# ODE

Hao Y.H

2024 年 2 月 16 日

# 前言

低廉而有效的快乐.

Hao Y.H

2024 年 2 月 16 日

# 目录

# 第一章 ODE 初级解法

summary.

## 1.1 conception

常微分方程解决的是求函数的问题，其中，未知函数的自变量唯一.

首先约定术语如下：

**定义 1.1.1** (阶). *未知函数的导数的最高阶数即为 $DE$ 的阶. 一般的 $n$ 阶 $ODE$ 可表示为:*

$$F(t,x,\frac{df}{dt},\cdots,\frac{df^n}{dt^n})=0 \tag{1.1}$$

**定义 1.1.2** (解与定义空间). *若函数 $\phi(x)$ 在某区间 $[a,b]$ 内有 $n$ 阶连续导数, 且将函数 $x=\phi(t)$ 代入方程 (1.1) 后, 可使得等式*

$$F(t,\phi(t),\phi^{'}(t),\cdots,\phi^{(n)}(t))=0$$

*在 $[a,b]$ 中恒成立, 称函数 $x=\phi(t)$ 为方程 (1.1) 的解, 称 $[a,b]$ 为解的定义空间.*

*当 $x=\phi(t)$ 不易求得而 $\phi(t,x)=0$ 易于求得时, 后者确定的隐函数为方程 (1.1) 的解, 则称 $\phi(t,x)=0$ 为方程 (1) 的积分.*

*对于一个微分方程, 求其积分, 相当于求得其解.*

**定义 1.1.3** (积分曲线)**.** *解在 $t, x$ 平面上的几何表示—平面曲线, 称为方程 (1.1) 的积分曲线.*

**定义 1.1.4** (方向场—微分方程的几何解释)**.** *当一阶 ODE 已解, 总能以 $t, x$ 表示出积分曲线上任一一点的斜率, 因此可依据积分曲线作出有向线段, 即方向场.*

欧拉折线以方向场为原理.

**定义 1.1.5** (变系数线性微分方程)**.**

## 1.2 一阶方程的初等解法

### 1.2.1 分离变量法

**定义 1.2.1** (变量可分离方程)**.**

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \cdot g(t) \tag{1.2}$$

**定义 1.2.2** (耦合可分离方程-齐次方程)**.**

$$\frac{dx}{dt} = g(\frac{x}{t}) \tag{1.3}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2} \tag{1.4}$$

*对于方程 (1.4), 试作变换:* $\begin{cases} x = \xi + h \\ y = \eta + k \end{cases}$

*令变换后的分子分母的常数项等于零, 得到 $h, k$, 当线性方程组行列式为 0 时,ODE 退化, 其解是 trivial 的, 于此不作赘述.*

**定义 1.2.3** (线性方程)**.**

**例 1.2.4** (因果变量互易一例)**.** $\frac{dx}{dt}(x^3 + \frac{t}{x}) = 1$

**定义 1.2.5** (全微分方程和积分因子)**.**

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{1.5}$$

*若满足柯西黎曼方程, 则称全微分方程 (1.5) 是恰当的. 若存在形如 (1.5) 的方程不满足柯西黎曼方程, 然而乘以某适当函数后, 满足柯西黎曼方程, 称此函数为积分因子*

$$\mu(x,y)[P(x,y)dx + Q(x,y)dy] = 0 \tag{1.6}$$

*对于 (1.6),$\mu(x,y)$ 的求解通过柯西黎曼方程实现, 可令 $\mu(x,y)$ 关于 $x$ 或 $y$ 的偏导等于 0, 从而简化方程求解难度.*

## 1.3　导数未解出的一阶方程

本节研究的方程的一般形状为:

$$F(t,x,x^{'}) = 0 \tag{1.7}$$

对于 (1.7), 三自变量, 可能得到三种隐函数, 本节研究导数未解出的一阶方程.

**定义 1.3.1** (方程 $x = g(t,x^{'})$ 与 $t = h(x,x^{'})$)**.**

1. 对于方程 $x = g(t,x^{'})$:
   令 $p = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, 方程取 t 导数, 得到:

$$p = \frac{\partial g(t,p)}{\partial t} + \frac{\partial g(t,p)}{\partial p} \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \tag{1.8}$$

2. 对于方程 $t = h(x,x^{'})$: 令 $\frac{1}{p} = \frac{dt}{dx}$ 即可求解.

**例 1.3.2.**

$$x(\frac{dx}{dt})^2 + -2t\frac{dx}{dt} + x = 0 \tag{1.9}$$

*Therefore,* $t = \frac{x}{2p} + \frac{xp}{2}$.

*Derivative of* $x$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{2p} + \frac{p}{2} + (\frac{x}{2} - \frac{x}{2p^2})\frac{dp}{dx}$.

*Multiply the both sides of the equation by* $2p^2$:$(p^2-1)(x\frac{dp}{dx}+p) = 0$

*The rest of part is obviously trivial.*

**例 1.3.3.** *clairaut equation,where* $f(u)$ *is continuously derivable, and* $f'(u) \neq$ *constant:*

$$x = t \cdot \frac{dx}{dt} + f(\frac{dx}{dt}) \tag{1.10}$$

*which is equal to:* $x = tp + f(p)$.

*Derivative of* $t$, $p = p + (t + f'(p))\frac{dp}{dt}$.

*Trivial.*

## 1.4 微分方程组的初等积分法与首次积分

### 1.4.1 转化为高阶方程

**例 1.4.1.** *对于微分方程组:*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = x \end{cases}$$

*一式求导, 代入二式即可.*

### 1.4.2 首次积分法

若能够通过一定的运算得到易于积分的全微分方程，可得到该微分方程的原函数，称此原函数为首次积分。

**例 1.4.2** (对称性一例).

$$\frac{dx}{cy-bz} = \frac{dy}{az-cx} = \frac{dz}{bx-ay} \tag{1.11}$$

分母求和为 *0*，则：

$$\frac{xdx}{x(cy-bz)} = \frac{ydy}{y(az-cx)} = \frac{zdz}{z(bx-ay)} = \frac{xdx+ydy+zdz}{0} \tag{1.12}$$

$$\frac{adx}{a(cy-bz)} = \frac{bdy}{b(az-cx)} = \frac{cdz}{c(bx-ay)} = \frac{adx+bdy+cdz}{0} \tag{1.13}$$

为使等式成立，则 $xdx + ydy + zdz = 0, adx + bdy + cdz = 0$ 积分可得：

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = C_1 \\ ax+by+cz = C_2 \end{cases}$$

# 第二章　常系数线性微分方程

## 2.1　二阶常系数线性微分方程的求解

特征根即可

## 2.2　二阶非齐次微分方程——常数变易法

与其寻找常数变易法的因果逻辑，纠结此刻的因果，不如承认常数变易法是强关联的，因为充要性都是验证过的，强关联是毋庸置疑的。二阶非齐次常系数线性方程：

$$a_0\frac{d^2x}{dt^2}+a_1\frac{dx}{dt}+a_2x=f(t) \tag{2.1}$$

其不同的 $2$ 个特征根满足：

$$a_0\lambda^2+a_1\lambda+a_2=a_0(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)=0 \tag{2.2}$$

$2$ 特征根使得特征方程等于 $0$，需承认此时特征根对应的解亦然是原方程的解.

则对于方程 $(2.1)$ 有:

$$a_0\left\{\frac{d^2x}{dt^2}-(\lambda_1+\lambda_2)\frac{dx}{dt}+\lambda_1\lambda_2x\right\}=0, \tag{2.3}$$

组合：

$$a_0\left\{\frac{d}{dt}\Big(\frac{dx}{dt}-\lambda_1x\Big)-\lambda_2\Big(\frac{dx}{dt}-\lambda_1x\Big)\right\}=\mathbf{0}. \tag{2.4}$$

最后得到：

$$a_0\left\{\frac{dy}{dt}-\lambda_2 y\right\}=f\left(t\right), \tag{2.5}$$

$$\frac{d}{dt}\left\{e^{-\lambda_1 t}y\right\}=\frac{1}{a_0}f\left(t\right)e^{-\lambda_2 t}, \tag{2.6}$$

二特征根组合，得到最终解为：

$$x=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_1 t}+\frac{1}{a_0}\int_0^t\frac{e^{\lambda_1(t-s)}-e^{\lambda_1(t-s)}}{\lambda_1-\lambda_2}f(s)ds \tag{2.7}$$

此即为常数变易法.

# 第三章　线性常微分方程组

微分方程与矩阵的关联：remain to be done

## 3.1　矩阵值函数与向量值

本节研究的矩阵如下, 当行列数有为 1 时，退化为向量值矩阵.

$$\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

**定义 3.1.1** (矩阵值函数的微分与积分)**.** *定义矩阵值函数的微积分如下:*

$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{d(a_{ij})}{dt}_{i=1,2,3,\cdots,n;j=1,2,3,\cdots,m.} \tag{3.1}$$

$$\int_{t_0}^{t} A(x)dx = (\int_{t_0}^{t} a_{ij}(x)dx)_{i=1,2,3,\cdots,n;j=1,2,3,\cdots,m.} \tag{3.2}$$

*即矩阵内对应元素求微分或求微分即可.*

**命题 3.1.2** (矩阵值函数微积分的性质选)**.** *1.* $\frac{dA^{-1}(t)}{dt} = -A^{-1}(t) \cdot \frac{dA(t)}{dt} A^{-1}(t)$

*其原因是矩阵左右乘的不相等.*

### 3.1.1　矩阵与向量的范数

**定义 3.1.3.** *假设* $A = (a_{ij})$ *与* $B = (b_{ij})$ *为 2 个* $n \times m$ *阶矩阵, 定义其内积为:*

$$< A, B >= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{ij}$$

矩阵 $A$ 的范数为:

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (a_{ij})^2}$$

**命题 3.1.4.** 关于范数与内积:

1. 正定性:$\|A\| \geq 0$, 当且仅当 $A = 0$ 时,$\|A\| = 0$
2. 齐次性:$\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$
3. 三角不等式:$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
4. $|\langle A, B\rangle| \leq \|A\| \cdot \|B\|$
5. 若 $A$ 为 $n \times m$ 阶矩阵,$B$ 为 $m \times l$ 阶矩阵, 则: $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$
6. $\left\| \int_a^\beta A(t)dt \right\| \leq \int_a^\beta \|A(t)\| dt$

**定义 3.1.5** (**矩阵序列的极限**). 设 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_k, \cdots$ 是一系列的 $n \times m$ 阶矩阵, 如果存在 $A$, 使得当 $k \to +\infty$ 时, 有:

$$\|A_k - A\| \to 0$$

则称 $A$ 为 $\{A_k\}$ 的极限. 其数学表示和一般极限是一致的.

## 3.1.2　线性微分方程组的矩阵表示

本节研究的线性常微分方程组是:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t), \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t), \\ \frac{dx_3}{dt} = a_{31}(t)x_1 + a_{32}(t)x_2 + \cdots + a_{3n}(t)x_n + f_3(t), \\ \cdots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t), \end{cases} \tag{3.3}$$

用矩阵表示为:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t). \tag{3.4}$$

### 3.1.3 $e^{At}$

**定义 3.1.6** ($e^{At}$)**.** *设 $A$ 为 $n$ 阶矩阵, 则定义 $e^{At}$ 为:*

$$e^{At} = E + At + \frac{1}{2!}(At)^2 + \cdots + \frac{1}{k!}(At)^k + \cdots . \tag{3.5}$$

**定理 3.1.7** (非齐次微分方程组解)**.** *$f(t)$ 在 $(\alpha, \beta)$ 是 continuous 的, 则非齐次微分方程组:*

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t) \tag{3.6}$$

*满足初值条件 $x(t_0) = x_0$ 的解在 $(\alpha, \beta)$ 是唯一的, 且:*

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}f(s)ds \tag{3.7}$$

## 3.2 常系数微分方程组的求解

本节给出了特征值特征向量与常系数微分方程的关系. 对于忽视代数重数与几何重数问题的学生 (我), 有重根情况下的求解是新颖的. 此处纪录一矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

同时建议注意参数的位置. 对于一个特征值而言, 解得的 x, y 有相同的参数. 这就出现了一个问题: 需要将所有的特征值与特征向量均求解出来, 而出现重根时, 是无法完成的 (或者说, 有时重根无法求得所有的向量, 导致张不成微分方程组的维度, 而此时的微分方程组的解必然有多个' 线性无关' 的基, 这是矛盾存在之处)

**例 3.2.1** (齐次无重根一例). 求解线性微分方程组的解:

$$\frac{dx}{dt} = 2x + y$$
$$\frac{dy}{dt} = y$$

线性微分方程组的矩阵 $A$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

其特征值为 1,2. 对于 $\lambda_1 = 1$, 其特征向量满足关系:

$$(A - \lambda_1 E)X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

所以 $x = -c_1 e^t, y = c_1 e^t$ 是方程组的一个解. 另一特征值对应的解不再赘述. 最终方程组的解为:

$$x = -c_1 e^t + c_2 e^{2t}$$
$$y = +c_1 e^t$$

从上述求解看出, 无重根时, 特征值代表指数系数大小, 特征向量代表系数的权重.

**定义 3.2.2** (一般解的形式). 对于一阶常系数线性微分方程组

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{3.8}$$

$A$ 的 $n$ 个特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则存在 $n$ 个循环向量系数多项式

$p_1(t), p_2(t), \cdots, p_n(t)$, 使得 $p_1(0), p_2(0), \cdots, p_n(0)$ 线性无关. 且方程组解为:

$$x = \sum_{j=1}^{n} c_j p_j(t) e^{\lambda_j t} \tag{3.9}$$

$$\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{a}_0 \frac{t^k}{k!} + \boldsymbol{a}_1 \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \cdots + \boldsymbol{a}_k \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{a}_0 &= \lambda \boldsymbol{a}_0, \\ A\boldsymbol{a}_1 &= \lambda \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_0, \\ &\cdots \\ A\boldsymbol{a}_k &= \lambda \boldsymbol{a}_n + \boldsymbol{a}_{k-1}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

**例 3.2.3** (有重根一例). 求常微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -4x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4, \\ \frac{dx_2}{dt} = -2x_1 - x_2 + 2x_3, \\ \frac{dx_3}{dt} = -3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \\ \frac{dx_4}{dt} = x_1 - x_8 - x_4 \end{cases}$$

方程组特征多项式为

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1-\lambda & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 2-\lambda & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix}.$$

特征值为-1,4 重根, 几何重数为 2, 特征向量为:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{与} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

值得注意的是, 考虑到化简过程中存在倍乘操作, 非齐次情况下失效, 所以特征向量应代入原始矩阵当中. 对于第一个特征向量而言, 其循环向量为:

$$a_1 = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

所以,$p_1(t) = a_0 t + a_1 = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$

最终, 解为:$\boldsymbol{x} = \left( c_1 \boldsymbol{p}_1(t) + c_2 \dfrac{d\boldsymbol{p}_1(t)}{dt} + c_3 \boldsymbol{p}_2(t) + c_4 \dfrac{d\boldsymbol{p}_2(t)}{dt} \right) e^{-t}$

解的形式说明, 得到循环向量后可直接作求微分 (或许可以直到不出现 $t$ 为止,*perhaps*), 得到最终答案.

## 3.3 初值问题解的存在唯一性

本节研究变系数矩阵下的解存在唯一性问题. 其大抵等价于, 当内部环境参数改变后, 系统的稳定性问题.

## 3.4 解的结构

微分方程组的结构与线性方程组的结构类似.

### 3.4.1 刘维尔公式

**定义 3.4.1** (解方阵, 朗斯基行列式)**.** 考虑 $R^n$ 上的一阶线性微分方程 $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ 设 $x_1(t), x_2(t), x_3(t), \cdots, x_n(t)$ 为基本解组, 以基本解组为列向量的方阵 $\Phi(t)$, 即为基本解方阵, 其行列式即为朗斯基行列式

满足 $\frac{d\Phi(t)}{dt} = A(t)\Phi(t)$

朗斯基行列式满足:$\frac{dW(t)}{dt} \equiv \sum_{k=1}^{n} a_{kk}(t)W(t) = trA(t)W$

不采用书中的内容: 现在根据二阶齐次线性微分方程说明: 若给出其中一个特解, 则另一个线性无关的特解是唯一确定的.
$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)}dx$

### 3.4.2 常数变易公式

齐次线性方程组的解为:$x = \phi(t)c$, 合理联想非齐次解为:

$$x = \phi(t)c(t) \tag{3.12}$$

derivative of t, 运用解方阵的性质:

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} &= \frac{d\boldsymbol{\Phi}(t)}{dt}\boldsymbol{c}(t) + \boldsymbol{\Phi}(t)\frac{d\boldsymbol{c}(t)}{dt} \\ &= \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}(t) + \boldsymbol{\Phi}(t)\frac{d\boldsymbol{c}}{dt}\end{aligned}$$

由 (3.12) 知:$\frac{dx}{dt} \equiv A(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{f}(t) \equiv \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}(t) + \boldsymbol{f}(t)$
比较系数, 得到:$\boldsymbol{\Phi}(t)\frac{dc}{dt} = \boldsymbol{f}(t)$.
则最终解为:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}_0 + \int_t^t \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(\boldsymbol{s})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{s})d\boldsymbol{s} \tag{3.13}$$

称 $U(t,s) \equiv \Phi(t)\Phi^{-1}(s)$ 为转移矩阵.

**例 3.4.2** (非齐次微分方程组, 常数变易法一则)**.** *求解微分方程组:*

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt} &= 2x + y - e^{-t} \\ \frac{dy}{dt} &= 4x + 3y + 4e^{-t}\end{cases}$$

*设解为:*

$$\begin{cases}x &= c_1e^{5t} + c_2e^{-t} \\ y &= 2c_1e^{5t} - c_2e^{-t}\end{cases}$$

将解取微分, 全部代入题干方程组, 得到 *(原书此处十分 shabi, 自己可以看看)(此处似乎存在规律, 例如等式右边与非齐次项的关系, 以及等式左边与求导项的关系):*

$$\begin{cases} e^{5t}\frac{dc_1}{dt}+e^{-t}\frac{dc_2}{dt} & =-e^{-t} \\ 2e^{5t}\frac{dc_1}{dt}-e^{-t}\frac{dc_2}{dt} & =4e^{-t} \end{cases}$$

得到了线性方程组, 易解得 $c_1, c_2$, 代入到假设解即可.

## 3.5　二阶变系数线性微分方程