ODE

Hao Y.H

2024 年 2 月 15 日

前言

低廉而有效的快乐.

Hao Y.H

2024 年 2 月 15 日

目录

第一章　ODE 初级解法

summary.

1.1　conception

常微分方程解决的是求函数的问题，其中，未知函数的自变量唯一.

首先约定术语如下：

定义 1.1.1 (阶). *未知函数的导数的最高阶数即为 DE 的阶. 一般的 n 阶 ODE 可表示为:*

$$F(t,x,\frac{df}{dt},\cdots,\frac{df^n}{dt^n})=0 \tag{1.1}$$

定义 1.1.2 (解与定义空间). *若函数 $\phi(x)$ 在某区间 $[a,b]$ 内有 n 阶连续导数, 且将函数 $x=\phi(t)$ 代入方程 (1.1) 后, 可使得等式*

$$F(t,\phi(t),\phi^{'}(t),\cdots,\phi^{(n)}(t))=0$$

在 $[a,b]$ 中恒成立, 称函数 $x=\phi(t)$ 为方程 (1.1) 的解, 称 $[a,b]$ 为解的定义空间.

当 $x=\phi(t)$ 不易求得而 $\phi(t,x)=0$ 易于求得时, 后者确定的隐函数为方程 (1.1) 的解, 则称 $\phi(t,x)=0$ 为方程 (1) 的积分.

对于一个微分方程, 求其积分, 相当于求得其解.

定义 1.1.3 (积分曲线)**.** *解在 t, x 平面上的几何表示—平面曲线, 称为方程 (1.1) 的积分曲线.*

定义 1.1.4 (方向场—微分方程的几何解释)**.** *当一阶 ODE 已解, 总能以 t, x 表示出积分曲线上任一一点的斜率, 因此可依据积分曲线作出有向线段, 即方向场.*

欧拉折线以方向场为原理.

定义 1.1.5 (变系数线性微分方程)**.**

1.2　一阶方程的初等解法

1.2.1　分离变量法

定义 1.2.1 (变量可分离方程)**.**

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \cdot g(t) \tag{1.2}$$

定义 1.2.2 (耦合可分离方程-齐次方程)**.**

$$\frac{dx}{dt} = g(\frac{x}{t}) \tag{1.3}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} \tag{1.4}$$

对于方程 (1.4), 试作变换: $\begin{cases} x = \xi + h \\ y = \eta + k \end{cases}$

令变换后的分子分母的常数项等于零, 得到 h, k, 当线性方程组行列式为 0 时,ODE 退化, 其解是 trivial 的, 于此不作赘述.

定义 1.2.3 (线性方程)**.**

例 1.2.4 (因果变量互易一例)**.** $\frac{dx}{dt}(x^3 + \frac{t}{x}) = 1$

定义 1.2.5 (全微分方程和积分因子)**.**

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \tag{1.5}$$

若满足柯西黎曼方程, 则称全微分方程 (1.5) 是恰当的. 若存在形如 (1.5) 的方程不满足柯西黎曼方程, 然而乘以某适当函数后, 满足柯西黎曼方程, 称此函数为积分因子

$$\mu(x,y)[P(x,y)dx+Q(x,y)dy]=0 \tag{1.6}$$

对于 (1.6),$\mu(x,y)$ *的求解通过柯西黎曼方程实现, 可令* $\mu(x,y)$ *关于* x *或* y *的偏导等于 0, 从而简化方程求解难度.*

1.3　导数未解出的一阶方程

本节研究的方程的一般形状为:

$$F(t,x,x^{'})=0 \tag{1.7}$$

对于 (1.7), 三自变量, 可能得到三种隐函数, 本节研究导数未解出的一阶方程.

定义 1.3.1 (方程 $x=g(t,x^{'})$ 与 $t=h(x,x^{'})$)**.**

1. 对于方程 $x=g(t,x^{'})$:
   令 $p=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, 方程取 t 导数, 得到:

$$p=\frac{\partial g(t,p)}{\partial t}+\frac{\partial g(t,p)}{\partial p}\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \tag{1.8}$$

2. 对于方程 $t=h(x,x^{'})$: 令 $\frac{1}{p}=\frac{dt}{dx}$ 即可求解.

例 1.3.2.

$$x(\frac{dx}{dt})^2+-2t\frac{dx}{dt}+x=0 \tag{1.9}$$

Therefore, $t = \frac{x}{2p} + \frac{xp}{2}$.

Derivative of x, $\frac{1}{p} = \frac{1}{2p} + \frac{p}{2} + (\frac{x}{2} - \frac{x}{2p^2})\frac{dp}{dx}$.

Multiply the both sides of the equation by $2p^2$:$(p^2-1)(x\frac{dp}{dx}+p) = 0$

The rest of part is obviously trivial.

例 1.3.3. *clairaut equation,where* $f(u)$ *is continuously derivable, and* $f^{'}(u) \neq$ *constant:*

$$x = t \cdot \frac{dx}{dt} + f(\frac{dx}{dt}) \tag{1.10}$$

which is equal to: $x = tp + f(p)$.

Derivative of t, $p = p + (t + f^{'}(p))\frac{dp}{dt}$.

Trivial.

1.4 微分方程组的初等积分法与首次积分

1.4.1 转化为高阶方程

例 1.4.1. 对于微分方程组:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = x \end{cases}$$

一式求导, 代入二式即可.

1.4.2 首次积分法