vec{F}$ คงที่

$$W = \int \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$= \vec{F}\cdot\int_A^B d\vec{r}$$

$$= \vec{F}\cdot(\vec{r}_B - \vec{r}_A)$$

$$\therefore \quad \boxed{W = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}}$$

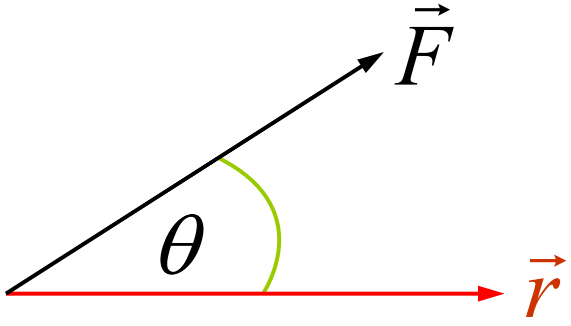
งานเนื่องจากแรงคงที่จะขึ้นกับตำแหน่งเริ่มต้น และตำแหน่งสุดท้ายเท่านั้น ไม่ขึ้นกับลักษณะเส้นทางเลย ถ้าวัตถุมีการกระจัดเท่ากันก็จะเกิดงานเท่ากัน

และเนื่องจาก

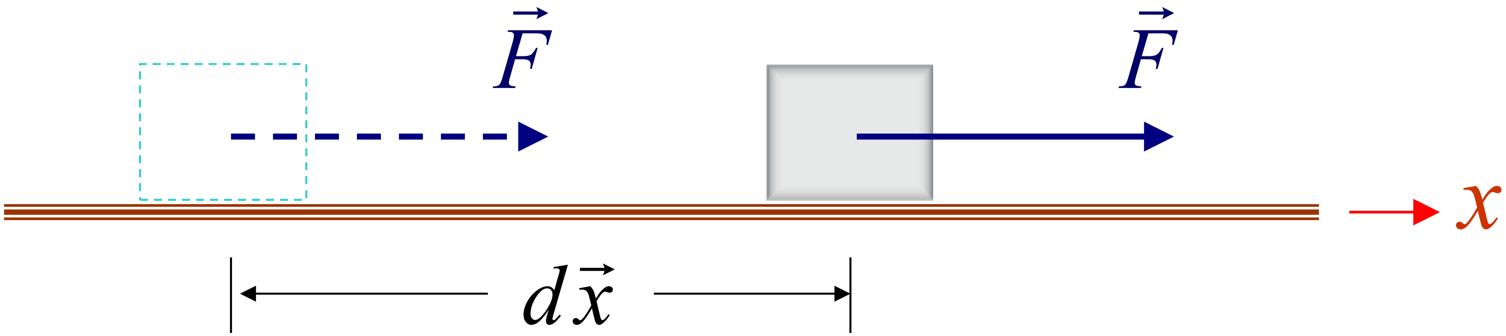
$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = F\,dr\cos\theta$$

เมื่อ θ คือมุมระหว่างทิศของแรง $\vec{F}$ กับการกระจัด $d\vec{r}$

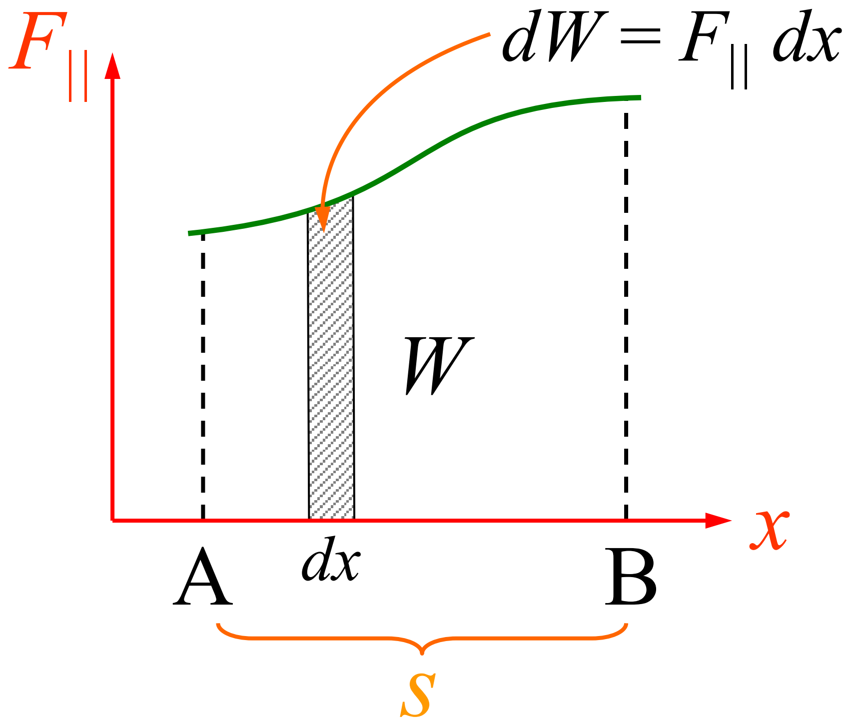
$F\cos\theta$ คือองค์ประกอบของแรงในแนวเส้นสัมผัสกับวิถีเคลื่อนที่



ถ้าสมมติให้วัตถุเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงตามแนวแกน x



งานย่อย dW ของแรง $\vec{F}$ ที่กระทำต่อวัตถุในช่วงการกระจัด $d\vec{x}$ มีค่าเท่ากับพื้นที่ใต้กราฟระหว่างแรงกับการกระจัด



ดังนั้น

$$W = \int dW = \int_A^B F\cos\theta\, dx$$

ถ้าแรงมีขนาดและทิศคงที่จะได้

$$W = F\cos\theta \int_A^B dx = F(\cos\theta)s$$

$$= Fs\cos\theta$$

ถ้ามีหลายแรงกระทำต่อวัตถุ

$$W_{net} = \int dW_{net} = \int_{x_i}^{x_f} (\sum F_x)\, dx$$

ถ้าเป็นการเคลื่อนที่ในใน 3 มิติจะได้

$$W_{net} = \int dW_{net} = \int (\sum$$ [redacted]

โดย [redacted] $y_i\,\hat{j}+z_i\,\hat{k}$

[redacted] $y_f\,\hat{j}+z_f\,\hat{k}$

d [redacted] $dy\,\hat{j}+dz\,\hat{k}$

ถ้าเป็นการเคลื่อนที่ในใน 3 มิติจะได้

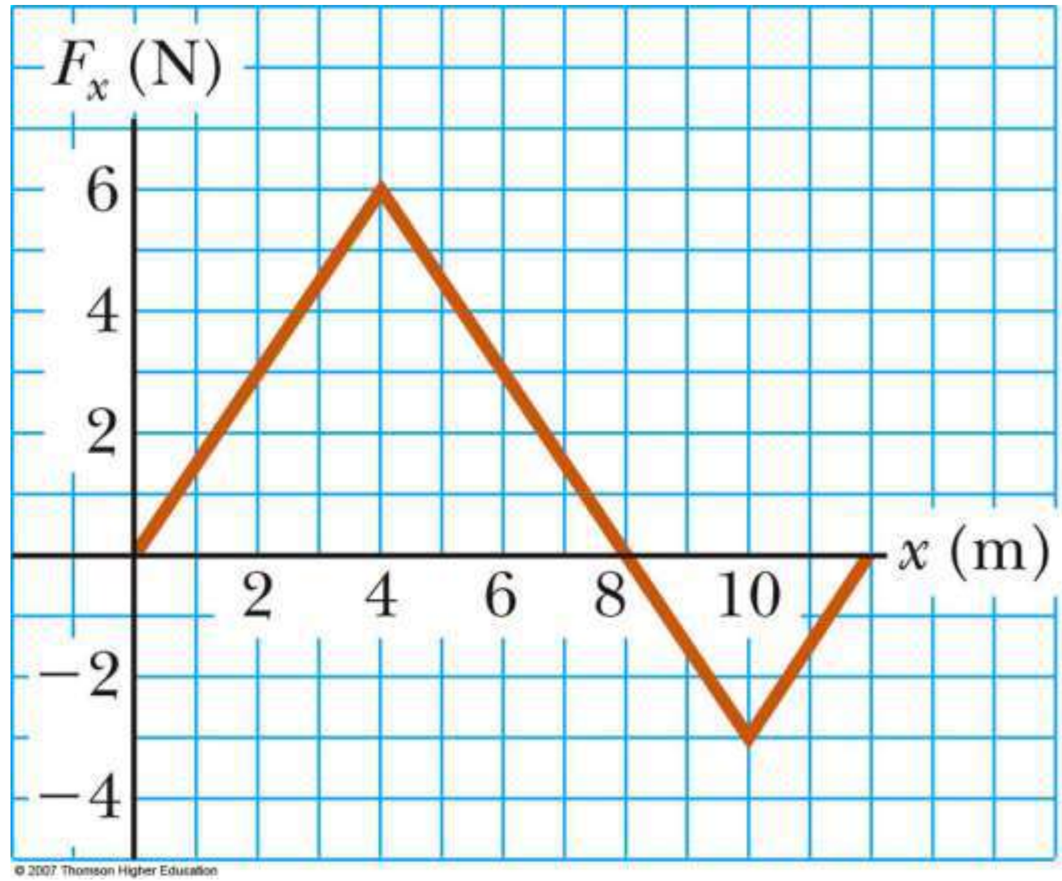
$$W_{net} = \int_{x_i}^{x_f}(\sum F_x)\,dx+\int_{y_i}^{y_f}\sum F_y)\,dy+\int_{z_i}^{z_f}(\sum$$ [redacted]

ตัวอย่าง 7.12 แรง [redacted] $+3y\hat{j}$ N กระทำต่อวัตถุ ทำให้วัตถุเลื่อนที่

จากตำแหน่ง (0,0) ไปยังตำแหน่ง (5,0) จงหางานของแรงนี้ [50 J]

$$\Sigma W = \int_0^5 4x\,dx + \int_0^0 3y\,dy$$

ตัวอย่าง 7.13 วัตถุหนึ่งเคลื่อนที่ใน 1 มิติ ภายใต้แรง F_x ที่เกิดขึ้นกับตำแหน่ง ดังแสดงในกราฟ จงหางานของแรงในช่วง



1. จาก $x = 0$ ไป $x = 8$ m

$W = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24$

2. จาก $x = 8$ ไป $x = 10$ m

$W = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (-3) = -6$

3. จาก $x = 0$ ไป $x = 10$ m

$\Sigma W = 18$

ตัวอย่าง 7.1 จงหางานในการเคลื่อนวัตถุไปตาม $\vec{r} = 4\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ m ด้วยแรง $\vec{F} = 3\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k}$ N [11 J]

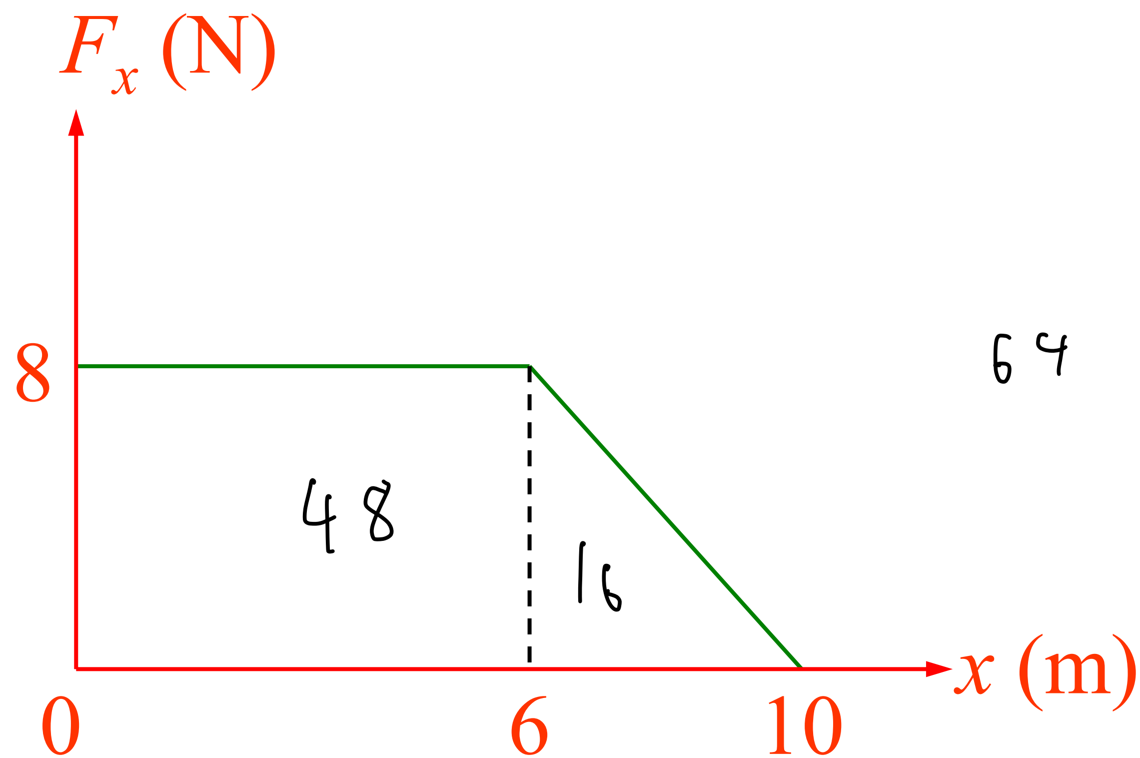
$$W = \vec{F}\cdot\vec{r}$$

$$= (3\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k})(4\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})$$

$$= 12-4+3$$

$$= 11\ \mathrm{J}$$

ตัวอย่าง 7.2 จงหางานของแรงที่แปรตามระยะ x ดังรูป เมื่อวัตถุเลื่อนจาก $x = 0$ m ถึง $x = 10$ m [64 J]



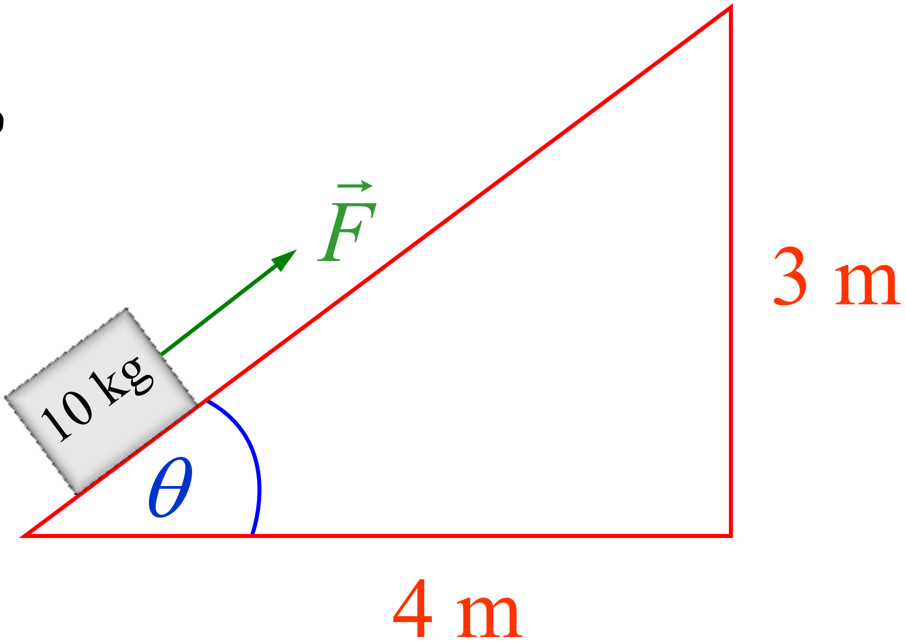
ตัวอย่าง 7.3 ออกแรงผลักกล่องขึ้นพื้นเอียงไปบนสุดดังรูป จงหางานในการผลักกล่องนี้ (ให้ถือว่าพื้นลื่นมาก) [294 J]

1) v คงที่

$F - mg\sin\theta = 0$

2) พิจารณาในแนวดิ่ง

$W = F \cdot s = mgh$



7.2 งานเนื่องจากแรงไม่คงที่

1. แรงที่มีขนาดไม่คงที่ ขึ้นกับตำแหน่ง แต่มีทิศคงที่

- แรงคืนตัวของสปริง (restoring force) สปริงกระทำต่อมวล

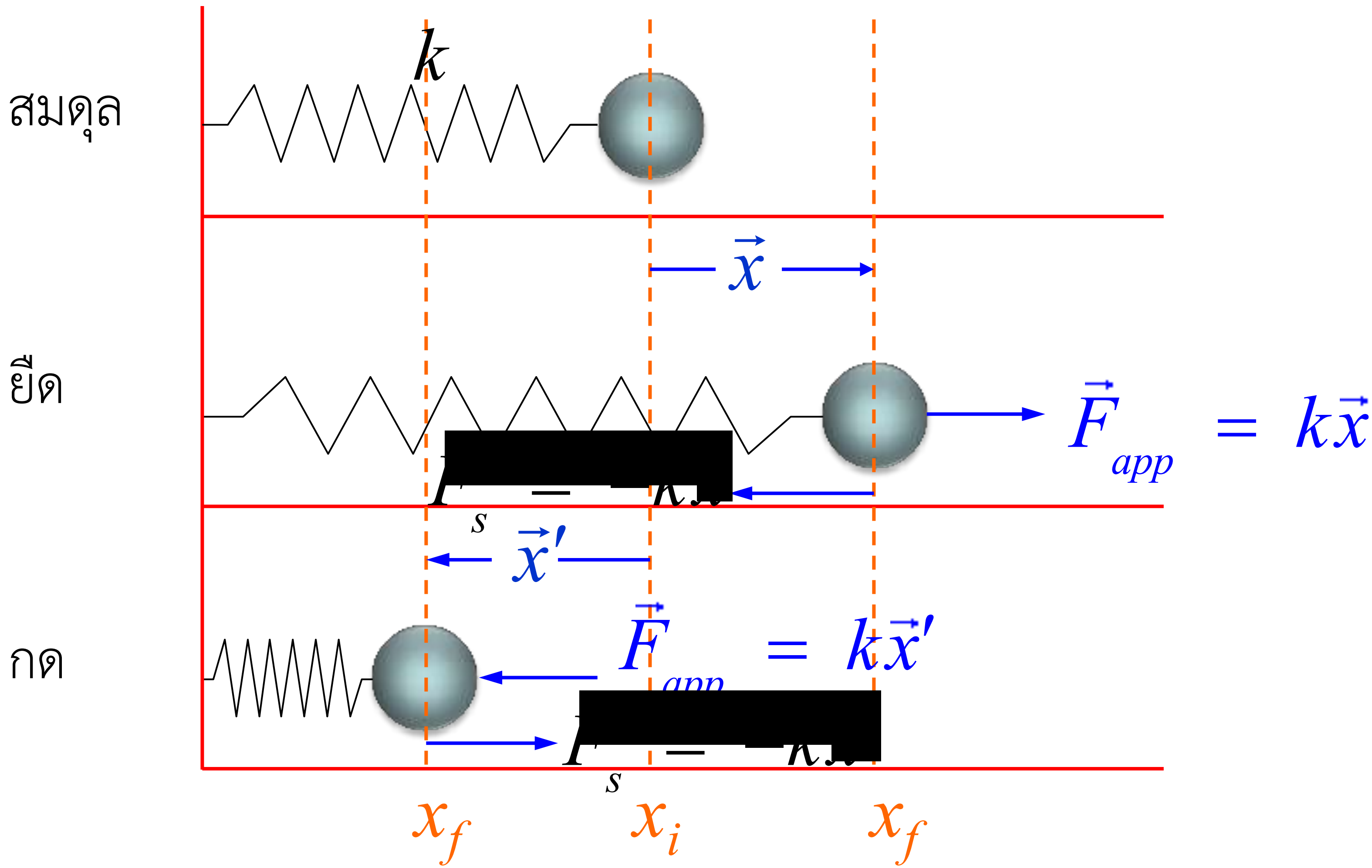
F_s [redacted]   **Hooke's law**

เมื่อ $\vec{x}$ คือการกระจัดจากตำแหน่งสมดุลของสปริง

k คือค่าคงที่ของแรงของสปริง

เครื่องหมาย ลบ แรงมีทิศตรงข้ามกับการกระจัดของมวลเทียบตำแหน่งสมดุล

แรงคืนตัวของสปริงนี้เกิดจากแรงภายนอก [redacted] $_{app}$



งานที่ [redacted]$_{app}$ กระทำน้อยที่สุดที่ทำให้มวลเคลื่อนที่ คือ

$$W_{app} = \int_{x_i}^{x_f} F_{app}\, dx = \int_{x_i}^{x_f} kx\, dx$$

$$= \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2$$

ปริมาณ $\frac{1}{2}kx^2$ คือพลังงานศักย์ยืดหยุ่นของสปริง (elastic potential energy) ที่ตำแหน่ง x

งานที่สปริงทำ หรืองานของสปริงเองหาจากแรงคืนตัวของสปริง (F_s) นั่นคือ

$$W_s = \int_{x_1}^{x_2} F_s \, dx = \int_{x_1}^{x_2} (-kx) \, dx$$

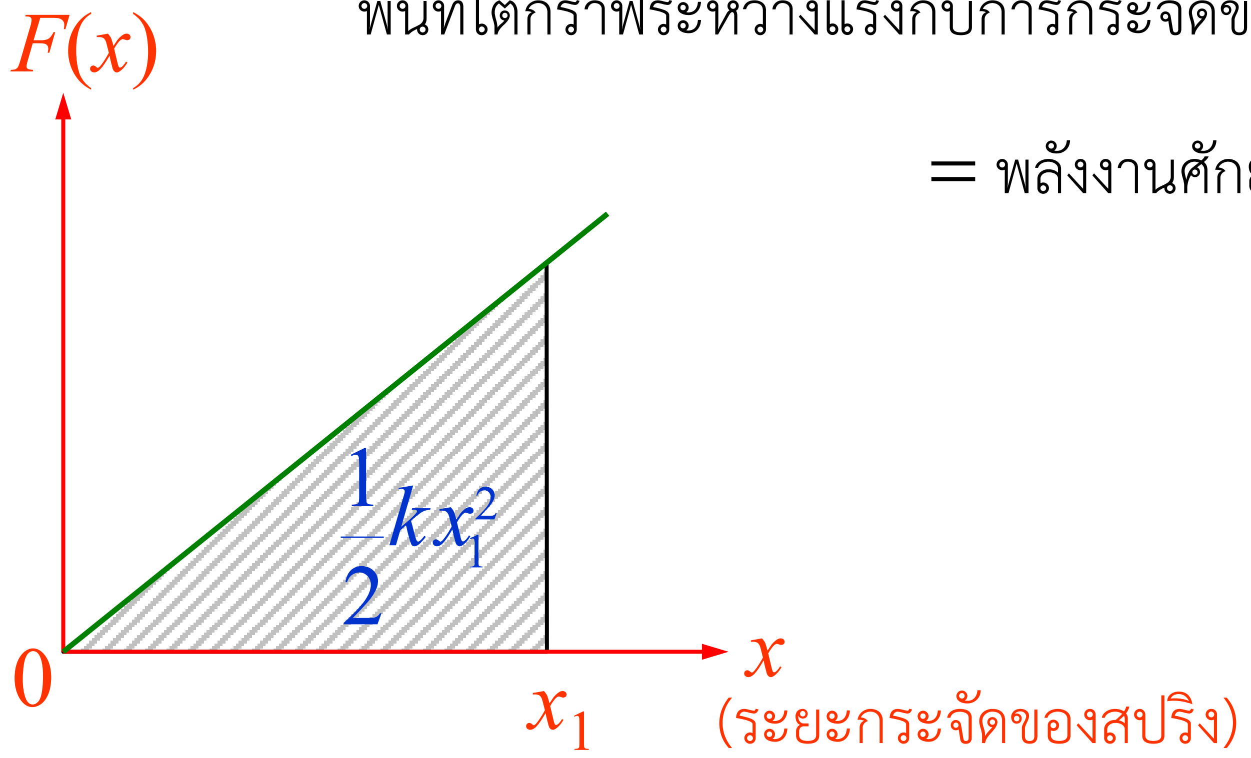
$$= -\left(\frac{1}{2} k x_2^2 - \frac{1}{2} k x_1^2 \right)$$

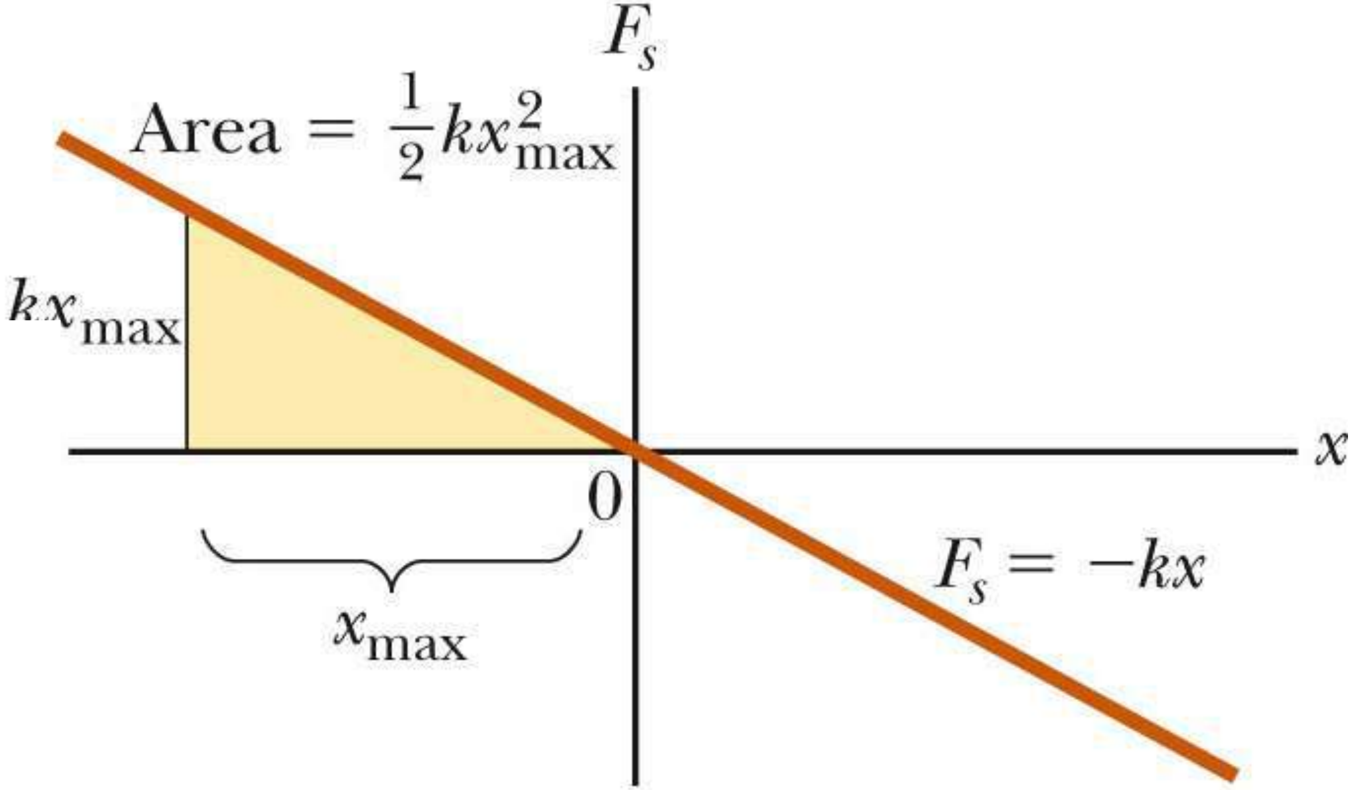
ซึ่งมีขนาดเท่ากับงานของแรงภายนอก ([redacted] $_{app}$) แต่มีเครื่องหมายตรงกันข้าม

ดังนั้นหากเราเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงกับระยะการกระจัดของสปริง

พื้นที่ใต้กราฟระหว่างแรงกับการกระจัดของสปริง

$= $ พลังงานศักย์ยืดหยุ่นของสปริง




F_s
Area $= \frac{1}{2}kx^2_{max}$
kx_{max}
x
0
x_{max}
$F_s = -kx$

ตัวอย่าง 7.7 สปริงตัวหนึ่งมีค่าคงที่ 15 N/cm

1) จงหางานที่ใช้ในการยืดสปริงออก 7.6 mm จากตำแหน่งสมดุล [0.0433 J]

2) ต้องใช้งานอีกเท่าไร เพื่อยืดสปริงออกอีก 7.6 mm [0.129 J]

2. แรงที่มีขนาดคงที่ แต่ทิศทางไม่คงที่

- การเคลื่อนที่ของวัตถุเป็นวงกลม ⇒ แรงสู่ศูนย์กลาง

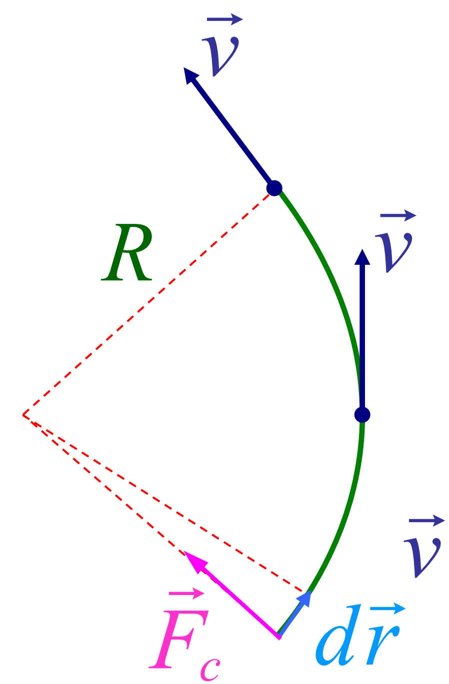
เมื่อวัตถุเคลื่อนที่เป็นวงกลมจะมีแรงสู่ศูนย์กลาง ($\vec{F}_c$) และมีทิศเข้าหาจุดศูนย์กลางการเคลื่อนที่

ดังนั้น $\vec{F}_c \perp d\vec{r}$ เสมอ

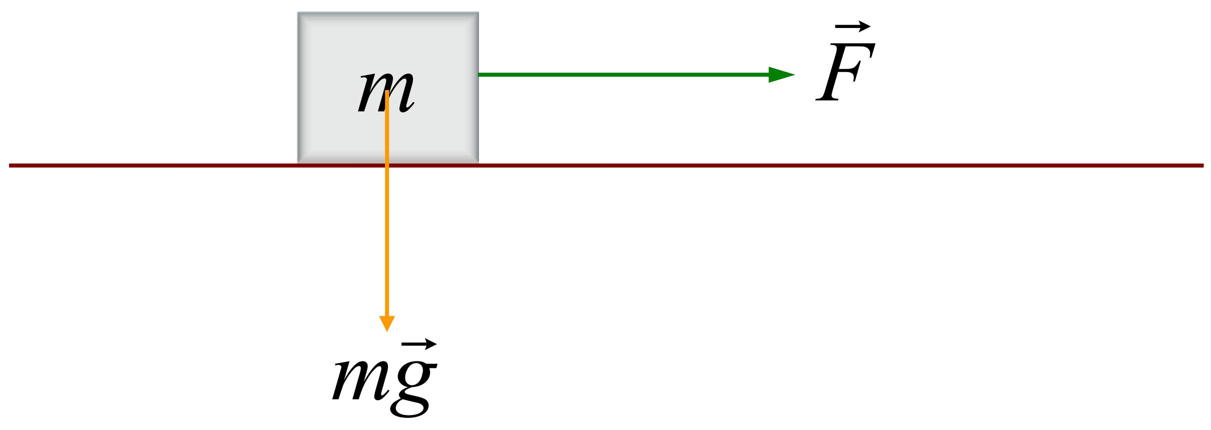
$d\vec{r}$ คือเวกเตอร์ของส่วนของเส้นรอบวงของวงกลม

และมีทิศตั้งฉากกับแรงสู่ศูนย์กลาง

$$\therefore \quad W = \vec{F}_c \cdot d\vec{r} = 0$$



- การเคลื่อนที่ของวัตถุในแนวราบ $\Rightarrow$ แรงเนื่องจากความโน้มถ่วง



3. แรงที่มีทั้งขนาดและทิศทางไม่คงที่

- การเคลื่อนที่ของวัตถุในสนามของแรง

ดูตัวอย่างในหนังสือฟิสิกส์ 1 (ตัวอย่างที่ 3.5)

ตัวอย่าง 7.6 ถ้าต้องการเคลื่อนที่วัตถุจากจุด A ไปยังจุด B ภายใต้สนามของแรง

$\vec{F} = -y\hat{i} + x\hat{j}$ N งานที่ใช้จะมีขนาดเท่าใดในเส้นทาง AB, ADCB และ ACB

[2 J, 6 J, 4 J]

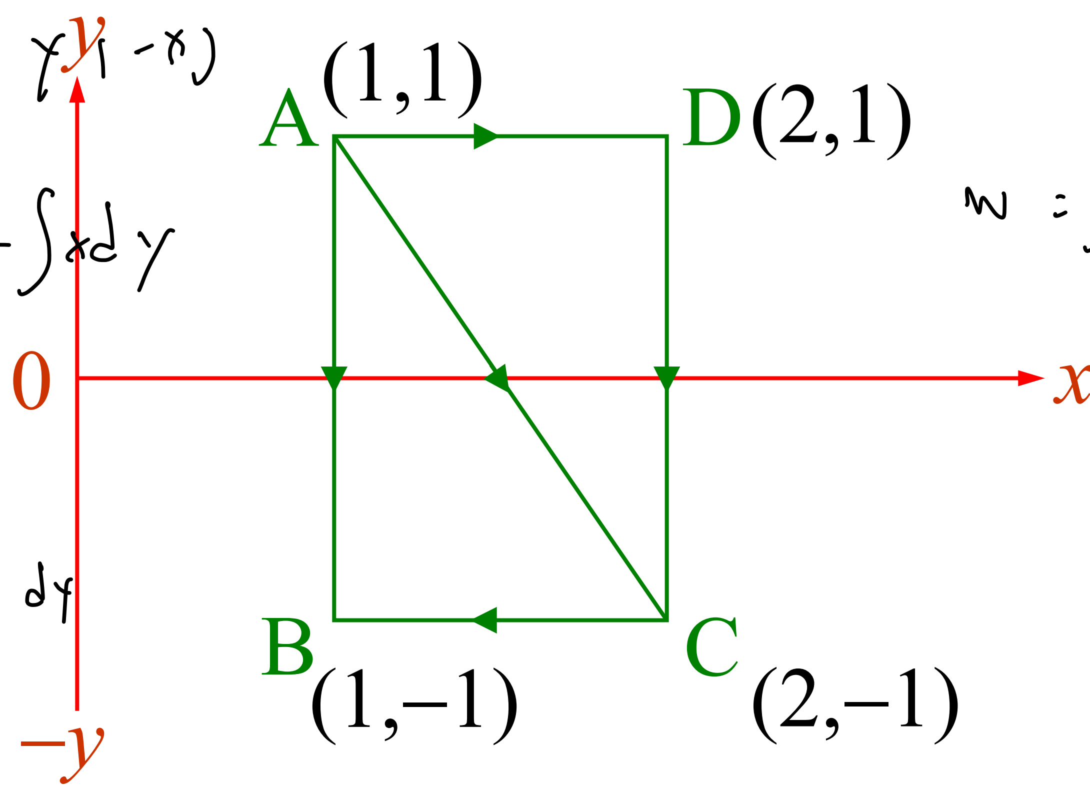
$\vec{F}' = -\vec{F} = y\hat{i} - x\hat{j}$

$W = \int y\,dx - \int x\,dy$

AB

$W = 0 - \int_{1}^{-1} 1\,dy$

$= 2$



ADCB

$W = \int y\,dx - \int x\,dy$

$+ \int y\,dx - \int x\,dy$

$+ \int y\,dx - \int x\,dy$

$= \int_{1}^{2} 1\,dx - 0$

$+ 0$

ACB

1) $A \to C$ หาสมการ

slope $= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-(-1)}{1-2} = -2$

$C = 3$

$y = -2x+3$

$dy = -2dx$

$W = \int_{r_i}^{r_f} (y\,dx - x\,dy)$

แทน dy และ y $W = \int_1^2 (-2x+3)\,dx - x(-2dx) + \int_2^1 (-1)\,dx$

$= 3 + 1 = 4$

7.3 กำลัง (power)

กำลัง (power) คืออัตราการทำงาน หรือปริมาณงานที่ทำต่อหนึ่งหน่วยเวลา

กำลังเฉลี่ย (average power)

$$P_{av} = \frac{W}{t} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

หน่วยคือ จูลต่อวินาที (J/s) หรือวัตต์ (Watt)

กำลังขณะหนึ่ง (instantaneous power)

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}\cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$\therefore$

$$\boxed{P = \vec{F}\cdot\vec{v}}$$

7.4 พลังงาน (Energy)

พลังงาน (energy) ⇒ พลังงานความร้อน พลังงานเคมี พลังงานไฟฟ้า ฯลฯ

พลังงานกล (mechanical energy) แบ่งเป็น 2 ประเภทคือ

1. พลังงานจลน์ (kinetic energy)

2. พลังงานศักย์ (potential energy)

แรงอนุรักษ์ (conservative force)

แรงที่กระทำกับวัตถุหรืออนุภาคใด ๆ มี 2 ประเภท คือ

1. แรงอนุรักษ์ (conservative force)

2. แรงไม่อนุรักษ์ (non-conservative force)

แรงอนุรักษ์ในแง่ของงานสามารถกำหนดเงื่อนไขดังนี้

"A force is conservative if the work it does on an object moving between any two points is independent of the path taken by the object."

"แรงหนึ่งเป็นแรงอนุรักษ์ ถ้างานที่กระทำบนวัตถุเคลื่อนที่ระหว่างสองจุดใด ๆ ไม่ขึ้นกับเส้นทางการเคลื่อนที่ของวัตถุ"

หรือ

"The work done by a conservative force depends only on the initial and final coordinates of the object."

"งานที่กระทำโดยแรงอนุรักษ์ จะขึ้นอยู่กับตำแหน่งเริ่มต้นและตำแหน่งสุดท้ายของวัตถุ"

หรือ

“A force is conservative if the work it does on an object moving through any closed path is zero.”

“แรงจะอนุรักษ์ ถ้างานที่กระทำบนวัตถุเคลื่อนที่ผ่านเส้นทางปิดใด ๆ มีค่าเป็นศูนย์”

$$W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

ตัวอย่างของแรงอนุรักษ์ เช่น แรงโน้มถ่วง (gravitational force) แรงคืนตัวของสปริง (restoring force)

แรงไม่อนุรักษ์ (non-conservative force)

งานของแรงไม่อนุรักษ์จะขึ้นกับตำแหน่งและเส้นทางการเคลื่อนที่ของวัตถุ และถ้าแรงใด ๆ ที่กระทำต่อวัตถุหรืออนุภาคให้เคลื่อนที่ไปและกลับ แล้วงานลัพธ์มีค่าไม่เป็นศูนย์ เรียกแรงนั้นว่า **แรงไม่อนุรักษ์**

ตัวอย่างของแรงไม่อนุรักษ์เช่น แรงเนื่องจากความเสียดทาน

สรุป

1. แรงที่สามารถทำงานได้เท่ากันในการย้ายวัตถุระหว่างจุดสองจุดโดยไม่ขึ้นกับทางเดินของแรงในระหว่างสองจุดนั้นเรียกว่า ***แรงอนุรักษ์***

2. แรงที่อยู่นอกเหนือจากข้อ 1. เป็น***แรงไม่อนุรักษ์***

3. แรงอนุรักษ์อาจเป็นแรงคงที่ หรือมีขนาดและทิศทางขึ้นกับตำแหน่งที่แรงกระทำเพียงอย่างเดียว (ไม่ขึ้นกับความเร็ว ฯลฯ)

ตัวอย่าง 7.13 แรงต่อไปนี้ เป็นแรงอนุรักษ์หรือไม่

แรงโน้มถ่วง ✓

แรงเสียดทาน ✗

แรงที่ขึ้นกับเวลา ✗

แรงคืนตัวของสปริง ✓

ตัวอย่าง 7.14 แรง $\vec{F} = 3x^2\hat{i}+\frac{1}{y}\hat{j}-2z\hat{k}$ เป็นแรงอนุรักษ์หรือไม่

[เป็น]

$$W = \int_{r_i}^{r_f} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$= \int_{r_i}^{r_f} \left(3x^2\hat{i} + \frac{1}{y}\hat{j} - 2z\hat{k}\right)\cdot\left(dx\,i + dy\,j + dz\,k\right)$$

$$= \left[x^3 + \ln y - z^2\right]_i^f$$

$$= (x_f^3 - x_i^3) + (\ln y_f - \ln y_i) - (z_f^2 - z_i^2)$$

$\therefore$ W ขึ้นกับตำแหน่งเท่านั้น $\therefore$ เป็นแรงอนุรักษ์

ตัวอย่าง 7.15 ถ้าสามารถเขียนแรง $\vec{F}$ ได้เป็น

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}$$

โดยที่ U เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับตำแหน่งเท่านั้น

$$U = U(x,y,z)$$

จงพิสูจน์ว่า $\vec{F}$ เป็นแรงอนุรักษ์

$$W = \int_{r_i}^{r_f} F$$

$$= U$$

พลังงานศักย์ (potential energy)

พลังงานศักย์ คืองานที่วัตถุจะกระทำได้ เมื่อวัตถุเปลี่ยนระดับที่อยู่ หรืองานที่กระทำโดยแรงอนุรักษ์มีค่าเท่ากับค่าลบของการเปลี่ยนแปลงพลังงานศักย์ที่สอดคล้องกับแรงอนุรักษ์นั้น หรือ

"The work done by a conservative force equals the negative of the change in the potential energy associated with that force."

สมมติให้ $\vec{F}$ เป็นสนามของแรงอนุรักษ์ที่กระทำต่อวัตถุ (เช่น $\vec{F} = m\vec{g}$, $\vec{F} = -k\vec{x}$) และ $\vec{F}^{\text{ext}}$ เป็นแรงภายนอกที่มาเคลื่อนย้ายวัตถุ จะเขียนความสัมพันธ์ระหว่างแรงภายนอกและสนามของแรงอนุรักษ์ ได้ดังนี้

$$\vec{F}^{\text{ext}} = -\vec{F}$$

ดังนั้นงานเนื่องจากแรงภายนอก (W^{ext}) คือ

$$W^{\text{ext}} = \int_{r_i}^{r_f} \text{[redacted]}$$

$$= U_f - U_i$$

และงานเนื่องจากแรงอนุรักษ์ (W) คือ $W = \int_{r_i}^{r_f}$ [redacted]

จาก $W^{\text{ext}} = \int_{r_i}^{r_f}$ [redacted] U_i

และ $\vec{F}^{\text{ext}} = -\vec{F}$ ดังนั้น

$$W^{\text{ext}} = -\int_{r_i}^{r_f} \text{[redacted]}$$

ดังนั้น $$W = \int_{r_i}^{r_f} [redacted] - U_i)$$

ถ้าเคลื่อนวัตถุเป็นระยะทางสั้นมากๆ (ระยะ $\Delta r \rightarrow 0$)

จะได้ $$dU = U_f - U_i$$

โดยที่ $$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -dU$$

$$\boxed{F = -\frac{dU}{dr}}$$

เมื่อ $U \rightarrow$ potential energy

- ใน 1 มิติ

พลังงานศักย์จากแรงอนุรักษ์ คือ

$$dU = -\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

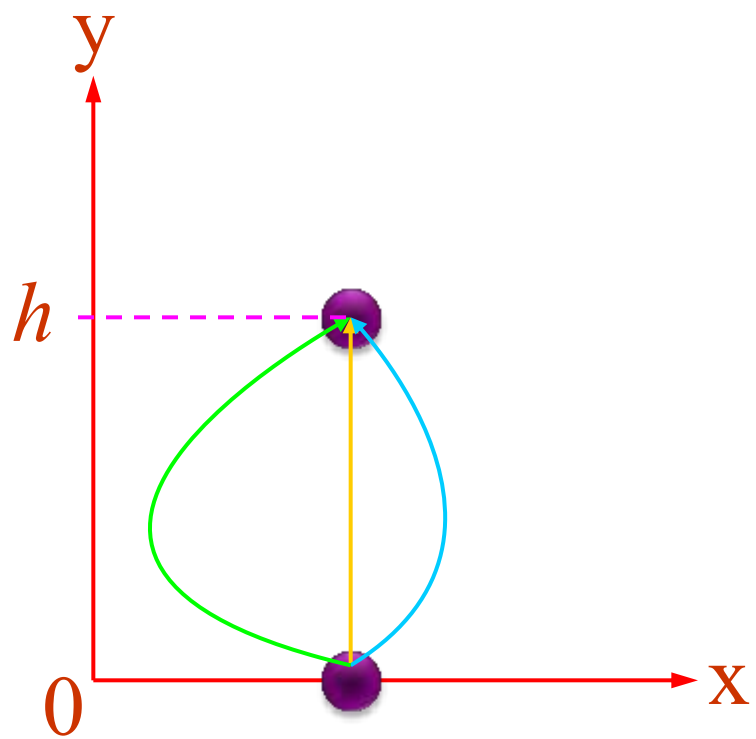
$$\therefore \quad F = -\frac{dU}{dx}$$

$$\boxed{U(x) = -\int_{x_i}^{x_f} F_x\,dx}$$

- พลังงานศักย์โน้มถ่วง (gravitational potential energy)

$$U(h) = -\int_{0}^{h}(-mg)dy$$

$$\boxed{U(h) = mgh}$$



หมายเหตุ : ใช้ $-mg$ เพราะ y มีทิศขึ้น $\uparrow$ แต่ g มีทิศลง $\downarrow$

- พลังงานศักย์ยืดหยุ่นจากสปริง

$$U(x) = -\int_{0}^{x}(-kx)dx$$

$$\boxed{U = \frac{1}{2}kx^2}$$

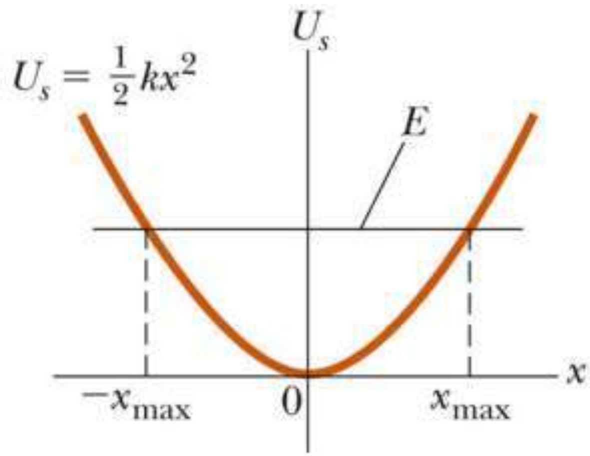
และทดสอบ $F = -\frac{dU}{dx}$ แล้ว

$$F = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = -kx = F_s$$

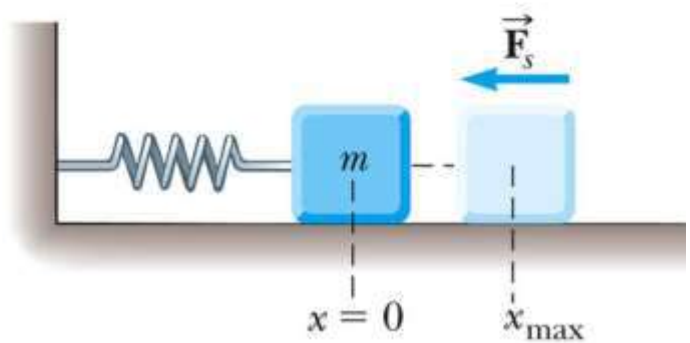
- สมดุลของระบบ (equilibrium of a system)

จาก $F = -\dfrac{dU}{dx}$ พบว่าถ้า $\dfrac{dU}{dx} = 0$ แล้ว $F = 0$

พิจารณากราฟระหว่างพลังงานศักย์กับตำแหน่ง

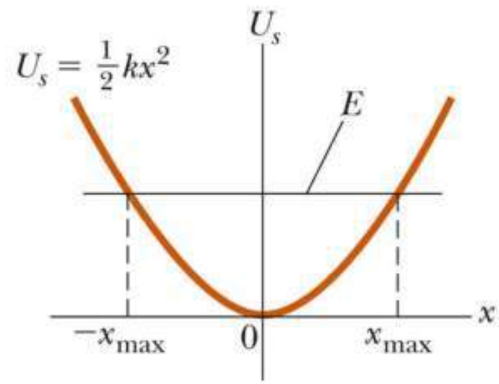


(a)

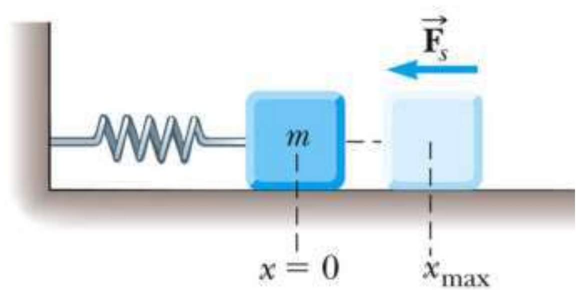


ตำแหน่งสมดุล (equilibrium) ของระบบอยู่ที่จุดวกกลับของกราฟ

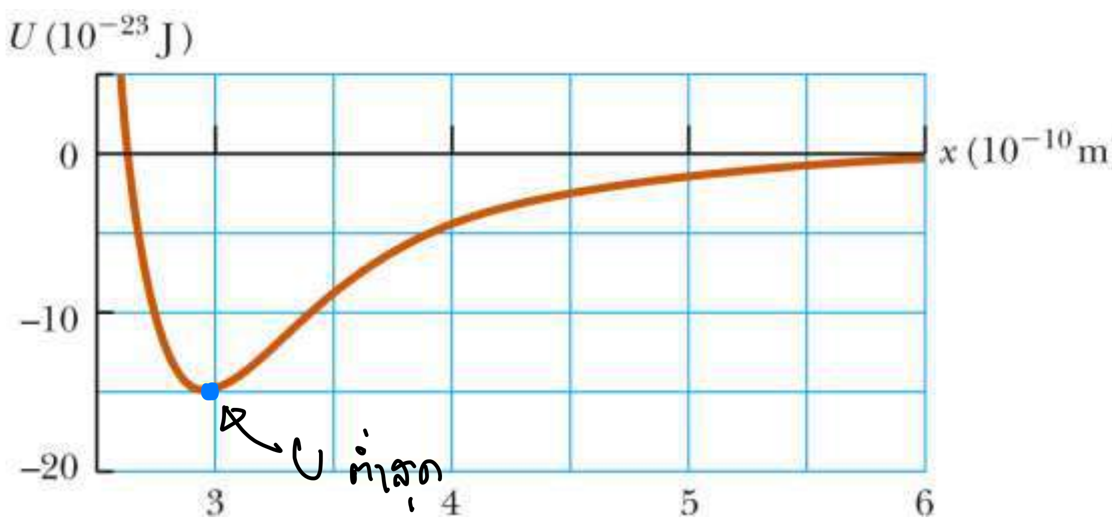
- สมดุลเสถียร (stable equilibrium) : ตำแหน่งที่ U มีค่าต่ำสุด
- สมดุลไม่เสถียร (unstable equilibrium) : ตำแหน่งที่ U มีค่าสูงสุด
- สมดุลเป็นกลาง (neutral equilibrium) : U มีค่าคงที่ ในบริเวณนั้น



(a)



ตัวอย่าง 7.9 พลังงานศักย์ในระบบของอะตอมที่เป็นกลางทางไฟฟ้า 2 อะตอม สามารถประมาณได้ด้วยฟังก์ชัน $U(x) = 4\varepsilon\left[\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{x}\right)^{6}\right]$ (Lennard-Jones potential energy function) ถ้ากำหนด $\sigma = 0.263$ nm และ $\varepsilon = 1.51\times10^{-22}$ J จะเขียนฟังก์ชันได้ดังกราฟ จงหาระยะห่างระหว่างอะตอมคู่นี้ที่มีความเป็นไปได้สูงสุด



พลังงานจลน์ (kinetic energy)

คือพลังงานเนื่องจากการเคลื่อนที่ของวัตถุ

พิจารณากำลังจากแรงใด ๆ

จาก $$\sum F = ma = m\frac{dv}{dt}$$

และ $dW =$ [redacted]

$$= m\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)\cdot\vec{v}\,dt$$

เมื่อ $\vec{v} = v\hat{v}$

$\because$ $$\frac{d\vec{v}}{dt} = v\frac{d\hat{v}}{dt}+\hat{v}\frac{dv}{dt}$$

แต่ $\frac{d\hat{v}}{dt} \perp \hat{v}$ แล้ว $\hat{v}\cdot\frac{d\hat{v}}{dt} = 0$

จะได้ว่า $$dW = m(\vec{v}\cdot\hat{v})\frac{dv}{dt}dt$$

$\therefore$ $$dW = mvdv$$

และสามารถหาพลังงานทั้งหมดจากแรงรวมใด ๆ $\vec{F}$ นี้เป็น

$$W = \int dW$$

สมมติว่าวัตถุเคลื่อนที่จาก A $\longrightarrow$ B

$$W = \int_{W_i}^{W_f} dW = \int_{v_i}^{v_f} mvdv$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 \Big|_{v_i}^{v_f}$$

$$= \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

$$= K_f - K_i$$

$\therefore$ $$\boxed{W = \Delta K}$$ Work - K.E. theorem

เมื่อ $K \rightarrow$ kinetic energy

$$\boxed{K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}}$$

บทที่ 8 การอนุรักษ์ของพลังงาน (conservation of energy)

พลังงานรวมของระบบ (E_{sys}) จะเปลี่ยนไปในปริมาณเท่ากับผลรวมของพลังงานที่ถ่ายเท (T) เข้าหรือออกจากระบบ

$$\boxed{\Delta E_{sys} = \Sigma T}$$

conservation of energy

E_{sys} : พลังงานจลน์ พลังงานศักย์ พลังงานภายใน

T : งาน ความร้อน ...

ระบบเอกเทศ (the isolated system ($\Sigma T = 0$))

1. กรณีมีแต่ [redacted]$_{\text{con}}$

2. กรณีมี [redacted]$_{\text{non}}$ ด้วย

1. กรณีมีแต่ [redacted] con

จาก $$W_{\text{con}} = -(U_f - U_i) = -\Delta U$$

และ $$W_{\text{tot}} = K_f - K_i = \Delta K$$

ดังนั้นจะได้ว่า $$W_{\text{tot}} = W_{\text{con}} + W_{\text{non}} = K_f - K_i = \Delta K$$

เมื่อ W_{con} คืองานของแรงอนุรักษ์

W_{non} คืองานของแรงไม่อนุรักษ์

$$\therefore \quad W_{\text{non}} = \Delta K - W_{\text{con}}$$

$$W_{\text{non}} = \Delta K - (-\Delta U)$$

$$W_{\text{non}} = (K_f - K_i) - [-(U_f - U_i)]$$

$$W_{\text{non}} = (K_f - K_i) + (U_f - U_i)$$

$$W_{\text{non}} = (K_f + U_f) - (K_i + U_i)$$

$$W_{\text{non}} = E_f - E_i$$

แล้ว $\quad$ พลังงานกล $= E_{\text{mech}} = K + U$

ในกรณีที่ $W_{\text{non}} = 0$ เป็นได้ 2 อย่างคือ

1) มีแต่แรงอนุรักษ์เพียงอย่างเดียว

2) มีแรงไม่อนุรักษ์กระทำด้วย แต่งานเนื่องจากแรงไม่อนุรักษ์ (W_{non}) เป็นศูนย์

ดังนั้นจาก

$$W_{\text{non}} = E_f - E_i$$

$$0 = (K_f + U_f) - (K_i + U_i)$$

$$0 = (K_f - K_i) + (U_f - U_i)$$

$$0 = \Delta K + \Delta U$$

หรือ

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

นิยาม กฎการอนุรักษ์ของพลังงานกล (law of conservation of mechanical energy)

"**ถ้ามีแต่แรงอนุรักษ์เท่านั้นกระทำต่อวัตถุ หรืองานเนื่องจากแรงไม่อนุรักษ์กระทำต่อวัตถุรวมแล้วเท่ากับศูนย์ พลังงานกลของวัตถุจะคงที่**"

2. กรณีมี [redacted]$_{\text{non}}$ ด้วย

พิจารณาแรงเสียดทาน [redacted]$_{\text{non}}$ แล้ว $W_{\text{non}} = W_f$

จาก $W_{\text{con}} = -\Delta U$

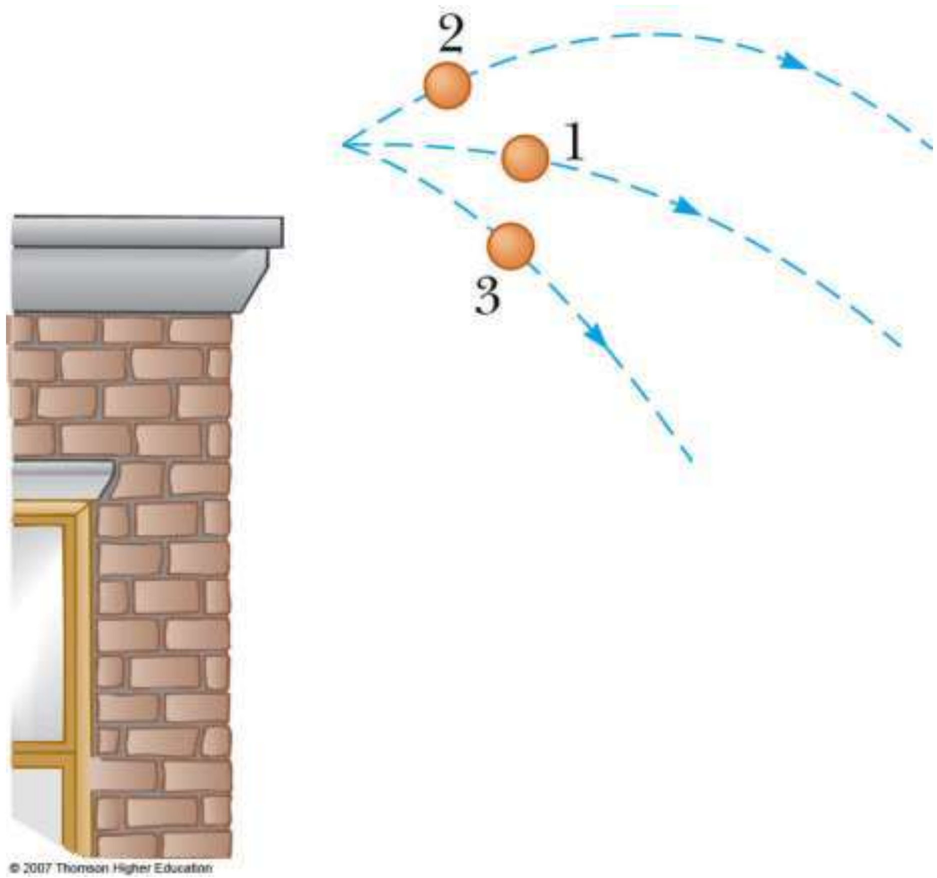
และ $W_{\text{tot}} = W_{\text{con}} + W_{\text{non}} = \Delta K$

ดังนั้นจะได้ว่า $-\Delta U + W_f = \Delta K$

แล้ว $\Delta U + \Delta K = W_f$

$\therefore$ $$\boxed{\Delta U + \Delta K = \Delta E_{\text{mech}} = W_f}$$

Quick Quiz 8.4 ลูกบอลเหมือนกัน 3 ลูกถูกขว้างจากดาดฟ้าตึกด้วยอัตราเร็วเท่ากันแต่ทิศทางต่างกัน ดังรูป จงเรียงลำดับอัตราเร็วขณะกระทบพื้นของลูกบอลทั้งสามนี้ (ไม่คิดแรงต้านอากาศ)



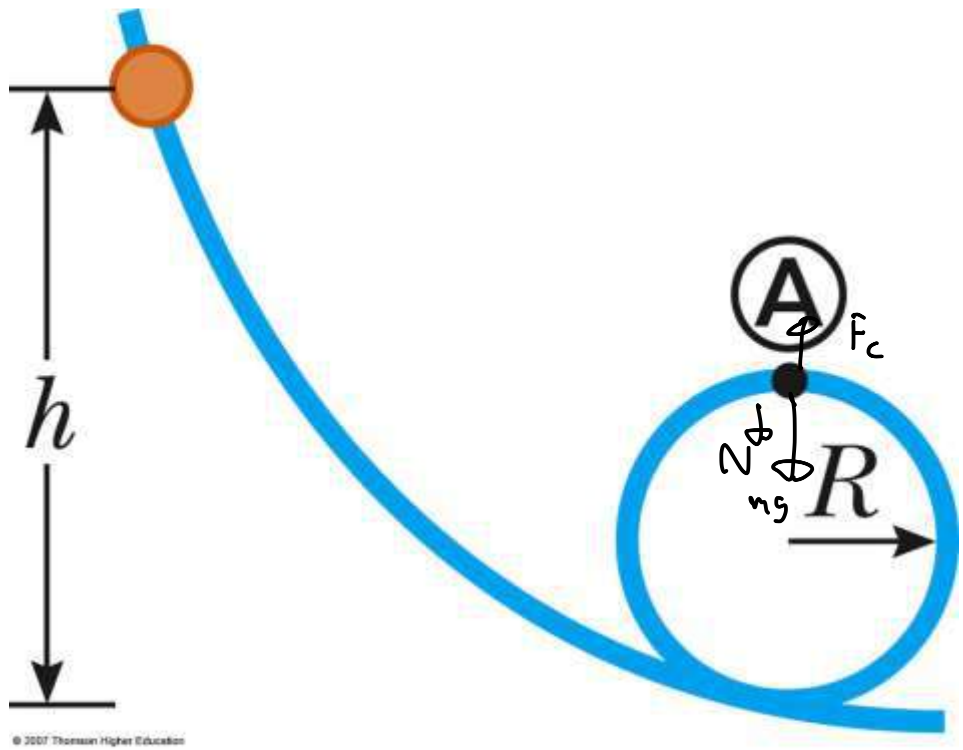
ตัวอย่างที่ 8.3 ลูกปัดมวล 5.00 g ไถลมาตามรางลื่นจากระดับความสูง $h = 3.50R$ ดังรูป

1. จงหาอัตราเร็วของลูกปัดที่ตำแหน่ง A

$mg(3.5R) = mg(2R) + \frac{1}{2}mv^2$

$v = \sqrt{3gR}$

2. จงหาขนาดของ normal force ที่รางกระทำต่อลูกปัดที่ตำแหน่ง A



$N + mg = F_c$

$N = 2mg$

ตัวอย่างที่ 8.22 นักโดดร่มมวล 80.0 kg โดดจากระดับความสูง 1,000 m และกางร่มที่ระดับ 200 m ถ้าแรงต้านอากาศขณะหุบร่มมีขนาด 50.0 N และระหว่างร่มกางมีขนาด 3600 N

ร่มหุบ -40000 ร่มกาง -720000 $= -760000$

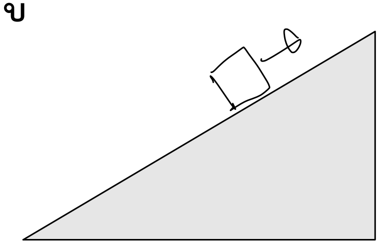
1. จงหาอัตราเร็วขณะกระทบพื้นของเขา [24.5 m/s]

$mgh = 784000$

$\frac{1}{2}mv^2 = 24000$

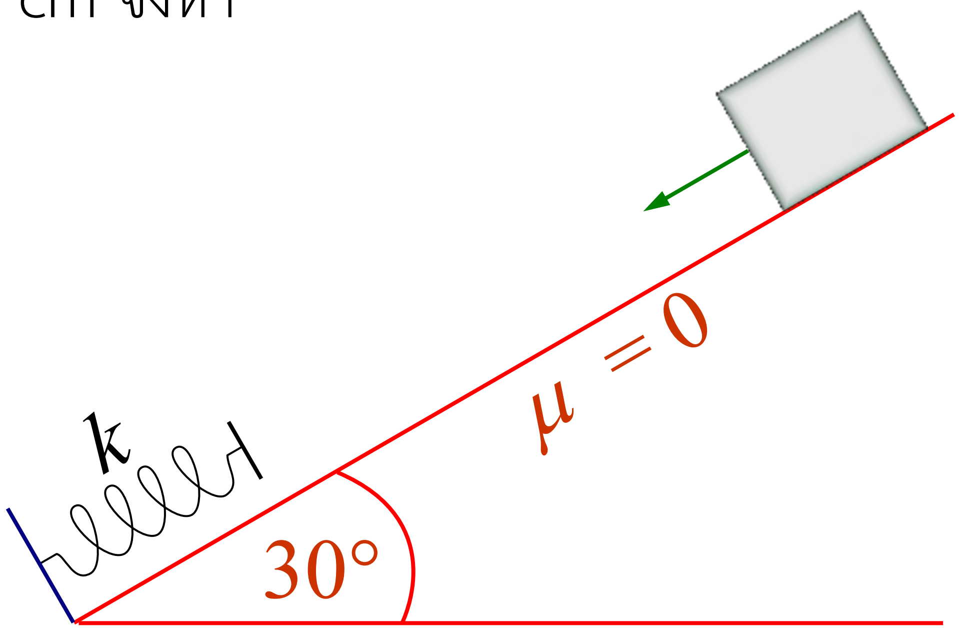
2. ถ้าเขาต้องการให้อัตราเร็วกระทบพื้นมีค่า 5.00 m/s เขาต้องกางร่มที่ระดับความสูงเท่าใด [206.5 m]

P 8.13 กล่องมวล 10.0 kg ถูกดึงให้เคลื่อนที่ขึ้นไปตามพื้นเอียงที่ทำมุม 20.0° กับแนวราบ โดยแรงดึงขนาด 100 N คงที่และอยู่ในแนวขนานกับพื้นเอียง กล่องมีอัตราเร็วต้น 1.50 m/s ส.ป.ส.ความเสียดทานระหว่างกล่องกับพื้นเอียงมีค่า 0.400 และกล่องถูกดึงไปเป็นระยะ 5.0 m ตามแนวพื้นเอียง จงหา



1. งานที่แรงโน้มถ่วงกระทำต่อกล่อง [167.59 J]
2. งานของแรงดึง [500 J]
3. อัตราเร็วปลายของกล่อง [5.65 m/s]

ตัวอย่าง 8.16 สปริงไร้มวลอันหนึ่งจะหดตัวได้ 2 cm เมื่อกดด้วยแรง 270 N ถูกนำมาวางดังรูป หากปล่อยมวล 12 kg จากหยุดนิ่งที่ยอดพื้นเอียงลงมาจะทำให้สปริงหดตัวมานิ่งที่ 5.5 cm จงหา



1) มวลไหลลงมาเป็นระยะเท่าใด ตามพื้นเอียง [0.347 m]

2) ขณะปล่อยมวลปะทะสปริง มวลมีความเร็วเท่าใด [1.69 m/s]

บทที่ 9 โมเมนตัมเชิงเส้น และการชนกัน (linear momentum and collision)

9.1 โมเมนตัมเชิงเส้น

นิยาม โมเมนตัมเชิงเส้น (linear momentum)

"ปริมาณของมวลคูณกับความเร็ว" มีหน่วย กิโลกรัม เมตรต่อวินาที (kg m/s)

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

โมเมนตัม เป็นปริมาณเวกเตอร์ มีทิศเดียวกับความเร็ว

จากกฎข้อที่ 2 ของนิวตัน $\sum$ [redacted]

และ [redacted] dt แล้ว $\sum$ [redacted] dt

เมื่อ $m =$ ค่าคงที่ จะได้ว่า

$\sum$ [redacted] dt

ดังนั้นเราสามารถเขียนแรงในกฎข้อ 2 ของนิวตันได้เป็น

$\sum$ [redacted] dt

แรงกระทำ $\sum$ [redacted] มีค่าเท่ากับอัตราการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัม ($\vec{p}$) จึงเป็น

ปริมาณที่กำหนดสภาพการเคลื่อนที่ของวัตถุ

9.2 กฎการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้น

“โมเมนตัมของวัตถุที่กำลังพิจารณาจะคงที่ ถ้าไม่มีแรงลัพธ์ใด ๆ จากภายนอกกระทำต่อวัตถุนั้น”

จาก $\sum$ [redacted] dt

ถ้าไม่มีแรงลัพธ์ภายนอกกระทำที่วัตถุ นั่นคือ $\sum$ [redacted]

จะได้ $$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$$

หรือ $\vec{p} = m\vec{v} =$ ค่าคงที่

พิจารณาการชนกันของมวล m_1 ความเร็ว [redacted] กับมวล m_2 ความเร็ว [redacted]

(ในระบบปิด) $\sum$ [redacted] ([redacted])

m [redacted]

$m_1 \frac{d}{dt}$ [redacted] $\frac{}{dt} = 0$

$\frac{d}{dt}(m$ [redacted] dt

ให้ [redacted] : $\frac{d}{dt}$ [redacted] $= 0 \rightarrow$ [redacted] ค่าคงที่

มวล 2 ก้อนชนกันในระบบปิด [redacted] คงที่

9.2 การดล (impulse)

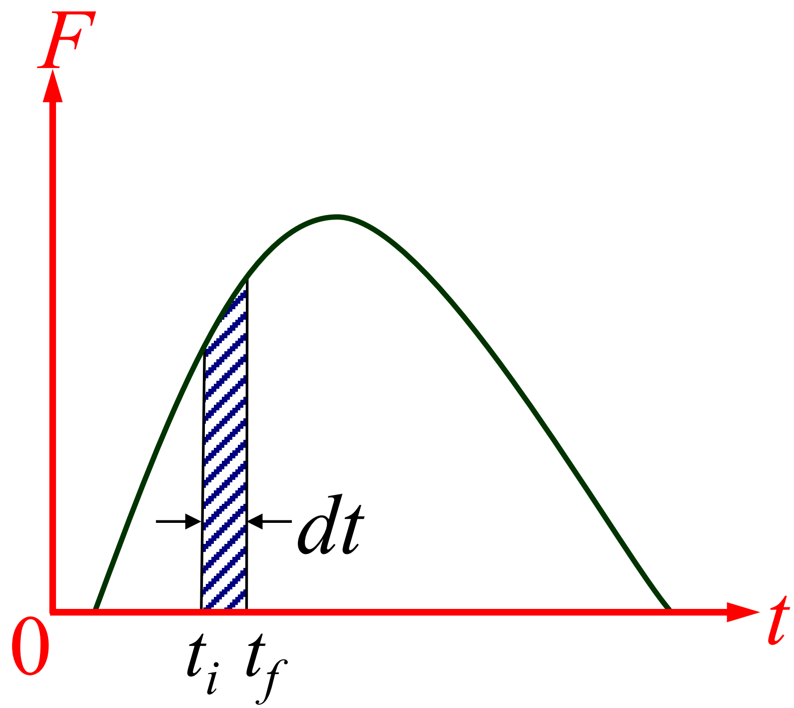
จากสมการ
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

ถ้า $\sum$ [redacted] เป็นฟังก์ชันของเวลา เราสามารถทำการอินทิเกรตได้

$$\int d$$ [redacted] $$\int_{t_i} \sum F\,dt$$

หรือ Δ [redacted] $p_f \quad p_i$ $$\int_{t_i} \sum F\,dt$$ [redacted] $= I$

เรียกเทอมทางขวามือว่า **การดล (impulse)**



$p_f - p_i$ คือพื้นที่ใต้กราฟระหว่าง t_i และ t_f

หน่วยของการดล คือ นิวตัน-วินาที (N-s) หรือ กิโลกรัม-เมตรต่อวินาที (kg-m/s)

กรณีที่ $\sum$ [redacted] คงที่

[redacted]

$$t_i$$

Δ [redacted]

โดยปกติ $\sum$ [redacted] ขึ้นกับเวลา

นิยาม ค่าเฉลี่ย

[redacted]

$$\left(\sum F\right)_{avg} = \frac{\quad}{\Delta t}\int_{t_i} \sum F\,dt$$

[redacted]

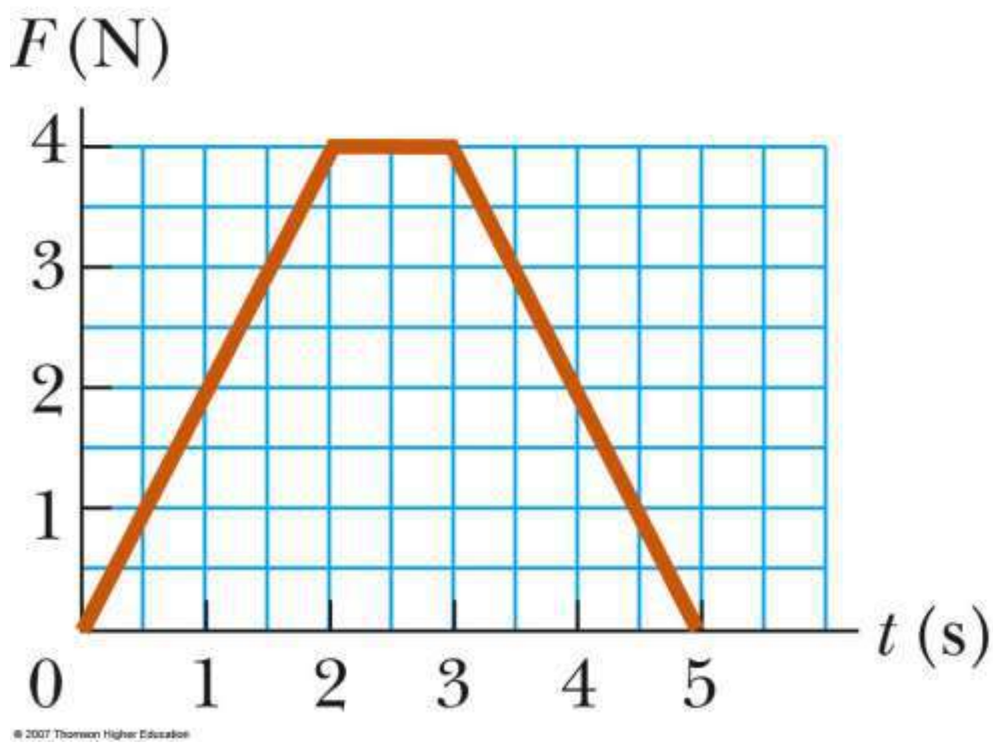
$$\therefore \quad I = \left(\sum F\right)_{avg} \Delta t$$

impulse approximation: สำหรับการชนซึ่งเกิดในช่วงเวลาสั้น ๆ หา [redacted] จาก แรงชนแรงเดียว ซึ่งมีค่ามากกว่าแรงอื่น ๆ เรียกว่า แรงดล (impulsive foce)

ตัวอย่างที่ 9.11 วัตถุมวล 2.50 kg ได้รับแรงในทิศ $+x$ ที่ขนาดเปลี่ยนตามกราฟ

1. จงหาการดลของแรงนี้ พ.ท. ใต้กราฟ

2. ถ้าวัตถุมีอัตราเร็วต้น -2.00 m/s อัตราเร็วปลายเป็นเท่าใด



9.4 การชนกัน (collision)

การชนกัน คือการเคลื่อนที่ของอนุภาคหรือวัตถุที่ชนกัน มีการเปลี่ยนแปลงอย่างกะทันหัน โดยที่เราสามารถแยกเวลาระหว่าง “**ก่อนชน**” กับ “**หลังชน**” ได้ชัดเจน การชนแบ่งได้เป็นหลายประเภทดังนี้

1. **การชนแบบยืดหยุ่น (elastic collision)** พลังงานจลน์ของระบบจะไม่สูญเสียเลย เช่นการชนของพวกอนุภาคนิวเคลียร์ อนุภาคพื้นฐาน

2. **การชนแบบไม่ยืดหยุ่น (inelastic collision)** ระบบเกิดการสูญเสียพลังงานจลน์ เช่นการชนทั่ว ๆ ไป

3. **การชนแบบไม่ยืดหยุ่นสมบูรณ์ (completely inelastic collision)** ภายหลังการชน วัตถุจะติดกันเป็นก้อนเดียว พลังงานจลน์จะสูญเสียไปมากที่สุด แต่ไม่จำเป็นต้องหมดไป

ถ้าเป็นการชนกันบนพื้นลื่น ไม่มีแรงภายนอกมากระทำ

การชนกันของวัตถุแบ่งออกเป็นสองแบบ

1) การชนแบบยืดหยุ่น (elastic collision)

ชนกันแล้วแยกออกจากกัน ไม่มีการสูญเสียพลังงาน

$$\sum K_i = \sum K_f$$

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2+\frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2$$

2) การชนแบบไม่ยืดหยุ่น (inelastic collision)

หลังชนเคลื่อนที่ติดกันไป มีการสูญเสียพลังงาน

$$\sum K_i \neq \sum K_f$$

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2+\frac{1}{2}m_2u_2^2 \neq \frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2$$

- การชนแบบยืดหยุ่นใน 1 มิติ

♣ การชนแบบพุ่งตรง (head on collision)

ก่อนการชน ภายหลังการชน

เขียนได้ว่า

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2 \qquad \ldots(1)$$

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \qquad \ldots(2)$$

จากสมการ (1)

$$m_1(u_1 - v_1) = -m_2(u_2 - v_2) \qquad \ldots(*)$$

และจากสมการ (2)

$$m_1(u_1^2 - v_1^2) = -m_2(u_2^2 - v_2^2) \qquad \ldots(**)$$

สมการ (*) หาร สมการ (**) จะได้

$$u_1 + v_1 = u_2 + v_2$$

$\therefore$ จากสมการ (1) และ (2) จะหาค่า v_1 และ v_2 ในเทอมของ u_1 และ u_2 ได้

$$v_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)u_1 + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)u_2$$

$$v_2 = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)u_1 + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)u_2$$

ดังนั้นจากสมการข้างต้นจะได้ว่า

1. ถ้า $m_1 = m_2$ จะได้ $v_1 = u_2$ และ $v_2 = u_1$

2. ถ้าก่อนชน m_2 อยู่นิ่ง นั่นคือ $u_2 = 0$ แล้ว

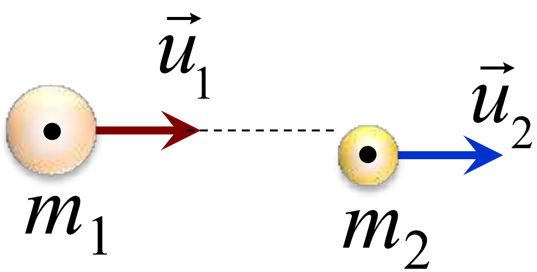
$$v_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)u_1 \quad \text{และ} \quad v_2 = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)u_1$$

* ถ้า $m_1 = m_2$ จะได้ $v_1 = 0, v_2 = u_1$

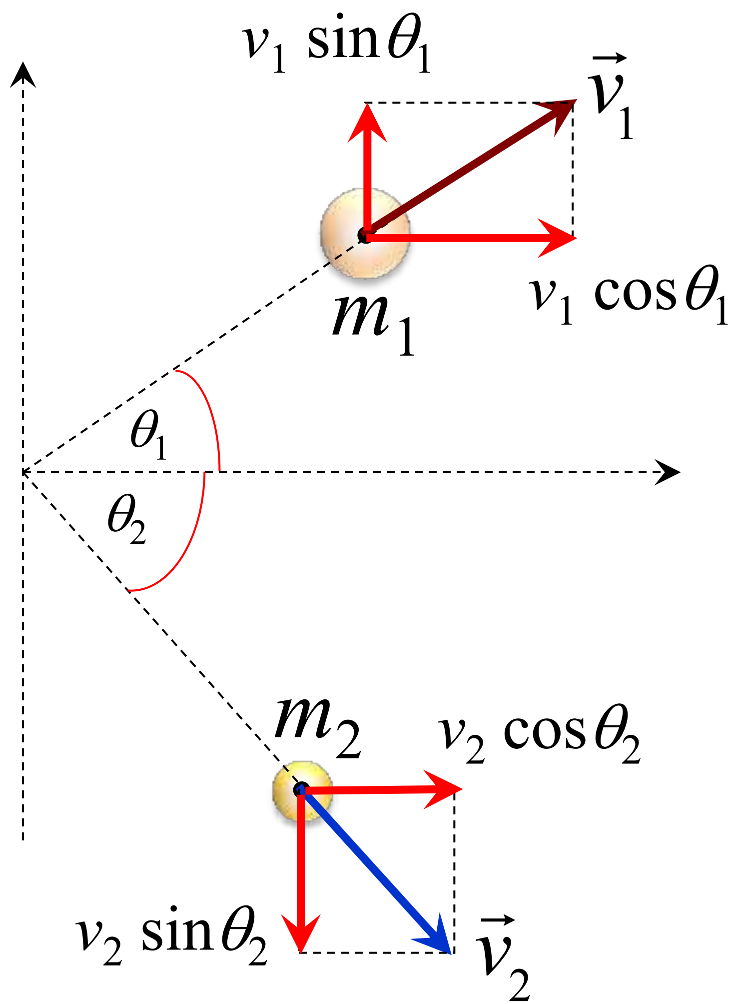
* ถ้า $m_2 >> m_1$ จะได้ $v_1 \cong -u_1, v_2 \cong 0$

* ถ้า $m_2 << m_1$ จะได้ $v_1 \cong u_1, v_2 \cong 2u_1$

- การชนกันแบบยืดหยุ่นในสองมิติ



ก่อนชน



หลังชน

$$\sum \vec{p}_{\text{ก่อนชน}} = \sum \vec{p}_{\text{หลังชน}}$$

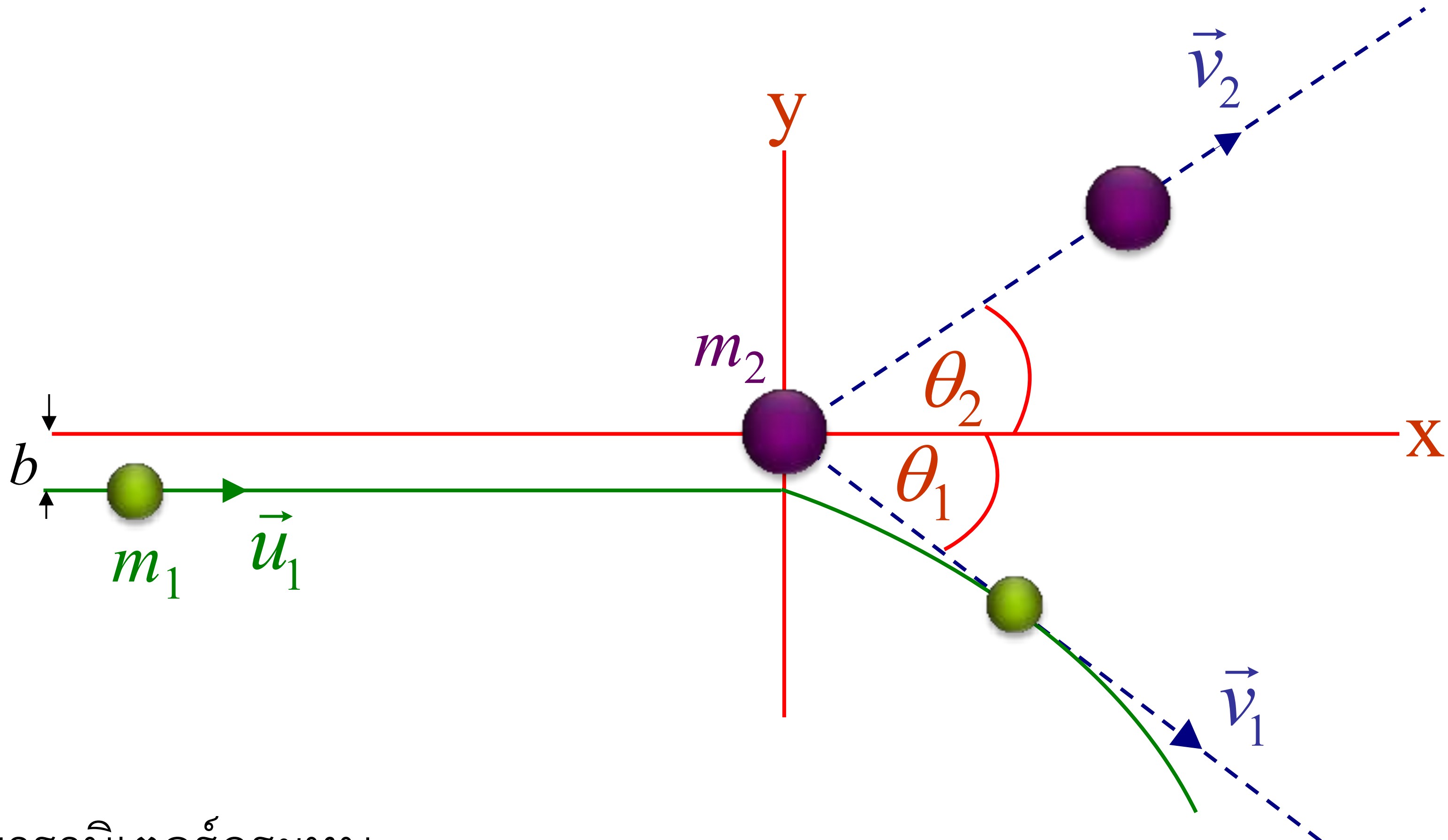
$$\hat{x}: \quad m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1\cos\theta_1 + m_2v_2\cos\theta_2$$

$$\hat{y}: \quad 0 = m_1v_1\sin\theta_1 - m_2v_2\sin\theta_2$$

$$\sum E_{k\,\text{ก่อนชน}} = \sum E_{k\,\text{หลังชน}}$$

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

- การชนใน 2 และ 3 มิติ (กรณีของการกระเจิง (scattering))



b คือพารามิเตอร์กระทบ

เนื่องจากไม่มีแรงภายนอกมากระทำ โมเมนตัมตามแนวแกน x และ y จะอนุรักษ์ ดังนั้น

$$\hat{y}: \qquad m_1u_1 + 0 = m_1v_1\cos\theta_1 + m_2v_2\cos\theta_2$$

$$\hat{x}: \qquad 0 + 0 = m_1v_1\sin\theta_1 - m_2v_2\sin\theta_2$$

และจากการอนุรักษ์พลังงานจลน์รวม

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 + 0 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

ตัวอย่าง 9.18 พิจารณาการชนใน 1 มิติแบบไม่ยืดหยุ่นโดยสมบูรณ์ (ชนแล้วติดกันไป) คือมีการอนุรักษ์โมเมนตัม แต่ไม่อนุรักษ์พลังงานจลน์ จงพิสูจน์ว่าพลังงานจลน์หลังชนจะน้อยกว่าพลังงานจลน์ก่อนชนเสมอ

ตัวอย่างที่ 9.4 จากชุดสาธิตที่ประกอบด้วยลูกบอลเหมือนกัน 5 ลูก (พิจารณาว่าเป็นการชนแบบยืดหยุ่น)

1. ถ้าลูก 1 ถูกดึงแล้วปล่อยเข้ากระทบลูก 2 หลังกระทบกันลูก 1 หยุดนิ่ง เป็นไปได้หรือไม่ที่ลูก 4 และ 5 จะแกว่งออกมาด้วยกัน

2. ถ้าลูก 1 ถูกดึงแล้วปล่อยเข้ากระทบลูก 2 แต่ลูก 4 และ 5 ถูกทากาวติดกัน ทำให้ต้องเคลื่อนที่ด้วยกัน ผลจะเป็นอย่างไร

2 ลูก

1. เนื่องจากชนยืดหยุ่น $\Sigma E_{ก่อน} = \Sigma E_{หลัง}$ จาก $mv_i = 2mv_f$ $v_f = \frac{v_i}{2}$

$\therefore$ ไม่เป็นจริง แต่ $\frac{1}{2}m(v_i)^2 \neq \frac{1}{2}(2m)(v_f)^2 = m\left(\frac{v_i}{2}\right)^2 = \frac{mv_i^2}{4}$

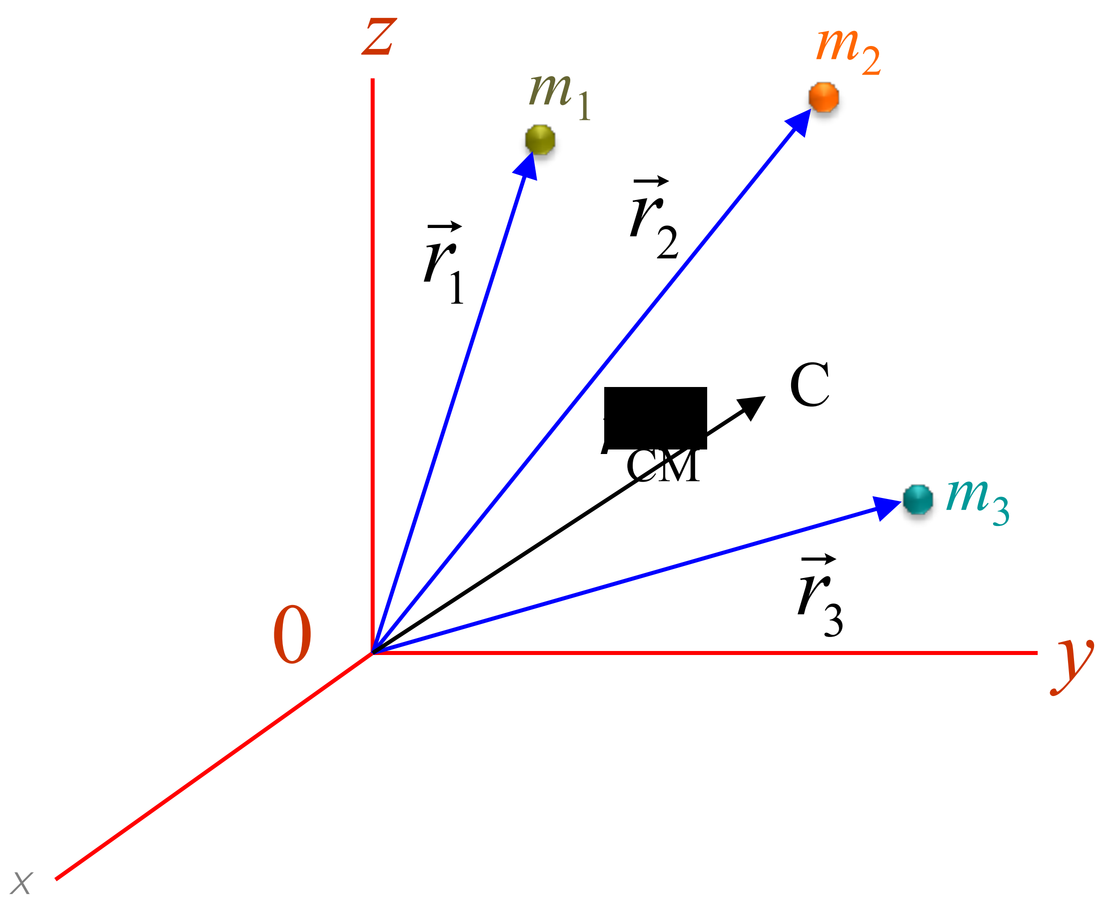
2. เนื่องจากโจทย์ไม่ได้บอกว่าลูกแรกจะหยุดนิ่ง

$$mv_i = mv_f + (2m)v_{4,5}$$

$$\frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}(2m)v_{4,5}^2$$

$$v_{4,5} = \frac{2}{3}v \quad , \quad v_f = -\frac{1}{3}v$$

9.4 ศูนย์กลางมวล (center of mass)



เรากำหนดวิธีบอกตำแหน่งของกลุ่มหรือระบบอนุภาค ด้วยตำแหน่งของศูนย์กลางมวล

กำหนดโดยเวกเตอร์บอกตำแหน่ง [redacted] โดยที่

[redacted] ...(9.4.1)

$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i \qquad \text{...(9.4.2)}$$

เมื่อ N คือจำนวนอนุภาค

[redacted] สามารถเขียนเป็นส่วนประกอบในแนวต่างๆ เป็น

[redacted] $\hat{i}+y_{\mathrm{CM}}\hat{j}+z_{\mathrm{CM}}\hat{k}$ ...(9.4.3)

โดยที่

$$\left.\begin{aligned} x_{\mathrm{CM}} &= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i \\ y_{\mathrm{CM}} &= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i y_i \\ z_{\mathrm{CM}} &= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i z_i \end{aligned}\right\} \quad \ldots(9.4.4)$$

ตัวอย่าง 9.1 จงหาจุดศูนย์กลางของระบบที่ประกอบด้วยอนุภาค 3 ตัว ดังนี้คือ มวล 3 kg วางอยู่ที่จุด (1, 1, 0) m มวล 2 kg วางอยู่ที่จุด (1, 0, 2) m และมวล 5 kg วางอยู่ที่จุด (0, –1, –1) m จงหาจุดศูนย์กลางมวลของระบบ

[$0.5\hat{i} - 0.2\hat{j} - 0.1\hat{k}$ m]

$$x_{cm} = \frac{1}{10}(3 + 2 + 0) = 0.5$$

$$y_{cm} = \frac{1}{10}(3 + (-5)) = -0.2$$

$$z_{cm} = \frac{1}{10}(0 + 4 - 5) = -0.1$$

ในกรณีที่ระบบประกอบด้วยอนุภาคที่อยู่หนาแน่น คล้ายเป็นเนื้อเดียวกัน โดยมีความหนาแน่นที่ตำแหน่ง $\vec{r}$ เป็น $\rho(\vec{r})$ หรือ $\sigma(\vec{r})$ หรือ $\lambda(\vec{r})$ ตำแหน่งศูนย์กลางมวล

r_{CM} [redacted] $M\int$ ...(9.4.5)

ดังนั้น

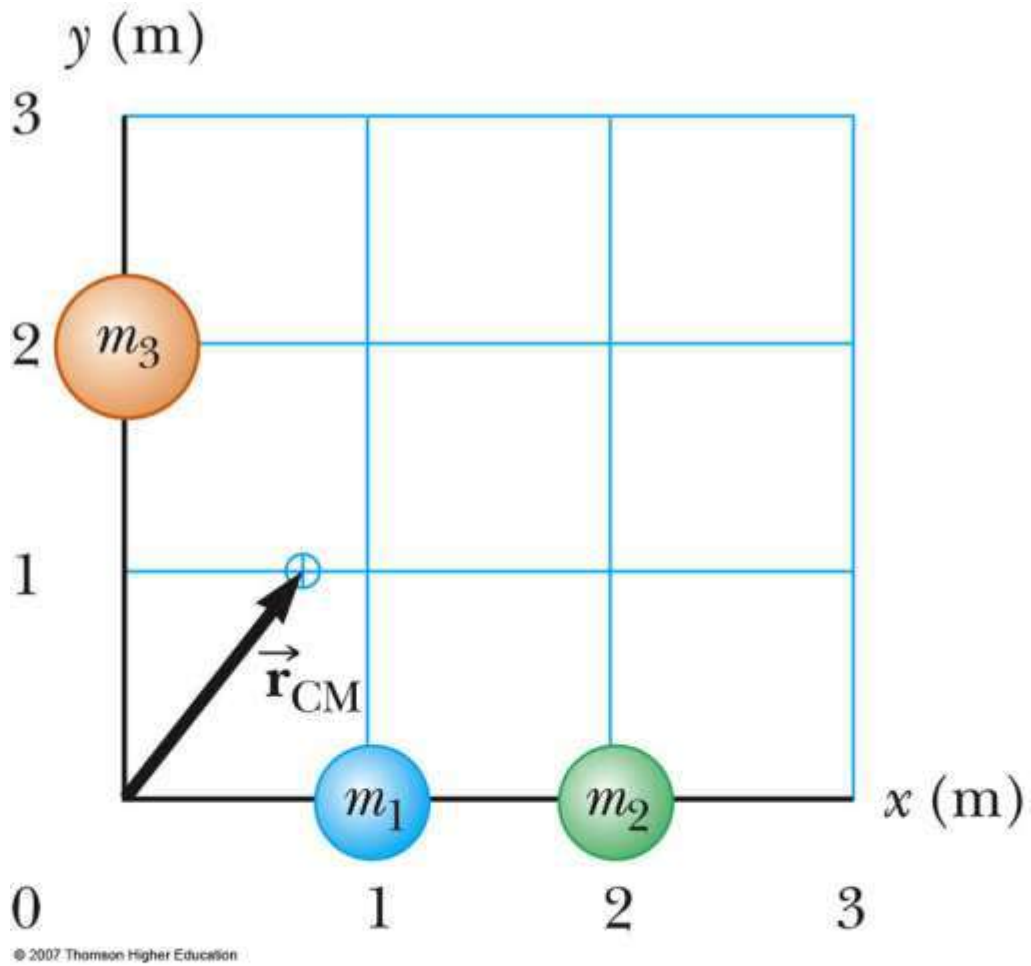
[redacted]

$$\begin{cases} \dfrac{\int \vec{r}\rho(\vec{r})dV}{M} & \Rightarrow \text{3D} \qquad \ldots(9.4.6) \\[2em] \dfrac{\int \vec{r}\sigma(\vec{r})dA}{M} & \Rightarrow \text{2D} \qquad \ldots(9.4.7) \\[2em] \dfrac{\int \vec{r}\lambda(\vec{r})dr}{M} & \Rightarrow \text{1D} \qquad \ldots(9.4.8) \end{cases}$$

โดยที่มวลของระบบ คือ

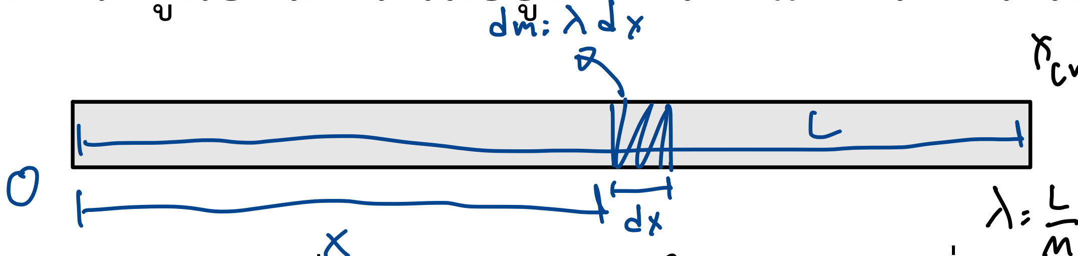
$$M = \int dM = \begin{cases} \int \rho(\vec{r})dV \Rightarrow \text{3D} & \ldots(9.4.9) \\ \int \sigma(\vec{r})dA \Rightarrow \text{2D} & \ldots(9.4.10) \\ \int \lambda(\vec{r})dr \Rightarrow \text{1D} & \ldots(9.4.11) \end{cases}$$

ตัวอย่างที่ 9.10 จงหาตำแหน่งศูนย์กลางมวลของระบบ กำหนด $m_1 = m_2 = 1.0$ kg และ $m_3 = 2.0$ kg



ตัวอย่าง 9.11 พิจารณาแท่งไม้ยาว L มวล M

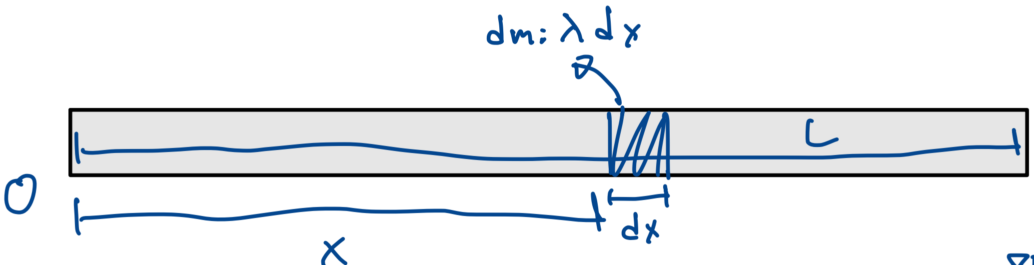
1. จงแสดงว่าศูนย์กลางมวลอยู่ที่กึ่งกลางแท่ง ถ้าความหนาแน่น (มวล/ความยาว) คงที่



$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int x\,dm = \frac{1}{M}\int_0^L x\,\lambda\,dx = \frac{\lambda L^2}{2M} = \frac{L}{2}$$

$$\lambda = \frac{L}{M}$$

2. ถ้าความหนาแน่นเป็นตามสมการ $\lambda = \alpha x$ เมื่อ α เป็นค่าคงที่ และ x คือตำแหน่ง จงหาตำแหน่งศูนย์กลางมวล



$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int_0^L x(\lambda\,dx) = \frac{\alpha}{M}\int_0^L x^2\,dx = \frac{\alpha L^3}{3M} = \frac{2}{3}L$$

$\lambda \to \alpha x$

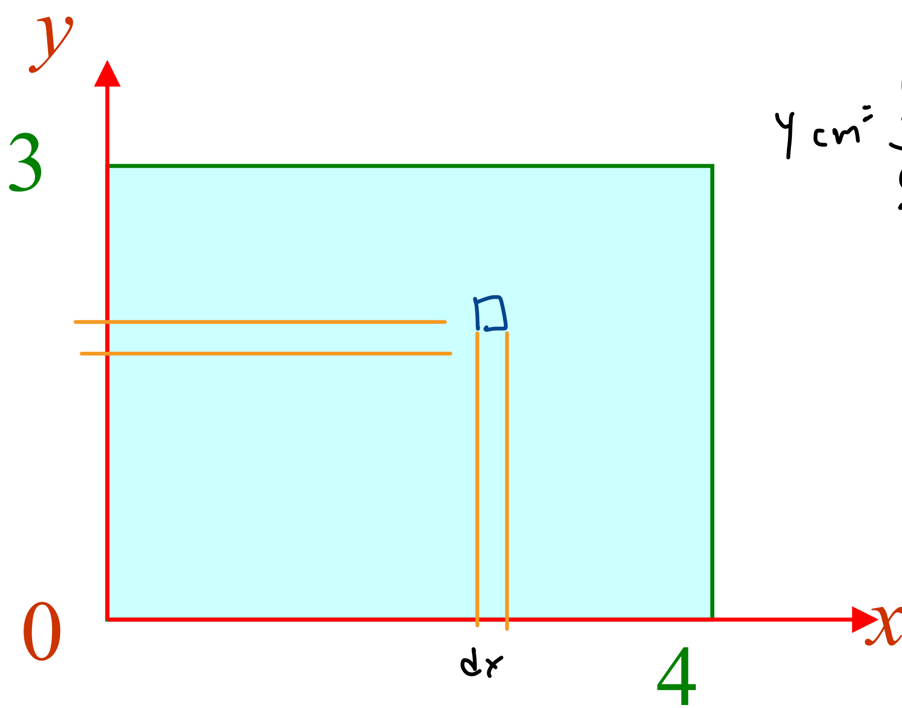
$$M = \int_0^M dm = \int_0^L \lambda\,dx = \alpha\int_0^L x\,dx = \frac{\alpha L^2}{2}$$

ตัวอย่างที่ 9.4 จงหาตำแหน่งของศูนย์กลางมวลของแผ่นสี่เหลี่ยมบาง ๆ ขนาด 3 เมตร × 4 เมตร กำหนดให้มีมวลต่อพื้นที่เป็น σ กิโลกรัมต่อตารางเมตร คงที่ ตลอดทั้งแผ่น

$dm = \sigma\, dA = \sigma\, dx\, dy$

[$2\hat{i} + 1.5\hat{j}$ m]

$$x_{cm} = \frac{\int x\,dm}{\int dm} = \frac{\iint x\sigma\,dx\,dy}{\iint \sigma\,dx\,dy} = \frac{\cancel{\sigma}\int_0^3\int_0^4 x\,dx\,dy}{\cancel{\sigma}\int_0^3\int_0^4 dx\,dy} = \frac{\cancel{3}\int_0^4 x\,dx}{\cancel{3}\int_0^4 dx} = \frac{8}{4} = 2$$



$$y_{cm} = \frac{\int y\,dm}{\int dm} = \frac{\iint y\sigma\,dx\,dy}{\iint \sigma\,dx\,dy} = \frac{\cancel{\sigma}\int_0^4\int_0^3 y\,dy\,dx}{\cancel{\sigma}\int_0^4\int_0^3 dy\,dx} = \frac{\cancel{4}\int_0^3 y\,dy}{\cancel{4}\int_0^3 dy} = \frac{4.5}{3} = 1.5$$

ตัวอย่าง 9.7 ลวดบางดัดโค้งเป็นรูปครึ่งวงกลมดังรูป หากรัศมีของความโค้งเป็น R และค่ามวลต่อความยาวลวดเป็น λ กิโลกรัมต่อเมตรแล้ว จงหาตำแหน่งศูนย์กลางมวล

$$[0, \frac{2R}{\pi}]$$

$$x_{cm} = 0$$

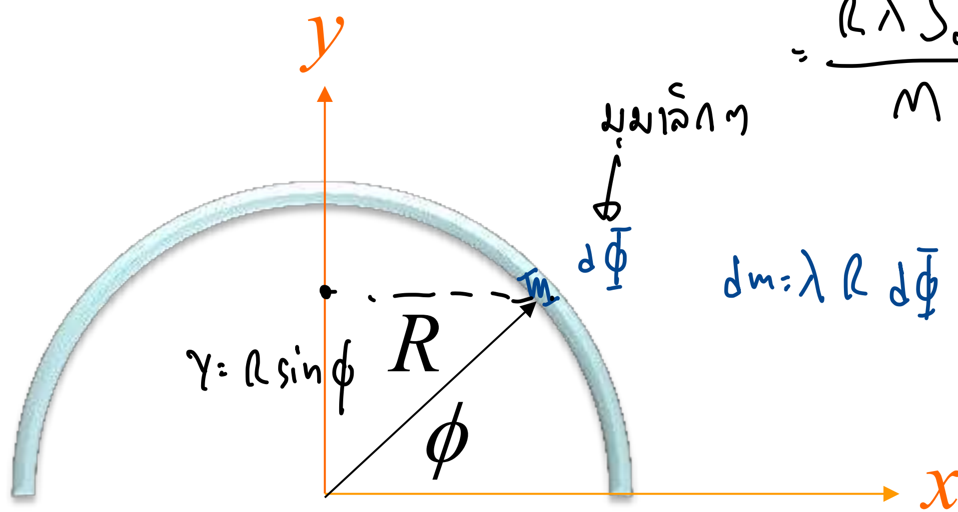
$$y_{cm} = \frac{1}{M}\int y\,dm = \frac{1}{M}\int y\cdot\lambda\cdot R\cdot d\phi$$

$$= \frac{R^2\lambda\int_0^{\pi}\sin\phi\,d\phi}{M}$$

$$= \frac{R^2\lambda}{M}\left(-\cos\phi\right)_0^{\pi}$$

$$= \frac{2R^2\lambda}{M} \quad \lambda = \frac{M}{\pi R}$$

$$= \frac{2R^{\cancel{2}}\cancel{M}}{\cancel{M}\pi\cancel{R}} = \frac{2R}{\pi}$$



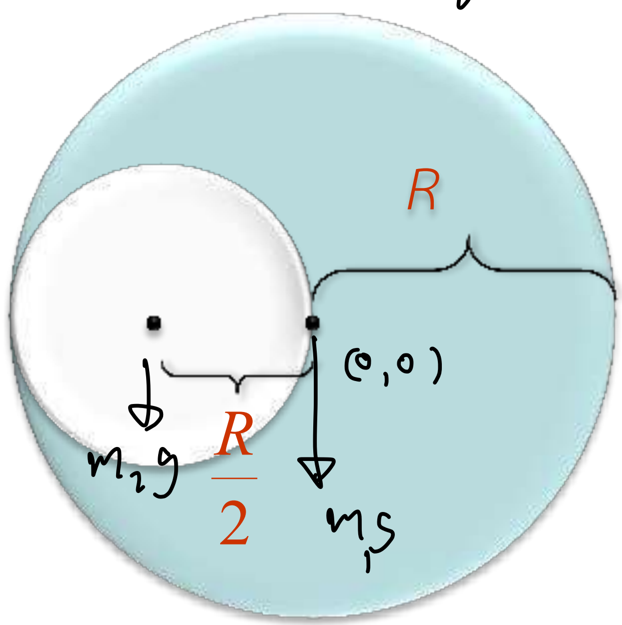
$dm = \lambda R\,d\phi$

ตัวอย่าง 9.9 แผ่นจานกลมรัศมี R เมตร ถูกฉลุเป็นรูกลมรัศมี $\frac{R}{2}$ เมตร ดังรูป และค่ามวลต่อพื้นที่เป็น σ กิโลกรัมต่อตารางเมตรแล้ว จงหาตำแหน่งศูนย์กลางมวลหลังการฉลุ

$[\frac{R}{6}, 0]$

$m_1 = \sigma \pi R^2$

$m_2 = \sigma \pi (\frac{R}{2})^2$



$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 - m_2 x_2}{m_1 - m_2}$$

$$= \frac{(\sigma \pi R^2)(0) - (\sigma \pi \frac{R^2}{4})(-\frac{R}{2})}{\sigma \pi R^2 - \sigma \pi (\frac{R^2}{4})}$$

$$= \frac{\frac{1}{8}\sigma \pi R^3}{\frac{3}{4}\cancel{\sigma \pi R^2}} = \frac{1}{6} R$$

ความเร็วของศูนย์กลางมวล

เขียนได้เป็น [redacted] CM

CM

dt

$$= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

$\therefore$

$$\boxed{\vec{v}_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i} \qquad \ldots(9.5.12)$$

แต่ $$\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i$$

ดังนั้น $$\vec{v}_{\text{CM}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \frac{1}{M}\vec{p}$$

โดยที่ $$\boxed{\vec{p} = M\vec{v}_{\text{CM}}} \qquad \ldots(9.5.13)$$

โมเมนตัมรวมของระบบ มีค่าเท่ากับ โมเมนตัมของอนุภาคมวล M เคลื่อนที่ด้วย

ความเร็ว [redacted] CM

จาก [redacted] ${}_{\text{CM}} \quad M \sum_{i=1} {}_i \, {}_i$

แล้ว [redacted] ${}_{\text{CM}} \quad dt \quad M \sum_{i=1} {}_i \, {}_i$

M [redacted] ${}_{\text{CM}} \sum_i {}_i \, {}_i \quad \sum_i {}_i = \sum_i {}_{\text{ext}}$

$\therefore \quad \sum$ [redacted] ${}_{\text{ext}} \quad {}_{\text{CM}}$

แรงลัพธ์ที่กระทำต่อระบบ ทำให้ CM ของระบบเกิดความเร่ง

จาก $\sum$ [redacted] $_{\mathrm{ext}}$ [redacted] $_{\mathrm{CM}}$ จะได้

$\int \sum_i$ [redacted] $_{\mathrm{ext}}$ $= \int M$ [redacted] $_{\mathrm{CM}}$ [redacted] dt [redacted] $_{\mathrm{CM}}$

$\boxed{\text{[redacted]}_{tot}}$

จาก $\sum$ [redacted] $_{\mathrm{ext}}$ [redacted] $_{\mathrm{CM}}$

ถ้า $\sum$ [redacted] $_{\mathrm{ext}}$ [redacted] แล้ว M [redacted] $_{\mathrm{CM}}$ [redacted] $_{\mathrm{CM}}$ [redacted]

สรุป ศูนย์กลางมวล คือ ตัวแทนของระบบ

ตัวอย่างที่ 9.10 วัตถุอันหนึ่งมีมวล 0.5 kg และความเร็ว $-4\hat{i}$ m/s วัตถุที่สองมีมวลเท่ากัน แต่มีความเร็ว $4\hat{j}$ m/s ภายหลังการชน ปรากฏว่าวัตถุอันแรกมีความเร็ว $-2\hat{i}$ m/s จงหาความเร็วของวัตถุที่สอง

[$-2\hat{i}+4\hat{j}$ m/s]

ตัวอย่างที่ 9.13 ยิงจรวดขึ้นสูง 1,000 เมตร ด้วยความเร็วคงที่ 300 เมตรต่อวินาที ทันใดนั้นจรวดได้ระเบิดแตกออกเป็น 3 มวลเท่ากัน ส่วน ส่วนแรกยังพุ่งขึ้นด้วยความเร็ว 450 เมตรต่อวินาที ส่วนที่สองพุ่งไปทิศตะวันออกด้วยความเร็ว 240 เมตรต่อวินาที จงหาค่าของชิ้นที่สาม และตำแหน่งศูนย์กลางมวลที่เวลา t ใด ๆ

$$300\,m\hat{j} = 450\left(\frac{m}{3}\right)\hat{j} + 240\left(\frac{m}{3}\right)\hat{i} + \frac{m}{3}\vec{v}$$

$$\vec{v} = -240\,\hat{i} + 450\,\hat{j}$$

$$y = y_0 + ut - \frac{1}{2}gt^2$$

$$= 1000 + 300t - 4.9t^2$$

บทที่ 10 การหมุนของวัตถุเกร็ง (Rotation of Rigid Body)

วัตถุเกร็ง (rigid body) หมายถึงระบบของอนุภาคที่ระยะระหว่างอนุภาคมีค่าคงที่เสมอ หรือไม่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเมื่อถูกแรงกระทำ จึงถือว่าวัตถุแข็งเกร็ง เป็นวัตถุในอุดมคติ

วัตถุที่ถูกแรงกระทำแล้วเปลี่ยนรูปร่างมาก ได้แก่ ฟองน้ำ เยลลี สปริง ยางรัดของ

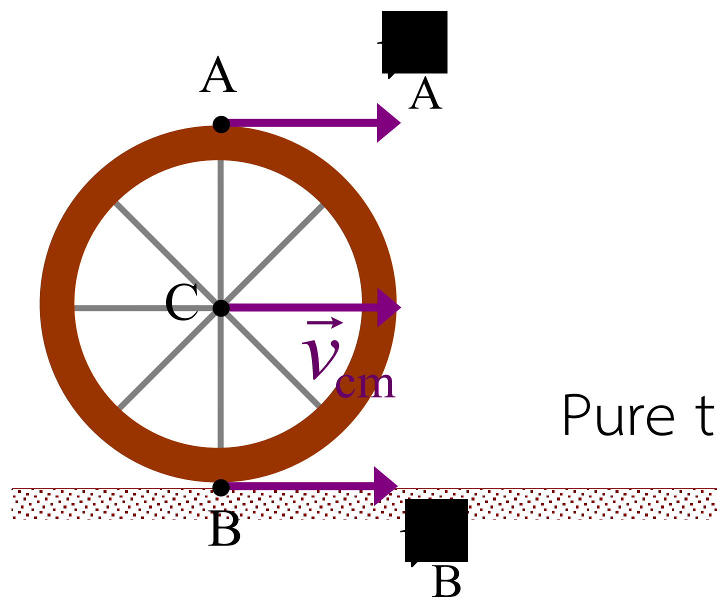
วัตถุที่ถูกแรงกระทำแล้วเปลี่ยนรูปร่างน้อย ได้แก่ แท่งเหล็ก แท่งไม้ ซึ่งถือว่าเป็นวัตถุในอุดมคติ หรือเป็นวัตถุแข็งเกร็ง

เมื่อวัตถุแข็งเกร็งมีการเคลื่อนที่ มักจะมี**การเคลื่อนที่เชิงเส้น และการเคลื่อนที่แบบหมุน** ในบทนี้จะกล่าวเฉพาะการเคลื่อนที่แบบหมุน

10.1 การเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็ง

การเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็ง แบ่งเป็น 2 แบบคือ

10.1.1 **การเลื่อนที่ (translation)** วัตถุจะเคลื่อนที่ไปในลักษณะที่แนวการเคลื่อนที่ของแต่ละอนุภาคที่ประกอบเป็นวัตถุนั้นจะขนานกันไป

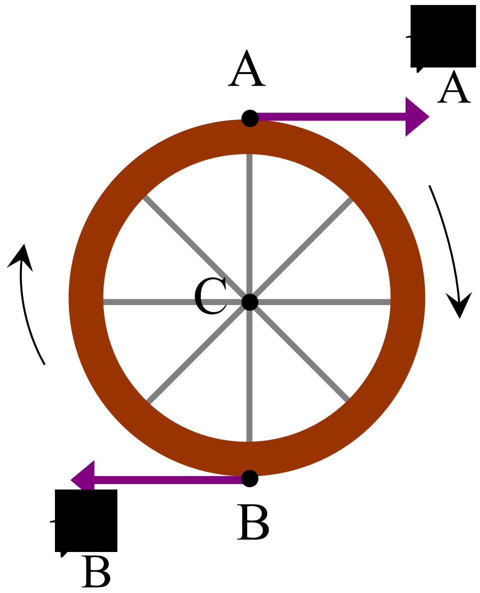


Pure translation

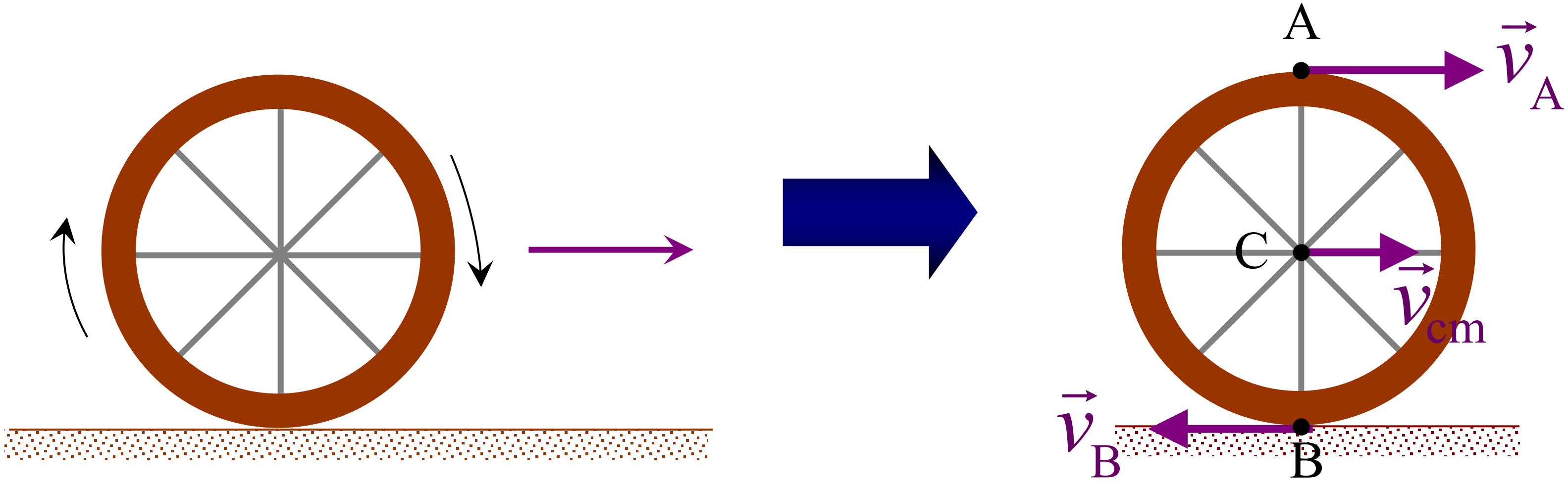
10.1.2 การหมุน (rotation) การที่วัตถุหมุนรอบแกนใดแกนหนึ่ง และแต่ละอนุภาคในวัตถุจะมีการเคลื่อนที่เป็นวงกลม

การหมุนมี 3 แบบดังนี้

1. การหมุนรอบแกนที่ตรึงอยู่กับที่

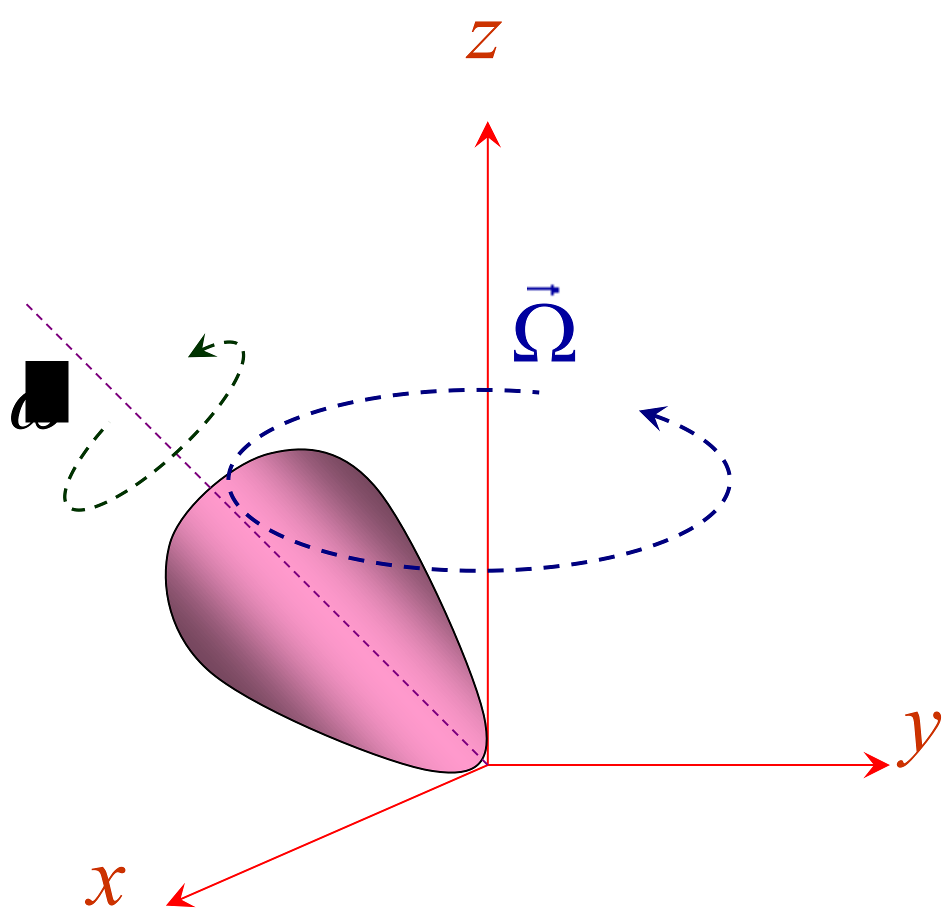


2. การหมุนรอบแกนที่เคลื่อนที่

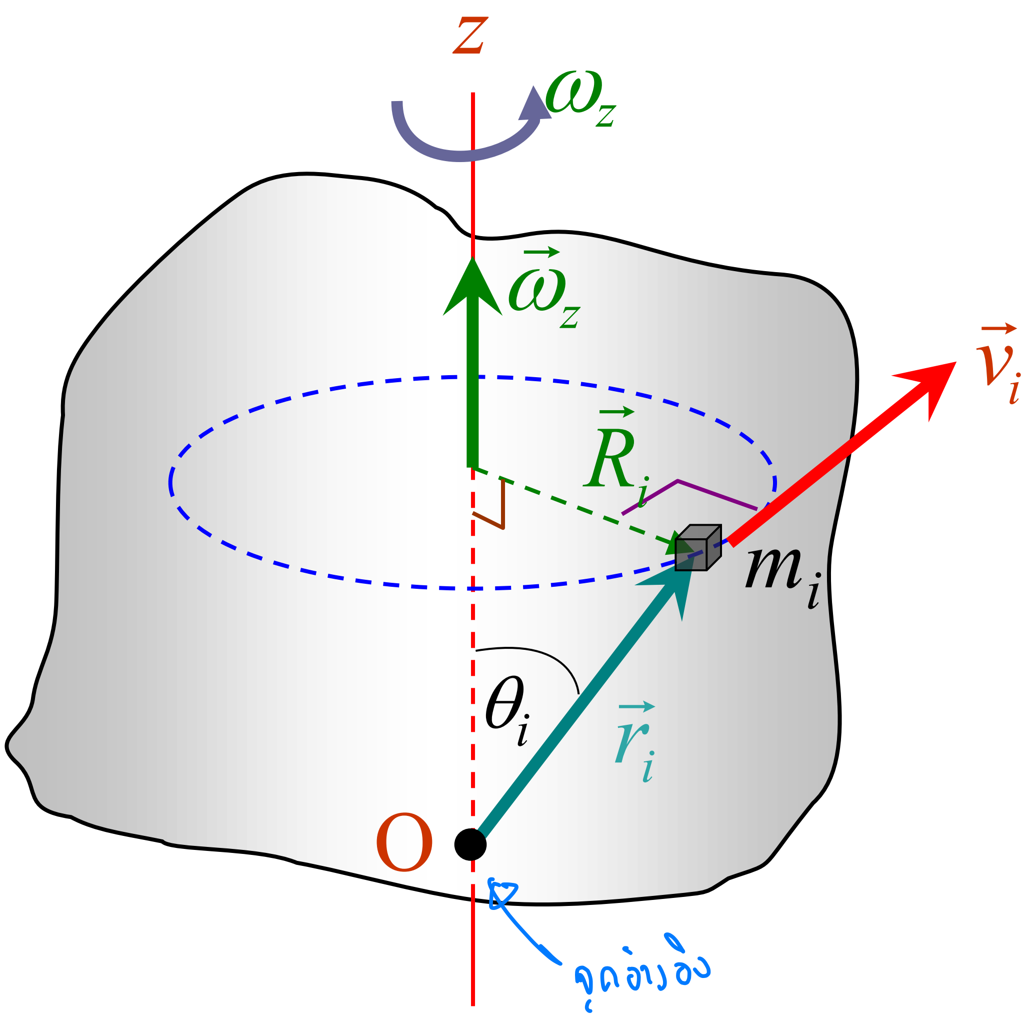


Pure rotation

3. การหมุนรอบแกนที่หมุนได้



10.2 พลังงานจลน์จากการหมุน (rotational kinetic energy)



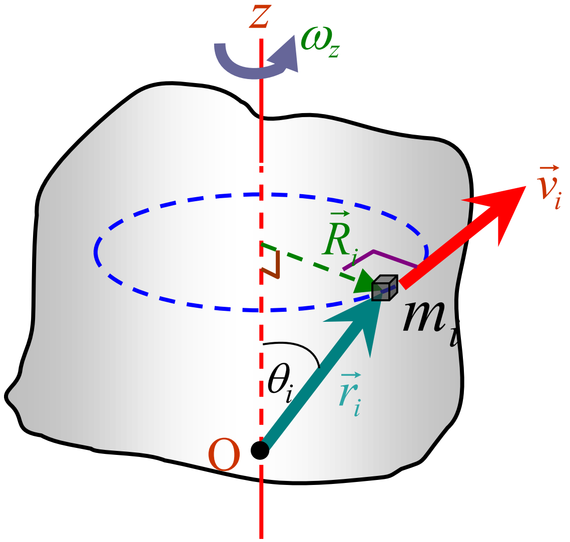
จากรูป อนุภาค m_i จะเคลื่อนที่เป็นวงกลมรัศมี R_i ด้วยความเร็ว

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

$$v_i = |\vec{v}_i| = \omega r_i \sin\theta_i = \omega R_i$$

พลังงานจลน์ของอนุภาค m_i คือ

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$



พลังงานจลน์รวมในการหมุนของวัตถุ คือ

$$K_R = \sum_{i=1}^{N} K_i$$

$$K_R = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{2}m_i v_i^2\right) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{2}m_i R_i^2 \omega^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(m_i R_i^2\right)\omega^2$$

เรานิยามปริมาณ

$$I = m_1R_1^2 + m_2R_2^2 + m_3R_3^2 + \ldots$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2$$

เป็นโมเมนต์ของความเฉื่อย (moment of inertia) มีหน่วยเป็น กิโลกรัม ตารางเมตร หรือ kg m^2

แล้วพลังงานจลน์เนื่องจากการเหมุนของวัตถุเกร็ง ได้แก่

$$K_R = \frac{1}{2} I \omega^2$$

และ

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2$$

10.3 การคำนวณโมเมนต์ของความเฉื่อย

สำหรับวัตถุหมุนที่มีมวลกระจายต่อเนื่องกันเป็นก้อนเดียวกัน เราอาจแบ่งมวลของวัตถุนั้นออกเป็นส่วนย่อยเล็ก ๆ จำนวนมาก ซึ่งมีมวล dm โดยที่ r เป็นระยะห่างของมวลเล็กนั้นจากแกนหมุน ดังนั้น

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 = \int r^2 dm$$

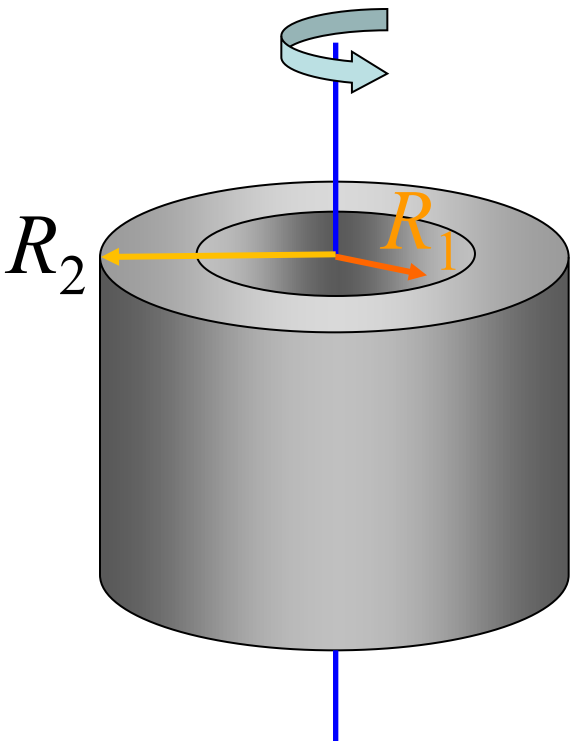
* r เป็นระยะตั้งฉากจากแกนหมุน

หรือ

$$
I \begin{cases} = \int r^2 \rho \, dV \Rightarrow \text{3D} \\ = \int r^2 \sigma \, dA \Rightarrow \text{2D} \\ = \int r^2 \lambda \, dr \Rightarrow \text{1D} \end{cases}
$$

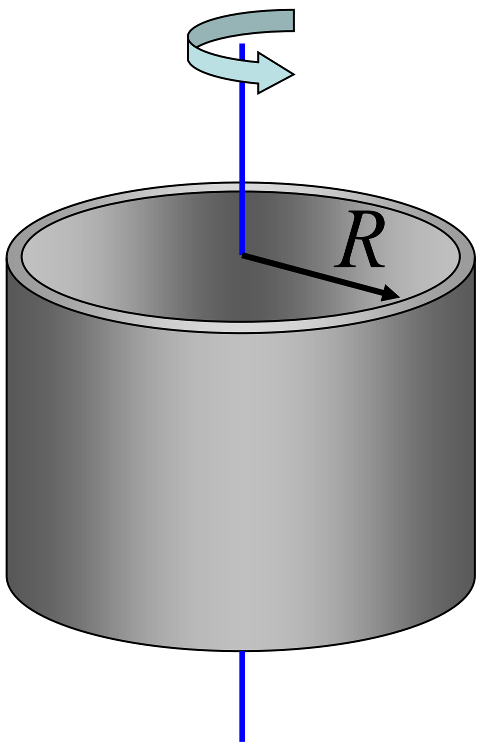
Moments of Inertia of Homogeneous Rigid Bodies with Different Geometries

Hollow cylindrical shell



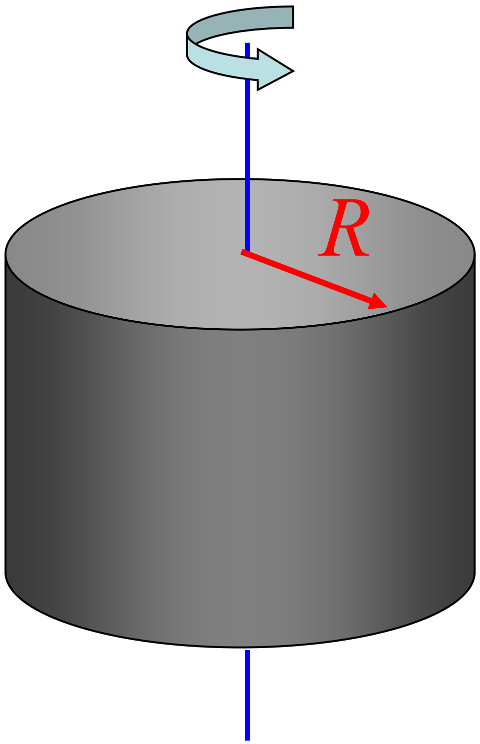
$$I_c = \frac{1}{2} M(R_1^2 + R_2^2)$$

Hoop or thin cylindrical shell



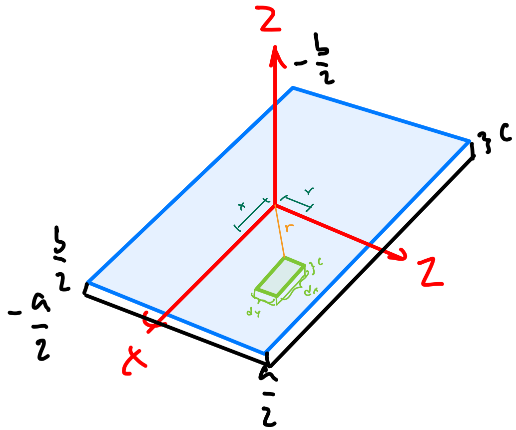
$$I_c = MR^2$$

Solid cylindrical shell or disk



$$I_c = \frac{1}{2} M R^2$$

Rectangular plate



$$M = \rho abc$$

$$dV = c\,dx\,dy$$

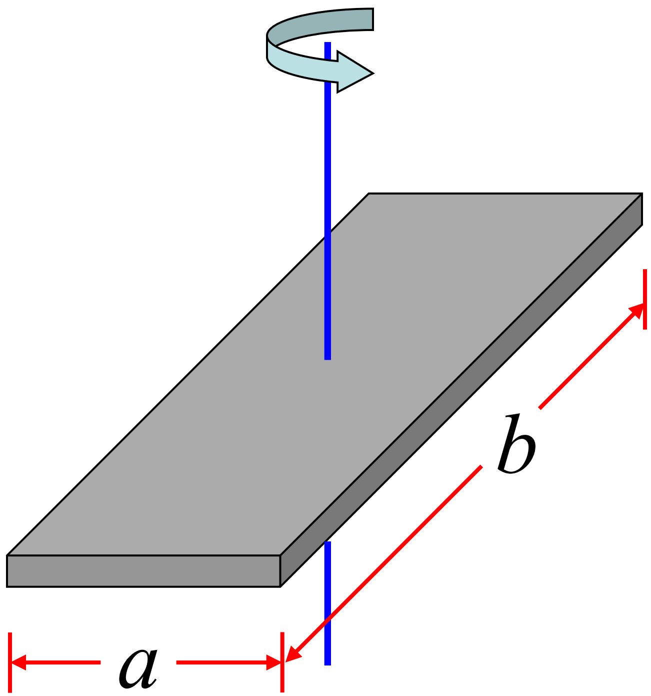
$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$I_z = \int r^2\,dm$$

$$= \int r^2 \rho\,dV$$

$$= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (x^2+y^2)\rho c\,dx\,dy = \rho c \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x\right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy$$

$$= \rho c \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{b^3}{12} + b y^2\,dy$$

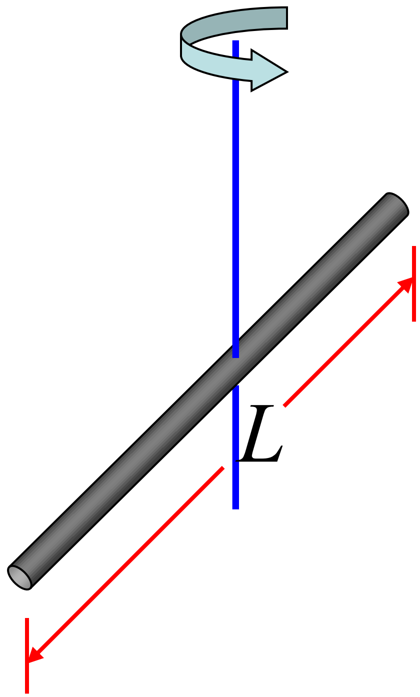


$$I_c = \frac{1}{12} M(a^2+b^2)$$

$$= \rho c\left[\frac{b^3 a + a^3 b}{12}\right]$$

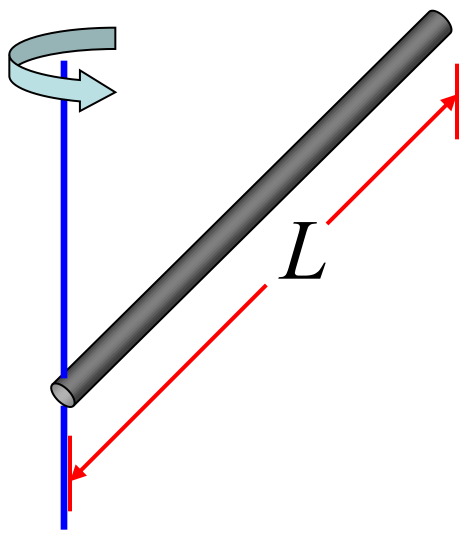
$$= \frac{M}{abc} \cdot abc\left[\frac{a^2+b^2}{12}\right]$$

Long thin rod



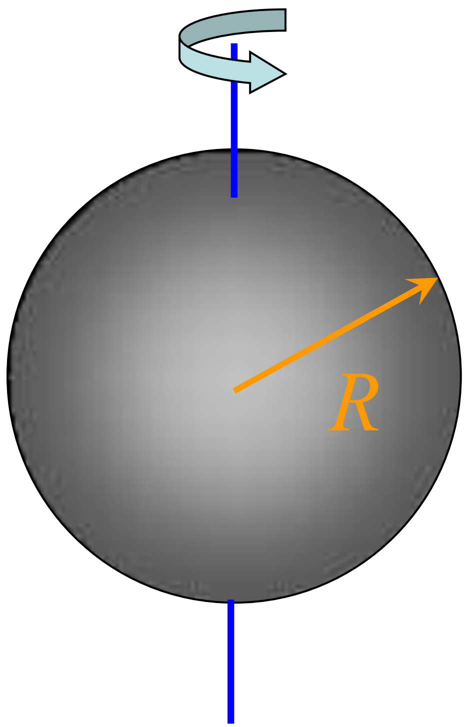
$$I_c = \frac{1}{12} ML^2$$

Long thin rod



$$I = \frac{1}{3} ML^2$$

Solid sphere



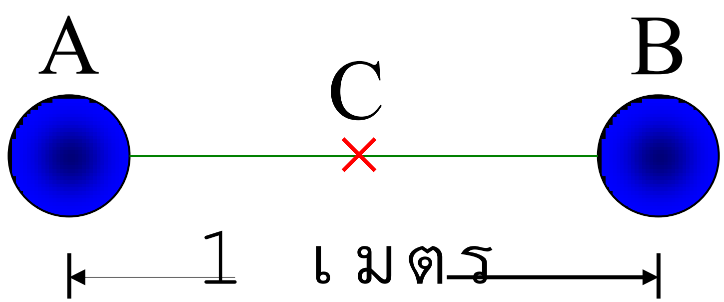
$$I_c = \frac{2}{5} M R^2$$

ตัวอย่าง 10.1 ทรงกลม 5 kg 2 อัน เชื่อมกันด้วยคานยาว 1 m คิดทรงกลมเหมือนเป็นอนุภาคเล็ก ๆ และคานเบามาก จงหาความเฉื่อยของการหมุนของดัมเบลชุดนี้ รอบแกนต่อไปนี้

1) แกนที่ตั้งฉากกับคานและผ่านจุด C [2.5 kg m^2]

2) รอบแกนที่ผ่านจุด A หรือ B และตั้งฉากกับคาน [5 kg m^2, 5 kg m^2]

1)



2) $I_A = m_A r_A^2 + m_B r_B^2$

$= 5$

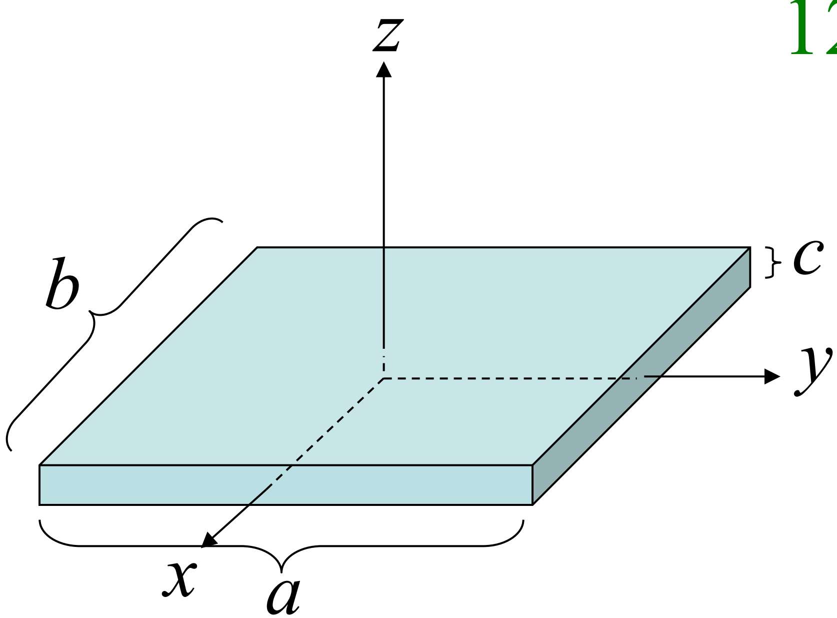
$I_B = m_B r_B^2 + m_A r_A^2$

ตัวอย่าง 10.2 แผ่นสี่เหลี่ยมบางกว้าง $= a$, ยาว $= b$, และหนาน้อยมาก $= c$

ดังรูป จะมีโมเมนต์ความเฉื่อยเป็นเท่าใด หากหมุน

1. รอบแกน z $\quad [\; I_z = M\left(\frac{a^2+b^2}{12}\right) \;]$

2. รอบแกน x หรือ y $\quad [\; I_y = \frac{Mb^2}{12}, \quad I_x = \frac{Ma^2}{12} \;]$



รัศมีไจเรชัน (Radius of Gyration)

สำหรับวัตถุเกร็งรูปทรงใดๆ เมื่อเขียนโมเมนต์ของความเฉื่อยเป็น

$$\boxed{I = Mk^2}$$

จะเรียกว่า k เป็นรัศมีไจเรชันของวัตถุ

เมื่อ

$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

และ $$I = \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i k^2$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 = Mk^2$$

$$k^2 = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2$$

นั่นคือ อาจจะกล่าวได้ว่าหากมวลรวมของวัตถุ เสมือนมาอัดอยู่รวมกันที่ระยะห่างจากแกนของการหมุน **เท่ากับ** รัศมีไจเรชันแล้ว เราจะได้ว่ามีค่าโมเมนต์ของความเฉื่อยเท่ากับวัตถุต้นรูปทรงนั้น

ในวัตถุ	1D	$\rightarrow$	k	บอก จุด
	2D	$\rightarrow$	k	บอก เส้นรอบ
	3D	$\rightarrow$	k	บอก ผิวรอบ

ตัวอย่าง 10.3 มวลผูกกับโครงดังรูป (โครงมีมวลน้อยมาก) จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยและรัศมีไจเรชันเมื่อ

1. แกนของการหมุนคือ AA′
2. แกนของการหมุนคือ BB′

1) $2mb^2 + m\cdot 4b^2 + 3m\cdot 9b^2$

$= 33mb^2$

$= (m+2m+m+3m)k^2$

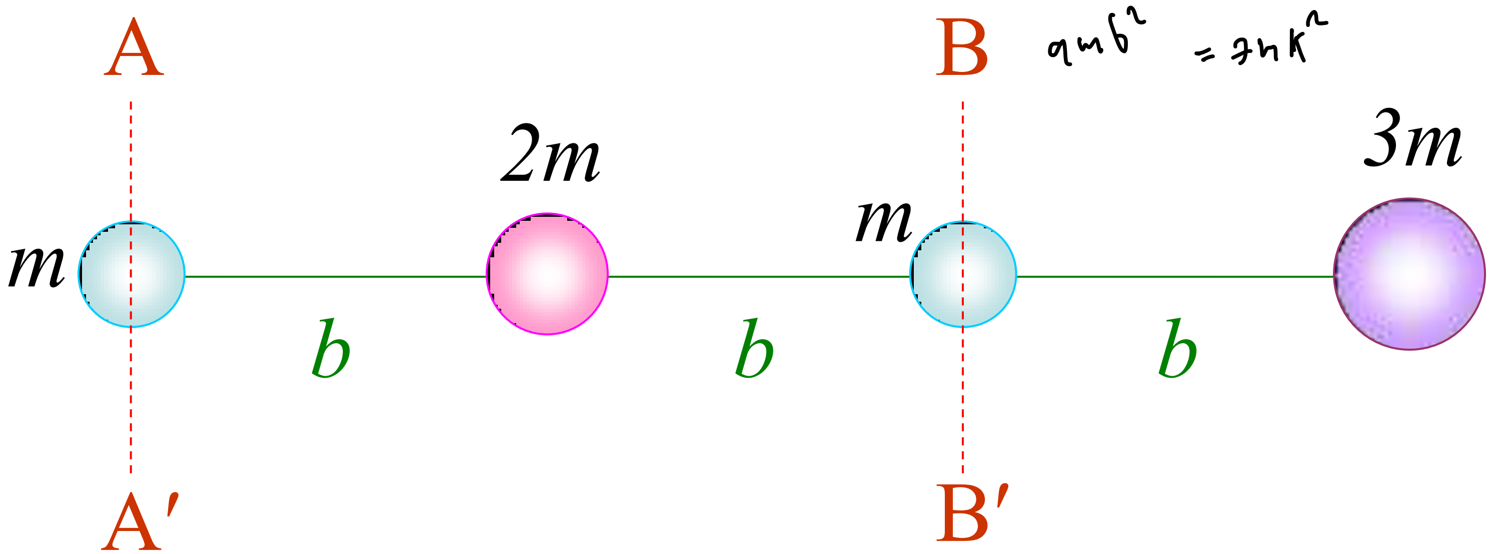
$33b^2 = 7k^2$

$k = \sqrt{\frac{33}{7}}\,b$

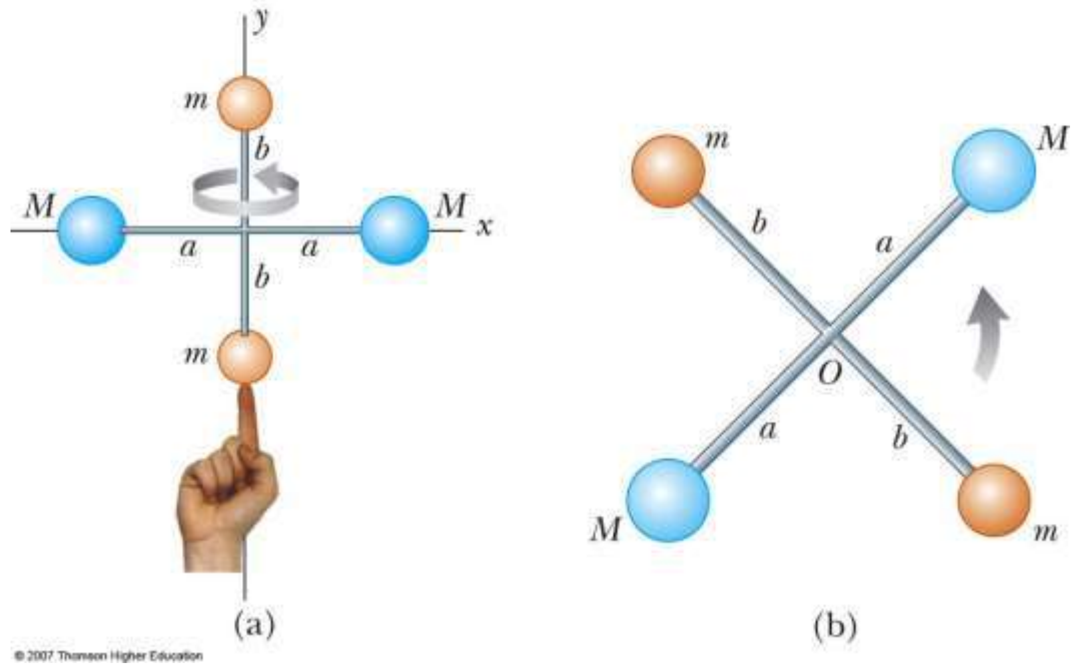
2) $4mb^2 + 2mb^2 + 3mb^2$

$= 7mk^2$

$9mb^2 = 7mk^2$



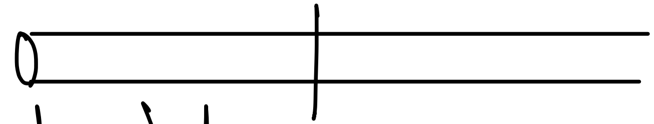
ตัวอย่างที่ 10.3 ทรงกลม 4 ลูกติดอยู่ที่ปลายแท่งไม้เบา 2 แท่งที่วางตัวในระนาบ xy ดังรูป



1. ถ้าระบบหมุนรอบแกน y (รูป a) ด้วยอัตราเร็วเชิงมุม ω จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยและพลังงานจลน์การหมุนของระบบรอบแกนนี้

2. ถ้าระบบหมุนในระนาบ xy รอบแกน z ผ่านจุด O (รูป b) จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยและพลังงานจลน์การหมุนของระบบรอบแกนนี้

ตัวอย่าง 10.4 แท่งวัตถุเรียวมากยาว L มีมวลต่อหน่วยความยาวเป็น λ จงหาโมเมนต์ความเฉื่อย เมื่อ



$dm = \lambda\, dr \qquad \lambda = \frac{M}{L}$

$I = \int r^2\, dm$

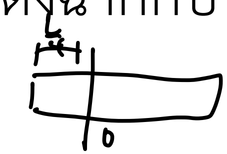
1) แกนหมุนผ่านจุดปลาย และตั้งฉากกับวัตถุ

$$I = \int r^2 \lambda\, dr = \lambda\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^L = \frac{\lambda L^3}{3} = \frac{ML^2}{3}$$

2) แกนหมุนอยู่ที่กึ่งกลาง และตั้งฉากกับวัตถุ

$$I = \int r^2\, dm = \lambda\left[\frac{r^3}{3}\right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \lambda\frac{L^3}{12} = \frac{ML^2}{12}$$

3) แกนหมุนอยู่ที่ $\frac{L}{4}$ จากปลายข้างหนึ่งและตั้งฉากกับวัตถุ



$$I = \int r^2\, dm = \int r^2 \lambda\, dr$$

$$= \lambda\left[\frac{r^3}{3}\right]_{-\frac{L}{4}}^{\frac{3}{4}L} = \lambda\left(\frac{9}{64}L^3 + \frac{L^3}{3\cdot 64}\right)$$

$$= \frac{28}{64\cdot 3}L^3\lambda = \frac{7}{48}ML^2$$

ตัวอย่าง 10.5 จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยของวงแหวนกลมบางรัศมี R ยาว L และมีแกนหมุนตามยาว

สมมติ ยาว L หนา b

$[I = MR^2]$

$dV = bLR\,d\theta$

$dm = \rho\, dV$

$= \rho\, bLR\,d\theta$

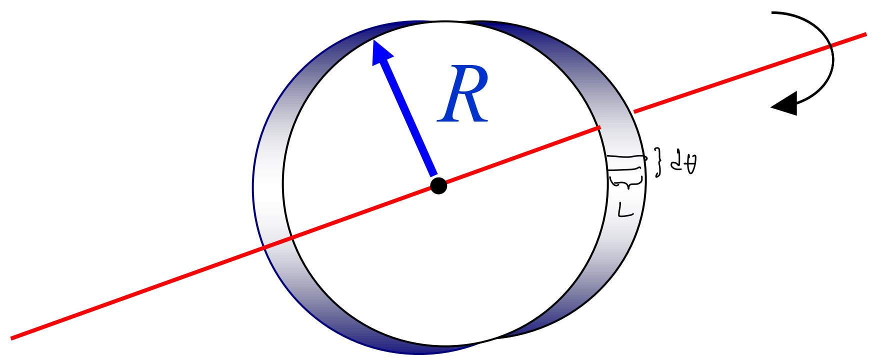
$M = \underbrace{2\pi}_{\text{มุม}} \rho R b L$

$I = \int R^2 dm = \int_0^{2\pi} R^2 \rho b L R\, d\theta$

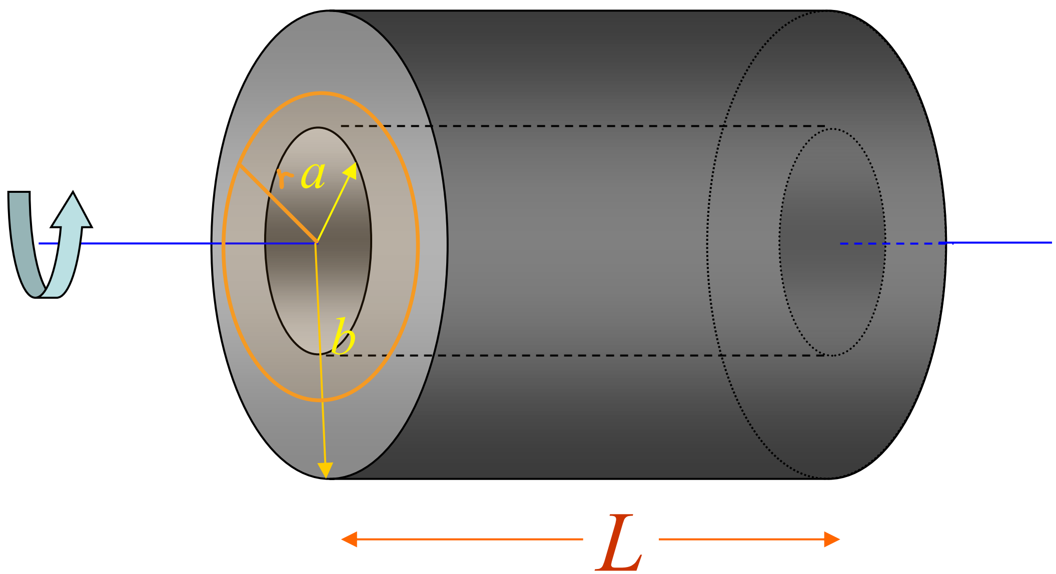
$= \rho b L R^3 \int_0^{2\pi} d\theta$

$= \rho b L R^3 (2\pi)$

$= MR^2$



ตัวอย่าง 10.6 จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยของทรงกระบอกกลวงดังรูป ที่มีรัศมีภายใน b เมตร รัศมีภายนอก a เมตร ยาว L เมตร และมีแกนหมุนตามยาว



$$dm = \rho\, dV = \rho (2\pi r) L\, dr$$

$$\rho = \frac{M}{\pi (b^2 - a^2) L}$$

$$I = \int r^2\, dm = 2\pi \rho L \int_a^b r^3\, dr$$

$$= 2\pi \rho L \left(\frac{r^4}{4} \right)_a^b$$

$$= \frac{\pi \rho L}{2} (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) = \frac{M}{2}(b^2 + a^2)$$

ตัวอย่าง 10.7 ทรงกลมกลวงบางมากรัศมี R จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยของทรง

กลมกลวงบาง

พท. = dA

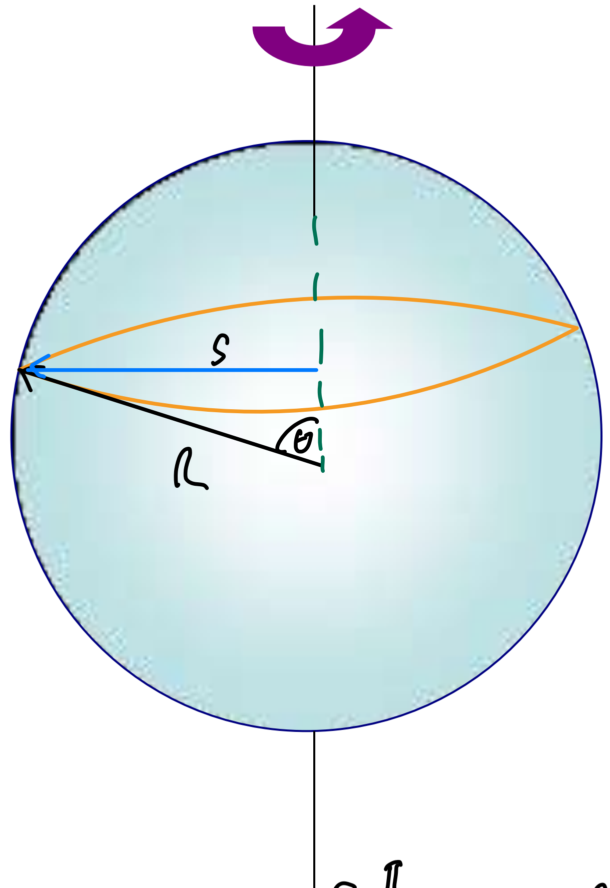
$\sigma = \frac{M}{A} = \frac{M}{4\pi R^2}$

$s = R\sin\theta$

เส้นรอบวง $= 2\pi R\sin\theta$

$dA = (2\pi R\sin\theta) R\, d\theta$

$dm = \sigma\, dA$



$$I = \int s^2\, dm = \int_0^{\pi} s^2 \frac{M}{2}\sin\theta\, d\theta = \int_0^{\pi} R^2 \frac{M}{2}\sin^3\theta\, d\theta = \frac{MR^2}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos^2\theta)\sin\theta\, d\theta$$

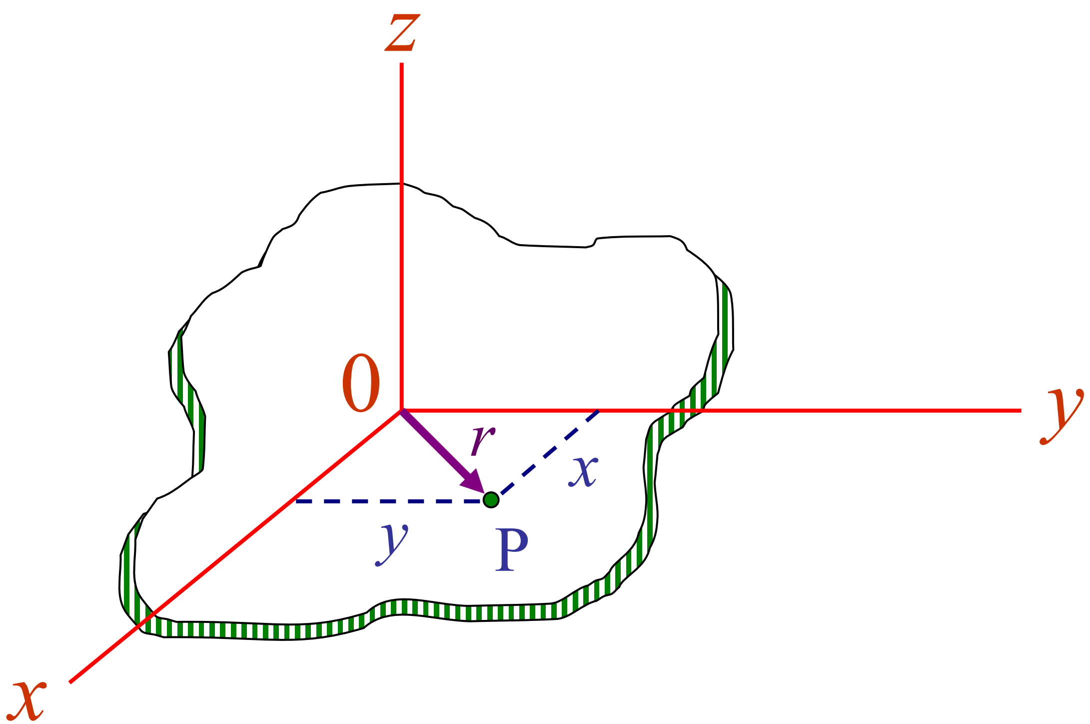
$$= \frac{2}{3}MR^2$$

ในเรื่องการหาโมเมนต์ความเฉื่อย มีทฤษฎีบทที่น่าสนใจ 2 บทเพื่อช่วยในการหาโมเมนต์ความเฉื่อย ดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 1 **ทฤษฎีแกนตั้งฉาก (perpendicular axis theorem)** แสดงความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุรอบแกน ซึ่งตั้งฉากซึ่งกันและกัน

พิจารณาวัตถุแบนบางบนระนาบ xy และวัตถุมีการหมุนรอบแกน z สามารถหา

โมเมนต์ความเฉื่อยได้

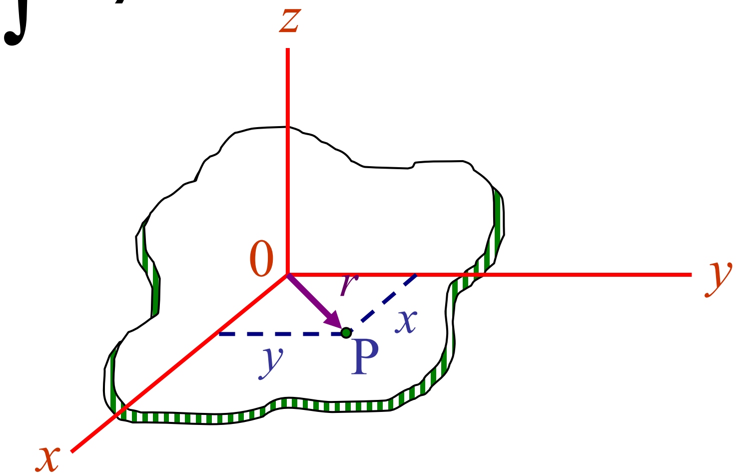


ถ้าแกน x และ y อยู่บนระนาบของวัตถุดังรูป จะได้

$$I_z = I_x + I_y$$

พิสูจน์ พิจารณามวลเล็ก ๆ dm ณ ตำแหน่ง P บนวัตถุหนึ่ง ซึ่งมีความหนาแน่น ρ

$$I_z = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dV$$



จากรูปจะได้ว่า

$$r^2 = x^2 + y^2$$

โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุรอบแกน z คือ

$$I_z = \int (x^2 + y^2)\rho dV$$

$$= \int x^2 \rho dV + \int y^2 \rho dV$$

$$= \int x^2 dm + \int y^2 dm$$

โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุรอบแกน x และ y คือ

$$I_x = \int y^2 dm \quad \text{และ} \quad I_y = \int x^2 dm$$

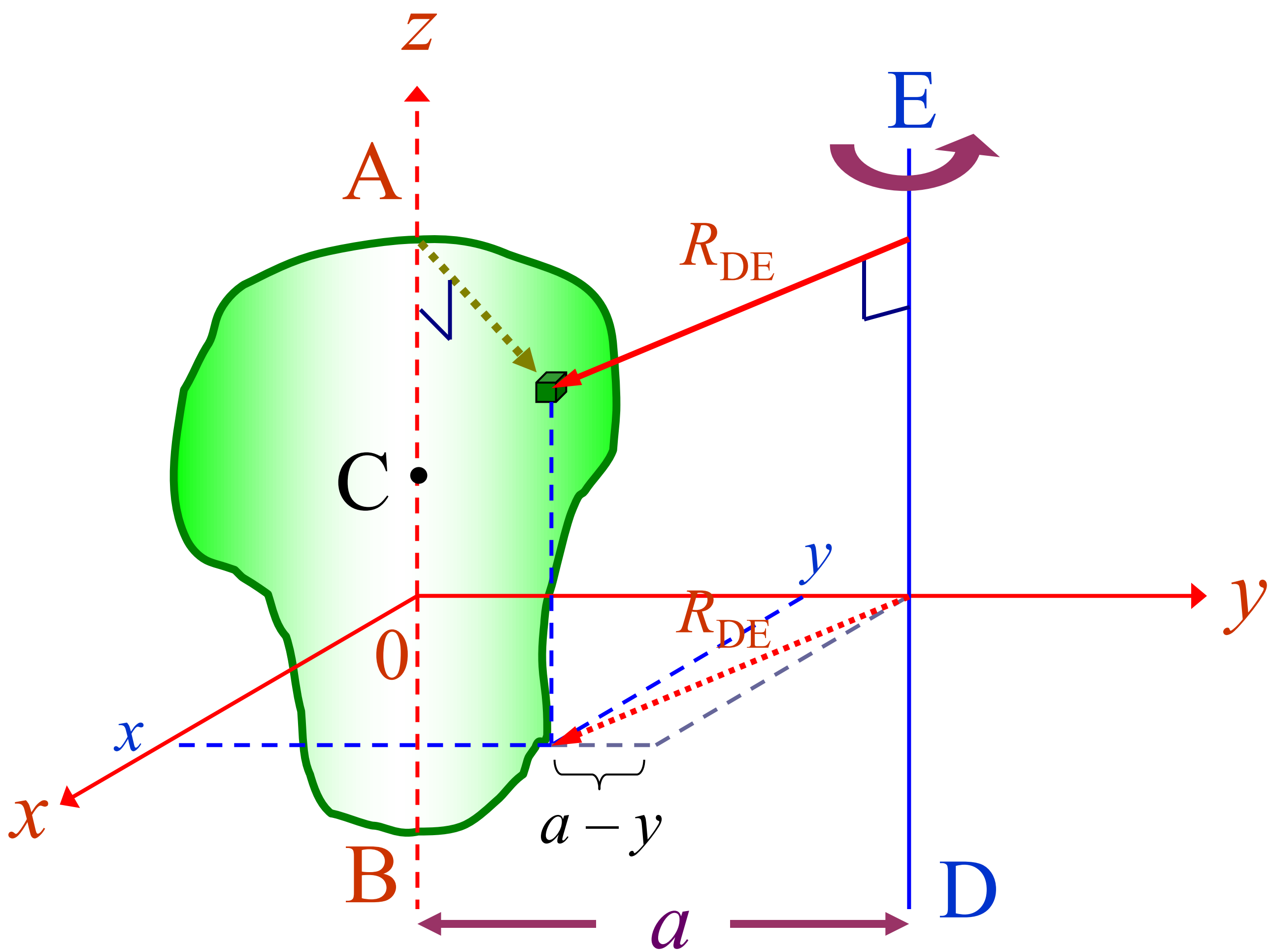
$\therefore$

$$\boxed{I_z = I_x + I_y}$$

“ทฤษฎีบทนี้ เป็นทฤษฎีบทที่ใช้ได้กับวัตถุแบนราบที่บางมาก ๆ เท่านั้น”

ทฤษฎีบทที่ 2 **ทฤษฎีแกนขนาน** กล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุรอบแกนซึ่งขนานกัน โดยที่แกนหนึ่งผ่านจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุ

ย้ายแกนหมุนจาก AB ไปเป็นหมุนรอบแกน DE



ให้ I_{DE} เป็นโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกน DE

$$I_{\mathrm{DE}} = \int R_{\mathrm{DE}}^2 dm$$

และ $R_{\mathrm{DE}}^2 = x^2+(a-y)^2 = x^2+a^2-2ay+y^2$

ดังนั้น $I_{\mathrm{DE}} = \int (x^2+y^2+a^2-2ay)dm$

$$= \int (x^2+y^2)dm+\int a^2dm-\int 2aydm$$

$$= \int (x^2+y^2)dm+\int a^2dm-2a\int ydm$$

แต่ $\int y\,dm$ คือส่วนประกอบของเวกเตอร์ตำแหน่งศูนย์กลางมวล ($\vec{R}_{\mathrm{CM}}$) ตามแกน y ซึ่งกรณีนี้คือ OC นั่นคือ

$$y_{\mathrm{CM}} = \frac{\int y\,dm}{\int dm}$$

$$\int y\,dm = y_{\mathrm{CM}} \int dm$$

และเนื่องจาก $y_{\mathrm{CM}} = 0$ ดังนั้น $\int y\,dm = 0$

$$\therefore \qquad I_{\text{DE}} = \int (x^2+y^2)dm + a^2\int dm$$

$$= I_{\text{AB}} + Ma^2$$

หรือ $\boxed{I_{\text{DE}} = I_{\text{CM}} + Ma^2}$ เมื่อ $I_{\text{AB}} = I_{\text{CM}}$

* ใช้เมื่อ AB ผ่าน CM และ DE // AB

ตัวอย่างที่ 10.9 จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยของแผ่นจัตุรัสที่มีมวล M kg สม่ำเสมอและบางมากๆ รอบแกน A″B″ ที่ผ่านขอบมวล และแผ่นจัตุรัสมีขนาด $a \times a$ m^2

กำหนดให้ $$I_{AB} = \frac{Ma^2}{6}$$

$$I_z = I_x + I_y$$

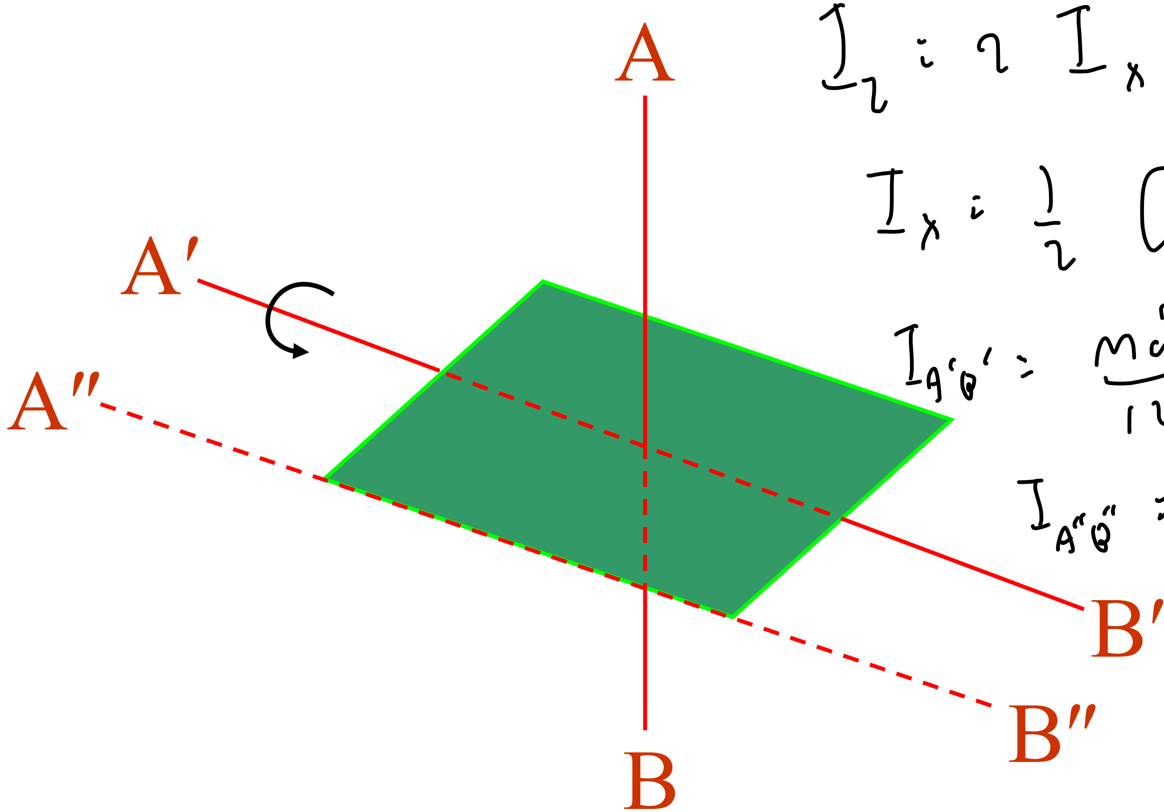
$$I_z = 2 I_x$$

$$I_x = \frac{1}{2}\left(\frac{Ma^2}{6}\right)$$

$$I_{A'B'} = \frac{Ma^2}{12}$$

$$I_{A''B''} = \frac{Ma^2}{12} + \frac{Ma^2}{4}$$

$$= \frac{Ma^2}{3}$$



ตัวอย่าง 10.10 จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยของจานกลมบางรัศมี R เมตร มวล M กิโลกรัม เมื่อแกนหมุนผ่านแนวขอบที่เส้นผ่านศูนย์กลางของจาน

$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\pi r^2 b}$ $\quad dm = 2\pi r b \rho \, dr$

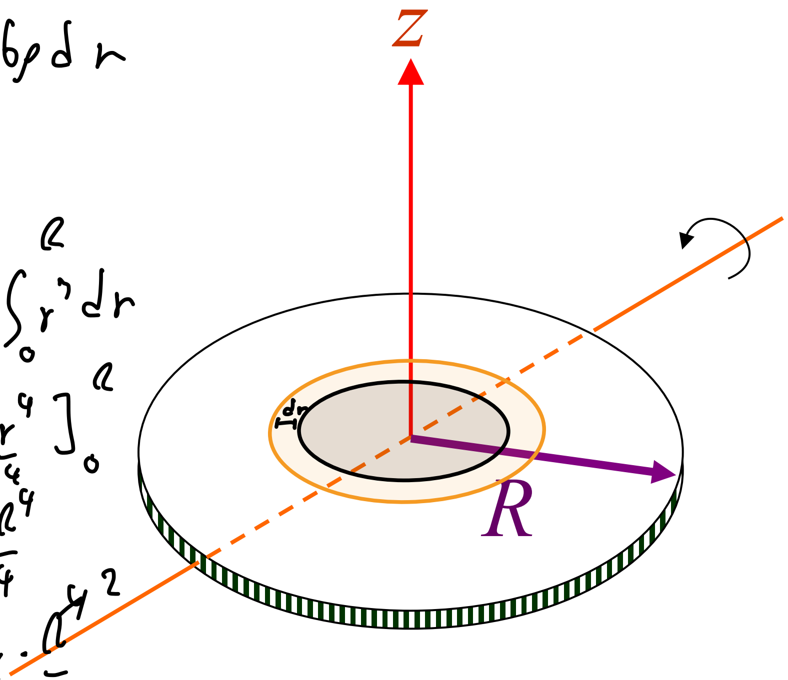
$$I_z = \int r^2 \, dm = 2\pi b \rho \int_0^a r^3 \, dr$$

$$= 2\pi b \rho \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a$$

$$= 2\pi b \rho \frac{a^4}{4}$$

$$= 2\pi \cancel{b} \cdot \frac{M}{\cancel{\pi} a^2 \cancel{b}} \cdot \frac{a^{\cancel{4}\,2}}{4}$$

$$= \frac{Ma^2}{2}$$



$2I_x = I_z$

$$I_x = \frac{1}{2} I_z$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{Ma^2}{2}$$

$$= \frac{Ma^2}{4}$$

10.4 พลังงานจลน์ของการหมุน

ในกรณีที่การเคลื่อนที่ของวัตถุแบบกลิ้ง (rolling) ซึ่งจะมีทั้งการเคลื่อนที่แบบเลื่อนตำแหน่งและการหมุนพร้อมกันไป เช่นการกลิ้งของลูกบอลบนพื้นราบ

ในการพิจารณาการหมุนของวัตถุขณะที่มีการเลื่อนที่

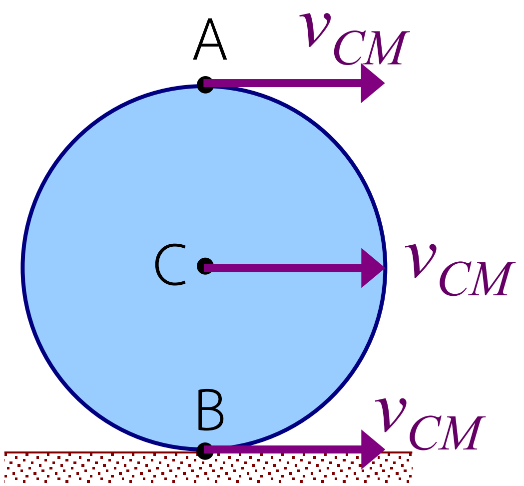
1. แกนหมุนจะต้องผ่านจุดศูนย์กลางมวล

2. แกนหมุนจะต้องอยู่ในทิศเดิมเสมอ

ระหว่างการหมุนขณะที่เลื่อนที่ บางช่วงวัตถุเกร็งอาจจะมีการเลื่อนที่เพียงอย่างเดียว เรียกว่า การไถล

ในที่นี้เราจะพิจารณากรณีที่วัตถุเกร็งเลื่อนที่โดยการหมุนแต่ไม่มีการไถล หรือเรียกว่า การหมุน (กลิ้ง) โดยไม่มีการไถล (pure rolling motion)

ในกรณีที่**วัตถุเกร็งมีการเลื่อนที่เพียงอย่างเดียว**



Pure translation

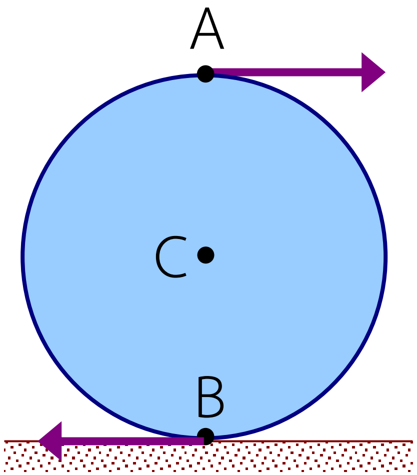
การเลื่อนที่อย่างเดียว ทุก ๆ จุดเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วเท่ากัน คือ v_{CM}

เมื่อวัตถุเกร็งเลื่อนที่เพียงอย่างเดียว ด้วยอัตราเร็วเชิงเส้น v_{CM} พลังงานจลน์เนื่องจากการเลื่อนที่นี้ คือ

$$K = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2$$

$$= \frac{1}{2} M v_{CM}^2$$

ในกรณีที่**วัตถุเกร็งมีการหมุนเพียงอย่างเดียว**



Pure rotation

การหมุนอย่างเดียว จะเกิดโมเมนต์แรงคู่ควบ $v_B = v_A = v_{CM} = \omega R$

เมื่อวัตถุเกร็งหมุนรอบแกนหมุน ด้วยอัตราเร็วเชิงมุม ω พลังงานจลน์เนื่องจากการหมุนนี้ คือ

$$K = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

แต่ $v_i = r_i \omega$

ดังนั้น

$$K = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$

$$= \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$$

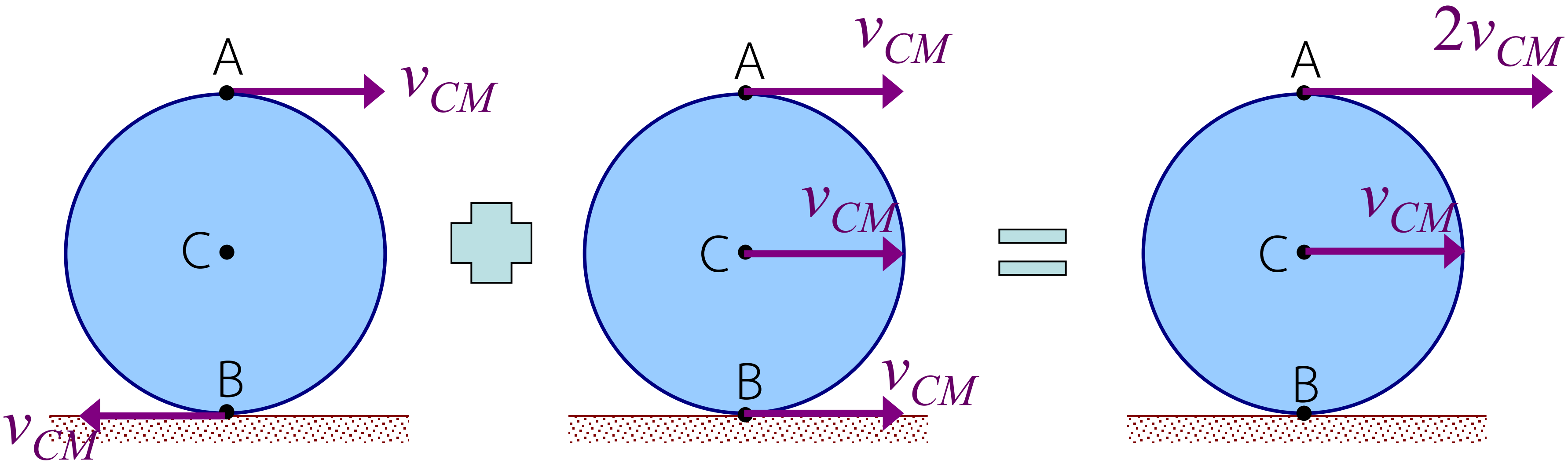
จากนิยาม

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$$

แล้วพลังงานจลน์เนื่องจากการหมุนคือ

$$\boxed{K = \frac{1}{2} I \omega^2}$$

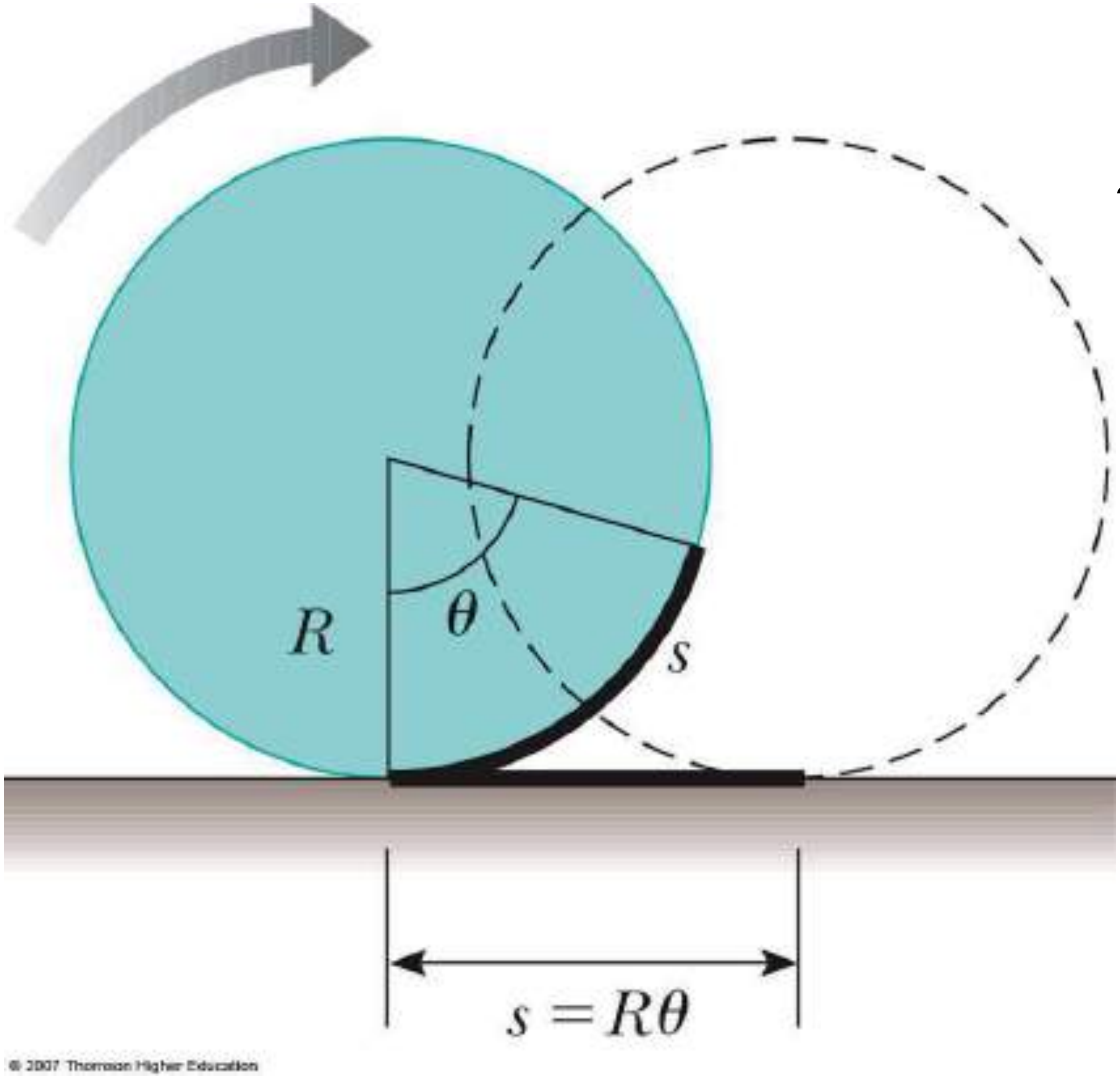
ในกรณีที่**วัตถุเกร็งมีทั้งการเลื่อนที่และการหมุน**



Pure rotation

Pure translation

Superposition of pure translation and pure rotation

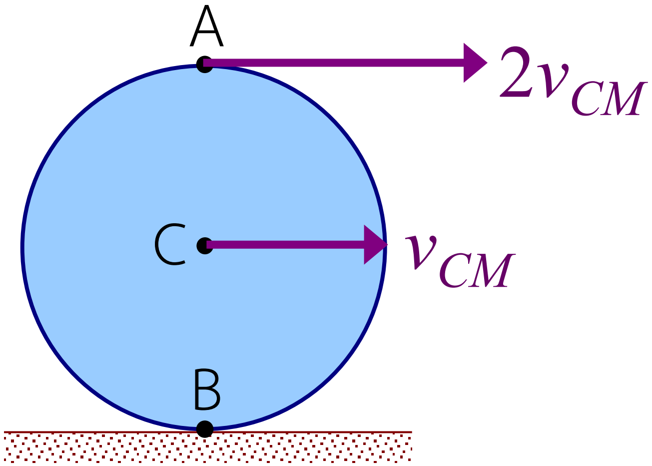


จาก $s = R\theta$

$$\frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt}$$

$$v_{CM} = \omega R$$

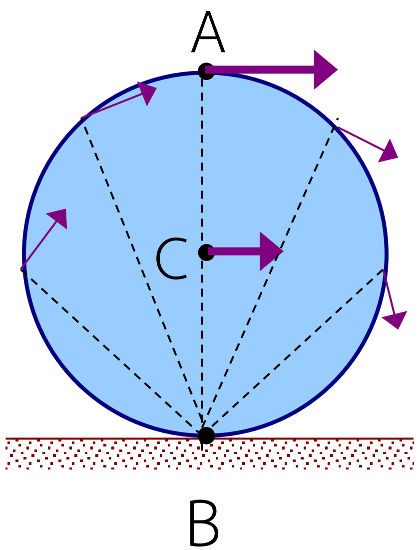
$$a_{CM} = R\alpha$$



จากรูปให้วัตถุหมุนรอบแกนที่ผ่านจุด B ตั้งฉากกับระนาบหน้ากระดาษ

การหมุนในขณะเลื่อนที่จะได้ว่า ที่จุด B $v_B = v_{CM} - \omega R$

ถ้าไม่มีการไถล $v_B = 0,\ v_{CM} = \omega R,\quad v_A = 2v_{CM}$



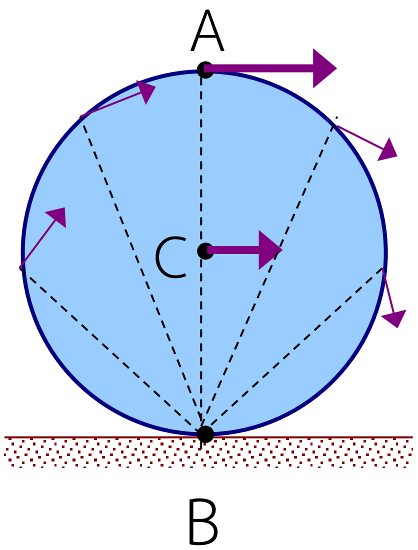
ขณะนั้นทุก ๆ จุดบนวัตถุเกร็งจะมีความเร็วเชิงเส้นในทิศตั้งฉากกับเส้นเชื่อมระหว่าง B กับจุดนั้น ขนาดของความเร็วก็ขึ้นกับระยะห่างจากจุด B ดังนั้น ขณะนั้นวัตถุจะเคลื่อนที่ในแบบการหมุนอย่างเดียวเท่านั้น ด้วยความเร็วเชิงมุม ω แล้วพลังงานจลน์ของวัตถุเกร็งคือ

$$K_B = \frac{1}{2} I_B \omega^2$$

I_B คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของการหมุนของวัตถุเกร็งรอบแกน B โดยหาได้จาก

ทฤษฎีแกนขนาน (parallel axis theorem) จะได้ว่า

$$I_B = I_{CM} + MR^2$$



ดังนั้นพลังงานจลน์รอบจุด B คือ

$$K_B = \frac{1}{2} I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2} MR^2\omega^2$$

$R\omega$ คือความเร็วของจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรอบจุด B และ $v_{CM} = R\omega$

แล้ว

$$K_B = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$$

ดังนั้นพลังงานจลน์ของวัตถุเกร็งทั้งหมดเนื่องจากการเลื่อนที่และการหมุน (การกลิ้ง) อาจจะเขียนได้เป็น

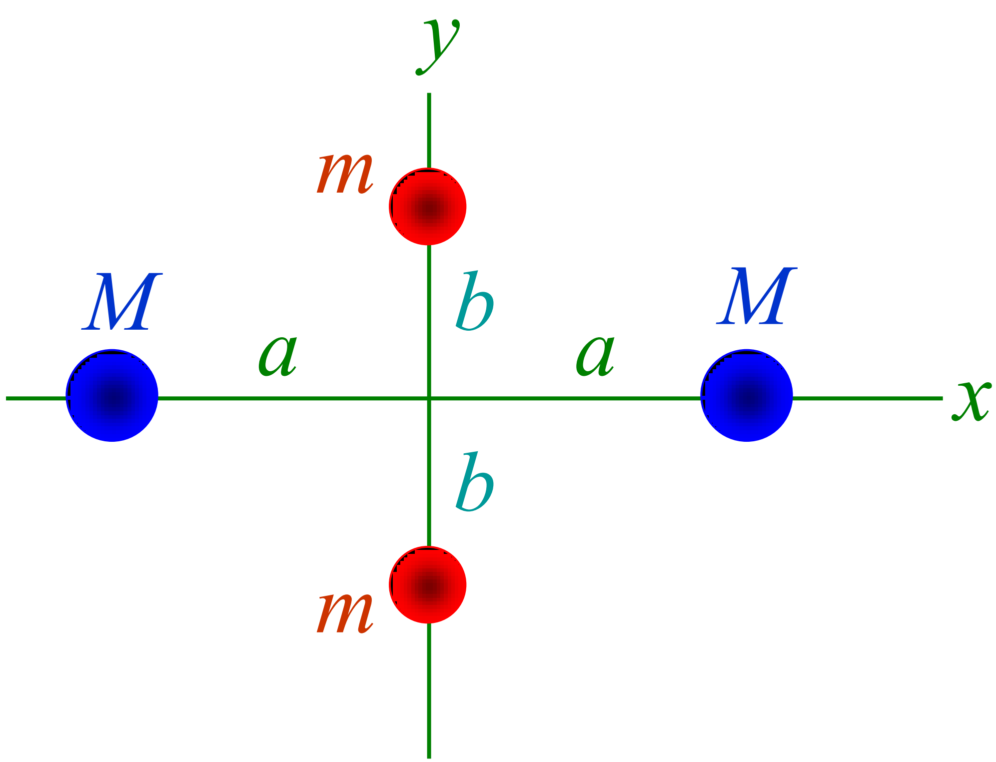
$$\boxed{E_k = K = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2}$$

Pure rolling = translation of CM + rotation around CM

เทอม $\frac{1}{2}Mv_{CM}^2$ คือพลังงานจลน์ของการเลื่อนตำแหน่งของวัตถุ

เทอม $\frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$ คือพลังงานจลน์ของการหมุนรอบแกนผ่านจุดศูนย์กลางมวล

ตัวอย่าง 10.12 มวล 4 ก้อน ยึดติดกับปลายลวดกางเขนเบามาก ในระนาบ xy ดังรูป หากโครงนี้มีการหมุนรอบแกน y ด้วยอัตราเร็วเชิงมุม ω จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยและพลังงานจลน์ของการหมุน [$Ma^2\omega^2$]



วิธีทำ จะเห็นว่ามวล m ทั้งสองบนแกนหมุน (แกน y) ไม่ส่งผลต่อค่า I ของระบบ

เลย เนื่องจากระยะฉาก R_i จากแกนหมุนเป็นศูนย์ ดังนั้น

$$I_y = \sum_i m_i r_i^2 = Ma^2 + Ma^2$$

$$= \boxed{2Ma^2}$$

และ

$$T = \frac{1}{2} I_y \omega^2 = \frac{1}{2}(2Ma^2)\omega^2$$

$$= \boxed{Ma^2\omega^2}$$

ตัวอย่าง 10.13 จากรูป ทรงกลมตันสม่ำเสมอกลิ้งบนผิวระดับด้วยอัตราเร็ว 20 m/s แล้วกลิ้งขึ้นพื้นเอียง ถ้าการสูญเสียเนื่องจากแรงเสียดทานมีค่าน้อยมาก จงหาค่าความสูง h m ของตำแหน่งที่ลูกบอลหยุด กำหนดให้ I_c ของทรงกลมตัน เท่ากับ $\frac{2}{5}mr^2$ kg m^2

[28.57 m]

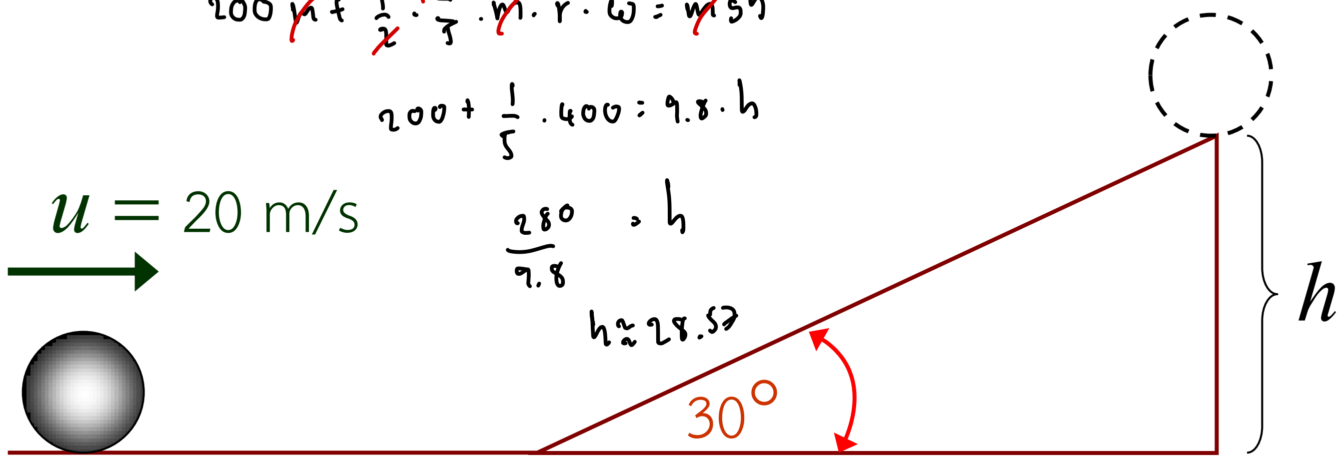
$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = mgh$$

$$200\cancel{m} + \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{5}\cdot\cancel{m}\cdot r^2\cdot\omega^2 = \cancel{m}gh$$

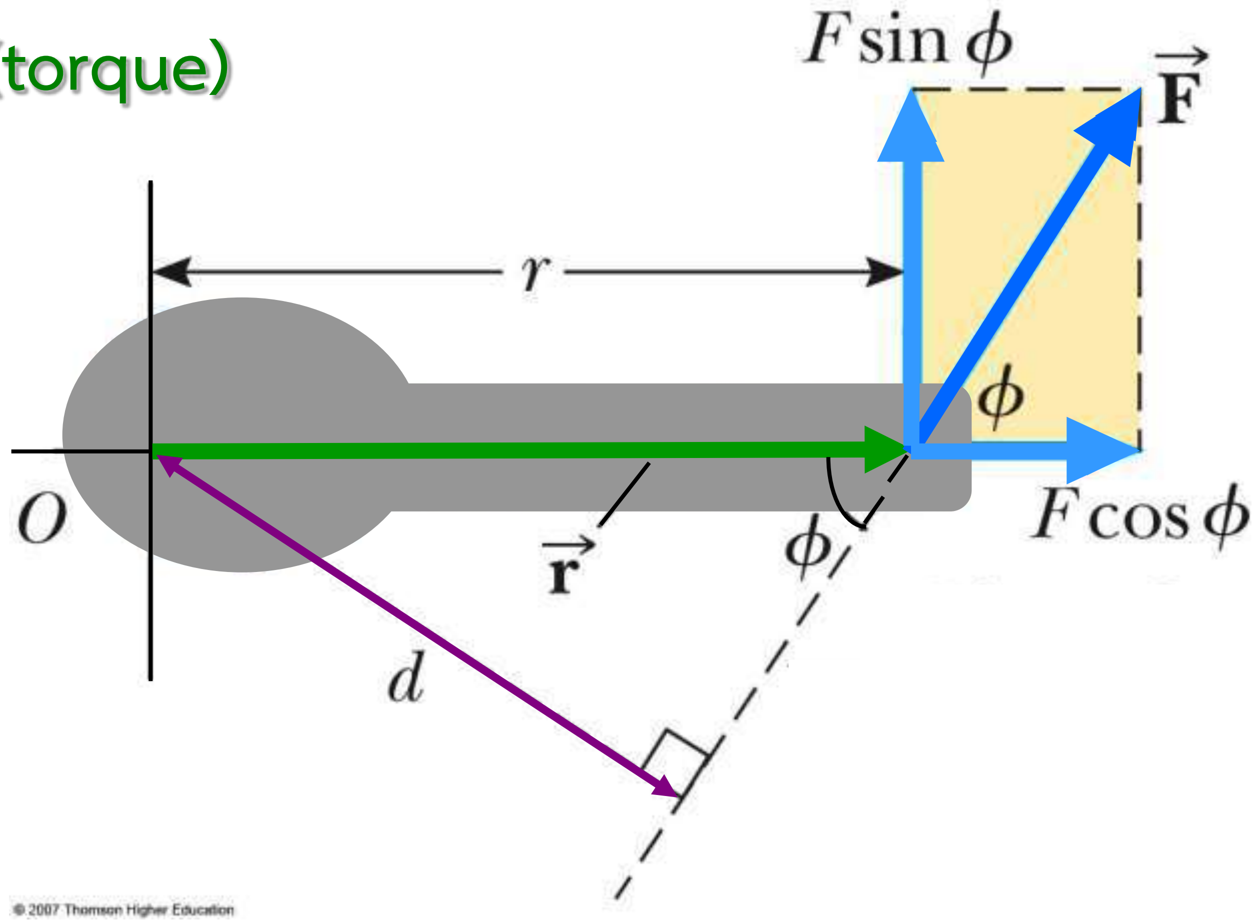
$$200 + \frac{1}{5}\cdot 400 = 9.8\cdot h$$

$$\frac{280}{9.8} = h$$

$$h \approx 28.57$$



10.5 ทอร์ก (torque)



$$\tau \equiv Fd$$ เมื่อ d คือระยะทางที่ตั้งฉากกับแรง (moment arm)

$$\tau = (F)(r\sin\phi) = (F\sin\phi)(r)$$

ทิศของ [redacted] ?

[redacted] เมื่อ [redacted] คือเวกเตอร์บอกตำแหน่งของ [redacted]

ขนาดและทิศของ [redacted] ขึ้นกับจุดอ้างอิง

วัตถุแข็งเกร็งภายใต้ทอร์กรวม

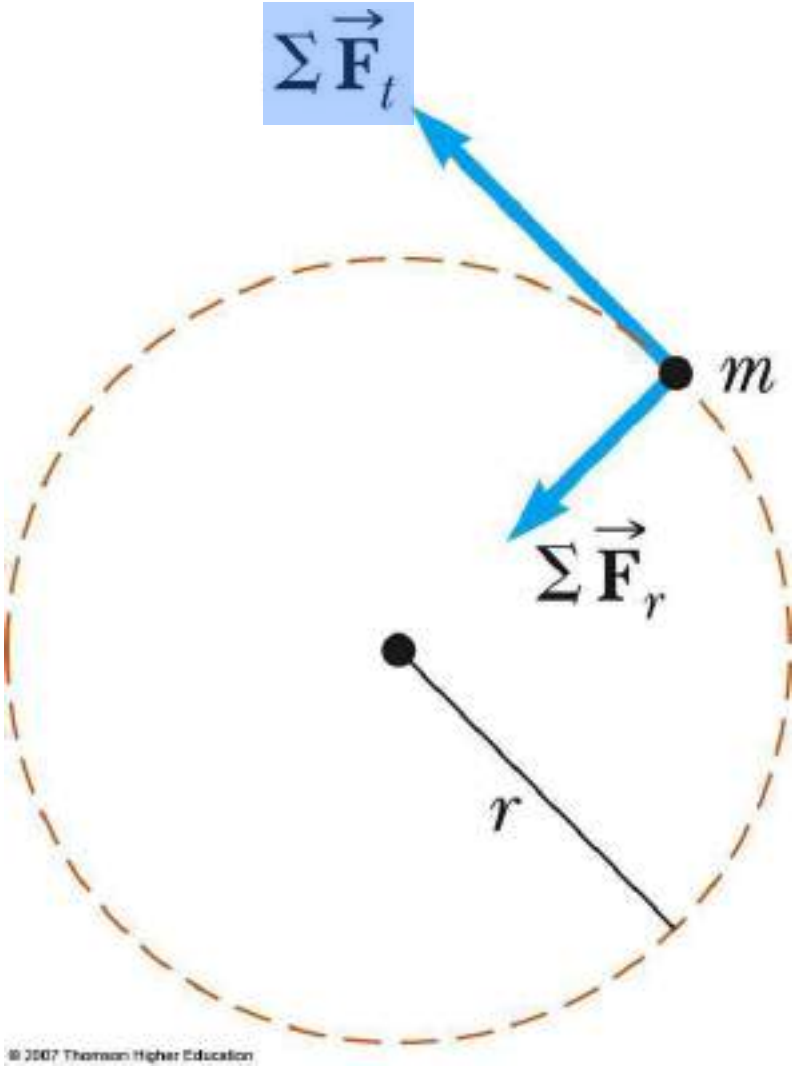
พิจารณาอนุภาคมวล m เคลื่อนที่เป็นวงกลมรัศมี r

$$\sum F_t = m a_t$$

$$\left(\sum F_t\right) r = \left(m a_t\right) r \quad ; a_t = \alpha\, r$$

$$\sum \tau = \left(m r^2\right)\alpha = I\alpha$$

$$\boxed{\sum \tau = I\alpha}$$



ตัวอย่าง 10.15 เป็นที่ทราบกันว่าความยาวของวันบนโลกยืดออก ด้วยอัตรา 1 ms ในทุก ๆ ศตวรรษ สาเหตุหลักเนื่องมาจากแรงเสียดทานที่น้ำทะเลเคลื่อนตัวเทียบกับแรงดึงดูดจากดวงจันทร์ และดวงอาทิตย์ จงหา

1) อัตราการสูญเสียพลังงานจลน์ของการหมุนของโลก

[-1.907×10^{12} J/s]

2) อัตราเร่งเชิงมุมของโลก

[-2.667×10^{-22} rad/s^2]

กำหนด $R_E = 6.4 \times 10^6$ m, $M_E = 6.0 \times 10^{24}$ kg

1) คาบ $T = \frac{2\pi}{\omega}$ $\quad \omega = \frac{2\pi}{T}$

พลังงานในการหมุน $K = \frac{1}{2} I\omega^2$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} M_E R_E^2 \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dK}{dT} \cdot \frac{dT}{dt}$$

$\frac{1\,ms}{100\,ปี} = 3.169 \times 10^{-13}$

$$= \frac{4\pi^2}{5}\left(\frac{M_E R_E^2}{T^3}\right)(-2)\frac{dT}{dt} = -\frac{8\pi^2}{5}\left(\frac{M_E R_E^2}{T^3}\right)\frac{dT}{dt}$$

$24 \times 60 \times 60 = 8.64 \times 10^4$

$$\frac{dK}{dt} = -\frac{8\pi^2}{5}\left(\frac{6.0 \times 10^{24} \times (6.4 \times 10^6)^2}{(8.64 \times 10^4)^3}\right)(3.169 \times 10^{-13})$$

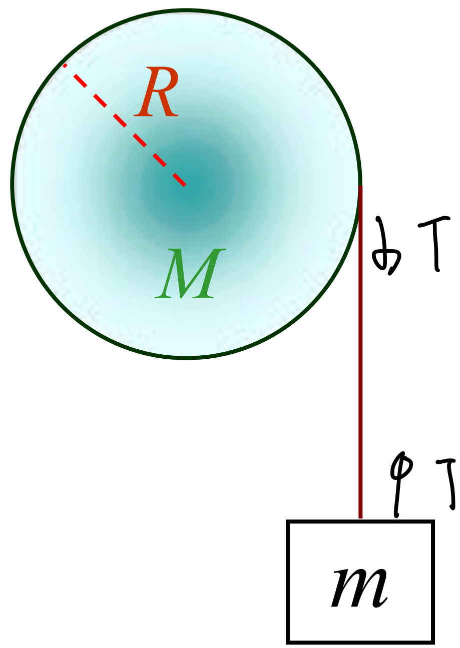
2) $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{2\pi}{T}\right) = -\frac{2\pi}{T^2}\frac{dT}{dt}$

$$\alpha = \frac{-2\pi(3.169 \times 10^{-13})}{(8.64 \times 10^4)^2}$$

$$= -2.667 \times 10^{-22}$$

ตัวอย่างที่ 10.16 ล้อตันรัศมี R m มวล M kg พันด้วยเชือกเบาซึ่งมีมวล m kg ห้อยอยู่ที่ปลายดังรูป จงหา$\underbrace{\text{อัตราเร่งเชิงเส้น}}_{a}$ของมวล m เทียบกับ g

กำหนดให้ $m = \dfrac{M}{10}$ [1.63 m/s^2]



$\tau = I\alpha$

$mg - T = ma_{cm}$

$I_c \alpha = T r$

$\frac{M \cancel{r^2}}{2} \cdot \frac{a}{r} = T \cancel{r}$

$\frac{Ma}{2} = T$

$mg - \frac{Ma}{2} = ma$

$9.8 - 5a = a$

$9.8 = 6a$

ตัวอย่างที่ 10.17 ลูกดิ่ง (Yo-Yo) รัศมีวงนอก R m รัศมีแก่น $r = \dfrac{R}{10}$ m มวล M kg หากปล่อยลูกดิ่งนี้ให้หมุนลงไปตรง ๆ โดยไม่แกว่ง จงหาความเร่งเชิงเส้นของลูกดิ่งนี้เทียบกับ g

$$Mg - T = Ma_{cm}$$

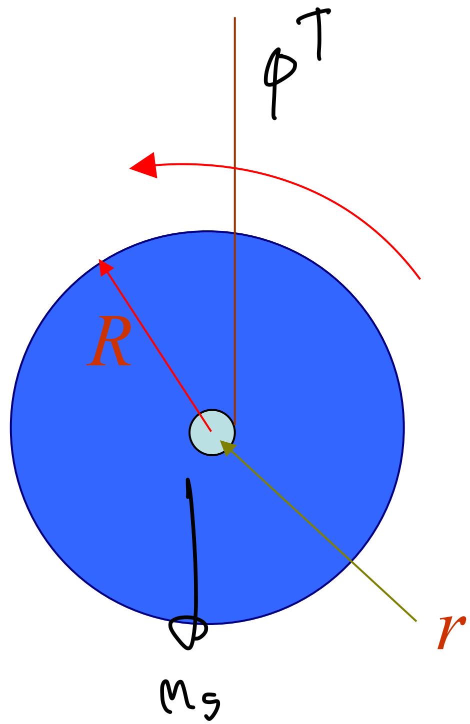
$$I_c = \frac{MR^2}{2}$$

$$F \cdot r = I\alpha$$

$$T \cdot r = \frac{MR^2}{2} \cdot \frac{a}{R}$$

$$T = \frac{MR^2 \cdot a}{2r^2}$$

$$T = 50Ma$$



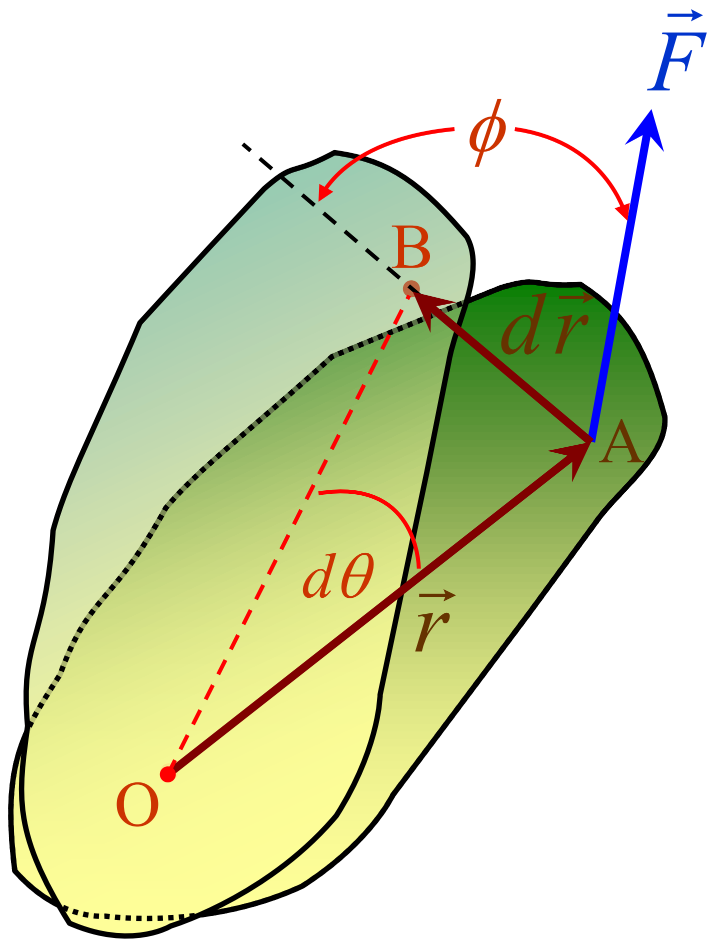
$$Mg - 50Ma = Ma$$

$$\cancel{M}g = 51\cancel{M}a$$

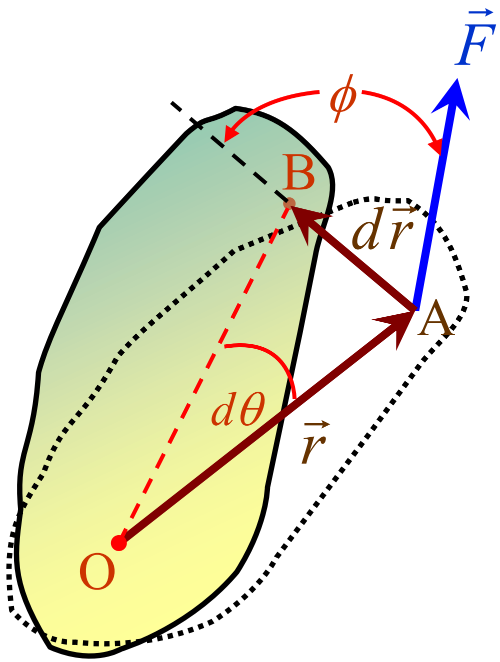
$$a = \frac{g}{51}$$

10.6 งานและกำลังในการหมุน

พิจารณาวัตถุหนึ่ง ที่มีจุดหมุนอยู่ที่ O



ถ้า dW เป็นงานที่ทำ จะได้



$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$= F\cos\phi dr$$

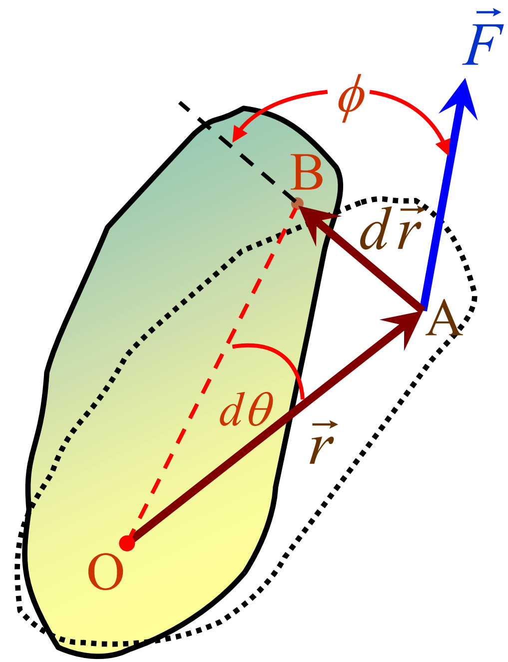
$$= F\cos\phi r d\theta$$

และจาก $$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F}$$

ขนาดของทอร์คจะได้ $$\tau = |\vec{r}\times\vec{F}|$$

$$= rF\sin(90°-\phi)$$

$$= rF\cos\phi$$



$$\therefore \quad dW = \tau d\theta$$

ดังนั้น

$$W = \int \tau \, d\theta$$

และกำลัง ณ ขณะหนึ่ง

$$P = \frac{dW}{dt}$$

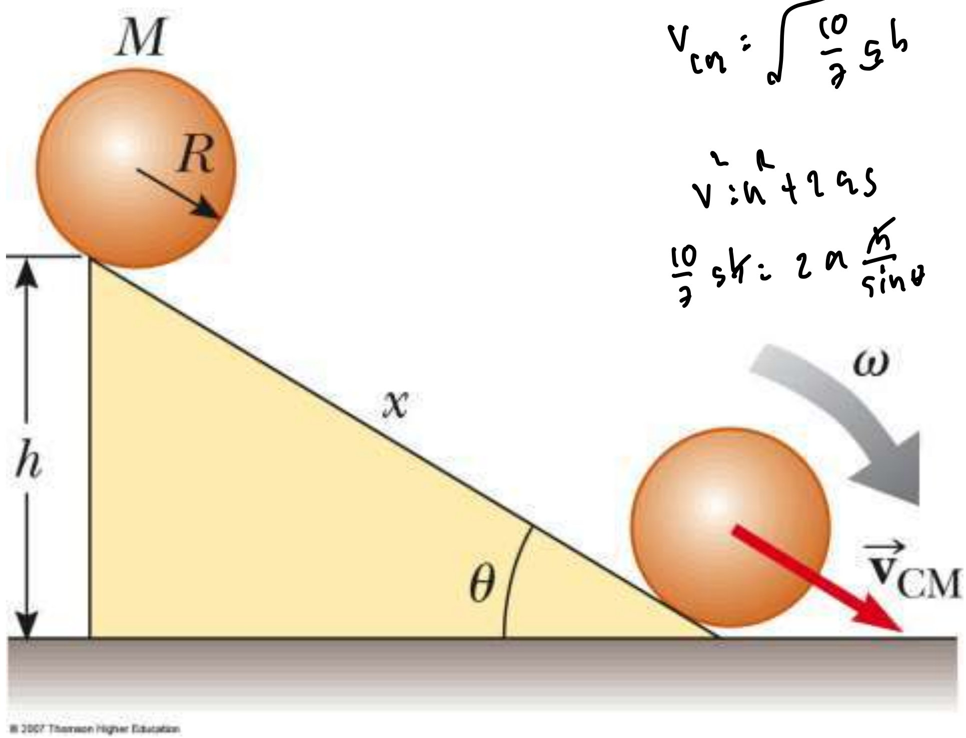
หรือ

$$P = \frac{\tau d\theta}{dt} = \tau\omega = \vec{\tau} \cdot \vec{\omega}$$

ตัวอย่างที่ 10.13 ทรงกลมรัศมี R m มวล M kg กลิ้งลงจากพื้นเอียง ดังรูป จงหาอัตราเร็วของศูนย์กลางมวลที่ปลายพื้นเอียง และขนาดของความเร่งศูนย์กลางมวล

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{10}{7}gh}$$



$$v^2 = u^2 + 2as$$

$$\frac{10}{7}gh = 2a\frac{h}{\sin\theta} \qquad a = \frac{5}{7}g\sin\theta$$

การเปรียบเทียบระหว่างสมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งแบบการเลื่อนที่และการหมุน

การเลื่อนที่	การหมุน
1. Linear momentum $\vec{p} = m\vec{v}$	1. Angular momentum $\vec{L} = I\vec{\omega}$
2. Force $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	2. Torque $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

การเลื่อนที่	การหมุน
3. Body of constant mass $\vec{F} = m\vec{a}$	3. Body of constant moment of inertia $\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$
4. Kinetic energy $E_k = \frac{1}{2}mv^2$	4. Kinetic energy $E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$
5. Power $P = \vec{F}\cdot\vec{v}$	5. Power $P = \vec{\tau}\cdot\vec{\omega}$

บทที่ 11 โมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุเกร็ง (Angular Momentum of Rigid Body)

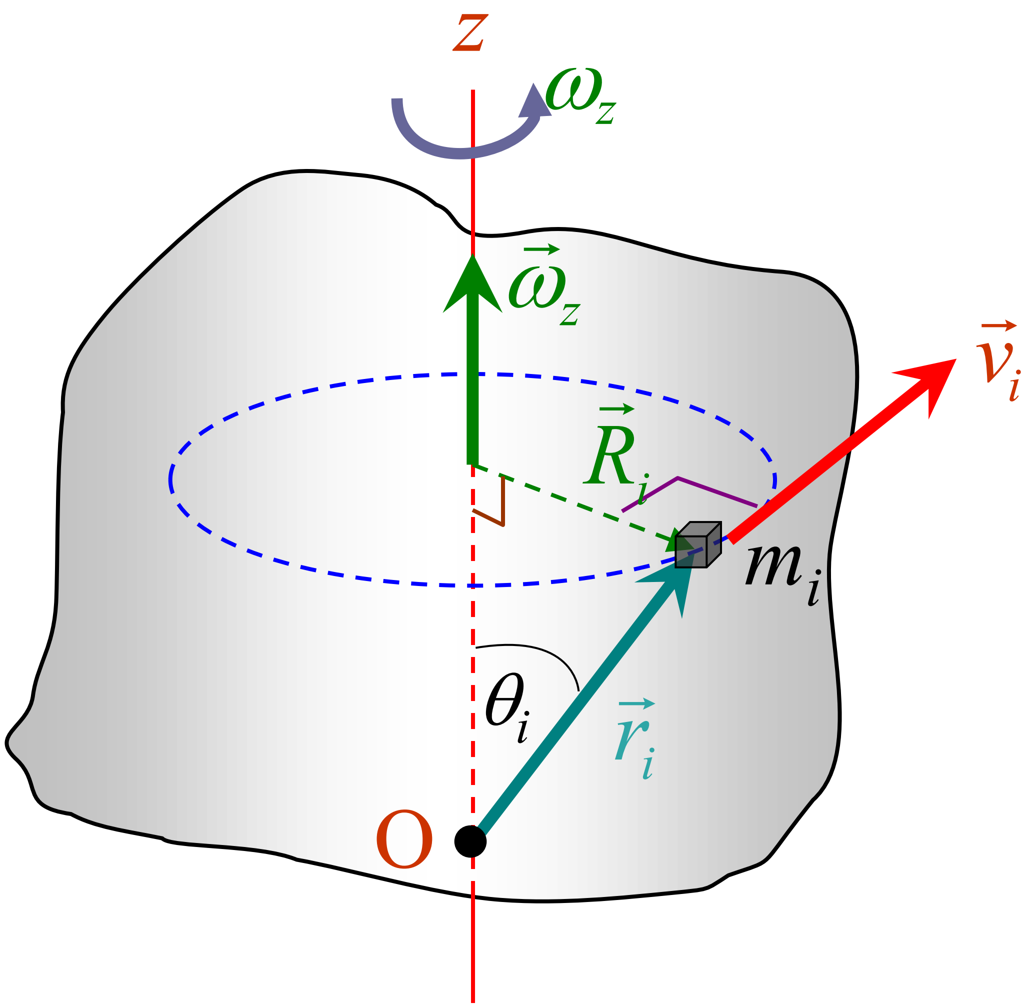
นิยามโมเมนตัมเชิงมุม ([redacted])

[redacted]

เมื่อ [redacted] บอกตำแหน่งวัตถุ

[redacted] คือโมเมนตัมเชิงเส้นของวัตถุ

สำหรับวัตถุเกร็ง พิจารณาวัตถุก้อนหนึ่ง



โมเมนตัมเชิงมุมของอนุภาค m_i คือ

[redacted]

$=$ [redacted]

$$\vec{L}_i = m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

เมื่อ $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$

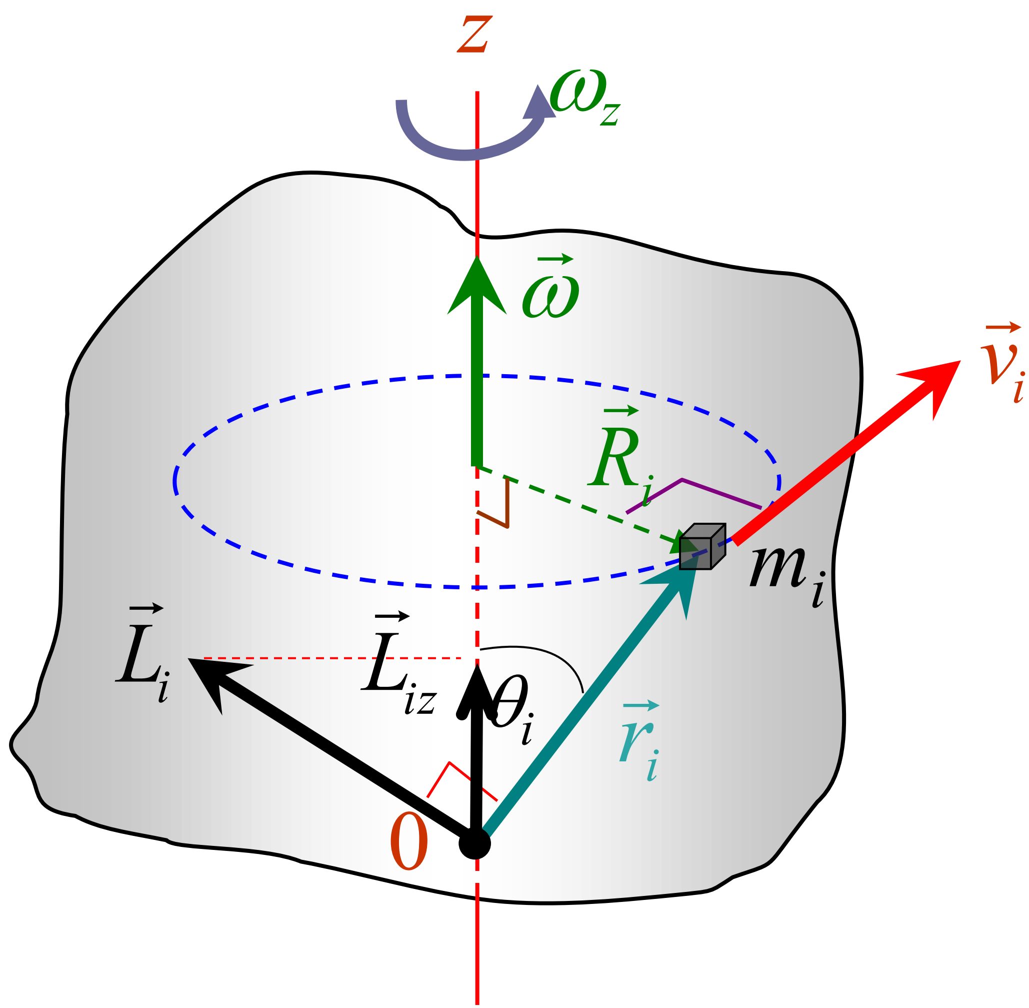
และ $v_i = |\vec{v}_i| = \omega r_i \sin\theta_i = \omega R_i$

โมเมนตัมเชิงมุมทั้งหมดของวัตถุ คือ

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 + \ldots = \sum_{i=1}^{N} L_i$$

โดยทั่วไป $\vec{L}$ จะมีทิศไม่ขนานกับแกนหมุน

ขนาดขององค์ประกอบของ $\vec{L}_i$ ในแนวขนานกับแกนหมุน z คือ

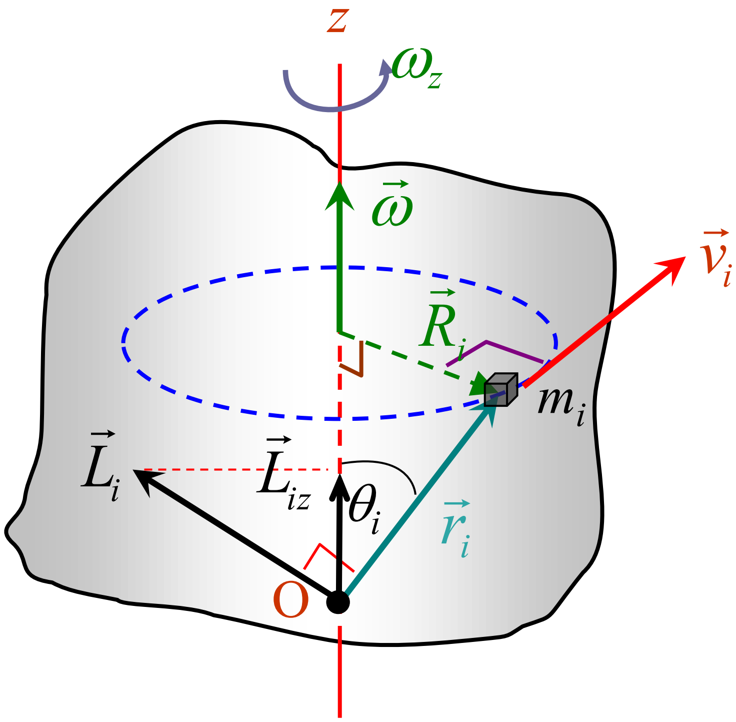


ดังนั้น

$$L_{iz} = m_i r_i v_i \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right)$$

$$= m_i (r_i \sin\theta_i)(\omega_z R_i)$$

$$= m_i \omega_z R_i^2$$



และองค์ประกอบของโมเมนต์เชิงมุมทั้งหมดของวัตถุรอบแกน z คือ

$$L_z = L_{1z} + L_{2z} + \ldots = (m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + \ldots)\omega_Z$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 \right) \omega_z = I_z \omega_z$$

หรือสามารถเขียนในรูปเวกเตอร์ได้เป็น

$$\vec{L}_z = I_z \vec{\omega}_z$$

ในกรณีที่วัตถุหมุนรอบแกน โดยที่ $\vec{L}$ มีทิศทางขนานกับ $\vec{\omega}$ ซึ่งอยู่ในแนวเดียวกับแกนหมุน โมเมนตัมเชิงมุมจะเขียนในรูปทั่วไป

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

และ

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2$$

ระบบไม่เอกเทศ (nonisolated system)

การเลื่อนตำแหน่ง $\sum$ [redacted] $_{ext} = \frac{\text{[redacted]}}{dt} \rightarrow$ การหมุน ?

พิจารณา

$$\frac{d\text{[redacted]}}{dt} = \frac{\text{[redacted]}}{dt}(\text{[redacted]}) \ \text{[redacted]} \left(\frac{\text{[redacted]}}{dt}\right) \ \text{[redacted]} \left(\frac{\text{[redacted]}}{dt}\right)$$

$$= \text{[redacted]} \sum \text{[redacted]}_{ext}$$

ทอร์กของแรงภายนอกกระทำต่ออนุภาค จะมีการเปลี่ยนโมเมนตัมเชิงมุม ดังนี้

$$\therefore \quad \boxed{\frac{d\text{[redacted]}}{dt} = \sum \text{[redacted]}_{ext}}$$

และจาก

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

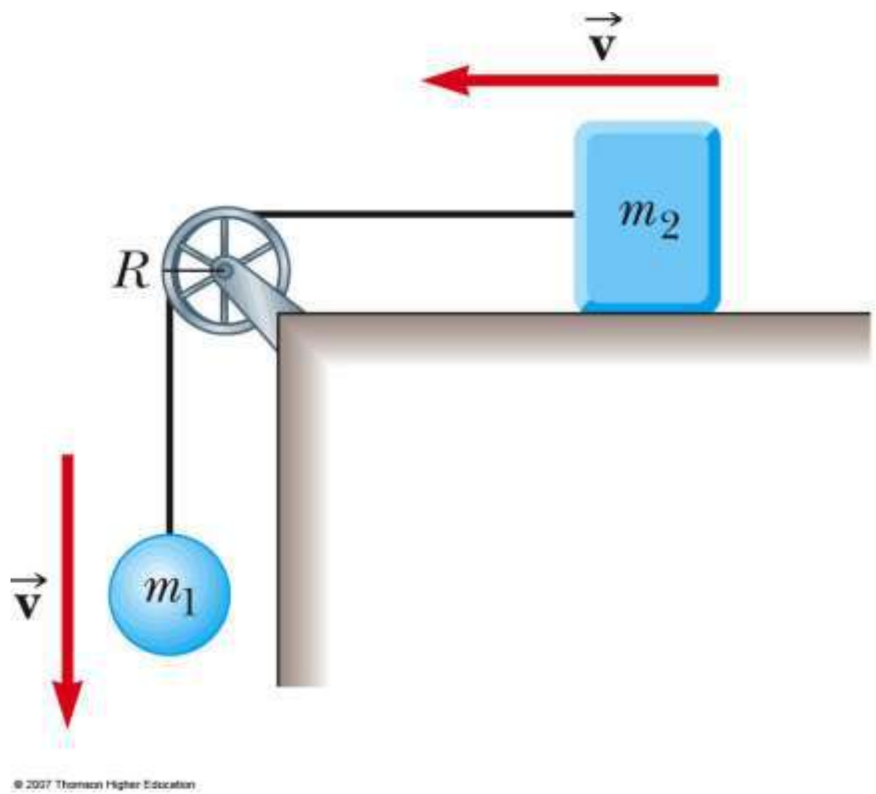
ดังนั้น
$$\vec{\tau} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt}$$

$$= I\frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

$$\therefore \quad \boxed{\vec{\tau} = I\vec{\alpha}}$$

โดยที่ $\vec{\alpha}$ คือความเร่งเชิงมุม

ตัวอย่างที่ 11.4 จากรูป ทรงกลมมวล m_1 ผูกติดกับกล่องมวล m_2 ด้วยเชือกเบาซึ่งคล้องกับรอกที่มีรัศมี R โดยขอบวงของรอกบางมีมวล M แต่ไม่คิดมวลของซี่วงล้อบนรอก กล่องไถลบนพื้นที่ไม่มีความเสียดทาน จงหาความเร่งเชิงเส้นของวัตถุทั้งสอง ***โดยใช้หลักการของโมเมนตัมเชิงมุมและทอร์ก***



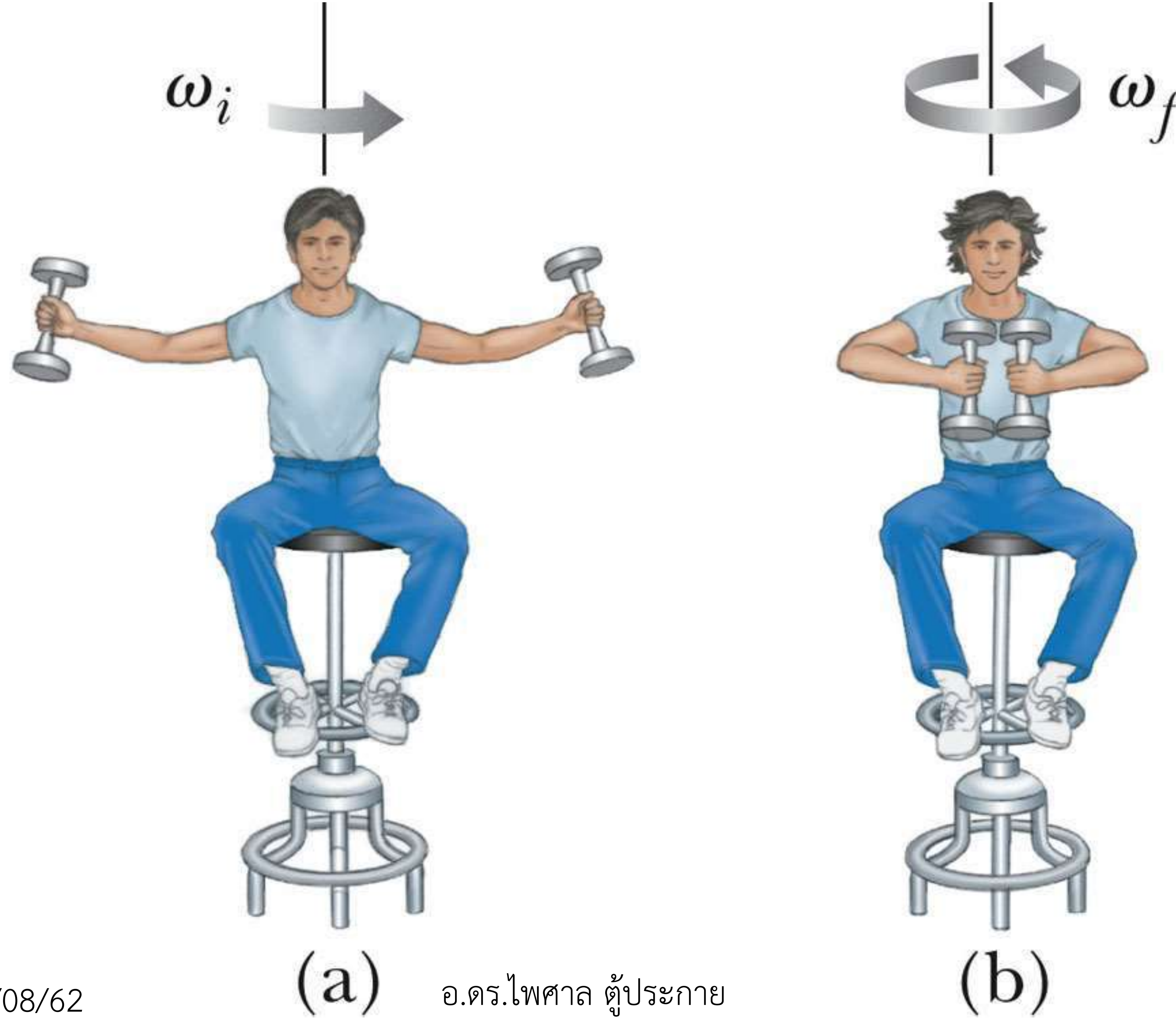
ระบบเอกเทศ (isolated system)

ในกรณีที่ไม่มีทอร์กภายนอกมากระทำต่อวัตถุเลย หรือ $\vec{\tau} = 0$

จะได้ว่า
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

แล้ว
$$\vec{L} = I\vec{\omega} = \text{คงที่}$$

เรียกว่า "**หลักการคงตัวของโมเมนตัมเชิงมุม (principle of conservation of angular momentum)**" หรือ "**การอนุรักษ์ของโมเมนตัมเชิงมุมสำหรับวัตถุเกร็ง**"



ω_i
ω_f
(a)
(b)

ถ้าตอนแรกวัตถุมีโมเมนต์ความเฉื่อยเป็น I_i หมุนด้วยความเร็วเชิงมุม [redacted] ต่อ

จากนั้นวัตถุเปลี่ยนค่าโมเมนต์ความเฉื่อยเป็น I_f (แต่แกนหมุนไม่เปลี่ยน) และ

ความเร็วเชิงมุมเป็น [redacted] จะได้

I_i [redacted]

* เราใช้ในกรณีที่แกนหมุนตรึงอยู่กับที่ ทำให้ $\vec{L}, \vec{\omega}$ และ $\vec{\alpha}$ ชี้ไปทางเดียวกัน แล้ว

เครื่องหมายเวกเตอร์ตัดทิ้งได้

เพราะฉะนั้น $$I_i\omega_i = I_f\omega_f$$

พิจารณา พลังงานจลน์ในการหมุนว่าจะมีค่าคงที่หรือไม่ ถ้าโมเมนตัมเชิงมุมคงที่ จะได้ว่าจาก

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f$$

ยกกำลังสอง แล้วคูณด้วย $\frac{1}{2}$ จะได้

$$\frac{1}{2}(I_i\omega_i)^2 = \frac{1}{2}(I_f\omega_f)^2$$

หรือ

$$I_i(\frac{1}{2}I_i\omega_i^2) = I_f(\frac{1}{2}I_f\omega_f^2)$$

แต่จากพลังงานจลน์เนื่องจากการหมุน $E_k = K_R = \frac{1}{2}I\omega^2$

ดังนั้นจะได้ว่า $I_i K_i = I_f K_f$

$$\frac{K_i}{K_f} = \frac{I_f}{I_i}$$

$\therefore$ $\boxed{K \propto \frac{1}{I}}$

แสดงว่า K ของการหมุน**ไม่คงที่**

$$I\uparrow \Rightarrow K\downarrow \quad \text{และ} \quad I\uparrow \Rightarrow \omega\downarrow$$

$$I\downarrow \Rightarrow K\uparrow \quad \text{และ} \quad I\downarrow \Rightarrow \omega\uparrow$$

ตัวอย่างเช่น นักกระโดดน้ำ นักเล่นสเก็ตน้ำแข็ง นักเต้นบัลเลต์ ฯลฯ

ตัวอย่างที่ 11.14 ลุงแหวงมีมวล 50 kg ยืนอยู่กลางโต๊ะกลม ซึ่งกำลังหมุนรอบจุดศูนย์กลางในอัตราเร็ว 10 s/รอบ ถ้าลุงแหวงเดินไปตามแนวรัศมีของโต๊ะ จนห่างจุดศูนย์กลาง 2 m โต๊ะนั้นจะหมุนกี่วินาทีต่อรอบ กำหนดให้โมเมนต์ความเฉื่อยในการหมุนของโต๊ะนั้นมีค่า 800 kg m^2 (โจทย์แบบฝึกหัดท้ายบทข้อ 5.7) [12.5 s/รอบ]

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\omega = \frac{\pi}{5} \qquad m = 50$$

$$I\omega = I\omega$$

$$\overset{160}{\cancel{800}} \cdot \frac{\pi}{\cancel{5}} = (800 + 50 \cdot 2^2)\,\omega$$

$$160\pi = 1000\,\omega$$

$$\omega = \frac{\overset{4}{\cancel{160}}}{\underset{25}{\cancel{1000}}}\pi = \frac{4}{25}\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\cancel{2}\,\cancel{\pi}}{\underset{2}{\cancel{4}}\,\cancel{\pi}} \cdot 25 = 12.5$$

ตัวอย่าง 11.18 ส่วนที่หมุนได้ของเครื่องยนต์มีมวล 15 kg และรัศมีไจเรชัน 15 cm จงคำนวณหาโมเมนตัมเชิงมุม และพลังงานจลน์ เมื่อเครื่องยนต์หมุนเร็ว 1800 rpm ถามว่าจะต้องใช้ทอร์กและกำลังเท่าไร เครื่องยนต์จึงจะได้ความเร็วเชิงมุมนี้ โดยเริ่มจากหยุดนิ่ง ในเวลา 5.0 s

$\frac{1800 \cdot 2\pi}{60}$ rad

[L = 63.62 kg m^2/s, K_R = 5.99 × 10^3 J, τ = 12.72 kg m^2/s^2, P = 1.2 × 10^3 W]

$L = I\omega$

$= 15 \cdot (15 \times 10^{-2})^2 \times \frac{1800 \cdot 2\pi}{60}$

$= 63.62$ kg m^2/s

$K = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \times 15 \cdot (15 \times 10^{-2})^2 \times \left(\frac{1800 \cdot 2\pi}{60}\right)^2 \approx 6.000 \times 10^3$

$\tau = \frac{L}{t} = \frac{63.62}{5} = 12.72$ kg m/s^2

$\tau = I\alpha$

$\alpha = 37.69$

$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

$P = \frac{W}{t} = \frac{\tau\theta}{t} = 1.2 \times 10^3$ $= 471.11$ rad