PUPILLA PREPRINT (2025)

Tra realtà e immaginazione. Brevi note e riflessioni a partire dall'evoluzione del concetto di spazio in matematica.

Ugo Gianazza, Luca Magri

Questo saggio ripercorre l'evoluzione del concetto di spazio in matematica dall'antichità greca ai tempi moderni, esaminando le implicazioni filosofiche e culturali di questa trasformazione. Partendo dalla geometria euclidea come rappresentazione assoluta della realtà fisica, gli autori esplorano come il sistema di coordinate cartesiane abbia introdotto una prospettiva soggettiva che ha messo in discussione la nozione di spazio assoluto. Attraverso l'esempio della dualità punto-retta nei piani cartesiani, dimostrano come gli oggetti matematici diventino pure costruzioni concettuali anziché rappresentazioni della realtà fisica. Il lavoro discute l'impatto rivoluzionario delle geometrie non euclidee nel XIX secolo, che hanno definitivamente separato lo spazio matematico da quello fisico e hanno stabilito la matematica come disciplina autonoma. Questo cambiamento ha sollevato questioni fondamentali sul rapporto tra conoscenza matematica e realtà, sui fondamenti della verità matematica e sulla "irragionevole efficacia" della matematica nel descrivere il mondo naturale. Gli autori presentano varie riflessioni filosofiche su questi sviluppi, esaminando le tensioni tra approcci oggettivi e soggettivi alla conoscenza matematica, il ruolo della matematica nel metodo scientifico e le implicazioni per la comprensione della verità e della realtà. Sostengono che la matematica moderna è diventata uno strumento potente ma puramente concettuale, democraticamente valido in tutte le sue formulazioni coerenti, ma svincolato da pretese di verità assoluta sul mondo fisico. Il saggio si conclude suggerendo che il progresso futuro potrebbe richiedere un dialogo interdisciplinare e propone che una prospettiva cristiana possa offrire nuove categorie per comprendere la verità come rivelata attraverso molteplici punti di vista complementari anziché attraverso un unico quadro assoluto.

Citare come: Gianazza, U., Magri, L., Tra realtà e immaginazione. Brevi note e riflessioni a partire dall'evoluzione del concetto di spazio in matematica., Pupilla (2025), https://pupilla.org/preprints/2025-realta-e-immaginazione/

Tra realtà e immaginazione.
Brevi note e riflessioni a partire dall'evoluzione del concetto di spazio in matematica.

Ugo Gianazza, Luca Magri

1. Introduzione

Lo spazio, oggettivamente, ci preesiste. Veniamo alla luce in uno spazio che ci accoglie, e che normalmente accogliamo senza farci troppe domande. Possiamo dire che lo conosciamo *naturaliter*.

Anche per i matematici la scoperta dello spazio è iniziata allo stesso modo. Tuttavia, si sono poi accorti che lo spazio è qualche cosa di più complesso, articolato e profondo, che il concetto di spazio non è affatto scontato. Nei secoli, il pensiero matematico sullo spazio ha subìto lente evoluzioni. Si è trattato di un lungo processo che non sembra essere giunto ancora a termine. Nel seguito se ne forniscono alcuni brevi cenni, con qualche inevitabile e necessaria schematizzazione che il lettore vorrà scusare.[1]

2. L'eredità dei greci: un meraviglioso Spazio assoluto.

Nell'antichità la matematica si è sviluppata in Occidente soprattutto come geometria, ovvero come scienza della misurazione dello spazio che ci circonda. La conoscenza della geometria, infatti, aveva un ruolo fondamentale in molte attività di base della vita dei popoli antichi. Basti pensare all'agricoltura, con il calcolo delle estensioni dei terreni e delle proprietà agrarie - da cui evidentemente è disceso il nome stesso *geo-metria*, cioè misura del terreno - e anche con lo studio degli astri celesti, necessario per prevedere correttamente il susseguirsi delle stagioni e stabilire i calendari delle raccolte e delle semine. Lo studio della geometria era anche fondamentale per la costruzione di grandi opere come templi, edifici pubblici, acquedotti, ed era indispensabile per i viaggi e la navigazione.

In epoca classica, il massimo sviluppo della conoscenza della geometria è stato raggiunto dai matematici greci, che hanno dato a questa materia un impianto praticamente immutato per circa due millenni. La fortuna di questa impostazione è dovuta certamente all'importanza dei risultati matematici raggiunti, ma anche all'impatto più generale che la cultura greca ha lasciato nel bacino del Mediterraneo nei secoli successivi. Questo è vero non solo per il semplice fatto storico che per secoli la cultura greca è stata tramandata in blocco, matematica compresa, come punto di riferimento della cultura occidentale, ma anche nel senso che la matematica scoperta dai greci era la conseguenza diretta della loro cultura, figlia ed effetto di una precisa visione del mondo.

Per spiegare meglio questa affermazione, basti notare che, a partire da Talete[2], molti matematici greci sono stati contemporaneamente anche filosofi, fisici e naturalisti: la matematica era parte di un sistema unitario di studio e comprensione della realtà che ci circonda.

Lo spazio studiato nella geometria greca era lo spazio vissuto e conosciuto nel mondo greco. Per tutti gli antichi la conoscenza dello spazio era data dalla esperienza della realtà fisica: nello spazio ci si muove, si nasce e si muore, nello spazio viaggiano gli astri, lo spazio è il luogo dove ogni cosa accade e si realizza. Per i greci, tuttavia, lo spazio era anche qualche cosa di più. L'uomo greco ha avuto, insieme alla capacità di esprimersi con estrema lucidità e razionalità, anche quella di sapere vedere le cose e il mondo con uno sguardo carico di stupore. In lui mito e ricerca razionale si

---

[1] Per gli appassionati confronti di idee che hanno stimolato il presente lavoro e per gli utilissimi suggerimenti durante la sua redazione, è doveroso rivolgere un vivo ringraziamento agli amici del gruppo internazionale di matematici "Mathzero".

[2] Mileto, 624 a.C. – Atene, 547 a.C.

intrecciano indissolubilmente. Per lui la vita è dramma[3] (δράμα) e lo spazio diventa luogo mitico, divino e magico, il teatro in cui il dramma si compie. Perfino gli dei, tutti figli di Cronos (Κρόνος), il Tempo, erano immaginati dai greci in uno spazio fisico, l'Olimpo, come pure l'oltretomba, collocato nell'Ade. Oppure, in Aristotele, la divinità era vista come il motore immobile dell'universo. In qualche modo, niente poteva essere immaginato "al di fuori" o "al di là" dello spazio. Lo spazio, l'intero cosmo, è percepito come qualche cosa di assoluto, che trova spiegazione e senso in un principio divino, il Lògos [4] (Λόγος), ed è governato dal Nus (Νοῦσ), ossia da una Intelligenza cosmica, una Volontà ordinatrice, una Mente suprema.

Quindi, per i greci la geometria significava molto di più di un sistema per fare misure agrarie: era la scienza che spiega lo spazio, anzi lo Spazio. Per questo motivo, per i greci le forme e i rapporti tra gli oggetti spaziali avevano natura assoluta. Il cerchio, la retta, il punto, il triangolo e così via erano i prototipi di tutte le forme, le Idee della forma spaziale. In Pitagora[5], addirittura, i rapporti e le relazioni tra le dimensioni delle forme spaziali assumevano un valore esoterico e quasi divino, tanto che l'impossibilità di trovare un numero razionale in grado di rappresentare il rapporto di due grandezze geometriche[6] costituiva un mistero sacro e solo gli iniziati potevano essere introdotti alla conoscenza di questo risultato.

Il culmine della conoscenza geometrica dei greci è la geometria di Euclide[7], la scienza dello spazio tridimensionale, lo spazio della fisica meccanica. La geometria euclidea è una rappresentazione talmente chiara, coerente e potente dello spazio fisico, che in qualche modo ha costituito per molti secoli nella mente degli scienziati occidentali una specie di archetipo, una sorta di verità assoluta.

La forza del pensiero di Euclide sta soprattutto nel fatto che tutti i teoremi della sua geometria si potevano condensare in soli cinque semplici postulati[8], capaci di contenere tutto ciò che si doveva sapere sulla geometria. Secondo Euclide questi postulati erano certamente veri in quanto auto-evidenti: bastava prendere riga e compasso per convincersene.

La capacità della matematica e in particolare della geometria euclidea di descrivere così bene il mondo fisico ha instillato per secoli e secoli nella mente di generazioni di scienziati l'idea che tutta la natura, in particolare la fisica, fosse sottoposta a precise leggi matematiche, leggi universali volute da Dio, elevando la matematica quasi ad una sorta di "teologia della natura" [9]. Poiché esiste un Lògos, fonte della natura su cui si esercita l'indagine scientifica, allora il compito dello scienziato era quello di scoprire le sue sapienti Leggi in forma matematica.

Per mettere in discussione la geometria euclidea e la concezione del mondo legata ad essa ci sono voluti moltissimi secoli. Solo nella seconda metà del diciannovesimo secolo i matematici hanno

---

[3] La parola greca δράμα deriva dal verbo δραν (fare) e significa azione, storia. Dramma è sinonimo di testo teatrale, parte scritta per essere interpretata da attori.

[4] Λόγος in greco possiede molteplici significati, quali: discorso; calcolo, relazione, proporzione, misura; ragion d'essere, causa; spiegazione, frase, enunciato, definizione; argomento, ragionamento, ragione. Da Λόγος deriva il termine "logica". In filosofia Λόγος assume l'accezione di parola, discorso, intesi come manifestazione del pensiero. Nella teologia cristiana, Λόγος indica la seconda persona della Trinità, cioè Gesù Cristo, in quanto pensiero, sapienza, Verbo di Dio.

[5] Samo, c. 575 a.C. – Metaponto, c. 495 a.C.

[6] Per esempio, il rapporto tra raggio e circonferenza del cerchio, o tra il lato e la diagonale del quadrato.

[7] 367 a.C. ca. - 283 a.C.

[8] I postulati di Euclide sono: 1) Tra due punti qualsiasi è possibile tracciare una ed una sola retta. 2) Si può prolungare un segmento oltre i due punti indefinitamente. 3) Dato un punto e una lunghezza, è possibile descrivere un cerchio. 4) Tutti gli angoli retti sono uguali. 5) Per un punto passa una ed una sola parallela ad una retta data.

[9] Galileo Galilei scrive: «*La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo) ma non si può intender se prima non si impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto*» (Galileo Galilei, Il Saggiatore, Roma, 1623, a cura dell'Accademia dei Lincei).

cominciato a convincersi che, modificando i postulati di Euclide e in particolare il 5° postulato, in realtà era possibile costruire nuove geometrie. Si è trattato di una scoperta che ha avuto un impatto culturale enorme, non solo per la matematica. Sollevare dubbi sulla visione di Euclide significava sconvolgere le più solide certezze sul mondo e sulle cose, osare con il pensiero ciò che per millenni era stato considerato bizzarro e contrario a ogni esperienza comune[10].

Ma che cosa significa "nuove geometrie"? Quale è stato il lungo processo che ha incrinato la adamantina certezza in questo modo di concepire la matematica e il mondo?

3. Un punto di svolta: Cartesio.

Nel raccontare la scienza spesso si tende a semplificare, individuando in una persona e, possibilmente, in un episodio l'inizio di un cambio epocale. In realtà l'evoluzione del pensiero scientifico è molto più complessa. Tuttavia, anche se si perviene alla formazione e al consolidamento di un nuovo concetto attraverso numerose svolte, pensamenti e ripensamenti, una certa semplificazione espositiva può risultare comoda per evidenziare in modo chiaro la novità e la peculiarità di una scoperta.

In questo senso, a scopo puramente chiarificatore, si può individuare un importante punto di svolta nell'avvento di Cartesio[11] e del cosiddetto pensiero moderno.

Cartesio ha sviluppato una nuova modalità di rappresentazione dello spazio che, come quella euclidea, è entrata in modo molto naturale nel pensiero e nella prassi delle successive generazioni di matematici e di scienziati. A tutti noi che la abbiamo studiata nei primi anni della nostra avventura scolastica, la rappresentazione cartesiana appare come qualcosa di poco rivoluzionario, anzi qualcosa di piuttosto ovvio. Ma non è così: le geometrie di Euclide e di Cartesio sono entrambe il distillato di secoli e millenni di pensiero.

Come tanti matematici greci, anche Cartesio era un filosofo, e anche lui ha travasato nella sua matematica il suo modo di vedere il mondo, introducendo concetti che hanno contribuito nel tempo ad un radicale cambiamento del concetto di spazio in matematica.

Esemplificando moltissimo, si può dire che la geometria concepita da Cartesio ha spodestato il Lògos, mettendo al centro l'uomo ed il suo pensiero, il suo punto di vista. Per Cartesio, il fatto stesso che noi pensiamo dimostra a noi stessi che esistiamo, ma anche che esiste una realtà materiale fuori di noi (la "res extensa", che si potrebbe anche tradurre "materia che occupa spazio") e perfino Dio. Dunque, lo spazio di Cartesio non può che essere uno spazio "pensato": non una realtà assoluta che mi comprende, ma che io comprendo; non un tutto a cui appartengo, ma un mondo che si estende a partire da me, che vedo e misuro dal mio punto di vista, dalla mia posizione e secondo l'unità di misura che io decido di adottare.

Si potrebbe dire, precorrendo di molto i tempi delle successive scoperte matematiche, che con Cartesio si affaccia l'era di uno "spazio soggettivo" e ci si avvia al tramonto dello "spazio

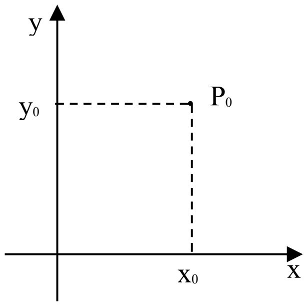
---

10 Nel celeberrimo romanzo "I fratelli Karamazov", l'ateo Ivàn Karamazov dice al fratello monaco Alëša: "*Se Dio esiste e se ha effettivamente creato la terra, allora, come noi tutti sappiamo benissimo, l'ha creata secondo le regole della geometria euclidea, e all'intelligenza umana ha dato solo la nozione di tre dimensioni dello spazio. Eppure ci sono stati e ci sono anche oggi matematici e filosofi, anche notevolissimi, i quali dubitano del fatto che il mondo (o meglio, con un'espressione ancora più ampia, tutto ciò che esiste) sia stato creato solo secondo la geometria euclidea, e si azzardano perfino a sognare che due linee parallele, le quali secondo Euclide non possono assolutamente incontrarsi sulla terra, si incontrino forse in qualche punto dell'infinito. Io, mio caro, ho deciso che siccome non arrivo a capire neppure questo, tanto meno posso capire ciò che riguarda Dio. Confesso umilmente di non avere nessuna attitudine a risolvere simili problemi; la mia è una intelligenza euclidea, terrestre, come faccio a comprendere le cose che non sono di questo mondo? E consiglio anche te di non pensarci mai, amico Alëša, e tanto meno metterti a pensare se Dio esiste o no. Sono tutti problemi inadatti a una intelligenza che è stata creata solo con la nozione di tre dimensioni*." (Fëdor Michàjlovič Dostoevskij, I fratelli Karamazov, parte seconda, libro quinto, 1880)

11 La Haye en Touraine, 31 marzo 1596 – Stoccolma, 11 febbraio 1650

assoluto”[12].

Parlando dal punto di vista matematico, Cartesio osserva che la posizione di un oggetto nello spazio può essere descritta tramite la sua proiezione sulle coordinate spaziali, ovvero può essere pensata attraverso la sua scomposizione nelle diverse dimensioni dello spazio che si dipartono da una “origine”, ovvero da un punto di osservazione prefissato (peraltro, in maniera del tutto arbitraria). Per esempio, un punto P_0 nel piano può essere descritto dai due valori x_0 e y_0 proiettati perpendicolarmente dal punto stesso sugli assi dell’ascissa e dell’ordinata, come nella figura seguente.



L’ osservatore, ovvero l’origine dei dati, è all’incrocio dei due assi.

Si tratta di un passo molto innovativo sul piano matematico, che meriterebbe uno spazio adeguato per un maggiore approfondimento. In poche righe si può dire solo che Cartesio collega strettamente la geometria alle conoscenze ed alle forme di rappresentazione algebriche, le quali erano sconosciute al tempo dei greci e, inventate in India, furono introdotte in Europa molto più tardi, attraverso gli arabi.

Infatti, attraverso questa rappresentazione, Cartesio riconduce i punti dello spazio a “coordinate spaziali”, ovvero a numeri. In altre parole, per Cartesio i punti sono solo numeri: coppie di numeri nel piano, terne nello spazio. Quindi, attraverso questa assunzione, tutti gli oggetti dello spazio possono essere descritti attraverso rappresentazioni puramente numeriche, cioè tramite equazioni. Le rette, i cerchi, i piani, le sfere, i cilindri, i coni e così via si riducono a numeri legati tra loro da relazioni algebriche, chiamate “luoghi di punti”. Per fare un esempio che ci servirà nel seguito, una retta è descritta dai valori delle coordinate x e y che soddisfano l'equazione $y=mx+q$, dove m e q sono due parametri prefissati.

Da allora in poi, la geometria può anche fare a meno di riga e compasso, perché ogni figura geometrica può essere scritta e descritta attraverso una formula algebrica.

Questa totale coincidenza di punti geometrici e numeri consente di fare un ulteriore grande salto concettuale. Infatti, secondo Cartesio, non è vero solamente che ogni punto P_0 nel piano è costituito o individuato dalla coppia ordinata di valori (x_0,y_0), ma è vero anche il viceversa: ogni grandezza che può essere rappresentata da una coppia ordinata di valori (x_0,y_0) è rappresentabile da (costituisce) un punto in un piano cartesiano!

[12] In realtà i termini “tempo assoluto” e “spazio assoluto” furono coniati da Isaac Newton alcuni decenni dopo la morte di Cartesio (cf. Isaac Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, 1687). In qualche modo, si può dire che il massimo splendore della visione greca dello spazio si ebbe quando oramai Cartesio, senza rendersene conto, ne aveva decretato il declino. Gottfried Wilhelm von Leibniz, in linea con i tempi nuovi e in netta opposizione a Newton di cui era contemporaneo, definì lo spazio come «*l'ordine che rende i corpi situabili, e mediante il quale essi, esistendo insieme, hanno una posizione relativa tra loro; allo stesso modo che il tempo è un ordine analogo, in rapporto alla loro posizione successiva. Ma se non esistessero creature, lo spazio e il tempo non sarebbero che nelle idee di Dio*» (cf. Giovanni Reale, Dario Antiseri, La filosofia nel suo sviluppo storico vol. II, Brescia, La Scuola, 1996).

Analogamente, secondo la definizione di Cartesio un punto nello spazio è descritto da una terna di punti (x_0,y_0,z_0) e viceversa. Ma, avendo abbandonato riga e compasso, perché non pensare e definire spazi impossibili da disegnare, con quattro, cinque o più dimensioni, dove i punti sono costituiti da sequenze ordinate di quattro, cinque o più numeri, ciascuno dei quali indichi la proiezione del punto stesso sulla rispettiva coordinata? E perché non immaginare spazi con un numero addirittura infinito di dimensioni?

E' evidente che lo spazio di Euclide, in questo modo, si riduce a un caso particolare di spazio cartesiano tridimensionale. Di fatto, la geometria di Cartesio non ha sostituito o corretto le precedenti conoscenze della geometria euclidea, ma ha operato quella che in matematica è spesso chiamata una *generalizzazione*, ovvero il passaggio ad un livello di astrazione superiore. In questo modo, Cartesio ha da una parte esteso le nozioni della geometria in altri campi della matematica, dall'altra fornito strumenti più potenti per i calcoli della geometria euclidea.

Sembrerebbe quindi che Cartesio non abbia detto niente di particolarmente nuovo o diverso in merito allo spazio fisico e alla capacità della matematica di rappresentarlo e di esprimerlo. Invece non è così: questo modo di definire matematicamente lo spazio da parte di Cartesio porta a conseguenze sorprendenti, che Cartesio a suo tempo non aveva immaginato.

4. Un esempio curioso: punti e rette nel piano cartesiano

"Everything should be made as simple as possible,
but not simpler" (Albert Einstein)

Un modo molto semplice che i matematici usano talvolta per mostrare una teoria è la formulazione di un esempio. Con un esempio, infatti, si può dimostrare che una idea è possibile o, meglio ancora, che è impossibile negarla. Viceversa, moltissime dimostrazioni matematiche originariamente ritenute corrette sono state confutate semplicemente a colpi di controesempi. Gli esempi sono, in qualche modo, i *lapsus freudiani* dei matematici: un esempio matematico mostra in modo inequivocabile un pensiero.

E' per questo motivo che, al fine di mostrare la novità che il pensiero di Cartesio ha portato rispetto alla visione euclidea dello spazio, proponiamo un esempio costruito ad hoc, molto semplice.

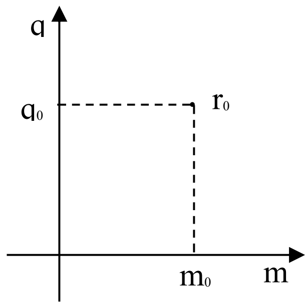
Come detto in precedenza, una retta per Cartesio è il luogo dei punti che verificano l'equazione $y=m_0x+q_0$, dove m_0 e q_0 sono due parametri fissati detti rispettivamente *coefficiente angolare* ed *intercetta*[13].

Sappiamo che secondo Cartesio ogni coppia di numeri può essere interpretata come un punto in un piano. Quindi una retta r_0 può essere anche rappresentata in un opportuno piano cartesiano dalla coppia ordinata (m_0,q_0), ovvero una retta è rappresentabile come un punto in quello che chiameremo qui il piano cartesiano delle rette[14]. Infatti, ogni coppia di coordinate (m_0,q_0) rappresenta una retta differente, ed ogni retta può essere rappresentata da una coppia di opportune coordinate[15].

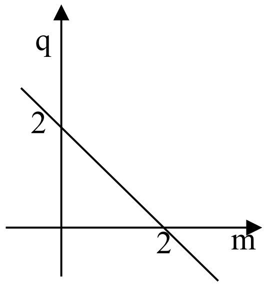
[13] Senza entrare in dettagli, vale la pena di osservare che la retta potrebbe essere rappresentata anche utilizzando differenti equazioni, per esempio tramite una rappresentazione polare.

[14] L'accezione "piano delle rette" e di "piano dei punti" non costituisce una particolare definizione matematica, ma è utilizzata solamente qui in modo colloquiale, per una migliore comprensibilità del testo.

[15] Per rappresentare anche le rette verticali è necessario introdurre anche il valore convenzionale ∞, detto *infinito*. In tal caso lo spazio (il piano) utilizzato di dice *proiettivo*.



Viceversa, in modo molto semplice è possibile mostrare anche che, nel piano delle rette, un punto può essere rappresentato attraverso una retta[16]. Per esempio, il punto di coordinate (1,2) può essere rappresentato nel piano cartesiano delle rette secondo la figura seguente.



Si giunge quindi ad una situazione piuttosto sorprendente: sussiste una specularità o dualità nella rappresentazione di punti e rette rispettivamente nel piano cartesiano dei punti e delle rette, che coinvolge le diverse proprietà di queste figure geometriche[17]. Proviamo a riassumerne alcune:

Nel piano cartesiano dei punti:

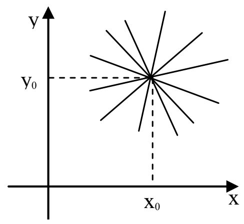
- I punti si disegnano come punti
- Le rette si disegnano come rette
- I triangoli si disegnano come triangoli
- Una retta è una sequenza infinita e continua di punti
- Un punto identifica un fascio di rette

Nel piano cartesiano delle rette:

- I punti si disegnano come rette
- Le rette si disegnano come punti
- I triangoli si disegnano come triangoli
- Un punto è una "sequenza" infinita e continua di rette
- Una retta è determinata da un "fascio di punti"

---

[16] Sappiamo che un punto P_0 (x_0, y_0) identifica univocamente quello che viene chiamato un fascio di rette, ovvero l'insieme delle rette che "ruotano" intorno a questo punto.



Le rette del fascio di rette hanno differenti valori del coefficiente angolare e dell'intercetta, ma poiché passano tutte per il punto (x_0, y_0), vale sempre la condizione $y_0 = m\, x_0 + q$. In altre parole, una retta r passa per il punto (x_0, y_0) se l'intercetta q può essere scritta in funzione del coefficiente angolare m secondo l'equazione $q = - x_0\, m + y_0$. La relazione tra q ed m è una relazione di tipo lineare, e quindi nel piano delle rette un punto può essere rappresentato come una retta di coefficiente angolare $- x_0$ e intercetta pari a y_0.

[17] Più correttamente, in matematica si dice che i due piani sono *duali*.

- Per due punti passa una e una sola retta
- Due rette si incontrano in un punto
- Due rette sono ortogonali se hanno i coefficienti angolari pari rispettivamente a m_0 e $-1/m_0$
- Due punti possono essere definiti "ortogonali" se hanno ascisse pari a x_0 e $-1/x_0$
- ecc.

- Per due rette passa uno e un solo punto[18]
- Due punti si incontrano in una retta
- Due rette ortogonali si disegnano come punti con ascisse rispettivamente pari a m_0 e $-1/m_0$
- Due punti "ortogonali" si disegnano come due rette ortogonali con coefficienti angolari pari a $-x_0$ e $1/x_0$
- ecc.

Questo esempio può essere esteso abbastanza semplicemente anche allo spazio in tre e più dimensioni.

5. Lo Spazio di Euclide … non esiste

Dall'esempio precedente emergono alcune osservazioni. La prima riguarda il fatto evidente che due enti completamente differenti (il piano cartesiano dei punti e quello delle rette) sono entrambi in grado di rappresentare in modo equivalente i punti e le rette, mantenendo le proprietà di queste figure geometriche. Non solo, ma è possibile passare da una rappresentazione all'altra a piacimento, o a seconda della comodità. Per esempio, potremmo decidere di utilizzare a scelta una delle due rappresentazioni, per calcolare nel modo a noi più agevole i punti che sono intersezioni di rette o le rette che congiungono punti.

Tuttavia, il piano delle rette non sembrerebbe una rappresentazione euclidea o almeno compatibile con la visione euclidea dello spazio, perché in Euclide i punti sono punti e le rette sono rette. Che cosa è, dunque, il piano delle rette? Si tratta evidentemente di una rappresentazione puramente concettuale, ovvero di una rappresentazione in cui punti e rette non pretendono di costituire una realtà fisica, ma sono solo ed esclusivamente concetti matematici, pure idee.

È immediato però osservare che, dal punto di vista di Cartesio, il piano dei punti e il piano delle rette sono equivalenti: entrambi rappresentano altrettanto bene i punti e le rette e le loro proprietà, entrambi sono definiti secondo la stessa logica e lo stesso impianto di regole. Niente suggerisce che il piano dei punti abbia qualche "elemento di verità" in più del piano delle rette, che sia in qualche modo più reale o più oggettivo. Nessuno, osservando i due spazi e le loro proprietà, potrebbe dire a priori quale dei due sia lo spazio dei punti e quale lo spazio delle rette. Anzi, si potrebbe dire che entrambi i piani sono "uguali", poiché entrambi rappresentano punti e rette che, in un piano speculare/duale, sono rispettivamente rette e punti: sta a noi decidere, in modo puramente convenzionale, che cosa è rappresentato in quei due piani[19].

Dunque, non solo il piano delle rette, ma anche il cosiddetto piano dei punti è solo una rappresentazione puramente concettuale e, in generale, le rappresentazioni cartesiane sono *tutte* solo costruzioni della mente, anche quando seguono l'impostazione di Euclide: si è obbligati a dire che *lo spazio euclideo non "è" la Realtà, non "è" lo spazio fisico*.

Non solo, ma in questo modo Cartesio ci dice anche che il modo euclideo di vedere lo spazio fisico, di percepirlo nella mente, di comprenderlo e raccontarlo, è solo uno dei tanti modi possibili: una idea particolare di spazio che descrive e rappresenta una nostra precisa percezione sensoriale dello spazio fisico. In effetti *lo spazio fisico può essere conosciuto, visto, percepito e "vissuto" in molti*

[18] Questa proprietà è sempre vera se si assume uno spazio proiettivo, ovvero uno spazio dove il coefficiente angolare m può anche assumere un valore infinito.

[19] Il piano dei punti e il piano delle rette sono un esempio di strutture cosiddette *isomorfe*. Senza entrare nel dettaglio di una definizione rigorosa qui non possibile, basti dire che si tratta di spazi matematici tra loro differenti (uno rappresenta punti, l'altro, rette), ma tra loro indistinguibili a priori (se si modificano i simboli utilizzati per descriverli, non è possibile comprendere di quale dei due spazi si sta trattando). Gli esempi di strutture fra loro isomorfe, come quello mostrato nel testo, sono moltissimi.

altri modi, altrettanto veritieri.

Con Cartesio tutti gli oggetti della matematica, compreso lo spazio geometrico, cominciano a definirsi in modo sempre più chiaro come puri oggetti concettuali, pure idee, puri atti della ragione.

6. Come viole a primavera

L'esempio del "piano delle rette" oggi non sorprenderebbe più nessun matematico, ma fino ad un paio di secoli fa non sarebbe stato neppure concepibile. Anzi, se fosse stato proposto al mondo matematico di allora, probabilmente sarebbe stato considerato non più di un banale gioco di prestigio, senza particolare significato. Come detto, mettere in discussione la visione di Euclide era una specie di sacrilegio.

Eppure, ad un certo punto i matematici si trovarono a varcare le colonne d'Ercole del pensiero di Euclide, anche se questo avvenne in un modo non voluto ed imprevisto, proprio cercando di approfondire e consolidare la sua teoria, con la nascita delle cosiddette geometrie non euclidee.

La scoperta di tali geometrie ha una storia piuttosto insolita. Per molti secoli, era rimasto il dubbio se il quinto postulato di Euclide (per un punto passa una ed una sola parallela ad una retta data) fosse un vero postulato, oppure se dipendesse dagli altri 4, e numerosi matematici si erano cimentati sull'argomento. Tra questi, in particolare, il gesuita Saccheri[20], era convinto che il quinto postulato dipendesse dai precedenti, e tentò una dimostrazione per assurdo: nel suo trattato del 1733 "*Euclide ab omni naevo vindicatus*" (Euclide difeso da ogni neo) diede la dimostrazione che la negazione del 5° postulato avrebbe portato a conseguenze paradossali e contraddittorie. Ma in seguito ci si accorse che la dimostrazione era sbagliata, e le conseguenze trovate da Saccheri, per quanto sorprendenti, non erano contraddittorie ed assurde, cosicché la negazione del quinto postulato non era poi così impossibile.

Saccheri aveva involontariamente lanciato un siluro verso la corazzata di Euclide, aprendo una falla nella sua fiancata. Alcuni matematici cominciarono a nutrire dubbi ed approfondirono la questione. Finalmente, all'inizio del XIX secolo la non dimostrabilità del postulato fu scoperta in modo indipendente da ben 4 matematici: Carl Friedrich Gauss nel 1813, Ferdinand Schweikart nel 1818, Nicolaj Ivanovic Lobacevskij nel 1830 e János Bolyai nel 1831. Insieme alla indimostrabilità del postulato scoprirono le geometrie non euclidee, costruite sulla base di un quinto postulato diverso dall'originale.

Erano passati due millenni da Euclide, due secoli da Cartesio ed un secolo da Saccheri. Il mondo stava cambiando e i tempi erano improvvisamente maturi per una nuova visione dello spazio. Friedrich Gauss scrisse: "*Mi sto convincendo sempre di più che la necessità della nostra geometria non può essere dimostrata, almeno non dalla mente umana né per la ragione umana. Forse in una altra vita perverremo ad altre concezioni sulla natura dello spazio, che ora ci sono irraggiungibili*[21]". E Lobacevskij osò affermare che i concetti geometrici sono solo "*creazioni artificiali della nostra mente, tratte dalle proprietà del movimento; ecco perché lo spazio in sé, separatamente preso per noi non esiste*[22]".

Bolyai ricevette da suo padre una lettera, che diceva: "*Vi è del vero in ciò: molte cose hanno un'epoca in cui sono scoperte allo stesso tempo in luoghi differenti, come viole a primavera*".

7. L'esplosione dello spazio

La scoperta delle geometrie non euclidee non ebbe la immediata risonanza di altre rivoluzioni in

[20] Giovanni Girolamo Saccheri (Sanremo, 5 settembre 1667 – Milano, 25 ottobre 1733)

[21] Lettera del 28 aprile 1817 a Heinrich Olbers.

[22] Nicolaj Ivanovic Lobacevskij, Nuovi Principi della Geometria con una Teoria completa delle Parallele, 1836-38.

ambito scientifico, come ad esempio quella di Copernico o quella di Darwin. Per la maggioranza degli uomini di scienza dell'epoca era difficile capire che cosa significasse uno spazio diverso da quello di Euclide: un semplice esercizio, una possibilità valida solo sul piano della logica, una idea effettivamente possibile?

Ma oramai il tabù era infranto, e l'idea che la geometria sia solo un prodotto matematico, una invenzione della mente, si è definitivamente affermata in modo sempre più naturale nelle generazioni successive di matematici, e questi l'hanno utilizzata nel modo per loro più comodo ed utile. Avendo liberato la mente dal legame della geometria con la "realtà", in modo molto pragmatico i matematici hanno cominciato ad utilizzare liberamente le rappresentazioni spaziali per descrivere tutto ciò che era suscettibile di questo tipo di trattazione.

Per esempio, hanno inventato tanti altri nuovi tipi di spazi: ortogonali, affini, di misura, di probabilità, di funzioni, vettoriali, metrici, normati, trasformati, topologici, ecc., scoprendo numerosissime nuove applicazioni.[23]

Da quel punto di svolta, attraverso un lento processo che dura tuttora, il matematico ha cominciato ad osservare il mondo da prospettive fino ad allora inusitate. La concezione stessa della intera matematica, così intrinsecamente connessa in tanti suoi aspetti alla metafora spaziale, ha cominciato a cambiare. Tante domande che fisici, matematici e filosofi si erano posti fino ad allora sono cadute o si sono trasformate.

Per esempio, se il punto non è una realtà fisica ma solo una idea, la sua adimensionalità non è più un problema, perché nessuno pensa che una idea abbia una dimensione fisica. Allo stesso modo, risulta molto più accettabile il fatto che in una retta vi siano infiniti punti e finalmente i paradossi di Zenone non creano più tanto turbamento: la freccia colpirà il bersaglio in breve tempo e Achille potrà raggiungere la tartaruga, perché la realtà fisica è una cosa e la matematica è un'altra[24].

Di fatto, il concetto di infinito in matematica, senza più alcuna presunzione di significato reale ed assoluto, diventa meno problematico, perché i numeri sono infiniti così come noi stessi li abbiamo costruiti nella nostra mente, per esempio naturali, razionali, reali, complessi, a seconda dell'uso che ne vorremo fare. Si mettono così le basi concettuali per approfondire sempre più il calcolo infinitesimale scoperto da Leibniz[25] e Newton[26] e per i grandi sviluppi matematici degli anni successivi.

Con il passare dei secoli, la visione razionalista di Cartesio prende sempre più forma: la matematica, puro atto della ragione, non è più né ancella né unica interprete della conoscenza di un mondo "reale", ma si distingue sempre più dalle altre discipline e guarda le cose da una prospettiva totalmente propria. Avviene quindi anche per la matematica il salto nella modernità, nella quale la antica visione unitaria del mondo e delle cose si disintegra in tutte le dimensioni e le coordinate dei diversi saperi[27].

---

[23] Per esempio, i matematici oggi possono studiare agevolmente funzioni molto complesse, scrivendole sotto forma di serie di Taylor, ovvero collocandole in uno spazio funzionale infinito-dimensionale con base polinomiale. Oppure, molte equazioni differenziali possono essere risolte agevolmente "trasportandole" in uno spazio di Hilbert, attraverso una trasformazione di Fourier.

[24] Zenone di Elea (489 a.C. – 431 a.C.) è un filosofo noto soprattutto per i suoi paradossi che, per numerosi secoli, hanno sollevato l'attenzione e lo studio dei matematici, perché implicano il concetto di infinita divisibilità dello spazio. Il paradosso della freccia afferma che una freccia non può raggiungere il bersaglio, perché deve attraversare infiniti punti intermedi. Il paradosso di Achille dice che il *piè-veloce* non riuscirà mai a raggiungere una tartaruga, perché ogni volta che percorre lo spazio che li separa, nel frattempo la tartaruga si è spostata, lasciandogli un nuovo, sempre più breve tragitto da percorrere.

[25] Gottfried Wilhelm von Leibniz (Lipsia, 1º luglio 1646 – Hannover, 14 novembre 1716)

[26] Isaac Newton (Woolsthorpe-by-Colsterworth, 25 dicembre 1642 – Londra, 31 marzo 1727)

[27] Questo ovviamente non significa affatto che, dopo Cartesio, non vi sia più stata una influenza reciproca tra le scoperte matematiche e quelle delle altre scienze, in particolare quelle della fisica. Si può solo affermare che la

Si avvia così un lento e complesso processo di adattamento e comprensione della nuova situazione. La matematica, sganciatasi dalla fisica e divenuta materia a sé, sembra al momento perdere di forza e significato: è apparentemente incapace di dire la realtà oggettiva del mondo, non stabilisce più leggi e verità universali, ma propone solo modelli matematici, schemi di pensiero con validità limitata e a termine[28], non più assoluti ma soggettivi. Anche le stesse scienze fisiche hanno dovuto fare i conti con questa nuova circostanza, adeguandosi ma allo stesso tempo anche beneficiando delle opportunità offerte dalle nuove scoperte matematiche.

Inoltre, poiché la matematica non rappresenta più una realtà assoluta, da allora è utilizzata sempre più al servizio di tutte le scienze: non solo le scienze della natura ma, lentamente, anche le scienze sociali, come l'economia, la sociologia, la politica, l'urbanistica, le scienze della informazione e della comunicazione, la musica e così via. Diviene in questo modo un linguaggio ancora più versatile e universale[29].

8. Pensieri liberi e considerazioni sparse

La conoscenza non torna mai indietro, ed oggi non è più possibile ragionare di scienza, senza tenere conto del profondo solco concettuale che si è lentamente scavato negli ultimi secoli tra la matematica e le cosiddette "scienze dure".

Tuttavia, forse nessuno ha ancora compreso a fondo quale siano il significato e le conseguenze di questo fenomeno. Certamente era molto più semplice la visione di un mondo regolato da eterne leggi matematiche: in tal modo si dava ragione contemporaneamente - ma tautologicamente - sia del cosmo che della matematica.

Più in generale, non è più possibile ignorare la domanda su quale ruolo la matematica abbia nella conoscenza scientifica, e quale rapporto quest'ultima abbia con la realtà oggettiva.

A mo' di una piccola provocazione e nella speranza che possano costituire spunti per utili confronti, sono esposti nel seguito pochi pensieri in libertà, senza un ordine predefinito, senza alcuna pretesa di completezza e senza eccessiva preoccupazione della loro correttezza e coerenza. Sono pensieri che partono da quanto esposto in precedenza, ma che in parte vanno oltre. Il lettore potrà liberamente controbattere alle osservazioni, oppure allungare l'elenco a piacimento.

---

matematica, come tante altre discipline, si è specializzata in modo sempre più autonomo. In realtà tutte le scienze, matematica compresa, hanno continuato a svilupparsi come sempre sulla base della visione del mondo tipica di quella determinata epoca. In merito allo sviluppo scientifico dell'epoca moderna, Marco D'Eramo scrive: «*Agli albori della modernità, da Cartesio in poi, l'universo ticchetta come un immenso orologio, le sue orbite s'ingranano precise come le rotelle dei cronometri. Poi, nell'800, il meccanismo non è più solo dinamico, ma termodinamico e il cosmo appare come una sterminata officina, con le sue caldaie e le sue colate, oltre che con i suoi ingranaggi. Ma è pur sempre un meccanismo. Oggi la metafora è elettronica, è un computer. E l'universo appare come un megacalcolatore. In un racconto di fantascienza di Fredric Brown, al più grande cervello elettronico mai costruito gli scienziati di tutta la terra riuniti pongono la domanda: "C'è dio?". Dopo una lunga 'riflessione', il computer risponde: "Sì, ora sì"*» (AA.VV., Gli ordini del caos, Manifestolibri, 1991).

[28] Un esempio classico è dato dalla teoria della relatività di Einstein, il quale abbandona definitivamente lo spazio euclideo a favore della geometria non euclidea di Riemann in quattro dimensioni, in quanto più adatta a modellizzare i nuovi risultati dei suoi studi fisici.

[29] Il lettore interessato al dibattito contemporaneo fra gli "addetti ai lavori" sulla natura della matematica può fare riferimento, per esempio, alla serie di articoli recentemente pubblicati sulla Newsletter della European Mathematical Society; aperto da un primo contributo di E.B. Davies (64, Giugno 2007), il dialogo ha visto interventi di R. Hersh e B. Mazur (68, Giugno 2008), ancora E.B. Davies e D. Mumford (70, Dicembre 2008), nuovamente E.B. Davies e M. Gardner (72, Giugno 2009), ed infine Z. Artstein e D. Corfield (75, Marzo 2010). Una prospettiva interessante, per alcuni aspetti simile a quella presentata nel presente contributo, è offerta da F. Quinn nel numero del Gennaio 2012 dei Notices dell'American Mathematical Society. L'autore conclude con alcune provocatorie osservazioni relative alla formazione matematica delle nuove generazioni, con particolare riferimento alla situazione negli USA.

8.1 Il peccato originale del matematico

⇒ Come si è detto, la geometria è uno "spazio immaginato", un modo della mente di comprendere e rappresentare la relazione tra oggetti "che possiedono più dimensioni". Lo spazio della matematica non coincide con lo spazio reale. Contrariamente a quanto affermava Galileo, la matematica non fornisce una conoscenza "ontologica" del mondo, e tanto meno la conoscenza che Dio ha del mondo creato[30]. Però è un formidabile strumento creato dall'uomo per la interpretazione della realtà. L'idea di Galileo secondo cui "la matematica è l'alfabeto in cui Dio ha scritto l'Universo" dovrebbe essere più prosaicamente corretta in "la matematica è un alfabeto inventato dagli uomini per descrivere e comunicare le proprie conoscenze sull'universo". Della cui esistenza è sempre bene che gli uomini ringrazino il Creatore.

⇒ Adamo ed Eva commisero il peccato originale per diventare come Dio[31]. Effettivamente sembrerebbe che il peccato originale di molti matematici sia tuttora quello di cedere alla tentazione di attribuire al proprio pensiero matematico un valore assoluto.

⇒ Ancora oggi, il pensiero di molti scienziati cristiani ricalca la visione di Galileo di un mondo creato da Dio secondo precise leggi matematiche, oppure di un intelletto umano capace, attraverso la matematica, di comprendere il mondo nella sua essenza, così come Dio lo ha pensato e creato. Questo modo di vedere è molto radicato, tanto che è spesso utilizzato come discriminante di pensiero tra scienziati credenti e non credenti. Si tratta di un fatto singolare, se si pensa che Galileo si trovò ad affrontare la sua disputa con la Chiesa anche a causa di queste sue affermazioni. Infatti, quest'ultima, oltre ad avere il timore infondato che il sistema eliocentrico di Galileo mettesse in discussione le Sacre Scritture[32], giustamente già allora non accettava la scienza, e in particolare la matematica, come spiegazione ultima dei fenomeni, quasi fossero un principio assoluto a cui il Creatore stesso dovesse sottostare, ma solo come descrittive di apparenze sensibili[33]. A volte la storia fa strani scherzi: oggi, dopo secoli di incomprensioni[34], paradossalmente e spesso senza saperlo gli scienziati atei o agnostici difendono un pensiero proprio della chiesa in opposizione a tanti scienziati cristiani, negando loro l'incanto di un valore assoluto e divino della conoscenza matematica.

⇒ L'avvento del pensiero moderno non volta definitivamente pagina rispetto al modo di pensare precedente. Anche Cartesio, con il suo razionalismo e con il suo metodo critico, è figlio del mondo greco. Un mondo greco, nel bene e nel male, senza più miti.

---

[30] Nel *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*, pubblicata nel 1632, Galileo Galilei fa dire a Salviati:«...quanto alla verità di che ci danno cognizione le dimostrazioni matematiche, ella è l'istessa che conosce la sapienza divina».

[31] "Ma il serpente disse alla donna: «Non morirete affatto! [5] Anzi, Dio sa che quando voi ne mangiaste, si aprirebbero i vostri occhi e diventereste come Dio, conoscendo il bene e il male»" (Genesi, 3). L'albero della conoscenza del bene e del male, del quale Adamo ed Eva hanno mangiato il frutto, «*evoca simbolicamente il limite invalicabile che l'uomo, in quanto creatura, deve liberamente riconoscere e con fiducia rispettare*» (CCC 396).

[32] «*La maggioranza dei teologi non percepiva la distinzione formale tra la Sacra Scrittura e la sua interpretazione, il che li condusse a trasporre indebitamente nel campo della dottrina della fede una questione di fatto appartenente alla ricerca scientifica*» (Dal discorso del 31 ottobre 1992 rivolto da Giovanni Paolo II ai partecipanti alla sessione plenaria della Pontificia Accademia delle Scienze, www.vatican.va)

[33] Il futuro papa Urbano VIII, ancora cardinale, obiettava a Galileo che Dio «*nella sua infinita potenza, può tutto ciò che non implica contraddizione [...] e se Dio poteva e sapeva disporre queste cose altrimenti da come è stato escogitato [...] non dobbiamo vincolare a questo modo la divina potenza e scienza*» (Card. Agostino Oregio, *De Deo uno*, Roma 1629). Ancora, il Card. Roberto Bellarmino, riferendosi a Galileo e ai suoi sostenitori dell'epoca, affermava: «*facciano prudentemente a contentarsi di parlare* ex suppositione *e non assolutamente, come io ho sempre creduto che habbia parlato il Copernico. Perché il dire, che supposto che la Terra si muova e il Sole sia fermo si salvano tutte le apparenze meglio che con porre gli eccentrici et epicicli, è benissimo detto, e non ha pericolo nessuno; e questo basta al mathematico*» (Card. Roberto Bellarmino, lettera al carmelitano Paolo Antonio Foscarini del 12 aprile 1615).

[34] Si veda in proposito il discorso del 31 ottobre 1992 rivolto da Giovanni Paolo II ai partecipanti alla sessione plenaria della Pontificia Accademia delle Scienze, www.vatican.va .

⇒ Bisogna dire che in realtà non solo Galileo e i galileiani, ma anche Cartesio e i moderni razionalisti sono spesso caduti nel peccato originale del matematico. Galileo, come detto, riteneva di potere avere lo stesso pensiero di Dio, mentre Cartesio, in un eccesso di fiducia nella sua razionalità, decideva che in fondo poteva fare a meno di Dio[35]. La tentazione di addentare il pomo nel giardino dell'Eden della matematica non colpisce solo alcuni matematici cristiani, ma anche matematici che si professano atei o agnostici in coerenza - secondo loro - con il loro credo matematico e scientifico. Per tutti si impone sempre la necessità di una chiara distinzione tra "mondo reale" e "mondo immaginato". Oppure, se si preferisce, tra mondo datoci in dono e mondo pensato, esplorato e scoperto.

8.2 Realtà e conoscenza della realtà

⇒ La matematica è "democratica": ogni formulazione di un problema che sia intrinsecamente coerente deve considerarsi valida al pari di tutte le altre formulazioni, con tutte le sue possibili conseguenze. È per questo motivo, per esempio, che il piano delle rette ha pari dignità del piano dei punti. Entrambi costituiscono un modo di esprimere la nostra concezione e la nostra "percezione mentale" dello spazio. Si potrà dire che essi sono solo creazioni della mente, ma una volta creati esistono. Da quel momento, noi conosciamo lo spazio in entrambi i modi. Non si tratta solo di conoscenza matematica, ma di conoscenza pura e semplice. Oggi, grazie anche alla matematica, possiamo dire che conosciamo lo spazio in tantissimi modi.

⇒ Estremizzando in senso negativo quest'ultimo concetto si potrebbe affermare che ciò che chiamiamo spazio è solo "frutto della nostra immaginazione". Non perché lo spazio non esiste, ma perché possiamo conoscerlo solo attraverso il filtro della nostra natura umana, cioè attraverso i nostri sensi, le nostre capacità cerebrali, le immagini e le elaborazioni mentali che il nostro cervello costruisce per metterci in condizione di muoverci, di orientarci, di relazionarci con "l'esterno". Quindi, per noi non sarà mai possibile stabilire definitivamente "che cosa" siano veramente lo spazio e l'intera realtà fisica, come siano fatti, perché siano fatti così e se eventualmente possiedano proprietà per noi impossibili da sperimentare con i sensi, misurare con strumenti di nostra invenzione e descrivere con i nostri mezzi razionali[36].

8.3 Realtà e percezione della realtà

⇒ Il plotter è una macchina che disegna punti e rette su di un foglio con un pennino, decodificando attraverso un proprio cervello elettronico le coordinate spaziali dei punti e delle rette da disegnare che gli sono trasmesse dall'esterno, e trasformandole nel movimento di un braccio meccanico. Per un plotter è assolutamente indifferente "conoscere" le coordinate secondo il piano dei punti oppure secondo il piano delle rette. Meglio ancora, si potrebbe dire che il vero spazio del plotter, il suo "universo" di riferimento, sia un piano isomorfo a quello euclideo, dove le coordinate di punti e rette sono descritte in termini di rotazioni di bracci e di rotelle.

⇒ Un robot è una macchina ancora più complessa, che cammina nello spazio tridimensionale e possiede sensori che "vedono" e interpretano il mondo circostante. Se un robot avesse una forma di coscienza e se, attraverso l'apposito altoparlante posizionato nella sua testa

---

[35] «*Non posso perdonarla a Cartesio, il quale in tutta la sua filosofia avrebbe voluto poter fare a meno di Dio, ma non ha potuto evitare di fargli dare un colpetto al mondo per metterlo in moto; dopo di che non sa più che farne di Dio*» (Blaise Pascal, Pensieri, 77)

[36] Richard Hamming scrive: «*Proprio come esistono odori che i cani possono annusare e noi no, oppure suoni che i cani possono ascoltare e noi no, allo stesso modo ci sono frequenze luminose che noi non possiamo vedere e sapori che non possiamo assaporare. Considerando in quale modo i nostri cervelli sono fatti, perché dunque dovrebbe risultare sorprendente l'osservazione "Forse ci sono pensieri che non possiamo pensare"? L'evoluzione, per ora, potrebbe averci bloccato la capacità di pensare in alcune direzioni; potrebbero esserci pensieri impensabili*» ("The Unreasonable Effectiveness of Mathematics", The American Mathematical Monthly 87, 1980).

antropomorfa, potesse dirci la propria percezione dello spazio, probabilmente scopriremmo che non è quella umana, quella di Euclide. Tutto dipende dai sensori che gli sono stati installati e dal modo in cui il suo cervello elettronico è stato programmato.

⇒ Analogamente dobbiamo ritenere che le nostre percezioni spaziali dipendano da come è "programmato" il nostro cervello umano, il quale costituisce la "forma" che recepisce la realtà esterna attraverso gli organi di senso, interpretandola secondo i suoi "circuiti". Si può dire che il nostro cervello percepisce la realtà esterna come spazio euclideo, perché questa è la sua forma interna percettiva, ed anche contemporaneamente la sua forma razionale. Infatti, il nostro cervello rielabora i sensi e li coordina in una "percezione coordinata", una unica visione della realtà secondo precisi schemi di interazione.

⇒ Tuttavia, a differenza di un robot, abbiamo visto che un essere umano è in grado di utilizzare le proprie facoltà razionali anche per capire, immaginare e quasi "percepire" lo spazio in molti altri modi. La capacità razionale di un essere umano non è la stessa che è possibile fornire ad un cervello elettronico, per quanto sofisticato. La nostra capacità di andare oltre i nostri sensi e di creare nuovi schemi razionali forse è legata alla caratteristica tipica dell'uomo di sapersi guardare "dal di fuori", cioè di trascendersi, e quindi di avere una coscienza di sé. Un robot, invece, non potrà mai "immaginare" lo spazio in un modo diverso da quello che gli è dato di vedere, e probabilmente neppure un cane o un cavallo, tanto meno una pianta o un batterio[37].

⇒ Il plotter, il robot ed i cervelli elettronici non esistevano al tempo di Cartesio. Sarebbe interessante immaginare che cosa avrebbero detto tanti matematici di epoche lontane se ne avessero conosciuto l'esistenza. E, soprattutto, come avrebbero riformulato le proprie riflessioni sulla percezione e sulla conoscenza della realtà molti filosofi del passato quali, ad esempio, John Locke, David Hume, Immanuel Kant, ecc.

8.4 Un gigante dai piedi di argilla

⇒ Un fisico non può fare a meno della matematica. Per questo motivo ancora oggi moltissimi fisici considerano la matematica una specie di prolungamento della fisica, una disciplina che studia metodi speculativi per la interpretazione e la sistematizzazione della conoscenza del reale. I matematici, viceversa, ad un certo punto si sono accorti che possono fare tranquillamente a meno della fisica. Anzi, hanno visto che prendendo decisamente la propria strada potevano ottenere risultati di valenza più generale, creare formulazioni molto più astratte e molto più potenti, inventare applicazioni utilizzabili in scibili diversi, ed anche stabilire nuovi metodi di indagine e scegliere direzioni di ricerca una volta impensabili.

⇒ Tuttavia, questa autonomia rispetto alla fisica ha costretto i matematici a comprendere in modo nuovo la propria identità. A partire dalla fine del XIX secolo, i matematici si sono chiesti che cosa è la matematica ed hanno tentato di rispondersi attraverso la matematica stessa, cercando di ridefinire i suoi fondamenti in modo inattaccabile.

⇒ Lo sforzo in questa direzione ha portato a risultati straordinari: sono stati trovati nuovi sistemi formali, nuovi metodi di dimostrazione, nuovi argomenti da esplorare. Però, senza entrare nella complessità dell'argomento, si può affermare che il tentativo di auto-fondare la matematica sia sostanzialmente fallito. Nell'ultimo secolo la matematica ha continuato a crescere a dismisura, ma ha scoperto che i suoi piedi sono di argilla.

---

[37] In merito è necessario notare che i comportamenti collettivi degli esseri viventi, come pure le funzioni di computer collegati in rete tra loro, non sono paragonabili a quelli osservabili in singolo individuo. Nell'interazione tra di loro e con l'esterno gli animali imparano e adattano i propri comportamenti. Anche i computer e, soprattutto, le reti di computer, possono avere forti capacità adattative e di "apprendimento", sempre nell'ambito di un progetto fatto dall'uomo.

8.5 La "verità" della scienza

⇒ La chiarezza espositiva tipica dei metodi matematici ha spinto per secoli a pensare che le leggi fisiche costituiscano una spiegazione oggettiva della realtà[38]. Questa sensazione di sicurezza dei fisici si è basata spesso più sulla pretesa solidità della cosiddetta "scienza esatta" che sulle osservazioni empiriche, che molto spesso possono essere di difficile e diversa interpretazione per numerosi motivi. Eppure, come si è detto, i matematici conoscono bene la difficoltà di dare fondamenti inattaccabili alla matematica! E poiché la matematica non possiede la verità, necessariamente non la possiede neanche la fisica.

⇒ Questa situazione paradossale emerge implicitamente ed involontariamente dal pensiero di Karl Popper, che si è trovato ad equiparare la matematica più alla metafisica ed alla religione che alla scienza, visto che la matematica non possiede la caratteristica della falsificabilità, ovvero la possibilità di essere confutata sulla base di osservazioni empiriche[39]. Senza il criterio di falsificabilità, che per Popper garantisce l'aderenza con la realtà, una disciplina non può essere qualificata vera o falsa, e quindi è da ritenere non scientifica. Poiché la matematica è una pura costruzione del pensiero, allora per Popper rientrerebbe nel campo delle opinioni e non nella positiva oggettività della scienza[40]. La fisica, invece, sarebbe una disciplina scientifica, in quanto basata sulle osservazioni. Peccato che la fisica, nello stesso tempo, sia inscindibilmente legata a una disciplina non scientifica come la matematica, senza la quale le osservazioni non possono essere espresse in misure, rapportate tra loro, enunciate in leggi. E lo stesso vale per tutte le scienze che, in modi diversi, si affidano alla matematica. Ad oggi, dunque, sembra che il cosiddetto problema della demarcazione, riguardante che cosa è scienza e cosa non lo è, quali siano i criteri di scientificità o, se si vuole, di oggettività e di affidabilità delle affermazioni di una disciplina, rimanga sostanzialmente insoluto.

⇒ Probabilmente si pretende troppo dalla matematica, dalla fisica e dalla scienza tutta. Forse, senza addentrarci in complesse tematiche di filosofia della scienza, ci si deve limitare ad affermare che la matematica e la scienza in generale sono solo *strumenti del pensiero* per la scoperta della verità, metodi e contemporaneamente oggetti di conoscenza che si evolvono e mutano nel tempo, insieme alle domande sempre nuove alle quali cercano di rispondere.

⇒ Forse, alla scienza bisognerebbe affidare criteri di verità più deboli. Basterebbe considerarla "vera", ossia obiettiva, giusta, attendibile, quando ci appare intrinsecamente coerente e rappresentativa della nostra esperienza sensibile secondo lo stato dell'arte delle conoscenze, quando esprime e comunica in modo comprensibile non *ciò che è* ma ciò che noi pensiamo, e più in generale ciò che noi percepiamo, che noi misuriamo, che in qualche modo tocchiamo con la mano, con i nostri strumenti, con la nostra mente. Non solo, ma possiamo avere un atteggiamento correttamente e coerentemente scientifico anche quando esprimiamo delle

[38] A questo proposito, è particolarmente caustico Nietzsche, nichilista anche nei confronti della visione positivista e scientista: "*Che cosa è "conoscere"? Ricondurre qualcosa di estraneo a qualcosa di noto. Primo principio fondamentale: ciò a cui siamo abituati non rappresenta più per noi un enigma, un problema. Ottundimento del senso del nuovo, dell'estraniante, tutto ciò che accade regolarmente non appare più problematico. Perciò cercare la regola, è il primo istinto di chi conosce; mentre naturalmente stabilire la regola non significa affatto aver "conosciuto" qualcosa! Di qui la superstizione dei fisici: dove possono fermarsi, dove cioè la regolarità dei fenomeni consente di applicare formule abbrevianti, pensano di aver conosciuto. Sentono una "sicurezza", ma dietro questa sicurezza intellettuale c'è la paura tranquillizzata, essi vogliono la regola perché toglie al mondo la sua terribilità. La paura dell'incalcolabile come restroistinto della scienza...*" (Friedrich W. Nietzsche, Frammenti postumi 1885-1875, Adelphi Edizioni)

[39] Karl Popper, "Logica della scoperta scientifica", Torino, Einaudi, 1998. (edizione originale: "Logik der Forschung" Springer, Vienna, 1934);

[40] Una comune contestazione al falsificazionismo di Popper, tra l'altro, consisterebbe nel fatto che esso stesso non è soggetto al criterio di falsificabilità e quindi sarebbe, per sua stessa definizione, opinabile e non scientifico. E con esso tutta la filosofia della scienza.

semplici ipotesi, anche un nostro sentimento soggettivo, ciò in cui crediamo, la nostra visione del mondo e delle cose, la nostra fede, addirittura anche qualora questi fossero errati, infondati, cattivi. In questo modo, forse, si tornerebbe almeno in parte a colmare l'abisso culturale che si è formato negli ultimi secoli tra studi umanistici e scientifici, e a farli nuovamente incontrare sul piano comune del pensiero.

8.6 La "bontà" della scienza

⇒ Il soggettivismo, come è noto, ha portato anche una diversa visione sia della scienza sia dell'etica, attraverso due movimenti opposti: mentre l'etica è diventata sempre più relativa, la scienza si è imposta culturalmente nell'occidente quasi come una chiave ermeneutica assoluta, spesso anche nei confronti della stessa etica. Il mito del positivismo resiste tuttora, e gli scienziati sono tra le persone più intervistate per esprimere pareri etici, spesso legati a materie che non sono neppure di loro competenza. Specifiche conoscenze scientifiche sono spesso indispensabili per formulare pareri etici equilibrati e fondati; tuttavia, poiché la scienza non è in grado di avere in sé la verità sulla natura, ancor di meno può possedere la verità sull'uomo.

⇒ Se dunque la scienza è solo uno strumento per la conoscenza, allora in sé non è mai né buona né cattiva. Siamo noi esseri umani ad essere buoni e/o cattivi. Siamo inevitabilmente cattivi quando ci pariamo dietro la scienza, affermando che le nostre azioni e i nostri pensieri non possono essere cattivi, in quanto scientifici. Oppure quando diciamo che la scienza non è in grado di dire che una determinata azione sia cattiva, e quindi questa si può fare. In sostanza, quando usiamo la scienza, strumento neutro di conoscenza, come giudice (o alibi) per fare quello che vogliamo, buono o cattivo che sia, quando cioè alla scienza diamo un particolare valore assoluto: quello di arbitro morale. In questi casi siamo sempre cattivi, perché forziamo la verità, e per lo stesso motivo non agiamo neppure secondo scienza.

8.7 Pensare diversamente

⇒ Soprattutto nella prima metà del XX secolo, mentre numerosi matematici erano impegnati a dubitare e a interrogarsi su quali fossero i fondamenti della matematica, la grande fiducia in questa materia da parte dei fisici ha prodotto interessantissimi risultati in fisica. Tanto che alcune teorie fisiche fondamentali[41] sono state formulate tramite procedimenti che avrebbero lasciato Galileo a bocca aperta: contrariamente al suo metodo sperimentale, in questi casi la teoria non ha formalizzato l'osservazione empirica dei fenomeni ma, viceversa, gli esperimenti hanno seguito la enunciazione di teorie basate sulla matematica, per verificarle e convalidarle, oppure per confutarle. Proprio attraverso la capacità tutta matematica di sapere "pensare diversamente", la fisica ha ottenuto risultati assolutamente contro-intuitivi, scoprendo "comportamenti" e modi di essere della materia estremamente lontani dalla nostra esperienza sensibile[42]. La matematica non contiene in sé la verità assoluta, ma evidentemente (spesso) funziona.

8.8 L'irragionevole efficacia della matematica

⇒ Questa capacità della matematica di rappresentare in modo così convincente il mondo fisico, addirittura anticipando i possibili risultati sperimentali, ha suscitato numerose domande. Il matematico Eugene Wigner in un noto saggio[43] affrontò per primo il problema, giungendo alla conclusione che "*l'enorme utilità della matematica nelle scienze naturali è qualcosa che rasenta*

---

[41] Per esempio, le teorie della relatività di Einstein e molta parte della fisica quantistica.

[42] Si pensi in proposito alla antimateria, ipotizzata per la prima volta per via matematica da Paul Dirac nel 1928.

[43] Eugene Wigner, "The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences", Communications on Pure and Applied Mathematics 13(1): 1 – 14, 1960.

il misterioso e di cui non c'è alcuna spiegazione razionale".

⇒ La sorpresa suscitata dalla corrispondenza tra teoria matematica e risultati empirici, tuttavia, non tiene conto dell'innumerevole quantità di teorie formulate e poi scartate. Infatti, si potrebbe dire che i modelli teorici si sviluppano seguendo una selezione naturale di tipo darwiniano: i modelli che sopravvivono e che, a loro volta, generano nuove formulazioni e nuove applicazioni sono solo quelli più forti, vuoi perché rappresentano meglio i dati empirici, vuoi perché godono di una maggiore accettazione nel consesso scientifico, in quanto figli a loro volta di teorie già "selezionate" ed acquisite. Ovvero, come direbbe Thomas Kuhn, perché appartengono a un consolidato paradigma scientifico di riferimento[44]. In un certo senso, i libri di fisica possono essere paragonati ai botteghini che vendono i biglietti delle lotterie: espongono sempre la copia dei biglietti vincenti, ma mai le migliaia di biglietti perdenti. Ogni vincita, si sa, genera meraviglia.

⇒ L'osservazione precedente, tuttavia, offre solo una spiegazione parziale alla riflessione di Wigner, soprattutto per i matematici, i quali sanno bene che non pensano affatto alla fisica quando creano i loro teoremi. Stimolati dall'argomento, vari autori si sono cimentati sulla scia di Wigner nel tentativo di trovare motivi pienamente convincenti di questo fenomeno. Alcuni continuano a pensare che la fisica sia descritta con tanto successo dalla matematica semplicemente perché il mondo fisico è completamente matematico, isomorfo ad una struttura matematica[45]. Altri hanno rigettato questa visione di tipo platonico ed hanno optato per concezioni più aristoteliche, mettendo in evidenza come nella pratica i teoremi matematici siano solitamente costruiti attraverso procedimenti quasi-empirici, e spesso le dimostrazioni, nella mente dei matematici, precedano di fatto la formalizzazione delle ipotesi. Quindi sembrerebbe che la conoscenza matematica dipenda comunque, almeno in parte, dalle nostre esperienze e inevitabilmente le rappresenti[46]. Altri ancora hanno ipotizzato che in realtà gli esseri umani vedano solo quello che cercano e che le nostre scoperte scientifiche derivino solo dalla nostra prospettiva di ricerca e dalle caratteristiche del nostro cervello: sussisterebbe, quindi, una sorta di tautologia tra ciò che vediamo e ciò che cerchiamo[47]. Una prospettiva originale è stata recentemente presentata anche in termini di Metafisica della Qualità[48].

⇒ La cosa forse più sorprendente di questo dibattito sull'efficacia della matematica, oppure, se si preferisce, sul rapporto che intercorre tra matematica e scienze fisiche, è il fatto che sia emerso solo così recentemente. Solo nel XX secolo ci si è accorti definitivamente che matematica e fisica sono materie completamente distinte, ed oggi la loro consonanza di risultati non appare più ovvia, ma piuttosto una anomalia da spiegare. Anche se, nel frattempo, i matematici continuano da una parte a produrre teoremi, e i fisici da un'altra parte continuano a utilizzare i metodi matematici senza eccessive preoccupazioni.

⇒ Però il problema aperto da Wigner rimane di grandissima portata. Probabilmente, né i matematici, né i fisici, né i filosofi potranno da soli trovare una adeguata spiegazione. Forse sarà necessario tra tutti loro un confronto aperto, che coinvolga possibilmente anche studiosi di altre discipline, per esempio di psicologia (perché una affermazione ci appare vera? come nasce un teorema nella mente di un matematico?), sociologia (quando e perché una teoria è accettata dalla comunità scientifica?), estetica (perché per i matematici è così importante una estetica formale nelle loro teorie, tanto da orientare spesso la ricerca?), di semantica (la matematica è

---

[44] Thomas Kuhn, "The Structure of Scientific Revolutions", Chicago University Press, Chicago

[45] Max Tegmark, "The Mathematical Universe", arXiv 0704.0646, 2007

[46] Hilary Putnam, "What is mathematical truth?", Mathematics, Matter, and Method, Cambridge University Press, 2nd ed., 1975, pp. 60–78.

[47] Richard Hamming, op.cit.

[48] Jason Scott Nicholson, "A Perspective on Wigner's Unreasonable Effectiveness of Mathematics", Notices of the AMS, volume 59, number 1, 2012.

solo nominalismo puro?), ecc.. Un approccio diverso da quello attuale e genuinamente interdisciplinare potrà forse dare risposte adeguate e produrre, domani, un diverso modo di concepire e di fare matematica, fisica e scienza in generale. Un nuovo paradigma, appunto.

8.9 Nuovi paradigmi

⇒ La geometria mostra lo spazio secondo prospettive che nessuna altra forma di conoscenza è mai riuscita a esprimere. Questo dipende dalla natura stessa della matematica, che è un linguaggio molto specializzato e molto astratto, un linguaggio potente che permette di dire ciò che con altri linguaggi non si può. Tuttavia, anche la matematica non può e non riesce a narrare tutto ciò che altri linguaggi possono. Mai la matematica potrà fare a meno delle altre scienze e, soprattutto, delle discipline umanistiche come la filosofia, la storia, la teologia, la psicologia, la sociologia, la letteratura, l'arte. E viceversa!

⇒ L'avvento della modernità ha immesso nella storia una nuova giusta istanza: ogni disciplina deve vivere di vita propria, avere propri metodi espressivi, specializzare il proprio linguaggio. I grandi sviluppi delle scienze e in particolare della matematica che ne sono scaturiti hanno dato ragione a questa impostazione. Da allora è diventato sempre più difficile essere contemporaneamente matematici, fisici, filosofi, artisti, ecc. Ma forse questa è la sfida di oggi: è necessaria la consapevolezza che, mentre è sempre più difficile possedere quei contenuti che solo un differente linguaggio può veicolare, la conoscenza ha sempre più bisogno del pensiero dell'altro nella sua diversità e nella sua specializzazione. È possibile, infatti, che la verità abiti proprio là dove i diversi linguaggi dicono cose tra loro apparentemente diverse e discordanti, dove le diverse scienze vedono le cose da prospettive totalmente differenti.

⇒ Da questo punto di vista il cristianesimo può dare un apporto culturale originale, nuove categorie e nuovi metodi su cui fondare i futuri sviluppi della conoscenza, anche nel campo della matematica: non più solo la visione di una verità unica dovuta a un Lògos che ci avvolge e ci sovrasta, concetto più greco che cristiano; neppure più solo un big-bang di discipline con i propri linguaggi in espansione accelerata, una moderna babele frutto della visione di una verità soggettiva che coincide con le nostre capacità razionali e, per questo motivo, è sempre evanescente e sempre relativa. Piuttosto, l'immagine di una verità che si porge e si rivela perennemente a noi come in un caleidoscopio, sempre nuova e sempre diversa, pur di saperla guardare insieme da tante differenti prospettive. Una verità che non è solo sopra di noi o solo dentro di noi, nella nostra capacità razionale, ma che ha piantato la propria tenda in mezzo agli uomini.