

## Содержание

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Теория графов.</b>                               | <b>2</b>  |
|          | Основные определения теории графов. . . . .         | 2         |
|          | Связность. Сильная связность. Двусвязность. . . . . | 2         |
|          | Деревья. Остовные деревья. . . . .                  | 5         |
|          | Эйлеровы и гамильтоновы пути и циклы. . . . .       | 9         |
|          | Укладки графов. Планарность. . . . .                | 11        |
|          | Раскраски графа. . . . .                            | 17        |
|          | Паросочетания. . . . .                              | 20        |
| <b>2</b> | <b>Случайные графы.</b>                             | <b>24</b> |
|          | Компоненты связности в случайных графах. . . . .    | 30        |
| <b>3</b> | <b>Матроиды.</b>                                    | <b>32</b> |
|          | Пересечение матроидов. . . . .                      | 38        |

# 1 Теория графов.

## Основные определения теории графов.

**Определение 1.** (Неориентированным) графом называется пара из множеств  $V$  и  $E$ , где  $E \subset V \times V \setminus \{(u; u) \mid u \in V\} / (u; v) \sim (v; u)$ .

**Определение 2.** (Неориентированным) графом с кратными рёбрами называется набор множеств  $V$ ,  $E$  и функции  $\text{ends}: E \rightarrow A \subset 2^X$ , где  $A = \{B \subset V \mid |B| = 2\}$ , определяющей концы ребра. При этом

**Определение 3.** (Неориентированным) графом с кратными рёбрами и петлями называется то же самое, что и в предыдущем определении, но  $1 \leq |B| \leq 2$ .

**Определение 4.** (Неориентированным) графом с петлями называется пара из множеств  $V$  и  $E$ , где  $E \subset V \times V / (u; v) \sim (v; u)$ .

**Определение 5.** Ориентированным графом (с петлями) называется пара из множеств  $V$  и  $E \subset V \times V$ .

**Определение 6.** Ориентированным графом с кратными рёбрами (и петлями) называется набор из множеств  $V$  и  $E$  и двух функций  $\text{beg}: E \rightarrow V$ ,  $\text{end}: E \rightarrow V$ .

**Определение 7.** Говорят, что ребро и вершина в графе **инцидентны**, если одним из концов/началом или концом ребра является вершина.

**Определение 8.** Количество рёбер, с которыми данная вершина инцидентна, называется **степенью вершины** ( $\deg u$ ). Если разрешены кратные рёбра, считается, что они вносят два в степень, а не один.

**Лемма 1** (Лемма о рукопожатиях). *Тривиально,*

$$\sum_{u \in V} \deg u = 2|E|$$

**Определение 9.** Количество рёбер, исходящих из данной вершины, называется **исходящей степенью** ( $\deg^- u$  или  $\deg_{\text{out}} u$ ).

**Определение 10.** Количество рёбер, исходящих из данной вершины, называется **входящей степенью** ( $\deg^+ u$  или  $\deg_{\text{in}} u$ ).

**Лемма 2.** *Тривиально,*

$$\sum_{u \in V} \deg^+ u + \deg^- u = 2|E|$$

**Связность. Сильная связность. Двусвязность.**

**Определение 11.** Последовательность

$$u_0; e_1; u_1; e_2; u_2; \dots; e_k; u_k$$

где  $\forall i \in [0 : k] \ u_i \in V$ ,  $\forall j \in [1 : k] \ e_j \in E$  и  $\forall i \in [1 : k] \ u_{i-1}$  и  $u_i$  инцидентны  $e_i$  называется **путём** (в неориентированном графе).  $k$  называется **длиной пути**.

**Определение 12.** Сами допишите напильником предыдущее определение до определения **пути в ориентированном графе**.

**Определение 13.** В неориентированном графе

Циклическим путём называется путь, у которых начало совпадает с концом и длина больше нуля.

Циклические пути называются эквивалентными, если они совпадают с точностью до циклического сдвига.

Классы эквивалентности циклический путей по данной эквивалентности называются **циклами**.

**Определение 14.** Путь или цикл в ориентированном графе называется **рёберно простым/вершинно простым**, если все  $e_i/v_i$  соответственно различны.

**Определение 15.** В ориентированном графе

Циклическим путём называется путь, у которых начало совпадает с концом и длина больше нуля.

Циклический путь называется корректным, если  $\forall i \in [1 : k - 1] e_i \neq e_{i+1}$ , если  $e_i$  не петля и  $e_1 \neq e_k$ , если  $e_1$  — не петля.

Корректные циклические пути называются эквивалентными, если они совпадают с точностью до циклического сдвига и/или отражения.

Классы эквивалентности корректных циклических путей по данной эквивалентности называются **циклами**.

**Определение 16.** Путь или цикл в неориентированном графе называется **рёберно простым/вершинно простым**, если догадайтесь, когда.

**Определение 17.** Говорят, что  $v$  **достижима** из  $u$  ( $u \rightsquigarrow v$ ), если существует путь из  $u$  в  $v$ .

**Утверждение.** Достижимость рефлексивна и транзитивна. В неориентированном графе также симметрична.

**Определение 18.** Отношение  $u \rightsquigarrow v \wedge v \rightsquigarrow u$  называется **отношением сильной связности**.

**Утверждение.** Отношение сильной связности симметрично.

**Определение 19.** В неориентированном графе классы эквивалентности по достижимости называются **компонентами связности**.

**Определение 20.** В ориентированном графе классы эквивалентности по сильной связности называются **компонентами сильной связности**.

**Определение 21.** **Конденсацией** ориентированного графа называется граф, получаемый из ориентированного графа заменой компонент сильной связности на вершины с сохранением ориентированных рёбер.

**Утверждение.** Конденсация всегда не содержит циклов.

**Определение 22.** В неориентированном графе  $u, v \in V$  называются **рёберно двусвязными**, если существуют два пути из  $u$  в  $v$ , не имеющие общих рёбер.

**Утверждение.** Рёберная двусвязность является отношением эквивалентности.

*Доказательство.* • Рефлексивность: возьмём 2 одинаковых пути из вершины в себя. Они не пересекаются по рёбрам.

• Симметричность: очевидно.

• Транзитивность. Пусть  $u$  двусвязана с  $v$ , а  $v$  — с  $w$ . Рассмотрим  $p_1$  и  $p_2$  — два пути из  $u$  в  $v$ . Давайте теперь возьмём  $w$  и будем из неё идти в сторону  $v$  по путям  $q_1$  и  $q_2$ .

– Если мы дошли без пересечения с  $p_1$  или  $p_2$ , мы победили.

– Если мы по одному пути пересеклись с  $p_1$ , а по другому — с  $p_2$ , мы победили.

– Если мы пришли на один и тот же путь, то от одного из  $q_1$  и  $q_2$  пойдём в сторону  $u$ , а от другого — в сторону  $v$ . В сторону  $v$  — от того, которого ближе. После этого из второго пойдём и  $v$  в  $u$  по второму пути между ними. Мы победили.

□

**Определение 23.** Классы эквивалентности по рёберной двусвязности называются **компонентами рёберной двусвязности** или **листами**.

**Определение 24.** Ребро, концы которого не являются рёберно двусвязными, — **мост**.

**Определение 25.** Ребро, при удалении которого, количество компонент связности увеличивается, — мост.

**Теорема 1.** Следующие 4 утверждения для связного графа (и первые 3 для несвязного) равносильны.

1.  $uv$  — мост в смысле первого определения.
2.  $uv$  — мост в смысле второго определения.
3.  $\exists x, y \in V$  любой путь из  $x$  в  $y$  содержит  $uv$ .
4.  $V = X \sqcup Y$ ,  $X \neq \emptyset \neq Y$  такие что  $\forall x \in X \forall y \in Y$  любой путь из  $x$  в  $y$  содержит  $uv$ .

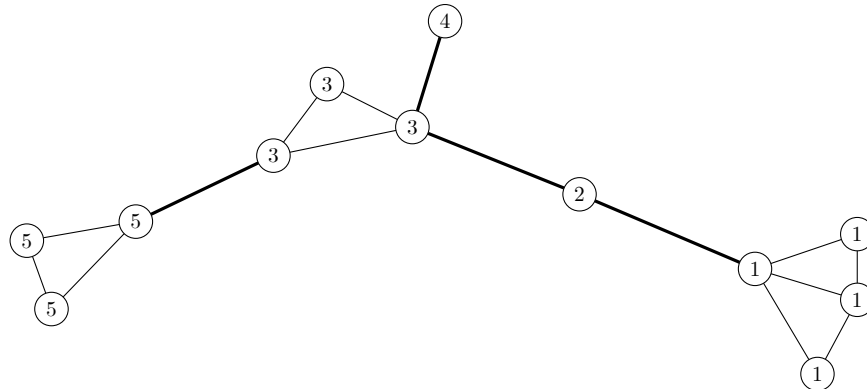
*Доказательство.*  $1 \rightarrow 2$  Если при удалении количество компонент связности не увеличится, был другой путь  $u \leadsto v$ . Противоречие.

$2 \rightarrow 4$  Возьмём в качестве  $X$  и  $Y$  те две (а тривиально, что в связном графе их две) компоненты связности, на которые развалится наш граф. Всё.

$4 \rightarrow 3$  Тривиально.

$3 \rightarrow 1$  Если  $u$  и  $v$  рёберно двусвязны, то от  $x$  до  $y$  можно пройти другим путём, игнорируя  $uv$ . Для несвязного графа справьтесь сами. □

*Пример.* Жирным выделены мосты, цифрами помечены компоненты рёберной двусвязности.



**Определение 26.** Два ребра  $ab$  и  $cd$  называются вершинно двусвязными, если между существуют два вершинно непересекающихся пути  $a \leadsto c$  и  $b \leadsto d$  (или, наоборот,  $a \leadsto d$  и  $b \leadsto c$ ).

**Теорема 2.** В неориентированном графе без петель вершинная двусвязность является отношением эквивалентности.

*Доказательство.* • Рефлексивность: очевидно.

- Симметричность: очевидно.
- Транзитивность: та же заплатка, что и в рёберной двусвязности.

□

**Определение 27.** Классы эквивалентности по вершинной двусвязности называются **компонентами вершинной двусвязности** или **блоками**.

**Определение 28.** Точкой сочленения называется вершина, принадлежащая нескольким компонентам вершинной двусвязности.

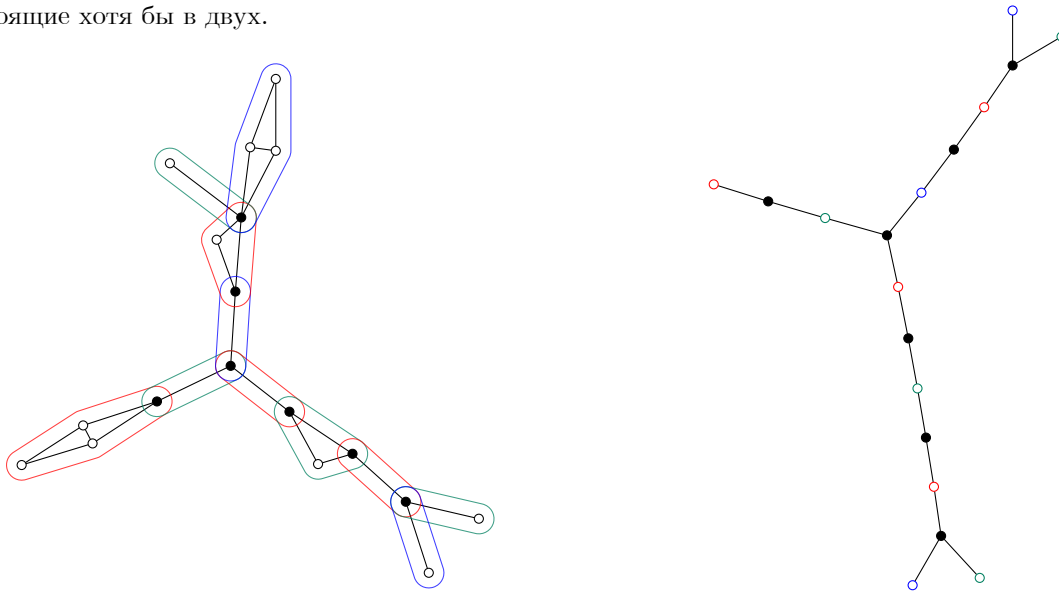
**Определение 29.** Точкой сочленения называется вершина, удаление которой (вместе с инцидентными рёбрами) приводит к увеличению компонент связности.

**Теорема 3.** Сами докажите, что следующие 4 утверждения для связного графа (и первые 3 для несвязного) равносильны.

1.  $v$  — точка сочленения в смысле первого определения.
2.  $v$  — точка сочленения в смысле второго определения.
3.  $\exists x, y \in V : x \neq v \neq y$  любой путь из  $x$  в  $y$  содержит  $v$ .
4.  $V = X \sqcup Y$ ,  $X \neq \emptyset \neq Y$  такие что  $\forall x \in X \forall y \in Y$  любой путь из  $x$  в  $y$  содержит  $v$ .

**Определение 30.** **Дерево блоков — точек сочленения** — это граф, получаемый из графа заменой блоков на отдельные вершины, добавлением по каждой вершине для точки сочленения и рёбрами, показывающими отношение «содержать данную точку сочленения».

*Пример.* Некоторый граф; обведены компоненты двусвязности, закрашены вершины, состоящие хотя бы в двух.



**Деревья. Остовные деревья.**

**Определение 31.** Неориентированный граф называется **лесом**, если в нём нет циклов.

**Определение 32.** Связный лес называется **деревом**.

**Определение 33.** Вершина степени 1 в лесе называется **листом**.

**Лемма 3.** *Дерево с хотя бы двумя вершинами содержит лист.*

*Доказательство.* Рассмотрим некоторую вершину  $u_1$ . Если это не лист, возьмём случайного её соседа  $u_2$ , перейдём в него. Если это лист, мы победили. Если нет, есть хотя бы 2 соседа. Из одного мы пришли, пойдём во второго ( $u_3$ ). Рано или поздно мы либо найдём лист, либо придём в вершину, где уже были. Во втором случае мы нашли цикл, значит такого не бывает.  $\square$

**Теорема 4.** Следующие три утверждения равносильны:

1.  $G$  — связный граф без циклов.
2.  $G$  — связный граф с  $n$  вершинами и  $n - 1$  ребром.
3.  $G$  — ациклический граф с  $n$  вершинами и  $n - 1$  ребром.

*Доказательство.*  $1 \Rightarrow 2$  Докажем по индукции. В дереве на 1 вершину всё выполнено. Переход. рассмотрим граф на  $n + 1$  вершину. Хочется доказать, что там  $n$  рёбер. Давайте рассмотрим наше дерево, найдём лист и вырежем его. Получится дерево на  $n$  вершин, по предположению в нём  $n - 1$  ребро, а одно ребро из исходного мы вырезали, значит там их было  $n$ .

$2 \Rightarrow 3$  Если в графе  $n$  вершин и  $n - 1$  ребро, то в нём есть вершина степени не больше одного (иначе сумма всех степеней вершин  $\geq 2n$ , значит рёбер  $\geq \frac{2n}{2} = n$ ). У нас граф связен, поэтому вершина степени 0 там может быть только если  $n = 1$ . А теперь можно доказать по индукции, что в графе нет циклов (таким же методом, как предыдущее).

$3 \Rightarrow 1$  Пусть у нас  $k$  компонент связности. Каждая из них — ациклический связный граф, то есть дерево, в котором  $m$  вершин и  $m - 1$  ребро. Просуммировав это по всем компонентам, получим суммарно  $n$  вершин и  $n - k$  рёбер, то есть  $k = 1$ . □

**Лемма 4.** *Дерево с хотя бы двумя вершинами содержит хотя бы два листа.*

*Доказательство.* В противном случае суммарная степень вершин слишком велика. □

**Утверждение.** *Разные тривиальные утверждения о том, что в дереве каждое ребро — мост (и если в графе каждое ребро — мост, то это лес), о том, что в дереве от любой вершины до любой есть ровно один путь, и все подобные сами найдите и докажете.*

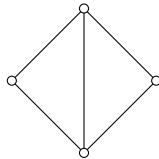
**Определение 34.** Пусть  $G$  — граф. Дерево  $T$  с тем же множеством вершин и  $ET \subset EG$  называется **остовным деревом**  $G$ .

**Лемма 5.** *У любого связного графа есть остовное дерево.*

*Доказательство.* Рассмотрим граф. Из всех его связных подграфов выберем тот, у которого минимальное количество рёбер. Если рёбер там больше  $n - 1$ , там есть циклы, из них можно вырезать случайное ребро без потери связности. Значит рёбер там ровно  $n - 1$ , и это дерево. □

*Замечание.* На алгоритмах мы будем искать остовное дерево минимального веса, а тут мы хотим рассмотреть задачу вычисления количества остовных деревьев.

*Пример.* Например, сколько деревьев тут?



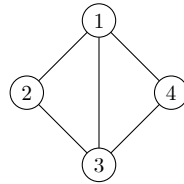
Ну, 8. А вообще есть такой алгоритм:

**Определение 35.** Матрицей Кирхгофа графа  $G$  называется матрица  $K(G)$ , равная

$$\begin{pmatrix} \deg u_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \deg u_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \deg u_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \deg u_n \end{pmatrix} - AG$$

Где  $AG$  — матрица смежности  $G$ .

*Пример.* Например, для графа



матрица Кирхгофа выглядит как

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

**Теорема 5** (Теорема Кирхгофа). *Количество остовных деревьев в графе равно алгебраическому дополнению любого элемента матрицы Кирхгофа.*

*Во-первых, мы не будем доказывать эту теорему в общем виде, а докажем для алгебраического пополнения диагональных элементов. Во-вторых, делать мы то будем **немного потом**, для доказательства нам надо будет ввести несколько новых сущностей.*

**Определение 36.** Пусть  $G$  — граф из  $m$  рёбер и  $n$  вершин. Тогда **матрицей инцидентности**  $G$  называется матрица  $B$  размерности  $n \times m$ , где в столбце, отвечающем за ребро  $uv$  находятся единицы в строках номер  $u$  и  $v$  и нули в остальных строках.

*Замечание.* Вообще матрица инцидентности — интересная штука. Например, давайте рассмотрим её как матрицу над  $\mathbb{F}_2$ . Что тогда происходит, если мы решим уравнение  $Bx = 0$ ? Ну, умножение её на вектор — сложение некоторых столбцов  $B$  по модулю 2. То есть мы берём набор рёбер, и там во всех вершинах степень получается чётной.

**Определение 37.** Множество наборов рёбер, в которых степень каждой вершины степень чётна (т.е.  $\ker B$  над  $\mathbb{F}_2$ , по сути) называется **циклическим пространством графа**.

**Определение 38.** Пусть  $T$  — остовное дерево  $G$ ,  $uv \notin T$ . Тогда рассмотрим  $T \cup uv$ . Тривиально, полученный граф содержит ровно один цикл, который называется **фундаментальным циклом относительно  $uv$** .

**Теорема 6.** *Фундаментальные циклы образуют базис циклического пространства.*

*Доказательство.* Тривиально, они все линейно независимы (в каждом есть ровно одно ребро не из дерева, у каждого своё).

Теперь докажем, что эта система порождающая. Рассмотрим  $X \in \ker B$ . Если  $X \neq 0$ , то в нём, тривиально, есть цикл, а значит есть ребро не из  $T$ . Возможно, несколько. Так вот, давайте рассмотрим все фундаментальные циклы для каждого такого ребра и возьмём их сумму. Теперь нам надо доказать, что мы получили именно что  $X$ . Понятно, что все рёбра не из  $T$  будут взяты 1 раз, как нам и хочется. Теперь посмотрим на рёбра  $T$ . Нам надо, чтобы в нём рёбра из  $X$  были, а рёбер не из  $X$  не было. Ну, подвесим  $T$  и рассмотрим какое-то ребро  $e \in T$ . Если  $e \in X$ , то (поскольку степени всех вершин  $X$  чётны) из поддерева  $e$  выходит нечётное количество рёбер. То есть именно в нечётном количестве фундаментальных циклов состоит  $e$ , а значит оно в сумме этих циклов есть. Если же  $e \notin X$ , то, аналогично, циклов будет чётное количество, а значит в сумме  $e$  лежать не будет.  $\square$

*Замечание.* Вернёмся к теореме Кирхгофа.

**Определение 39.** Пусть  $G$  — неориентированный граф. Тогда его **ориентацией** ( $\vec{G}$ ) называется ориентированный граф, вершины которого — это вершины  $G$ , а каждое ребро является ребром  $G$ , ориентированным в одну из двух сторон.

**Определение 40.** Матрицей инцидентности ориентированного графа называется такая матрица  $\vec{B}$  размерности  $n \times t$ , что в столбце, отвечающем за ребро  $\overrightarrow{uv}$  находится единица в строке номер  $v$ , минус единица в строке номер  $u$  и нули во всех остальных строках.

**Лемма 6.** Пусть  $\vec{G}$  — произвольная ориентация  $G$ . Тогда  $\vec{B}\vec{B}^T = K$ .

*Доказательство.* Рассмотрим скалярное произведение строки  $\vec{B}$  на столбец  $\vec{B}^T$ .

- Если они имеют одинаковый номер, то в этом скалярном произведении умножается 1 на 1 для каждого входящего ребра и  $-1$  на  $-1$  для исходящего. То есть суммируется столько единиц, сколько рёбер, инцидентной с данной вершиной, то есть  $(\vec{B}\vec{B}^T)_{i,i} = \deg i$ , как и надо.
- Теперь пусть мы взяли  $i$ -тую строку и  $j$ -тый столбец. Ну, смотрите. Если  $i$  и  $j$  не соединены ребром, то на одном и том же месте в  $i$ -той и  $j$ -той строках  $\vec{B}$  в одинаковом месте не может быть двух не-нулей (иначе получится, что  $i$ -тая и  $j$ -тая вершина инцидентны одному ребру, а они нет). То есть в таком случае  $(\vec{B}\vec{B}^T)_{i,j} = 0$ . Если же  $i$  и  $j$  связаны ребром, то у него один конец в  $i$ -той строке  $\vec{B}$ , в другой — в  $j$ -той, и в скалярном произведении получим  $-1$ . А ровно это нам и надо.

□

**Лемма 7.**

$$K'_{j'} = \vec{B}_{j'} \vec{B}^{T'}{}^T$$

То есть если выкинуть  $i$ -тую строку из  $\vec{B}$  и  $v$ -тый столбец из  $\vec{B}^T$ , то их произведение будет давать  $K$  без  $i$ -той строки и  $v$ -того столбца.

*Доказательство.* Доказательство как в предыдущей лемме.

□

**Лемма 8.** Рассмотрим  $\vec{B}$ . Рассмотрим любые  $n-1$  столбцов и любые  $n-1$  строк. Получим матрицу  $Q$  размерности  $(n-1) \times (n-1)$ . Тогда  $\det Q$  равен нулю, если в исходном графе выбранные нами столбцы соответствовали рёбрам, содержащим цикл (в  $G$ ) и  $\pm 1$  иначе.

*Доказательство.* Обозначим множество оставшихся рёбер за  $EQ$ , а вершину, которую мы вычеркнули, — за  $u$ .

- Если  $EQ$  содержит цикл, то граф, тривиально, не связан. Рассмотрим компоненту связности, не содержащую  $u$ . В ней сумма столбцов равна нулю, и хорошо. Ну, как хорошо. Вообще  $EQ$  может не содержать ориентированного цикла, но содержать цикл  $G$ . Так вот, в таком случае нам придётся взять не сумму соответствующих столбцов, а алгебраическую сумму, где неправильно направленные рёбра идут с коэффициентом  $-1$ . Тогда мы получим-таки наш ноль, то есть линейная комбинация столбцов будет равна нулю, следовательно определитель нулевой.
- Теперь пусть циклов там нет. Тогда там дерево (нет циклов и  $n-1$  ребро). Оно содержит 2 листа. Один из них — не  $u$ . Обзовём его  $v_1$ . Поскольку мы считаем определек, нам разрешают переставлять строки и столбцы матрицы: давайте возьмём строку  $v_1$ , в ней где-то ровно одна  $\pm 1$ . Переместим строку на первое место, а  $\pm 1$  — в первый столбец, после чего забудем о  $v_1$ . Оставшаяся часть — дерево, в нём есть два листа, один — не  $u$ , возьмём его как  $v_2$ . Так сделаем до посинения, получим нижне-треугольную матрицу с  $\pm 1$  на диагонали.

□

**Утверждение** (Формула Коши — Бине). Пусть  $A$  — матрица  $r \times s$ ,  $B$  — матрица  $s \times r$ ,  $s \geq r$ . Тогда

$$\det(AB) = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_r \leq s} \det A^{[i_1; \dots; i_r]} \det B_{[i_1; \dots; i_r]}$$

Напомним, что  $A^{[i_1; \dots; i_r]}$  — минор матрицы  $A$ , где выбраны столбцы  $i_1; \dots; i_r$ , а  $B_{[i_1; \dots; i_r]}$  — минор  $B$ , где выбраны строки  $i_1; \dots; i_r$ .

Доказывать формулу мы не будем, желающие могут ознакомиться с её доказательством в любом учебнике линейной алгебры.

*Замечание.* Наконец-то докажем **теорему Кирхгофа**. Как и было анонсировано, только для алгебраических дополнений диагональных элементов.

*Доказательство.*

$$\det K_{\mathcal{J}}^{\mathcal{J}} = \det(\vec{B}_{\mathcal{J}} \vec{B}^{T\mathcal{J}}) = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_r \leq n-1} \det \vec{B}_{\mathcal{J}}^{[i_1; \dots; i_{n-1}]} \det \vec{B}^{T\mathcal{J}}_{[i_1; \dots; i_{n-1}]}$$

Ну, и что у нас получается? Мы перебираем все возможные наборы из  $n - 1$  ребра. Если набор соответствует дереву, по лемме 8,  $\det \vec{B}_{\mathcal{J}}^{[i_1; \dots; i_{n-1}]} = \pm 1$ , а значит ровно тому же равно  $\det \vec{B}^{T\mathcal{J}}_{[i_1; \dots; i_{n-1}]}$ , и мы получаем вклад в сумму в виде единицы. Если же дереву рёбра не соответствуют, получаем ноль. Итого именно количество остовных деревьев.  $\square$

### Эйлеровы и гамильтоновы пути и циклы.

**Определение 41.** **Эйлеровым циклом/путём** называется цикл/путь, проходящий по каждому ребру ровно 1 раз.

**Определение 42.** **Гамильтоновым циклом/путём** называется цикл/путь, проходящий по каждой вершине ровно 1 раз.

*Замечание.* С эйлеровым циклом и путём есть простой, линейный по времени алгоритм, который строит эту конструкцию (почитайте АиСД). С гамильтоновым же циклом/путём всё очень плохо. Даже для довольно узких классов графов эта задача NP-полна.

*Замечание.* На существование эйлерова цикла/пути не влияют изолированные вершины, поэтому отсюда и далее во всех утверждениях про эйлеровость будем игнорировать таковые.

**Определение 43.** Граф называется **эйлеровым/полуэйлеровым/гамильтоновым/полугамильтоновым**, когда в нём есть эйлеров цикл/эйлеров путь/гамильтонов путь/гамильтонов цикл.

*Замечание.* Пустые графы могут считаться как эйлеровыми, так и нет. Мы будем когда как.

**Теорема 7.** *Неориентированный связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда степени всех его вершин чётны.*

*Доказательство.* Индукция по количеству рёбер. Если их 0, то в данной теореме мы будем считать такой граф эйлеровым.

*Переход.* Степень каждой вершины 2, значит в графе есть какой-то цикл. Возьмём его, и вырежем из графа все его рёбра. Граф развалится на какие-то компоненты связности, давайте для всех непустых выпишем эйлеров цикл компоненты связности. Склеим эти циклы с вырезанным в начале, получим эйлеров цикл для всего графа.

В обратную сторону очевидно.  $\square$

**Утверждение.** *Граф содержит эйлеров путь тогда и только тогда, когда он связан и в нём не более 2 вершин нечётной степени.*

*Доказательство.* Если вершин нечётной степени 0, разрежем эйлеров цикл по случайной вершине, получим путь. Одна вершина нечётной степени быть не может. Если их две, соединим их, в полученном графе построим цикл, удалим ребро. В доказательстве теоремы об эйлеровом цикле мы не опирались на отсутствие кратных рёбер, так что всё хорошо.

В обратную сторону, опять же, очевидно.  $\square$

**Утверждение.** *Связный граф с  $2k$  вершинами нечётной степени можно разбить на  $\max\{1; k\}$  рёберно-непересекающихся путей рёберно простых путей.*

**Теорема 8.** *Ориентированный слабо связный граф содержит эйлеров цикл, если для любой вершины входящая степень равна исходящей.*

*Доказательство.* Аналогично теореме для неориентированных графов.  $\square$

*Замечание.* Сами сформулируйте аналоги утверждений про эйлеров путь и разбиение на пути для ориентированных графов.

*Замечание.* Отсюда и дальше в критериях гамильтоновости считаем, что наши графы связны и содержат хотя бы 3 вершины.

**Теорема 9** (Теорема Дирака). Пусть  $G$  — связный граф с хотя бы 3 вершинами. Если степень любой его вершины  $\geq \frac{n}{2}$ , то граф гамильтонов.

**Теорема 10** (Теорема Оре). Пусть  $G$  — связный граф с хотя бы 3 вершинами. Если для любых двух его несмежных вершин  $u, v$   $\deg u + \deg v \geq n$ , то граф гамильтонов.

**Теорема 11** (Теорема Хватала). Пусть  $G$  — связный граф с хотя бы 3 вершинами. Пусть его степени вершин —  $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ . Если выполнено условие

$$d_k \leq k < \frac{n}{2} \rightarrow d_{n-k} \geq n - k$$

то  $G$  — гамильтонов.

*Доказательство.* Для начала условие

$$d_k \leq k < \frac{n}{2} \rightarrow d_{n-k} \geq n - k$$

назовём  $(*)$ .

Итак, пусть  $G$  — негамильтонов граф, в котором  $(*)$ .

**Лемма 9.** Пусть  $G$  выполнено  $(*)$ ,  $uv \notin E$ . Тогда  $G \cup \{uv\}$  также  $(*)$ .

*Доказательство.* Пусть мы имели

$$d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$$

Мы увеличили на 1  $d_u$  и  $d_v$ . После пересортировки они переедут после всех вершин, которые имели степень ровно  $d_u/d_v$  соответственно. Давайте заметим, что  $d_i \leq d'_i$ , если трактовать  $i$  как номера. Ну, и хорошо, от этого условия мы как раз и понимаем, что  $(*)$ .  $\square$

Из всех графов, для которых не выполняется теорема Хватала, рассмотрим граф, у которого наименьшее количество вершин, а из всех таких граф с наибольшим количеством рёбер. Во-первых, это не полный граф, иначе граф гамильтонов. Тогда возьмём ребро, которого в графе нет. Пусть это ребро  $uv$ . Очевидно,  $G \cup \{uv\}$  гамильтонов (мы брали максимальное количество рёбер). Давайте тогда выберем не просто  $u, v$ , а такие, что  $\deg u + \deg v$  максимально. Итак,  $G \cup \{uv\}$  гамильтонов, а значит  $G$  — полугамильтонов. Давайте тогда вдоль пути пронумеруем вершины:  $u = u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow \dots \rightarrow u_{n-1} \rightarrow u_n = v$ . Введём множество  $S = \{i \in [1 : n] \mid uu_i \in E\}$ . Понятно, что  $S \subset \{2, 3, \dots, n-1\}$ . Введём множество  $T = \{i \in [1 : n] \mid u_{i-1}v \in E\} \subset \{3, 4, \dots, n\}$ . Понятно,  $|S| = \deg u$ ,  $|T| = \deg v$ . Менее понятно,  $S \cap T = \emptyset$ . Почему так? Если они пересекаются по  $i$ , то есть гамильтонов цикл

$$u \rightarrow u_2 \rightarrow u_3 \rightarrow \dots \rightarrow u_{i-1} \rightarrow v \rightarrow u_{n-1} \rightarrow u_{n-2} \rightarrow \dots \rightarrow u_i \rightarrow u$$

Отсюда  $\deg u + \deg v \leq n - 1$ .

Не умаляя общности давайте считать, что  $\deg u \leq \deg v$ . Тогда  $\deg u = k < \frac{n}{2}$ . Рассмотрим множество вершин  $\{u_{i-1} \mid i \in S\}$ . По условию  $S \cap T = \emptyset$ , для каждой  $u_{i-1}v \notin E$ . Заметим, что степень каждой вершины  $\deg u_{i-1} \leq k$ . А значит, у нас существует хотя бы  $k$  вершин степени  $\leq k$ . Отсюда  $d_k \leq k < \frac{n}{2}$ . По  $(*)$  отсюда следует, что  $d_{n-k} \geq n - k$ . То есть существует хотя бы  $k + 1$  вершина степени  $\geq n - k$  (с номерами от  $n - k$  до  $n$  включительно). А отсюда  $\exists w$   $uw \notin E \wedge \deg w \geq n - k$ . А тогда  $\deg u + \deg w \geq n$  — противоречие с выбором  $v$ .  $\square$

**Теорема 12** (Обратная к теореме Хватала). Если  $n \geq 3$  и  $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$  — последовательность, для которой не выполнено  $(*)$ , то существует негамильтонов граф, для которого  $d_1, \dots, d_n$  являются степенной последовательностью.

*Доказательство данной теоремы оставляется читателю.*

**Теорема 13** (Теорема Гуйа — Ури). *Рассмотрим ориентированный граф. Если для любой вершины её входящая и исходящая степень больше либо равны  $\frac{n}{2}$ , то  $G$  — гамильтонов. Тоже оставляется читателю.*

**Определение 44.** Граф называется турниром, если он является ориентацией полного графа.

**Теорема 14** (Теорема Релея — Камеона). *Любой сильно связный турнир содержит гамильтонов цикл. Также оставляется читателю.*

### Укладки графов. Планарность.

*Замечание.* Концептуально мы рассматриваем достаточно хорошее многообразие и пытаемся уложить на нём граф. «Хорошее» — не надо треугольников Серпинского, непрерывных нигде не гладких многообразий, тороидов с бесконечным числом дырок и т.п. Не очень интересно всё это формализовать, и мы не будем.

**Определение 45.** Пусть  $X$  — «достаточно хорошее» многообразие,  $G$  — граф. Тогда его **вложением** в  $X$  называется отображения  $p: V \rightarrow X$  и  $q: E \rightarrow C_X$  (множество всех кривых в  $X$ ), при этом никакие две кривые, соответствующие рёбрам, не пересекаются кроме как в вершине, и две кривые пересекаются в вершине только тогда, когда они оба инцидентны этой вершине.

**Теорема 15.** *Любой граф вкладываем в  $\mathbb{R}^3$ .*

*Доказательство.* Давайте возьмём случайное расположение вершин и соединим их прямыми. Вероятность пересечения — ноль (как минимум потому, что нам необходимо, чтобы 4 точки лежали в одной плоскости, а у этого нулевая вероятность).  $\square$

*Доказательство.* Давайте расположим вершины по окружности, для каждой вершины  $u$  выделим  $\deg u$  прямых (близких к вертикальной), и если у нас не получается провести ребро в плоскости, на разную высоту будем подниматься (вдоль правильной прямой), и там проводим ребро.  $\square$

**Утверждение.** *Любая замкнутая кривая без самопересечений и самокасаний делит плоскость на две части: конечную и бесконечную.*

**Определение 46.** У условиях предыдущего утверждения конечную часть будем называть **внутренней**, бесконечную — **внешней**.

**Утверждение.** *При наличии замкнутой кривой без самопересечений и самокасаний любые две точки в одной части разбиения можно соединить «достаточно хорошей кривой».*

**Определение 47.** Граф, вложимый в  $\mathbb{R}^2$ , называется **планарным**.

**Определение 48.** Укладка планарного графа называется **плоским графом**.

**Определение 49.** Плоский граф разбивает плоскости на какие-то связные области. Эти области называются **гранями**.

**Теорема 16** (Формула Эйлера). *Пусть в связном планарном графе  $V$  вершин и  $E$  рёбер, а при его укладке на плоскости получилось  $F$  граней. Тогда*

$$V + F - E = 2$$

*Доказательство.* Докажем индукцией по количеству вершин и рёбер. Если у нас 1 вершина и 0 рёбер, то грань там тоже одна.

Пусть у нас не 1 вершина. Если наш граф дерево, у него  $n$  вершин,  $n - 1$  ребро и 1 грань. Если наш граф не дерево, у нас есть хоть один не-мост. Тогда он лежит в цикле, а значит при удалении этого ребра у нас уменьшится количество граней на 1. При этом граф останется связным. Из индукционного предположения  $V + (F - 1) - (E - 1) = 2$ , всё.  $\square$

**Следствие 9.1.** Если планарный граф имеет  $k$  компонент связности,  $V$  вершин,  $E$  рёбер, а при его укладке получилось  $F$  граней, то

$$F + V - E = k + 1$$

**Лемма 10.** Граф  $K_5$  не планарен.

*Доказательство.* Пусть он планарен. Тогда для любой его укладки верна формула Эйлера. То есть уложив его на плоскости, получим  $F = 7$ . Посмотрим на эти грани. Каждая окружается каким-то циклом, а цикл содержит хотя бы 3 ребра. То есть сумма длин циклов вокруг граней больше либо равна 21. С другой стороны, каждое ребро входит в 2 цикла. А значит у нас  $\geq 10.5$  рёбер. Ой.  $\square$

**Утверждение.** В планарном графе  $E \leq 3V - 6$ .

*Доказательство.* В доказательстве предыдущей теоремы мы выяснили, что  $F = 2 - V + E$  и  $2E \geq 2F$ . Отсюда следует то, что мы хотели доказать.  $\square$

**Лемма 11.**  $K_{3,3}$  не планарен.

*Доказательство.* Пусть он планарен. Тогда, для него верна формула Эйлера. То есть уложив его на плоскости, получим  $F = 5$ . Посмотрим на эти грани. Каждая окружается каким-то циклом, а цикл содержит хотя бы 4 ребра, потому что граф двудолен. То есть сумма длин циклов вокруг граней больше либо равна 20. С другой стороны, каждое ребро входит в 2 цикла. А значит у нас  $\geq 10$  рёбер. Ой.  $\square$

*Замечание.* Оказывается, каждый не планарный граф содержит внутри себя  $K_5$  или  $K_{3,3}$ . Но содержит весьма специфичным образом. Сейчас опишем, каким.

**Определение 50.** Граф  $G_1$  гомеоморфен графу  $G_2$ , если  $\exists G_3$  изоморфный  $G_1$  такой что его можно получить из  $G_2$  конечным количеством следующих операций: убрать вершину степени 2 и соединить её соседей либо, наоборот, убрать ребро и заменить его вершиной степени 2, соединённой с концами удалённого ребра.

*Замечание.* Гомеоморфность, на самом деле, — эквивалентность топологический пространств. Как это вообще с графами связано? А вот как:

Граф можно сделать топологическим пространством. У нас вершины будут точками, а рёбра — бесконечно тонкими нитками. И тогда у вершины будет окрестность из маленьких кусочков инцидентных её рёбер, а ещё будут окрестности на ребре. Вот это всё чудо является базой топологии на графах. При этом, очевидно, у нас ничего не меняется в окрестностях, если мы добавляем либо убираем вершину степени 2, а значит в качестве гомеоморфности на графах мы имеем именно то определение, что написано выше.

**Свойство 50.1.** Гомеоморфные графы либо одновременно планарны, либо одновременно нет.

*Доказательство.* Тривиально.  $\square$

**Лемма 12.** Дерево планарно.

*Доказательство.* Подвесим дерево. Теперь сопоставим каждой вершине отрезок вот так: корню соответствует  $[0; 1]$ , для детей берём их родителя и делим его отрезок на столько частей, сколько детей. После этого расположим вершины одного уровня на одной вертикали, а по горизонтали в их отрезок. Нетрудно заметить, что получится плоский граф.  $\square$

**Лемма 13.** Граф планарен тогда и только тогда, когда его можно уложить на сфере.

*Доказательство.* Для начала предъявим гомеоморфизм сферы без точки и плоскости. Возьмём сферу, положим южным полюсом на плоскости, и будем проводить прямые через северный полюс. Они соединяют ещё одну точку сферы с точкой плоскости, вот это и нужное нам отображение. Тривиально, оно непрерывно и биективно (и обратное к нему непрерывно).

Тогда по этой биекции располагаем граф, и получаем то, что мы хотим.  $\square$

**Лемма 14.** Для любой вершины  $u$  существует укладка  $G$  на плоскости, что  $u$  — вершина внешней грани.

*Доказательство.* Уложим граф на сферу, возьмём сферу в руки и повернём сферу так, чтобы верхняя грань содержала  $u$ . Разложим обратно из сферы на плоскости.  $\square$

**Лемма 15.** Для любого ребра  $uv$  существует укладка  $G$  на плоскости, что  $uv$  — ребро внешней грани.

*Доказательство.* Аналогично предыдущему.  $\square$

**Лемма 16.** Граф планарен тогда и только тогда, когда все его компоненты рёберной двусвязности планарны.

*Доказательство.* В одну сторону очевидно, в другую раскладываем по индукции по количеству компонент.

Если компонент одна, понятно, если несколько, уберём ту, которая в дереве мостов — лист. По индукции расположим остаток так, чтобы вершина, к которой соединён мост, оказалась на внешней грани. Соединим с удалённой компонентой рёберной двусвязности.  $\square$

**Лемма 17.** Граф планарен тогда и только тогда, когда все его компоненты вершинной двусвязности планарны.

*Доказательство.* Доказательство. Опять же, в одну сторону очевидно, в другую по индукции. База — очевидно, переход — аналогично.  $\square$

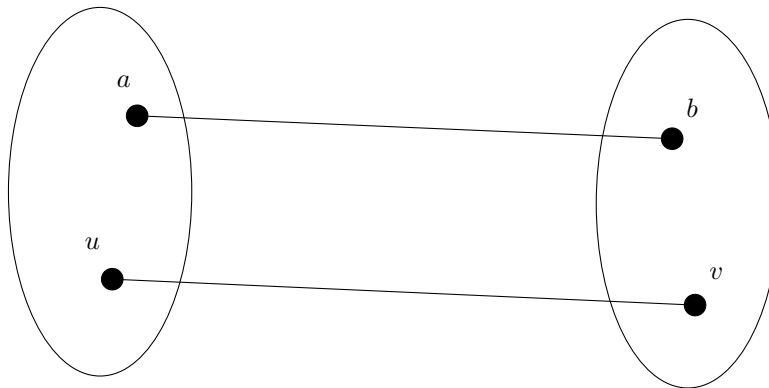
**Теорема 17** (Теорема Понтрягина — Куратовского). Граф планарен тогда и только тогда, когда у него не существует подграфа, гомеоморфного  $K_5$  или  $K_{3,3}$ .

*Доказательство.* Влево очевидно, а вправо придётся страдать.

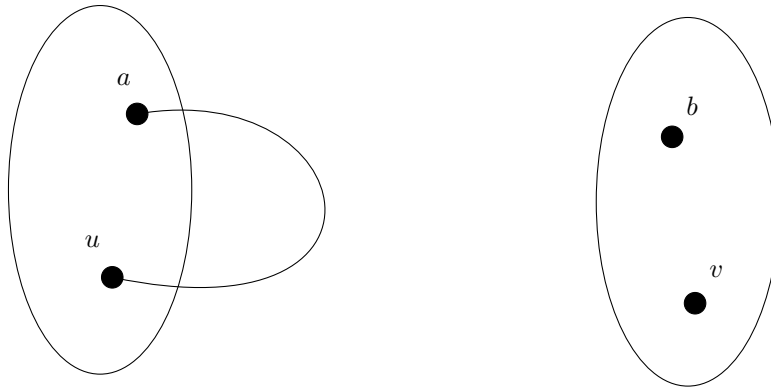
Нам надо доказать, что граф без  $K_5$  и  $K_{3,3}$  планарен. Пусть это не так. Тогда давайте из всех таких графов рассмотрим граф  $G$ , у которого минимальное количество вершин. Если таких несколько, возьмём с минимальным количеством рёбер. Тогда пусть  $uv$  — ребро. При его удалении  $K_5$  или  $K_{3,3}$  не появится, а рёбер станет меньше, значит  $G \setminus uv$  планарен.

**Лемма 18.**  $G \setminus uv$  не содержит мостов и точек сочленения.

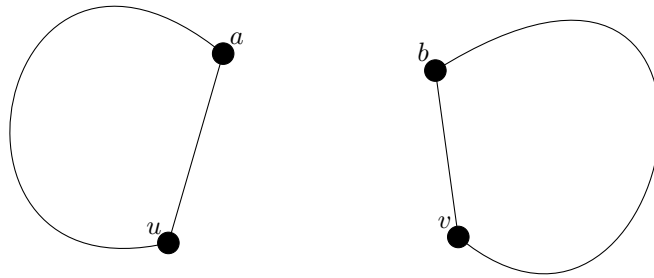
*Доказательство.* Заметим, что по минимальности  $G$  и леммам 16 и 17 сам  $G$  не содержит мостов и точек сочленения. А значит, если  $G \setminus uv$  содержит, то  $u$  и  $v$  лежат в разных компонентах двусвязности. Пусть  $G \setminus uv$  содержит мост  $ab$ .



Тогда сделаем вот такое преобразование:



Утверждается, что каждая из компонент связности (например, левая) не содержит  $K_5$  и  $K_{3,3}$ . Почему? Ну, пусть содержит. Тогда  $au$  — ребро такого подграфа. А давайте вместо него возьмём  $u \rightarrow v \rightsquigarrow b \rightarrow a$  в исходном графе и сожмём в одно ребро (по определению гомеоморфности мы так можем). Получим, что исходный граф тоже содержал  $K_5$  или  $K_{3,3}$ . Поскольку в левой компоненте связности меньше рёбер, чем в  $G$ , она планарна. А значит её можно уложить так, чтобы  $au$  было на внешней грани. То же самое сделаем с правой компонентой связности



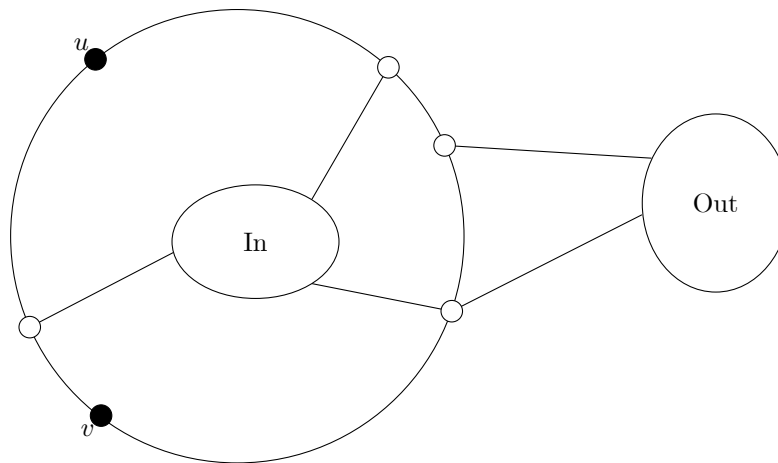
А после этого мы можем удалить обратно добавленные рёбра  $au$  и  $bv$ , но добавить два удалённых ребра  $ab$  и  $uv$ , получив, что исходный граф был планарен, тем самым получив противоречие с наличием моста в  $G \setminus uv$ .

Доказательство отсутствия точек сочленения аналогично. □

Отсюда получается, что  $uv$  лежат на цикле в графе  $G \setminus uv$ . Почему? Потому что возьмём два любых ребра, инцидентных  $u$  и  $v$  соответственно, по лемме эти рёбра вершинно двусвязны, а значит лежат на цикле.

Давайте среди всех циклов, на которых лежат  $uv$  и для всех укладок графа  $G \setminus uv$  на плоскости возьмём тот цикл  $C$  и ту укладку, что внутри  $C$  находится максимальное количество граней. Несмотря на то, что укладок у нас бесконечно много, взять максимум мы можем, потому что граней у нас в принципе конечное число, а значит укладки разбиваются на классы эквивалентности по количеству граней внутри  $C$ .

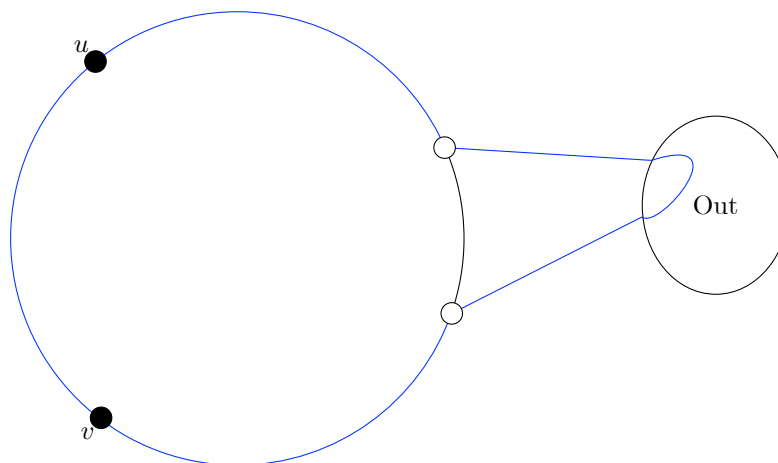
Давайте удалим наш цикл. Что останется от графа? Какие-то компоненты связности. Очевидно, каждая компонента лежит либо полностью внутри цикла, либо полностью вне (иначе рёбра пересекаются). Как они лежат в графе? Ну, как-то так:



Если у нас вершины цикла соединены между собой напрямую, будем считать, что между ними просто внешняя или внутренняя компонента из 0 вершин. Или можно вставить туда вершину степени 2 (у нас же всё работает с точностью до гомеоморфизма). При этом и внешних, и внутренних компонент есть хотя бы одна, иначе  $G$  планарен (мы можем соединить  $u$  и  $v$  либо снаружи, либо внутри ребром). Заметим, что у нас цикл  $C$  мы можем разделить на 2 участка, на 2 пути от  $u$  до  $v$ . На картинке есть левая часть цикла и правая. Так вот,

**Лемма 19.** *Каждая внешняя компонента подсоединяется к циклу ровно в двух точках. Причём эти две точки лежат на разных частях цикла.*

*Доказательство.* В одной не может быть, потому что это точка сочленения. Если не в одной и либо не в двух, либо в двух, но с одной стороны, то две вершины с одной стороны точно есть, а значит в качестве цикла  $C$  мы могли взять вот такой, у которого внутри больше граней.



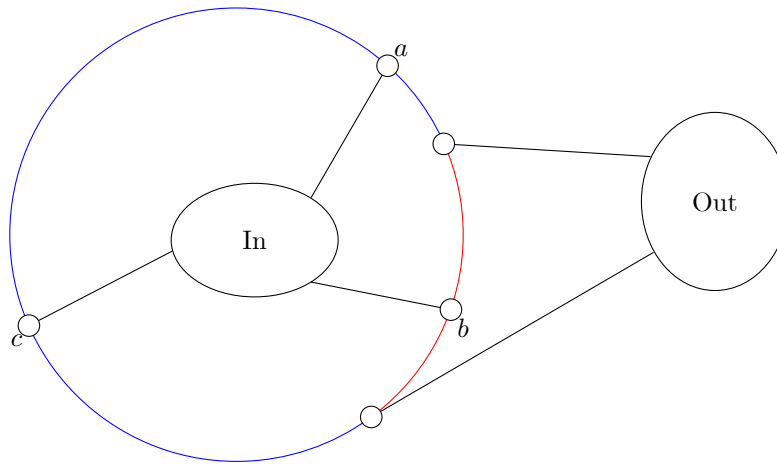
□

А отсюда следует, что на внутренних компонентах есть естественный порядок. Если есть две компоненты, то у одной обе точки присоединения ближе к  $u$ , а у другой — ближе к  $v$ .

А что мы можем сказать про внутренние компоненты? Ну, с ними уже всё не так понятно. Но введём пару определений

**Определение 51.** Будем говорить, что внутренняя часть  $In$  разделяет  $u$  и  $v$ , если у неё существуют две точки подключения по разные стороны цикла  $C$ .

**Определение 52.** Будем говорить, что внутренняя часть  $In$  разделяет внешнюю часть  $Out$ , если у неё существуют две точки подключения, которые находятся по разные стороны цикла  $C$ , где стороны берутся относительно точек подключения  $Out$  (см. картинку).



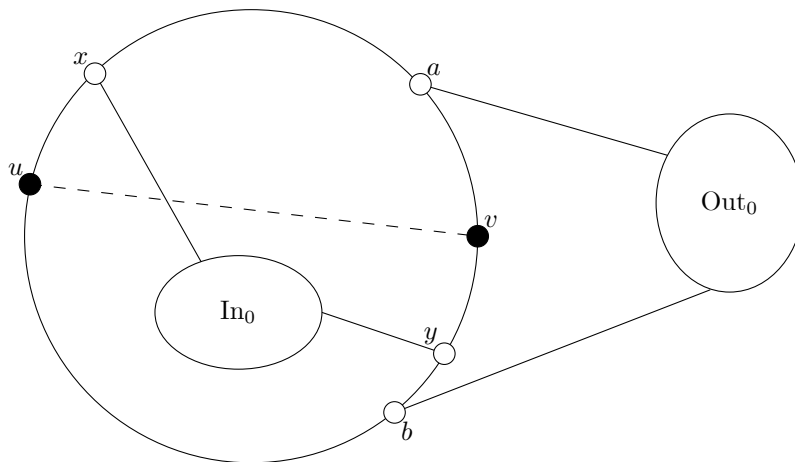
*Пример.* Тут у нас  $In$  разделяет  $Out$ , потому что  $Out$  делит  $C$  на красную и синюю часть. Если были бы только рёбра в  $a$  и  $c$ , то не разделяла бы, а так разделяет, хотя хватило бы и пары рёбер в  $a$  и в  $b$  или в  $b$  и в  $c$ .

*Замечание.* При этом считается, что если точка соединения внутренней и внешней части одна и та же, то это не разделение. Аналогично с разделением  $u$  и  $v$ .

**Лемма 20.** Существует внутренняя часть  $In_0$  и внешняя часть  $Out_0$  такие что  $In_0$  разделяет  $u$  и  $v$  и  $Out_0$ .

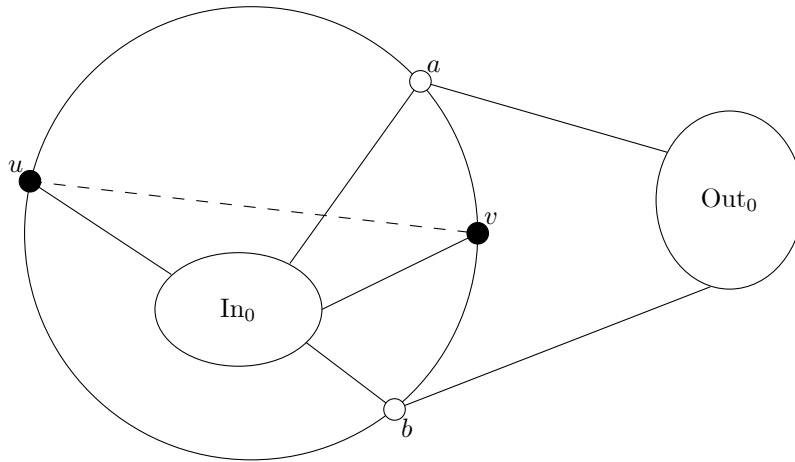
*Доказательство.* Пусть это не так. Тогда рассмотрим любую внутреннюю часть. Она не разделяет ни одну внешнюю, а значит её точки соединения лежат строго между какими-то точками соединения разных внешних частей, а это значит, что её можно превратить во внешнюю, вынеся наружу. После проведения такой операции у нас не останется компонент, разделяющий  $u$  и  $v$ , а значит мы сможем провести ребро между ними. Противоречие.  $\square$

Пусть наша компонента  $Out_0$  подключается в точках  $a$  и  $b$ . А у того, как подключается  $In_0$ , есть варианты. А точнее, получается 12 случаев. Мы рассмотрим два из них, потому что нам лень рассматривать все. Первый:



Ну, тут  $K_{3,3}$  налицо. Первая доля состоит из вершин  $v$ ,  $b$  и  $x$ , вторая — из  $u$ ,  $a$  и  $y$ .

И на самом деле почти во всех случаях мы будем находить  $K_{3,3}$  и только в одном найдём  $K_5$ . случай там такой:



Причём на самом деле  $K_5$  мы найдём не совсем в таком случае. Случай с картинки делится ещё на 2 под-случая: когда внутри  $In_0$  есть вершина, соединённая с  $a$ ,  $b$ ,  $u$  и  $v$  непересекающимися путями, и когда такой нет. И вот когда такая есть, только тогда мы найдём  $K_5$  (собственно, из этой вершины и  $a$ ,  $b$ ,  $u$  и  $v$ ). Если нет, там будет  $K_{3,3}$ .  $\square$

### Раскраски графа.

**Определение 53.** Пусть дан  $G$  — неориентированный граф и отображение  $c: V \rightarrow [1 : k]$ . При этом выполнено условие  $\forall uv \in E \ c(u) \neq c(v)$ . Тогда  $c$  называется **(корректной) раскраской** графа  $G$  в  $k$  цветов.

**Определение 54.**  $k$ -раскрашиваемый граф — граф, который можно покрасить в  $k$  цветов. Также он называется  $k$ -дольным.

**Утверждение.** В планарном графе существует вершина степени  $\leq 5$ .

*Доказательство.* Следует из  $E \leq 3V - 6$ .  $\square$

**Теорема 18.** Любой планарный граф можно раскрасить в 6 цветов.

*Доказательство.* Индукция по числу вершин. База ясно, в переходе удалим вершину степени  $\leq 5$ , покрасим, вернём, останется лишний цвет.  $\square$

**Теорема 19** (Теорема Хивуда). Любой планарный граф можно раскрасить в 5 цветов.

*Доказательство.* Рассмотрим вершину  $u$   $\deg u \leq 5$ . Если  $\deg u < 5$ , мы см. предыдущую теорему. Если среди соседей вершины  $u$  есть не все цвета — тоже. А что есть есть все? Давайте пронумеруем соседей  $u$  по часовой стрелке и перенумеруем цвета в соответствии с этим порядком. Связаны ли 1 и 3 вершина? Если нет, то возьмём все вершины цветов 1 и 3 (связанные с нашей вершиной цвета 3) перекрасим в противоположный цвет. Если же 1 и 3 связаны, то рассмотрим 2 и 4, и сделаем с ними то же самое. 2 и 4 связаны точно быть не могут, им мешает планарность и путь из 1 в 3.  $\square$

**Теорема 20.** Любой планарный граф можно раскрасить в 4 цвета.

*Замечание.* К чему нам нужна раскраска графов? Это напрямую связано с раскрасками карт. Пусть у нас есть какие-то средневековые княжества, никакие 4 границы в одной точке не сходятся, нет анклавов и прочих приколов. И это сейчас у нас куча цветов, а в средние века краски были дороги. И хочется использовать минимум красок.

Понятно, что в 3 нельзя (рассмотрите  $K_4$ ). И во времена Эйлера была сформулирована гипотеза о 4 красках, что всегда можно в 4 цвета. Никто не мог ни доказать, ни опровергнуть. Где-то в середине 20 века был получен следующий результат: существует конечное множество графов, что если каждый из них красится в 4 цвета, то любой граф точно красится. И были оценки на размер этого множества. Дальше во второй половине XX века людям пришла в голову идея построить это множество и перебрать все. В 1976 Апфель и Хакен написали программу, получили 1936 графов, каждый из которых раскрасили. Но научное сообщество знатно охренело, и разгорелся спор о том, насколько это легально вообще. Но в 2005 доказательство было представлено на Coq, и после этого все согласились.

*Замечание.* Остаётся лишь сделать алгоритм проверки графа на то, красится ли он в 3 цвета. Но, увы, даже для планарных графов задача NP-полна.

**Определение 55.**  $p_G(t)$  — количество способов покрасить граф  $G$  в  $t$  цветов — **хроматический полином**.

*Пример.* •  $p_{K_n}(t) = t^n$ .

•  $p_{K_n}(t) = t(t-1)(t-2) \cdots (t-n+1) = t^n$ .

• Пусть  $T$  — дерево. Подвесим дерево, первую вершину красим в  $t$ , остальные в  $t-1$  цвет:  $p_T(t) = t(t-1)^{n-1}$ .

**Теорема 21.** Пусть  $uv \in EG$ . Тогда  $p_G(t) = p_{G \setminus uv}(t) - p_{G/uv}(t)$ .

*Доказательство.* Самое сложное здесь — понять, что такое  $G/uv$ . А это когда вы берёте граф и объединяете  $u$  и  $v$  в одну вершину, к которой теперь идут все рёбра, инцидентные  $u$  или  $v$ . Дальше доказать это очень просто: берём раскраску  $G \setminus uv$ . Она нам либо подходит, либо нет. Когда нет? Когда  $u$  и  $v$  покрашены в один цвет. Ну так это корректная раскраска  $G/uv$ . Все такие раскраски вычтем, получим что хотим.  $\square$

**Теорема 22.**  $p_G(t)$  — многочлен по  $t$ . При этом:

$$p_G(t) = t^n - mt^{n-1} + a_{n-2}t^{n-2} - a_{n-3}t^{n-3} + \cdots \pm a_k t^k$$

где  $k$  — количество компонент связности.

*Доказательство.* Будем вести индукцию по числу вершин и рёбер. В  $G \setminus uv$  на одно ребро меньше, в  $G/uv$  на одну вершину. Если вычесть, мы сразу получим всё, что хотим, кроме компонент связности (а именно степень многочлена, коэффициент при  $t^{n-1}$  и знакочередование). Теперь вопрос в компонентах связности. Если мы сожмём, количество компонент связности не изменится. Если мы уберём ребро, количество компонент связности либо увеличится, либо не изменится. Итого у нас  $a_k$  будет либо как в  $G/uv$ , либо больше.  $\square$

**Следствие 20.1.**  $G$  дерево тогда и только тогда, когда  $p_G(t) = t(t-1)^{n-1}$ .

**Определение 56.** Минимальное число цветов, в которое можно покрасить граф  $G$  называется **хроматическим числом** и обозначается  $\chi_G$ .

**Лемма 21.** Пусть  $G$  — не регулярный граф. Тогда  $\chi(G) \leq \Delta(G)$ .

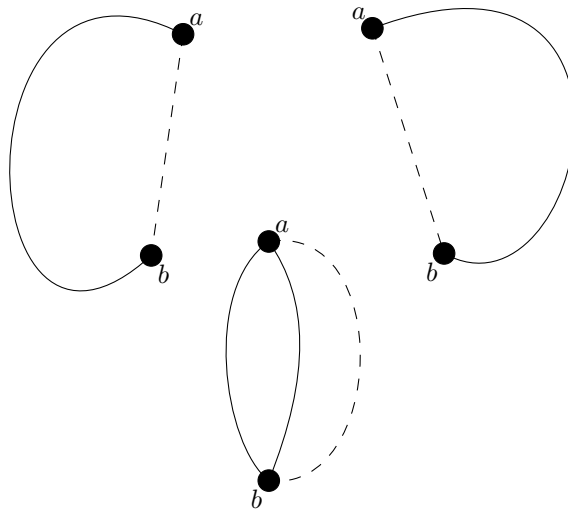
*Доказательство.* Рассмотрим вершину не максимальной степени  $u$ . Если граф не связен, рассмотрим каждую компоненту отдельно. Занумеруем вершины графа в порядке убывания расстояния до  $u$ . Выполним жадную раскраску в этом порядке. У нас на каждом этапе, кроме последнего, будет хотя бы один непокрашенный сосед, а значит в  $\Delta$  цветов можно покрасить. А на последнем этапе мы посмотрим на  $u$ , у неё степень меньше  $\Delta$ , значит тоже можно покрасить.  $\square$

**Определение 57.**  $\kappa(G)$  — минимальное число вершин, которое можно удалить, чтобы  $G$  потерял связность.

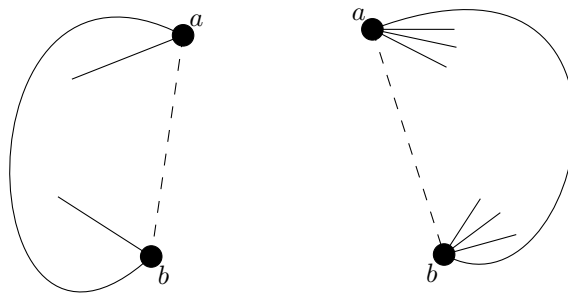
**Теорема 23** (Теорема Брукса). Если  $G$  — не  $K_m$  и не цикл нечётной длины, то  $\chi_G \leq \Delta(G)$ .

*Доказательство.* Рассмотрим несколько случаев.

1. Пусть  $\kappa(G) = 1$ . Тогда у нас есть точка сочленения, расчленим её, покрасим две полученные компоненты связности по лемме (степень точки сочленения изменилась, значит граф перестал быть регулярным), объединив обратно, попутно перенумеровав цвета в одной из компонент.
2. Пусть  $\kappa(G) = 2$ . Тогда у нас есть две вершины, которые мы удаляем ( $a$  и  $b$ ). Если они соединены ребром, сделаем то же самое, что в случае раньше. Если они не соединены ребром, то у нас могут быть проблемы с тем, что у нас в одной раскраске они одного цвета, а в другой — разного. Тогда мы очень хотим добавить ребро  $ab$  во все компоненты связности.



Мы не можем его добавить только если какая-то компонента связности станет регулярной. То есть в одной из них степень всех вершин, кроме  $a$  и  $b$  равна  $\Delta$ , а у  $a$  и  $b$  —  $\Delta - 1$ . Тогда компонент всего две и во второй у  $a$  и  $b$  степень 1.



И тогда если у них общий сосед, можно покрасить их хоть в разные цвета, хоть в 1 (тут мы используем то, что  $\Delta > 2$ ). А если разные соседи, то можно заменить  $b$  на её соседа, они тоже будут разделять вершины, и это предыдущий случай.

3. Пусть  $\kappa(G) > 2$ . То есть удаление никаких двух вершин не разделяет граф. Рассмотрим вершину  $x$ . Какие-то два её соседа не соединены ребром (по неполноте  $G$ ). Назовём их  $a$  и  $b$ . Упорядочим вершины по убыванию расстояния от  $x$  в графе  $G \setminus \{a, b\}$  (он связан из-за  $\kappa(G) > 2$ ). Раскрасим  $a$  и  $b$  в первый цвет, а дальше используем жадную раскраску. У нас не будет проблем ни с  $x$  (у неё два соседа одного цвета), ни с остальными вершинами.

□

**Определение 58.** Инвариантом графа называется некоторая его характеристика, не меняющаяся при изоморфизме.

*Замечание.* И тут уже есть вопросы: можно ли проверять изоморфность быстро? С одной стороны, мы не умеем делать это полиномиально, но и доказывать NP-полноту также не умеем (более того, предположив её NP-полноту, получим очень сомнительные (но не факт, что неверные) следствия).

### Паросочетания.

**Определение 59.** Паросочетанием в графе называется множество рёбер, такое что никакие два не имеют общую вершину. **Размером паросочетания** называется количество его рёбер. Размер максимального паросочетания обозначается  $\alpha'(G)$ .

**Определение 60.** Независимым множеством или **антикликой** в графе называется множество вершин, такое что никакие две не соединены ребром. Размер максимальной антиклики обозначается  $\alpha(G)$ .

**Определение 61.** Вершинным покрытием графа называется множество вершин, такое что хотя бы один из концов любого ребра лежит в нём. Размер минимального вершинного покрытия обозначается  $\beta(G)$ .

**Определение 62.** Рёберным покрытием графа называется множество рёбер, такое что каждая вершина инцидентна хотя бы одному ребру. Размер минимального вершинного покрытия обозначается  $\beta'(G)$ .

**Определение 63.** Вершинным доминирующим множеством графа называется такое множество вершин, что любая вершина либо лежит в нём, либо имеет соседа в этом множестве. Размер минимального вершинного доминирующего множества обозначается  $\gamma(G)$ .

**Определение 64.** Рёберным доминирующим множеством графа называется такое множество рёбер, что любое ребро либо лежит в нём, либо имеет общую вершину с каким-то ребром множества. Размер минимального рёберного доминирующего множества обозначается  $\gamma'(G)$ .

**Утверждение.**  $\alpha(G) + \beta(G) = n$

*Доказательство.* Очевидно, если  $A$  — независимое множество, то  $V \setminus A$  — вершинное покрытие. □

**Определение 65.** Вершина называется **покрытой** паросочетанием, если в паросочетании есть ребро с концом в ней. Иначе вершина называется **свободной**.

**Определение 66.** Паросочетание называется **совершенным** или **полным**, если оно покрывает все вершины.

*Замечание.* Чтобы в графе существовало совершенное паросочетание необходимо, чтобы количество вершин было чётно. Но, разумеется, не достаточно.

**Теорема 24** (Критерий Татта). *Граф  $G$  содержит совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда  $\forall A \subset V |A| \geq \text{количество нечётных компонент связности } G \setminus A$ . Далее количество нечётных компонент называется odd.*

*Замечание.* Практического применения у этой теоремы маловато будет в силу количества подмножеств.

*Замечание.* Перед доказательством обсудим, как выглядит хог двух паросочетаний. Это граф, в котором степень каждой вершины не больше двух. Ноль — когда вершина не была ни в одном, либо в обоих имело одно ребро в паросочетании. Один — когда вершина была только в одном паросочетании. Два — когда имела два разных ребра в разных паросочетаниях.

При этом если оба паросочетания были полны, у нас убирается вариант 1. И получается, что граф состоит из циклов и изолированных вершин.

*Доказательство.* Когда мы удалим  $A$  у нас какие-то пары останутся, какие-то удалятся, а у каких-то мыотрежем одну вершину из паросочетания. А значит нечётные компоненты связности должны были соединяться с  $A$ . Причём все с различными вершинами. Это доказательство право.

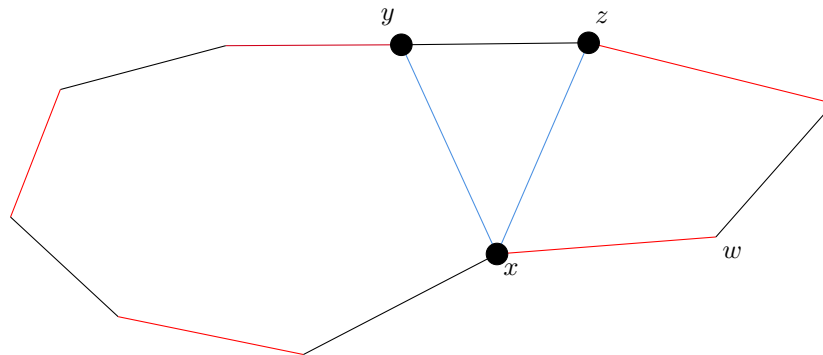
Теперь влево. Предположим, что совершенного паросочетания нет, но условие выполнено (назовём условие  $(*)$ ). Выберем из всех таких графов граф с минимальным числом вершин, а из всех с одинаковым количеством вершин — с максимальным числом рёбер. Заметим, что проведение нового ребра не нарушает  $(*)$ , а значит если  $uv \notin E$ , то  $G \cup \{uv\}$  содержит совершенное паросочетание. Заметим, что  $G$  не полон (в силу  $(*)$  и отсутствия паросочетания). А значит существует ребро  $uv \notin E$ .

Выберем  $U$  — множество вершин степени  $n - 1$ .

**Лемма 22.** Все компоненты связности  $G \setminus U$  — полный граф.

*Доказательство.* Предположим, что это не так. Значит в  $G \setminus U$  есть компонента — не полный граф. Там хотя бы 3 вершины. Из одного из случаев теоремы Брукса в неполном графе есть вершина  $x$  с двумя несоединёнными соседями:  $y$  и  $z$ . При этом  $x \notin U$ , а значит  $x$  не соединена с какой-то вершиной  $w$ . При этом если мы добавим  $yz$ , то граф будет содержать совершенное паросочетание ( $M_1$ ). Аналогично, при добавлении  $wz$  получается граф с совершенным паросочетанием  $M_2$ . Каждое из них содержит соответствующее ребро. Когда мы видим два паросочетания, хочется сделать им хог. Паросочетания точно разные и оба совершенные, значит  $M_1 \oplus M_2$  содержит изолированные вершины и циклы. Дальше есть два варианта:

1.  $xw$  и  $yz$  лежат в разных циклах ( $C_1$  и  $C_2$  соответственно). Тогда взяв  $M_1 \oplus C_2$ , получим совершенное паросочетание исходного графа.
2. Если  $xw$  и  $yz$  лежат в одном цикле



Тогда на правой половине этого цикла возьмём чёрные рёбра, в левой — красные. И ещё возьмём ребро  $xz$ . Ещё у нас может быть отражённая картинка, нам пришлось бы брать  $yx$ .

В любом случае получаем противоречие. □

Когда у нас есть лемма, подставим  $U$  в  $(*)$ . Тогда мы удалим  $U$  и у нас останется набор полных графов. В полных чётного размера возьмём совершенное паросочетание, в нечётных — полное без одной вершины. По  $(*)$  в  $U$  хотя бы столько вершин, сколько надо, да ещё и каждая связана со всеми вершинами, а значит паросочетание можно дополнить до совершенного. □

**Определение 67.** Множеством Татта называется  $A \subset V \mid |A| < \text{odd}(G \setminus A)$ .

*Замечание.* Множества Татта могут быть разными. Хочется узнать, влияет ли на что-то его «таттовость».

**Теорема 25** (Теорема Бержа).  $n - 2\alpha'(G) = \max_{A \subset V} (\text{odd}(G \setminus A) - |A|)$

*Доказательство.* Если максимум равен нулю, см. теорему Татта. Иначе обозначит правую часть за  $k$ . Давайте рассмотрим  $G + K_k$  (соединение всех вершин  $G$  и  $K_k$  «каждая с каждой»). Докажем, что для  $G + K_k$  выполнен критерий Татта. Ну, возьмём  $A \subset G + K_k$ . Дальше случаи

1.  $A$  пусто. Пусть исходно максимум достигался на каком-то множестве  $S$ . Пусть

$$n' = n + \text{odd}(G \setminus S) - |S| \equiv n + \text{odd}(G \setminus S) + |S| \pmod{2} \sum_{S_i \text{ — компонента связности } G \setminus S} (|S_i| \% 2) + S \% 2 + \text{odd}(G \setminus S) \% 2 + |S| \% 2$$

Это делится на 2.

2.  $K_k \not\subset A$ . Тогда  $G + K_k \setminus A$  связан. Если он чётен, мы победили, иначе, если в силу непустоты  $A$  — тоже.
3.  $K_k \subset A$ . Тогда

$$\text{odd}(G + K_k \setminus A) = \text{odd}(G \setminus (A \setminus K_k)) \leq |A \setminus K_k| + k = |A| - k + k = |A|$$

Действительно, выполнен. А значит в  $G + K_k$  есть совершенное паросочетание. Когда мы удалим  $K_k$  обратно, мы получим, что в  $G + K_k$  есть паросочетание на  $n - 2k$  вершин. Это даёт нам оценку на равенство, а пример следует напрямую из теоремы Татта.  $\square$

**Определение 68.** Дефицитом графа называется величина справа в теореме Бержа.

*Замечание.* Давайте поговорим о графах с нечётным числом вершин. У них от природы не бывает совершенного паросочетания. Хочется с этим что-то делать.

**Определение 69.**  $G$  называется фактор-критическим, если  $\forall u \in V \ G \setminus u$  содержит совершенное паросочетание

*Замечание.* Кто такой этот фактор?

**Определение 70.** Пусть  $V = \{u_1; u_2; \dots; u_n\}$ ,  $f_1, f_2, \dots, f_n \in \mathbb{N}$ . Тогда  $f$ -фактором графа называется граф из тех же вершин с  $\deg u_i = f_i$ .  $(d, d, d, \dots, d)$ -фактор называется  $d$ -фактором.

*Пример.* Например, паросочетание — 1-фактор.

**Утверждение.** Гамильтонов граф с нечётным числом вершин является фактор-критическим.

*Доказательство.* Удалим случайную вершину, паросочетание сделаем из рёбер цикла.  $\square$

**Утверждение.** Граф является фактор-критическим тогда и только тогда, когда  $\forall u \in V \ \alpha'(G \setminus u) = \alpha'(G)$ .

*Доказательство.* Вправо понятно, докажем влево. Воспользуемся формулой Бержа:

$$n - 2\alpha'(G) = \max_{A \subset V} (\text{odd}(G \setminus A) - |A|)$$

Пусть  $A$  — множество, на котором достигается максимум в формуле Бержа. Дальше случаи:

1. Если  $A = \emptyset$ , то  $\text{odd}(G \setminus A) \leq 1$ , а значит  $\alpha' = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ .

2. Пусть  $A \neq \emptyset$ . Рассмотрим  $v \in A$ . Пусть  $G' = G \setminus v$ ,  $A' = A \setminus v$ . Известно, что  $\alpha'(G) = \alpha'(G')$ . Тогда верно следующее

$$\begin{aligned} n - 2\alpha'(G) &= \text{odd}(G \setminus A) - |A| \\ n - 1 - 2\alpha'(G') &= \text{odd}(\underbrace{G' \setminus A'}_{=G \setminus A}) - |A'| \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $2 = 0$ , противоречие.

□

**Следствие 22.1.** Единственное множество Татта фактор-критического графа — пустое.

*Замечание.* Давайте теперь вот каким вопросом зададимся: как в графе выглядят все максимальные паросочетания? Оказывается, любой граф делится на 3 части  $(C, A, D)$  такие, что

1.  $\forall u \in D$  существует максимальное паросочетание, не покрывающее  $u$ .
2.  $A$  — соседи  $D$ .
3.  $C$  — все остальные.

Но это понятно, что так можно разделить. Но что интересно, эти множества обладают интересными свойствами:

1.  $C$  содержит полное паросочетание.
2. Все вершины  $A$  покрыты рёбрами любого максимального паросочетания.
3.  $D$  — набор фактор-критических графов. Причём все максимальные паросочетания  $G$  выделяют в каждом из этих графов почти максимальное паросочетание.

**Определение 71.** То, что написано в заметке выше — **декомпозиция Эдмондса — Галлаи**: Рассмотрим граф  $G$ . Пусть

$$D(G) = \{u \in V \mid \exists \text{ максимальное паросочетание, не покрывающее } u\}$$

$$A(G) = \{u \notin D \mid \exists v \in D \text{ } uv \in E\}$$

$$C(G) = V \setminus (A \cup D)$$

**Лемма 23** (Лемма о стабильности). Пусть  $a \in A(G)$ . Тогда

$$\begin{array}{ll} \bullet & D(G \setminus a) = D(G) \\ \bullet & A(G \setminus a) = A(G) \setminus a \\ \bullet & C(G \setminus a) = C(G) \\ \bullet & \alpha'(G \setminus a) = \alpha'(G) - 1 \end{array}$$

*Замечание.* Это чудо можно применить по очереди ко всем вершинам  $A$  и получить те свойства, что мы описывали в заметке выше.

*Доказательство.* Известно, что

$$\alpha'(G) - 1 \leq \alpha'(G \setminus a) \leq \alpha'(G)$$

В последнем равенство невозможно, потому что  $a \notin D$ , а значит любое максимальное паросочетание покрывает  $a$ , отсюда верно равенство в первом неравенстве.

Докажем, что  $D(G \setminus a) = D(G)$ . Для этого докажем двойное включение.

- $D(G) \subset D(G \setminus a)$ .

Рассмотрим  $u \in D(G)$ . Существует  $M_u$  — максимальное паросочетание, не покрывающее  $u$ . Пусть  $ab \in M_u$ , но тогда  $M_u \setminus ab$  — максимальное паросочетание в  $G \setminus a$ , не покрывающее  $u$ . Всё.

- $D(G) \supset D(G \setminus a)$ .

Рассмотрим  $u \in D(G \setminus a)$ . Существует максимальное паросочетание  $M'_u$  в  $G \setminus a$ , не покрывающее  $u$ . Пусть  $w$  — сосед  $a$  в  $D$ . Пусть  $w$  — сосед  $a$  в  $D$ . Существует максимальное паросочетание  $M_w$  в  $G$ , не покрывающее  $w$ . Если оно не покрывает  $u$ ,  $u \in D(G)$ , а значит мы доказали. Пусть не покрывает. Рассмотрим  $M_w \oplus M'_u$ .

$M'_u$  не покрывает  $u$ .  $M'_u$  не покрывает  $a$  ( $M'_u$  — паросочетание  $G \setminus a$ ).  $w$  не покрыто  $M_w$ .

Рассмотрим второй конец пути  $u$ . Если там не  $a$  и не ребро  $M_w$ ,  $M'_u$  — не максимально.

Если второй конец пути  $u$  — ребро  $M_w$ ,  $M_w$  можно инвертировать, получив паросочетание, не покрывающее  $u$ , следовательно  $u \in D(G)$ .

Остаётся случай, когда наши два пути — один путь (с концами  $a$  и  $u$ ). Но тогда мы знаем, что  $w$  не покрыт  $M_w$ , а значит можно добавить ребро  $wa$  и перекинуть рёбра паросочетаний, получив то же самое, что в случае выше.

Отсюда очевидно следует, что  $A(G \setminus a) = A(G) \setminus a$  и  $C(G \setminus a) = C(G)$ .  $\square$

**Теорема 26** (Структурная теорема Эдмондса — Галлаи). Пусть  $M$  — максимальное паросочетание  $G$ . Тогда

1.  $M$  индуцирует совершенное паросочетание в  $C$ .
2. Компоненты связности  $D$  — фактор-критические графы, в каждом из которых  $M$  индуцирует почти полное паросочетание.
3. Рёбра  $M$  соединяют все вершины  $A$  с какими-то вершинами из разных компонент  $D$ .

*Доказательство.* Рассмотрим  $a \in A$ . Она покрыта  $ab \in M$ .  $M \setminus ab$  — максимальное паросочетание  $G \setminus a$  по лемме о стабильности. Тогда  $b \in D$ . Сделаем так для всех вершин  $A$ .

Что останется? Максимальное паросочетание  $M'$  в  $G \setminus A$ . Причём  $C(G \setminus A) = C(G)$ ,  $D(G \setminus A) = D(G)$ . Раз все вершины  $C$  покрыты (и  $A(G \setminus A) = \emptyset$ ), там  $M'$  индуцирует совершенное паросочетание в  $C$ , а значит и  $M$  — тоже.

Теперь рассмотрим  $D_i$  — компоненту связности  $D$ .  $M'$  на  $D_i$  индуцирует какое-то паросочетание  $M'_i$ . При этом для любой вершины существует максимальное паросочетание, не покрывающее её, а значит  $\forall u \in D_i$   $\alpha'(D_i \setminus u) = \alpha'(D_i)$ , следовательно  $D_i$  — фактор-критическое. При этом  $M'_i$  покрывает в  $D_i$  все вершины, кроме одной.  $\square$

**Следствие 23.1.**  $A$  является множеством Татта, причём таким, на котором достигается дефицит графа.

*Доказательство.* Сколько нечётных компонент у нас останется в  $G \setminus A$ ? Ну, столько, сколько компонент всего в  $D$ . А все вершины  $A$  были в максимальном паросочетании.  $\square$

## 2 Случайные графы.

*Замечание.* Пусть у нас происходит что-то, что зависит от параметра  $p$ . И в зависимости от него происходит то, что мы наблюдаем. Типа у нас есть дорога и с какой-то вероятностью пешеход её перебегает. И кажется, что результаты выборы мэра не зависят от этой вероятности. С другой стороны, если на этой дороге часто случаются происшествия, то на выборы это может повлиять. Более того, дорог у нас может быть несколько (скажем,  $n$ ). И давайте рассмотрим эту вероятность как зависящую от  $n$ . Так вот вообще имеет место такой факт: оказывается, что пока вероятность элементарных исходов мала (типа  $\frac{1}{n^3}$  или  $\frac{1}{n^2}$ ), вероятность исходного события асимптотически ноль. А потом есть какая-то пороговая функция, после которой вероятность становится асимптотически равной 1. Пусть это, например,  $\frac{1}{n\sqrt{n}}$ . Так вот можно же взять семейство функций  $\frac{c}{n\sqrt{n}}$ , и тогда при каком-то конкретном  $c$  будет скачок от 0 в 1.

И вот такая штука наблюдается в очень многих физических или химических явлениях. Почему так — это какой-то метавопрос, а у нас тут математика. Но мы всё же рассмотрим некоторые системы. Существуют разные модели случайных графов, мы будем рассматривать модель Эрдёша — Реньи.

**Определение 1.** Дан неориентированный (простой) граф с  $n$  вершинами. При этом для любой неориентированной пары вершин  $\{u; v\}$  ребро между ними есть с вероятностью  $p(n)$  (не зависящей от  $u$  и  $v$ ).

Мы имеем вероятностное пространство, элементарными событиями которого являются помеченные графы на  $n$  вершин. И у графа с  $m$  рёбрами вероятность его равна  $p^m(1-p)^{\binom{n}{2}-m}$ . Такое пространство обозначается  $G(n; p)$ .

*Замечание.* И это чудо мы будем рассматривать при  $n \rightarrow \infty$ .

**Определение 2.** Говорят, что  $A \subset G(n; p)$  **асимптотически почти, наверное, выполнено** (а.п.н. выполнено), если его вероятность стремится к 1.

**Определение 3.** Говорят, что  $A \subset G(n; p)$  **асимптотически почти, наверное, не выполнено** (а.п.н. не выполнено), если его вероятность стремится к 0.

*Пример.* Что будет, если мы выберем  $p(n) = \frac{1}{n^3}$ ? Давайте посчитаем ожидание количества рёбер:

$$Em = \sum_{\{u; v\}} P(uv \in EG) = \binom{n}{2} \frac{1}{n^3} = O\left(\frac{1}{n}\right) = o(1)$$

*Замечание.* То есть мы а.п.н. получим пустой граф.

*Пример.* Давайте в предыдущем же примере посчитаем  $P(m \geq 1)$ . Для этого вспомним хвостовое неравенство Маркова:

*Утверждение.* Пусть  $\xi$  — случайная величина, принимающая неотрицательные значения. Тогда

$$P(\xi \geq cE\xi) \leq \frac{1}{c}$$

Эквивалентно

$$P(\xi \geq d) \leq \frac{E\xi}{d}$$

В нашем случае  $d = 1$ . То есть

$$P(m \geq 1) \leq Em = O\left(\frac{1}{n}\right) = o(1)$$

То есть  $P(m = 0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ .

*Замечание.* Дальше нам будет впадлу писать  $p(n)$ , мы просто будем писать  $p$ .

*Пример.* Распишем в общем случае:

$$Em = \sum_{\{u; v\}} P(uv \in EG) = \binom{n}{2} p = \Theta(n^2 p)$$

В частности, для  $p = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$  снова получаем пустые графы.

*Пример.* Посмотрим другую сторону:  $p = \frac{1}{n}$ . Тогда

$$P(m = 0) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\binom{n}{2}} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n \frac{n-1}{2}} \rightarrow e^{-\frac{n-1}{2}} \rightarrow 0$$

Не у нас два предельных перехода, но пофиг, в любом случае ноль. Давайте теперь в общем случае

$$P(m=0) = (1-p) \binom{n}{2} = (1-p)^{n \frac{n-1}{2}}$$

Ну, когда  $p$  константа, жить неинтересно, это очень быстро стремится к нулю. Поэтому давайте считать, что  $p$  — бесконечно малая. Тогда

$$P(m=0) = (1-p)^{n \frac{n-1}{2}} \sim e^{-\frac{n^2 p}{2}}$$

Чтобы это было  $o(1)$ , нам надо, чтобы  $n^2 p = \omega(1)$  (строгая верхняя оценка).

*Замечание.* Вот, пожалуйста, тот самый порог. Если  $p$  меньше  $\frac{1}{n^2}$ , у нас а.п.н. нет рёбер в графе, а если больше — у нас а.п.н. есть ребро.

Понятно, что когда у нас  $p$  — функция, близкая к  $\frac{1}{n^2}$  (с любой стороны), у нас в асимптотических оценках константа  $N_0$  будет совершенно ебейшей.

*Пример.* Ну, хорошо. А теперь давайте посмотрим на пороговые функции  $p = \frac{c}{n^2}$ :

$$P(m=0) = (1-p) \binom{n}{2} = (1-p)^{n \frac{n-1}{2}} \sim e^{-\frac{c}{2}}$$

При  $c = 0$  это единица (что логично). Но дальше мы не наблюдаем порога. В  $c = \frac{1}{2}$  мы достигаем  $P(m=0) = \frac{1}{e}$ , и у нас медленно при увеличении  $c$  наша функция  $P(m=0)$  плавно возрастает. Поэтому у события «иметь ребро» есть **асимптотический порог**, но **строгого порога** нет.

*Пример.* Что ж, давайте теперь рассмотрим более интересное событие  $A$ : в графе есть треугольник:

$$\exists u, v, w \quad uv \in EG \wedge uw \in EG \wedge vw \in EG$$

**Определение 4.**  $A \subset G(n; p)$  называется **монотонным свойством**, если при дополнении любого ребра к любому графу  $A$ , он будет лежать в  $A$ .

**Утверждение.** Так вот оказывается, что у любого монотонного свойства есть асимптотический порог.

*Но докажем мы это потом.*

*Пример.* Итак, идём к треугольникам. Пусть  $\xi$  — случайная величина, равная количеству треугольников в графе. Чему равно её ожидание?

$$E\xi = \sum_{u,v,w} p^3 = \binom{n}{3} p^3 \sim n^2 p^3$$

Отсюда, если  $p = o\left(\frac{1}{n}\right)$ , то  $E\xi = o(1)$ , следовательно  $P(\xi \geq 1) \leq E\xi = o(1)$  а значит а.п.н. треугольников нет.

*Замечание.* То, что мы провернули в примере выше, называется **методом первого момента**:

Если у нас  $A \subset G(n; p)$  состоит из графов, у которых есть подграф со специальным свойством (такие ещё «гаджетами» называют), то мы можем взять  $\xi$  — количество таких подграфов. И если  $E\xi = o(1)$ , то  $A$  а.п.н. равна нулю.

*Пример.* Ну что ж. Что мы имеем, если  $p = \omega\left(\frac{1}{n}\right)$ ? Да хрен его знает. Ну то есть да, мы знаем, что  $E\xi \rightarrow \infty$ , но отсюда совсем не следует, что  $P(\xi = 0) = o(1)$ . Например, если мы возьмём

$$\xi: \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{N} \quad p(1) = p(0) = \frac{1}{2} \quad \xi(0) = 0, \xi(1) = n$$

И тут  $E\xi = \frac{n}{2}$ , но  $P(\xi > 0) = \frac{1}{2}$ . Ой.

*Замечание.* И тут имеется **метод второго момента**.

$$]M_2\xi = E\xi^2$$

Рассмотрим неравенство Чебышёва:

$$P((\xi - E\xi)^2 \geq cE(\xi - E\xi)^2) \leq \frac{1}{c}$$

Или

$$P(|\xi - E\xi| \geq \sqrt{cD\xi}) \leq \frac{1}{c}$$

Взяв  $d = \sqrt{cD\xi}$ , получим

$$P(|\xi - E\xi| \geq d) \leq \frac{D\xi}{d^2}$$

Пусть  $d = E\xi$ :

$$P(\xi = 0) \leq P(|\xi - E\xi| \geq E\xi) \leq \frac{D\xi}{(E\xi)^2}$$

То есть

$$P(\xi = 0) \leq \frac{E\xi^2 - (E\xi)^2}{(E\xi)^2} = \frac{E\xi^2}{(E\xi)^2} - 1$$

При этом если мы докажем

$$E\xi^2 = (E\xi)^2(1 + o(1))$$

То получим

$$P(\xi = 0) \leq 1 + o(1) - 1 = o(1)$$

И тогда действительно будет верно, что, а.п.н.  $\xi \neq 0$ .

*Замечание.* Почему у нас так всё хорошо было с рёбрами? А потому что раскрыв количество рёбер через характеристические случайные величины, мы получим, что все они независимы, поэтому у нас всё легко и просто раскроется.

*Пример.* Пусть  $T_{uvw}$  — случайная величина, равная количеству треугольников на  $u, v, w$  (то есть 0 или 1). Тогда

$$E\xi^2 = \left( \sum_{u,v,w} T_{uvw} \right)^2 = \sum_{u,v,w} T_{uvw}^2 + \sum_{\substack{u,v,w \\ a,b,c}} T_{uvw} T_{abc}$$

$T_{uvw}^2 = T_{uvw}$ , это понятно. А что с  $T_{uvw} T_{abc}$ ? Если это 6 разных вершин, то мы можем выбрать такие вершины  $\binom{n}{6} \binom{6}{3}$  способами и нам надо вероятность  $p^6$ . Если  $xyz$  и  $abc$  пересекаются по одной вершине, то получаем  $\binom{n}{5}$  способов их выбрать на 5 способов выбрать повторяющуюся и  $\binom{4}{2}$  способов расписать оставшиеся. И  $p^6$  вероятность 6 рёбер. И если треугольники пересекаются по 2 вершинам, то имеем  $\binom{n}{4} \binom{4}{2} 2p^5$ .

$$\begin{aligned} E\xi^2 &= \sum_{u,v,w} T_{uvw}^2 + \sum_{\substack{u,v,w \\ a,b,c}} T_{uvw} T_{abc} = E\xi + \binom{n}{6} \binom{6}{3} p^6 + \binom{n}{5} 5 \binom{4}{2} p^6 + \binom{n}{4} \binom{4}{2} 2p^5 \sim \\ &\sim E\xi + \frac{n^6 6!}{6! 3! 3!} p^6 + \alpha n^5 p^6 + \beta n^4 p^5 = (E\xi)^2 \left( \frac{1}{E\xi} \overset{0}{\nearrow} + 1 + \alpha' \frac{1}{n} \overset{0}{\nearrow} + \beta' \frac{1}{n^2 p} \overset{0}{\nearrow} \right) \end{aligned}$$

Да, выполнено условие вторых моментов, значит всё хорошо.

Мы тут использовали, что:

$$E\xi = \binom{n}{3} p^3 \sim \frac{n^3}{6} p^3 \implies (E\xi)^2 = \frac{n^6}{6^2} p^6$$

*Пример.* Давайте вот какое свойство теперь изучать: граф имеет диаметр 2. Диаметр — максимальное кратчайшее расстояние между 2 вершинами (т.е. диаметр 2 — когда каждая пара вершин связана ребром или имеет общего соседа).

Давайте искать гаджет. Что считать им? Ну, давайте считать таковым несоединённую пару вершин без общего соседа. Пусть  $\xi$  — количество таких пар вершин, а  $\xi_{uv}$  — индикатор того, является ли пара вершин  $u; v$  таковой. Тогда

$$P(\xi_{uv} = 1) = (1-p) \prod_{i=1}^{n-2} (1-p^2) = (1-p)(1-p^2)^{n-2}$$

То есть

$$E\xi = \binom{n}{2} (1-p)(1-p^2)^{n-2}$$

Хочется, чтобы это стремилось к нулю. Для начала хуй забьём на  $n-2$  и будем считать, что там  $n$  (скорее всего,  $p$  к нулю стремится, иначе не интересно). И  $\binom{n}{2}$  будем считать равным  $n^2$ . Ещё  $1-p$ , очевидно, к делу не относится. Тогда

$$n^2(1-p^2)^n \sim n^2 (1-p^2)^{\frac{1}{p^2}np^2} \sim n^2 e^{-np^2} = e^{2\ln n - np^2}$$

Чтобы это стремилось к нулю, нужно, чтобы показатель стремился к  $-\infty$ . Для этого нужно как минимум

$$np^2 > 2\ln n \Leftrightarrow p^2 > \frac{2\ln n}{n} \Leftrightarrow p > \sqrt{\frac{2\ln n}{n}}$$

На самом деле, эта штука — строгий порог. Но пока мы это не доказали.

**Теорема 1.** Если  $p = \omega\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right)$  или  $p = \sqrt{\frac{c\ln n}{n}}$ , где  $c > 2$ , то  $G$  а.п.н. имеет диаметр  $\leq 2$ .

Если  $p = o\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right)$  или  $p = \sqrt{\frac{c\ln n}{n}}$ , где  $c < 2$ , то  $G$  а.п.н. имеет диаметр  $> 2$ .

*Замечание.* Если  $p = \sqrt{\frac{2\ln n}{n}} + o\left(\sqrt{\frac{2\ln n}{n}}\right)$ , то вероятность того, что граф имеет диаметр 2, равна некоторой константе, но это мы доказывать не будем.

*Доказательство.* Первое докажем только для  $p = \sqrt{\frac{c\ln n}{n}}$ , где  $c > 2$ ,  $p = \omega\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right)$  получится по монотонности. Так вот, тут у нас точно  $p = o(1)$ , и то, что мы предполагали выше, хорошо.

$$E\xi \approx e^{2\ln n - c\ln n} = e^{(2-c)\ln n} \rightarrow 0$$

Что ж. Теперь второе.

$$E\xi \approx e^{2\ln n - c\ln n} = e^{(2-c)\ln n} \rightarrow +\infty$$

Но этого не хватает, надо дисперсию считать. Более того, так заглубить ожидание, как мы заглубили его раньше, нельзя. А точнее, нам надо  $1 + o(1)$ , а не  $O(1)$ , поэтому вернём обратно  $\binom{n}{2}$ , точнее, заменим на  $\frac{n^2}{2}$  вместо  $n^2$ .

$$\begin{aligned} E\xi^2 &= E\left(\sum_{u,v} \xi_{uv}\right) = \underbrace{\sum_{u,v} \xi_{uv}^2}_{E\xi} + \underbrace{\sum_{\substack{u,v \\ x,y}} \xi_{uv}\xi_{xy}}_{\substack{4 \text{ различные вершины} \\ \text{либо 1 повтор}}} \sim \frac{n^{2-c}}{2} + \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} \cdot n^{-2c} + \frac{n^3}{6} \cdot 3 \cdot 2 \cdot \underbrace{(1-p+p(1-p)^2)^n}_{\sim (1-2p^2)^n = n^{-2c}} = \\ &= \frac{1}{2}n^{2-c} + \frac{1}{4}n^{4-2c} + n^{3-2c} \end{aligned}$$

Поделим это на  $(E\xi)^2$ :

$$\frac{\frac{1}{2}n^{2-c} + \frac{1}{4}n^{4-2c} + n^{3-2c}}{\frac{1}{4}n^{4-2c}} = 1 + 2n^{c-2} + 4n^{1-c} \quad c < 2$$

□

*Замечание.* А как вообще отличить, будет у нас строгий порог (как тут) или нет (как в треугольниках)? Ну, давайте посмотрим на ожидание количества гаджетов. У треугольников было

$$E\xi = \frac{(np)^3}{6} = \text{poly}(n, p)$$

И в таком случае у нас как правило строгого порога нет. А вот в случае диаметра

$$E\xi = \frac{1}{2}e^{2\ln p - np^2}$$

И вот экспонента уже явно чувствительнее к константе, чем полином. Поэтому в таком случае обычно бывает строгий порог.

*Замечание.* Теперь давайте вот на что посмотрим. Обычно в теореме легко считать мат. ожидание, но сложно считать распределение (там регулярно вылезает какая-то упоротая сумма биномиальных коэффициентов, которую не посчитать).

*Пример.* Зафиксируем вершину. У неё мат. ожидание степени  $np$  примерно. Давайте теперь рассмотрим три случая:

1.  $p = \text{const.}$
2.  $p = \Omega\left(\frac{\log n}{n}\right).$
3.  $p = \frac{d}{n}.$

1. Пусть  $\xi_i$  — распределение Бернулли,  $\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i$ , и все  $\xi_i$  независимы. Тогда

$$P(\xi > (1 + \varepsilon)E\xi) = P(\xi > (1 + \varepsilon)np) \leq e^{-\frac{\varepsilon^2 np}{3}}$$

$$P(\xi < (1 - \varepsilon)E\xi) \leq e^{-\frac{\varepsilon^2 np}{3}}$$

Итого

$$P(|\deg u - np| > \varepsilon np) < 2e^{-\frac{\varepsilon^2 np}{3}}$$

То есть когда  $p = \text{const.}$ , то у нас очень мало вершин вне доверительного интервала.

2. Мы получили вероятность того, что заданная вершина плохая. То есть вероятность того, что в графе в принципе есть вершины вне доверительного интервала, равна

$$2ne^{-\frac{\varepsilon^2 np}{3}}$$

Это равно нулю тогда же, когда

$$e^{\ln n - \frac{\varepsilon^2 np}{3}}$$

Это чудо стремится к нулю, когда

$$\ln n < \frac{\varepsilon^2 np}{3} \Leftrightarrow p > \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\ln n}{n}$$

Ну и, пожалуйста, рассуждения о  $\Omega\left(\frac{\log n}{n}\right)$

3. Хорошо, пусть  $p = \frac{d}{n}$ . Посчитаем вероятность того, что степень вершины равна  $k$ .

$$P(\deg u = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{d}{n}\right)^k \left(1 - \frac{d}{n}\right)^{n-k}$$

Давайте считать, что  $\frac{k}{n}$  бесконечно мало (иначе у нас происходят какие-то очень невероятные стечения обстоятельств). Хорошо, чему это тогда равно?

$$\binom{n}{k} \left(\frac{d}{n}\right)^k \left(1 - \frac{d}{n}\right)^{n-k} \sim \frac{n^k}{k!} \cdot \frac{d^k}{n^k} \underbrace{e^{-d \frac{n-k}{n}}}_{\sim e^{-d}} = \frac{d^k}{k!} e^{-d}$$

Это чудо — распределение Пуассона. От него очень сложно избавиться. Потому что на самом деле это ряд тейлора экспоненты, а от экспоненты не избавиться.

**Теорема 2.** В  $G(n; \frac{1}{n})$  существует вершина степени  $\frac{\log n}{\log \log n}$  ненулевой вероятностью.

*Доказательство.* Если  $k = \frac{\log n}{\log \log n}$ , то  $k^k = \left(\frac{\log n}{\log \log n}\right)^{\frac{\log n}{\log \log n}}$ , а

$$\log k^k = \frac{\log n}{\log \log n} \cdot (\log \log n - \log \log \log n) = \log n - t(n) < \log n$$

И отсюда  $k^k < n$ . А ещё  $k! < k^k < n$ . И отсюда

$$P(\deg u = k) > \frac{1}{n} \cdot e^{-1} = \frac{1}{en}$$

$$P(\text{любая вершина } \deg u < k) < \left(1 - \frac{1}{en}\right)^n = e^{-\frac{1}{e}}$$

А значит искомая вероятность равна  $1 - e^{-\frac{1}{e}} > 0$ .

Тут есть ошибка в том, что мы считаем степени вершин независимыми, и эта трудность может быть обойдена, но это выходит за рамки нашего курса.  $\square$

### Компоненты связности в случайных графах.

*Замечание.* Тут всё интересно на асимптотике  $\frac{1}{n}$ . До неё у нас компоненты маленькие, в ней ровно — компоненты размера  $O(\log n)$ , а после — появляется здоровая компонента размера  $\Omega(n)$ . И там на границе появляются очень интересные штуки.

$G(n; \frac{d}{n}) \mid d < 1$  — а.п.н. есть только компоненты  $O(\log n)$ .  $d = 1$  — могут быть компоненты вида  $O(\log n)$  и  $\Theta(n^{2/3})$ .  $d > 1$  — появляется компонента размера  $\Omega(n)$ .

$G(n; \frac{c \ln n + d}{n}) \mid \frac{1}{2} < c < 1$  — гигантская компонента и изолированные вершины.  $c = 1$  — мат. ожидание числа изолированных вершин стремится к  $e^{-e^{-d}}$ .  $c > 1$  — а.п.н. граф связан.

**Теорема 3.** Пусть количество изолированных вершин —  $X_0$ . Пусть  $p = \frac{\ln n + d}{n}$ . Тогда  $E(X_0) \rightarrow e^{-e^{-d}}$ .

*Доказательство.*  $P(\deg u = 0) = (1 - p)^{n-1}$ . Пренебрежём тем, что у ребра два конца и что  $[\deg u = 0]$  и  $[\deg v = 0]$  — немного зависимые события. Получаем распределение Бернулли, то есть

$$P(X_0 = k) = \binom{n}{k} (1 - p)^{(n-1)k} (1 - (1 - p)^{n-1})^{n-k}$$

При  $k \ll n$  имеем

$$P(X_0 = k) \sim \frac{e^{-dk}}{k!} e^{-e^{-d}}$$

Взяв мат. ожидание, получим то, что хотим.  $\square$

*Замечание.* Запишем формально BFS. У нас бывают вершины чёрные, белые и серые. На каждом этапе берём одну серую и смотрим на рёбра, соединяющие её с белыми. Для каждого ребра с вероятностью  $p$  красим вторую вершину в серый. После этого нашу текущую вершину красим в чёрный.

Как мы ищем компоненту? У нас есть  $G(n; \frac{d}{n})$ . В среднем мы красим  $d$  соседних вершин в серый. Чтобы у нас получилась маленькая компонента связности, случайная величина должна отклониться от своего ожидания на это самое ожидание. А если компонента связности не отвалилась, пока была маленькой, то дальше серых вершин будет очень много, и вряд ли отвалится. При  $d = 1$  у нас есть исключение с логарифмическим размером, а если  $d > 1$ , то нет, и у нас количество серых вершин растёт. Пока не получится большая компонента, у которой у серых вершин ребра будут вести не в белые, а в чёрные вершины, и тут у нас сломаются приближения. Но получится «гигантская компонента». Одна, кстати (если их две, между ними слишком много рёбер).

Ну, хорошо, чему равна вероятность, что  $v$  — белая после  $i$  запусков DFS'а? Ну,

$$P(v \text{ — белая вершина}) = (1 - p)^i = \left(1 - \frac{d}{n}\right)^i \sim e^{-\frac{id}{n}}$$

$$P(v \text{ — не белая вершина}) = 1 - e^{-\frac{id}{n}}$$

Пусть  $N_w$ ,  $N_g$  и  $N_b$  — количества соответственно белых, серых и чёрных вершин после  $i$  шагов. Тогда

$$E(N_g) = E(n - N_w - N_b) = n - ne^{-\frac{id}{n}} - i$$

Для маленьких  $i$  разложим  $e^{-\frac{id}{n}}$  в ряд и оставим первый член:

$$E(N_g) = n - ne^{-\frac{id}{n}} - i \approx n - n \left(1 - \frac{id}{n}\right) - i = i(d - 1)$$

Что логично, у нас будет в среднем  $d - 1$  новых вершин каждый раз (на ранних этапах).

То есть вероятность того, что  $v$  — не белая, примерно равна  $\frac{id}{n}$ .

$$P(\text{не белых вершин } i \text{ после } i \text{ шагов}) \approx \frac{(di)^i}{n^i} e^{-di} \approx e^{-di} \frac{d^i i^i e^i}{i^i} = e^{-(d-1)i} e^i = e^{-(d-1-\ln d)i}$$

Когда  $d = 1$ , получаем 1. Не очень хорошо, мы слишком многим пренебрегали.

Пусть  $d \neq 1$ , тогда  $\alpha = d - 1 - \ln d > 0$ . Пусть  $i > c \ln n$  |  $c = \text{const}$ .

$$P(\text{не белых вершин } i \text{ после } i \text{ шагов}) \approx e^{-di} < e^{-c\alpha \ln n} = n^{-c\alpha}$$

Если выбрать  $c$  такое что  $c\alpha \geq 1$ , получим, что вероятность нашего события  $o\left(\frac{1}{n}\right)$ . А отсюда

$$\sum_{i > c \ln n} P(\text{не белых вершин } i \text{ после } i \text{ шагов}) \approx o(1)$$

То есть мы как раз и получаем, что для больших  $i$  у нас какая-то срака. Вторая такая срака получится для совсем больших  $i$ , когда все наши аппроксимации перестанут работать и мы получим компоненту размера  $\Omega(n)$ .

*Замечание.* Давайте ещё оценим мат. ожидание количества компонент размера  $k$  ( $EX_k$ ).

$$EX_k \leq \binom{n}{k} k^{k-2} p^{k-2} \cdot (1 - p)^{kn-k^2}$$

**Теорема 4.** Если  $c > \frac{1}{2}$ , то  $G(n; \frac{c \ln n}{n})$  а.п.н. не содержит компонент размера  $\geq 2$  (кроме гигантской).

*Доказательство.* Просуммируем

$$\sum_{k=2}^{n/2} EX_k$$

Если это стремится к нулю, то всё хорошо.  
Заметим, что

$$\binom{n}{k} = \frac{n^k}{k!} \leq \frac{n^k}{k!} \approx \left(\frac{en}{k}\right)^k$$

И что

$$1 - p < e^{-p}$$

Тогда

$$\begin{aligned} EX_k &\leq \frac{e^k n^k}{k^k} k^{k-2} \frac{c^{k-1} (\ln n)^{k-1}}{n^{k-1}} e^{-\frac{c \ln n}{n} (kn - k^2)} = \frac{e^k}{k^2} c^{k-1} (\ln n)^{k-1} n e^{-\frac{c \ln n}{n} (kn - k^2)} \leq \\ &\leq \exp \left( k - 2 \ln k + k \ln c + k \ln \ln n + \ln n - ck \ln n + c \ln n \frac{k^2}{n} \right) = \exp f(k) \end{aligned}$$

Давайте попробуем найти минимум этой ебалы. Для этого продиффаем её дважды по  $k$  и получим

$$\begin{aligned} f'(k) &= 1 - \frac{2}{k} + \ln c + \ln \ln n - c \ln n + 2c \ln n \frac{k}{n} \\ f''(k) &= \frac{1}{k^2} + 2c \frac{\ln n}{n} > 0 \end{aligned}$$

Это выпуклая вниз функция, а значит максимум у неё на краях (либо в 2, либо в  $\frac{n}{2}$ ). В 2 получим  $\sim (1 - 2c) \ln n$ . В  $\frac{n}{2}$  —  $\frac{-cn}{4} \ln n$ . Максимум в точке 2, а значит

$$EX_k \leq e^{(1-2c) \ln n} = n^{1-2c}$$

Для  $c > 1$  всё сходится. Для  $c \in (\frac{1}{2}; 1)$  надо посмотреть на нашу функцию  $f$  внимательнее. Утверждается, что  $f(k)$  имеет своим главным членом  $-ck \ln n$  для маленьких  $k$  и  $c \ln n \frac{k^2}{n}$  — для больших. Поэтому до минимума она убывает как экспонента, а потом растёт. Поэтому можно оценить её как сумму геометрической прогрессии до минимума плюс  $\frac{-cn}{4} \ln n$  — после.  $\square$

### 3 Матроиды.

*Замечание.* Рассмотрим абстрактную постановку задачи. У нас есть конечное непустое множество каких-то объектов  $X$ , и есть какие-то их подмножества  $A$ . И мы знаем, что какие-то из них «хорошие», а какие-то — нет («хорошими» могут быть линейно независимые множества векторов или ациклические множества рёбер в графе). «Хорошесть» —  $I \subset 2^X$ . И у нас есть весовая функция  $w: X \rightarrow \mathbb{R}$ . Наша цель — найти максимальное по включению «хорошее» множество минимального веса. Мы хотим, чтобы это решалось жадно. И хотим определить какие-то свойства, чтобы жадность работала.

- Чтобы мы могли начать жадность, надо  $\emptyset \in I$ .
- Чтобы жадность работала, надо  $A \in I \wedge B \subset A \Rightarrow B \in I$

**Определение 1.** Если для  $X$  и  $I$  свойства выше выполнены, пара  $(X; I)$  называется **системой с наследованием** или **предматроидом**.

*Замечание.* Нам нужно ещё одно свойство, чтобы работал жадный алгоритм. Свойство это вот какое.

- Пусть  $A, B \in I$ , причём  $|A| > |B|$ . Тогда  $\exists x \in A \setminus B$   $B \cup x \in I$ . Здесь и далее  $B \cup x$  — объединение  $B$  и  $\{x\}$ .

**Определение 2.** Если  $(X; I)$  — система с наследованием, у которой выполнено свойство выше, то  $(X; I)$  называется **матроидом**.

Общепринято вместо «хорошесть» говорить «независимость». То есть элементы  $I$  — **независимые множества**.

Первое свойство называется **нетривиальностью**, второе — **наследованием**, третье — **заменой**.

*Пример. Равномерный (универсальный) матроид.*  
Характеризуется  $n$  и  $k$ , обозначается  $U_{n,k}$ .

$$X = \{1, 2, \dots, n\} \quad I = \{A \mid |A| \leq k\}$$

Проверим аксиомы:

1. Нетривиальность очевидна.
2. Наследование очевидно.
3. Замена: Если  $k \geq |A| > |B|$ , откуда  $|B| \leq k - 1$ , а значит для любого  $x \in A \setminus B$   $|B \cup x| \leq k$ , значит  $B \cup x \in I$ .

*Пример. Графовый матроид.*

Пусть  $G$  — неориентированный граф.  $X = EG$ ,  $I$  — множество ациклических подмножеств  $EG$ .

1. Нетривиальность очевидна.
2. Наследование очевидно.
3. Замена: пусть  $|A| > |B|$ . Пусть  $|A| = a$ ,  $|B| = b$ . Граф  $(V; A)$  содержит  $n - a$  компонент связности, а  $(V; B)$  —  $n - b$ . Утверждается, что  $\exists uv \in A$ , соединяющие разные компоненты связности  $B$ . Если это не так, то у  $A$  компонент связности как минимум столько же, сколько у  $B$ , но это не правда. А значит такое  $uv$  есть, следовательно  $B \cup uv \in I$ .

*Пример. Матричный матроид.*

Рассмотрим произвольное поле  $F$  и  $X = \{x_1; x_2; \dots; x_n\} \mid x_k \in F^m\}$ .  $I$  состоит из линейно независимых систем векторов.

*Замечание.* Очень многие в матроидах пошли из матричного матроида (и линейной алгебры). Однако встречаются трудности перевода.

1. Нетривиальность очевидна.
2. Наследование очевидно.
3. Замена: пусть  $|A| > |B|$ . Ну раз так,  $\dim \text{Lin } A > \dim \text{Lin } B$ . А откуда  $\exists x \in A$   $x \notin \text{Lin } B$ . Кому неочевидно это, того уже отчислила Екатерина Аркадьевна. Отсюда понятно, что  $B \cup x \in I$ .

**Теорема 1.** *Графовый матроид — частный случай матричного (над  $\mathbb{R}$ ). Также этот факт пишут так: «графовый матроид является матричным».*

*Доказательство.* Возьмём случайные  $n$  векторов (с равномерным распределением вероятности). Понятно, что вероятность того, что они не подойдут, равна нулю.

Если такое вам не нравится, почитайте книжки по линейной алгебре, где написан термин «вектора общего положения». □

**Определение 3.** Максимальное по включению независимое множество называется **базой**.

**Лемма 1.** *Все базы в матроиде равномощны.*

*Доказательство.* Иначе воспользуемся заменой и получим противоречие. □

**Определение 4.** Рангом матроида называется мощность всех его баз.

**Определение 5.** Взвешенный матроид — пара из матроида и функции  $w: X \rightarrow \mathbb{R}$ .

*Замечание.* У нас не будет алгоритмов, которые требуют неотрицательных весов, но вообще такие алгоритмы бывают.

**Лемма 2.** Пусть  $A_k$  — независимое множество минимального веса среди независимых множеств размера  $k$ . Пусть  $x \notin A_k$  — такой  $x \in X$ , что  $x \cup A_k \in I$  и среди всех таких  $x$  оно имеет минимальный вес. Тогда вес  $A_k \cup x$  равен весу  $A_{k+1}$ .

*Доказательство.* Рассмотрим  $A_{k+1}$ . Поскольку  $|A_{k+1}| = k + 1 > k = |A_k|$ , по аксиоме замены  $\exists y \in A_{k+1} \setminus A_k$   $A_k \cup y \in I$ . Тогда по определениям  $A_{k+1}$ ,  $A_k$  и  $x$

$$w(A_{k+1}) = w(A_{k+1} \setminus y) + w(y) \geq w(A_k) + w(y) \geq w(A_k) + w(x) = w(A_k \cup x) \geq w(A_{k+1})$$

Отсюда  $w(A_k \cup x) = w(A_{k+1})$ . □

**Теорема 2** (Алгоритм Радо — Эдмондса). Алгоритм строит базу минимального веса в данном матроиде. Работает так: отсортируем  $X$  во возрастанию  $w$ . Далее заведём себе множество  $A$  (изначально пустое) и будем идти по множеству  $x$  в указанном порядке, добавляя элементы, пока  $A \cup x \in I$ . В конце получим базу минимального веса.

*Доказательство.* Докажем по индукции, что в любой момент  $A$  является минимальным среди множеств своей мощности. База индукции верна по аксиоме нетривиальности, переход верен по наследованию и лемме (мы не можем добавить уже просмотренные элементы по наследованию, из непросмотренных добавляем минимальный, получается то что хотим по лемме).

Почему  $A$  максимальное по включению? Потому что иначе в него можно что-то добавить, а в него нельзя. □

*Пример. Разноцветный матроид.* Обозначение:  $R$ .

Пусть  $X$  — некое множество,  $c: X \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ .  $I$  состоит из таких множеств, что все их элементы разного цвета.

1. Нетривиальность очевидна.
2. Наследование очевидно.
3. Замена очевидна.

*Замечание.* Мы тут занимаемся какой-то операцией, что мы делим элементы на корзины (одного цвета) и из каждой выбираем один элемент. Так вот, это название имеет.

**Определение 6.** Пусть  $M_1, \dots, M_k$  — матроиды с непересекающимися носителями. Тогда **сумма матроидов**  $(M_1 + M_2 + \dots + M_k)$  — конструкция следующего вида:

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k \quad I = \{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k \mid A_j \in I_j\}$$

**Теорема 3.** Сумма матроидов — матроид.

*Доказательство.* Очевидно. □

*Замечание.* Несложно заметить, что  $R = U_{c_1,1} + U_{c_2,1} + \dots + U_{c_k,1}$ , где  $c_i$  — количество  $i$ -того цвета.

*Пример. Матроид паросочетаний.*

Пусть  $((L; R); E)$  — двудольный граф. Пусть  $X = L$ ,  $I$  состоит из множеств таких вершин, что всё это множество можно покрыть паросочетанием.

1. Нетривиальность очевидна.
2. Наследование очевидно.
3. Замена: Пусть  $|A| > |B|$ . Пусть  $A$  покрывается  $M_A$ ,  $B$  покрывается  $M_B$ . Тогда  $M_A \oplus M_B$  содержит хотя бы один дополняющий путь (относительно  $M_B$ ). У него один конец в  $L$ , другой — в  $R$ . Первый лежит в  $A \setminus B$ , а  $B \cup x$  можно покрыть дополнением  $M_B$  этим самым дополняющим путём.

*Замечание.* Здесь и далее  $\mathfrak{B}$  — множество баз матроидов.

**Теорема 4** (Слабая теорема о базах). *Во-первых,  $\mathfrak{B} \neq \emptyset$ . Пусть  $B_1$  и  $B_2$  — различные базы, тогда  $B_1 \not\subset B_2$  и*

$$\forall x \in B_1 \setminus B_2 \exists y \in B_2 \setminus B_1 \quad B_1 \setminus x \cup y \in \mathfrak{B}$$

*Доказательство.* Тривиально. □

**Определение 7.** Минимальные по включению зависимые множества называются **циклами**.

**Определение 8.** Цикл размера 1 называется **петлёй**.

*Замечание.* Здесь и далее  $\mathfrak{C}$  — множество циклов.

**Лемма 3.** *Если  $A \notin I$ , то  $A$  содержит в себе некоторый цикл.*

*Доказательство.* Возьмём минимальное по мощности подмножество  $A$ . Оно обязано оказаться и минимальным по включению. Это же цикл! □

*Пример.* Как выглядят циклы в  $U_{n,k}$ ? Это множества размера  $k + 1$ .

А в графовом матроиде? Простые циклы.

А в разноцветном матроиде? Пары одноцветных элементов.

В матричном матроиде не очень понятно. Ну, это сложно как-то описать, кроме как множества векторов из  $k + 1$  элемента, где любые  $k$  линейно независимы.

И в паросочетаниях циклы — тоже какая-то мерзкая штука.

**Теорема 5** (Теорема о циклах).

- $\emptyset \notin \mathfrak{C}$ .
- $\forall C_1, C_2 \in \mathfrak{C} : C_1 \neq C_2 \quad C_1 \not\subset C_2$ .
- Пусть  $C_1, C_2$  — разные циклы. Тогда  $\forall p \in C_1 \cap C_2 \quad C_1 \cup C_2 \setminus p \notin I$ .

*Доказательство.* Первое и второе — тривиально, третье — далее. □

*Замечание.* Последнее свойство обычно пишут « $C_1 \cup C_2 \setminus p$  содержит цикл».

**Определение 9.** Пусть  $A \subset X$ . Тогда **рангом**  $A$  называется число

$$r(A) = \max\{|B| \mid B \subset A, B \in I\}$$

Это самое множество  $B$  называется **базой** множества  $A$  и обозначается  $b(A)$ .

**Теорема 6** (Теорема о рангах).

1.  $0 \leq r(A) \leq |A|$ .
2.  $A \subset B \Rightarrow r(A) \leq r(B)$ .
3. *Полумодулярность ранга:*

$$r(A \cup B) + r(A \cap B) \leq r(A) + r(B)$$

*Доказательство.* 1 и 2 очевидно, докажем 3.

Рассмотрим  $S$  — базу  $A \cap B$ . По лемме ниже мы можем достроить  $S$  до  $T$  — базы  $A$ . А  $T$  можно достроить до  $R$  — базы  $A \cup B$ . Пусть  $U = R \cup S$ .

Тогда, тривиально,

$$|T| + |U| = |R| + |S|$$

При этом первое —  $r(A)$ , второе — нечто непонятное, но меньше  $r(B)$ , третье —  $r(A \cap B)$ , четвёртое —  $r(A \cup B)$ . □

**Лемма 4.** Пусть  $A \subset B$ ,  $S = b(A)$ . Тогда  $\exists T : T = b(B) \quad S \subset T$ .

*Доказательство.* Если  $|T| = |S|$ , мы победили. Если же  $|T| > |S|$ , то, поскольку  $T, S \in I$ , можно добавить в  $S$  элемент. Сделав так несколько раз, получим что нам хочется.  $\square$

**Лемма 5.** Если  $C \in \mathfrak{C}$ , то  $r(C) = |C| - 1$ .

*Доказательство.* Тривиально.  $\square$

*Доказательство.* Докажем третий пункт теоремы о циклах.

$$\begin{aligned} r(C_1 \cup C_2) &\leq r(C_1) + r(C_2) - r(C_1 \cap C_2) = \\ &= |C_1| - 1 + |C_2| - 1 - |C_1 \cap C_2| = \\ &= |C_1 \cup C_2| - 2 \end{aligned}$$

Отсюда

$$r(C_1 \cup C_2 \setminus p) \leq |C_1 \cup C_2 \setminus p| - 1$$

А значит  $C_1 \cup C_2 \setminus p \notin I$ .  $\square$

**Лемма 6.** Пусть  $B \in \mathfrak{B}$ ,  $x \notin B$ . Тогда  $B \cup x$  содержит единственный цикл.

*Доказательство.* Пусть содержит два цикла:  $C_1$  и  $C_2$ . Тогда  $x \in C_1 \cap C_2$ . Тогда  $C_1 \cap C_2 \setminus x$  должно содержать цикл, но это подмножество  $B$ , а значит база.  $\square$

**Теорема 7** (Сильная теорема о базах).

$$\forall y \in B_2 \setminus B_1 \exists x \in B_1 \setminus B_2 \ B_1 \setminus x \cup y \in \mathfrak{B}$$

*Доказательство.* Рассмотрим  $y \in B_2 \setminus B_1$ . Тогда по лемме выше  $B_2 \cap y$  содержит единственный цикл  $C$ .

$C$  не может быть петлёй, а значит  $\exists x \in B_1 \setminus C$ . А отсюда  $B_1 \setminus x \cup y \in \mathfrak{B}$ .  $\square$

*Замечание.* Зачем в теоремах о базах, о циклах и о рангах написаны тривиальные утверждения (первые два в каждой из них)?

А дело всё в том, что мы определили матроиды через независимые множества, но мы могли пойти от циклов, например. Мы могли сказать, что  $(X; \mathfrak{C})$  называется матроидом тогда, когда выполнена теорема о циклах. И получили бы равносильное определение (по модулю того, что нам надо построить  $I$  из  $\mathfrak{C}$ , не наоборот). Или могли бы определить матроид через ранговую функцию.

Если нам дано  $\mathfrak{B}$ , как получить  $I$ ? Да легко, взять все подмножества. Как из  $\mathfrak{C}$  получить  $I$ ? Взять те множества, которые не содержат цикл как подмножество. А как получить  $I$  из  $r$ ? Взять множества с рангом равным мощности.

**Теорема 8** (Аксиоматизация базами). Пусть  $X$  — множество,  $\mathfrak{B} \subset 2^X$  — такое множество, для которого выполнена слабая теорема о базах. Тогда взяв  $I = \{A \mid \exists B \in \mathfrak{B} \ A \subset B\}$ , получим  $(X; I)$  — матроид с множеством баз  $\mathfrak{B}$ .

**Лемма 7.** Все элементы  $\mathfrak{B}$  равномощны. Пусть это не так, есть две базы разной мощности  $B_1, B_2 : |B_1| > |B_2|$ . Среди всех таких пар баз выберем такие, что  $|B_1 \cap B_2|$  максимально.

Поскольку  $B_2 \not\subset B_1$ ,  $\exists x \in B_2 \setminus B_1$ , а по пункту 3 теоремы о базах это значит, что  $\exists y \in B_1 \setminus B_2 \ B_2 \setminus x \cup y \in \mathfrak{B}$ . Получили противоречие с максимальнойностью  $|B_1 \cap B_2|$ .

*Доказательство.* Первая и вторая аксиома матроида, очевидно, выполнены. Докажем третья. Пусть  $A, B \in I : |A| > |B|$ . Рассмотрим  $A \subset S \in \mathfrak{B}$ ,  $B \subset T \in \mathfrak{B}$  и среди всех таких  $S, T$  выберем такие, что  $|S \cap T|$  максимально.

Если  $T \cap A \setminus B \neq \emptyset$ , то мы всё доказали.

Иначе. Если  $\exists x \in T \setminus (B \cap S)$ , то, по третьему пункту теоремы о базах,  $\exists y \in S \setminus T \ T \setminus x \cup y \in \mathfrak{B}$ . Пусть  $T' = T \setminus x \cup y$ , тогда  $|S \cap T'| > |S \cap T|$ .

Если же такого  $x$  не существует (то есть не только  $T \cap A \setminus B = \emptyset$ , но и  $T \setminus S \setminus B = \emptyset$ ). Но это противоречит с  $|A| > |B|$ .

Осталось только доказать, что полученное  $I$  порождает именно  $\mathfrak{B}$  в качестве баз. Ну, пусть он порождает  $\tilde{\mathfrak{B}}$ . Надо доказать, что  $\tilde{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B}$ .

Докажем  $\mathfrak{B} \subset \tilde{\mathfrak{B}}$ . Рассмотрим  $S \in \mathfrak{B}$ . Надо доказать, что оно максимальное по включению в  $I$ . Если не максимально, то есть  $S \subsetneq T \in I$ . Тогда  $R$  лежит в некоем  $R \in \mathfrak{B}$ , но  $S \subsetneq R$ , и оба из  $\mathfrak{B}$ , противоречие.

Докажем  $\tilde{\mathfrak{B}} \subset \mathfrak{B}$ . Рассмотрим  $A \in \tilde{\mathfrak{B}}$  (а значит  $\in I$ ). Это значит, что  $\exists S \in \mathfrak{B} A \subset S$ . Если  $A = S$ , то включение доказано, если  $A \neq S$ , то, поскольку  $S \in I$ ,  $A$  не максимально во включению, следовательно  $A \notin \mathfrak{B}$ .  $\square$

**Теорема 9** (Аксиоматизация циклами). Пусть  $\mathfrak{C} \subset 2^X$ . И для него выполнены следующие аксиомы:

1.  $\emptyset \notin \mathfrak{C}$ .
2. Если  $C_1, C_2 \in \mathfrak{C}$  и  $C_1 \neq C_2$ , то  $C_1 \not\subset C_2$ .
3. Если  $C_1, C_2 \in \mathfrak{C}$  и  $C_1 \neq C_2$ , то

$$\forall p \in C_1 \cap C_2 \exists C_3 \in \mathfrak{C} C_3 \subset C_1 \cap C_2 \setminus p$$

Тогда  $\mathfrak{C}$  является множеством циклов некоторого матроида.

*Доказательство.* Пусть

$$I = \{A \mid B \subset A \Rightarrow B \notin \mathfrak{C}\}$$

Первые две аксиомы матроида очевидны. А с третьим надо разбираться. Пойдём от противного. Пусть существуют  $A, B$  такие что  $|A| < |B|$  и не существует  $x$  такого какого нам надо. Среди всех таких пар выберем такую, что  $|A \cap B|$  минимально.

Ну, хорошо. Рассмотрим  $B \setminus A$ . В нём конечное количество элементов, пронумеруем их.

$$B \setminus A = \{p_1; \dots; p_t\}$$

Во-первых,  $t \geq 2$  (иначе  $A \subset B$ ).

Во-вторых,  $A \cap p_i \notin I$  для всех  $i$ , то есть  $A \cap p_i$  содержит в себе цикл. Обозовём его  $C_i$ .

Рассмотрим  $C_1 \subset A \cap p_1$ . Заметим, что  $C_1 \not\subset B$ . Значит  $\exists q_1 \in C_1 \setminus B$ .

Рассмотрим  $A \setminus q_1 \cap p_1$ . Дальше есть варианты:

1.  $A \setminus q_1 \cap p_1$  содержит цикл  $\tilde{C}$ . Тогда  $p_1 \in C_1 \cap \tilde{C}$ , следовательно  $C_1 \cap \tilde{C} \setminus p_1$  содержит цикл. Но это  $C_1 \cap \tilde{C} \setminus p_1 \subset A$ , а значит циклов там быть не может.
2.  $A \setminus q_1 \cap p_1 \in I$ . Рассмотрим  $A' = A \setminus q_1 \cap p_1$ . Тогда

$$|A' \cup B| < |A \cap B|$$

Тогда поскольку  $|A'| < |B|$ ,  $\exists q \in B \setminus A' A' \cap q \in I$ .  $q$ , как несложно заметить, равно некоторому  $q_j$ . Значит

$$A \setminus q_1 \cup p_1 \cup p_j \in I$$

Рассмотрим тогда  $C_j \subset A \cup p_j$ . Воспользовавшись третьей аксиомой, получим что  $C_1 \cap C_j \setminus q_1$  содержит цикл  $\hat{C}$ . Но тогда

$$\hat{C} \subset C_1 \cap C_j \setminus q_1 \subset (A \cup p_1) \cup (A \cup p_j) \setminus q_1 = A \setminus q_1 \cup p_1 \cup p_j$$

Осталось доказать, что у полученного матроида множество циклов ( $\tilde{\mathfrak{C}}$ ) совпадает с  $\mathfrak{C}$ . Рассмотрим  $C \in \mathfrak{C}$ . Тогда  $C \notin I$  и  $\forall A \subset C : A \neq C A \in I$ . Ну, отсюда  $C \in \tilde{\mathfrak{C}}$ .

Пусть  $C \in \tilde{\mathfrak{C}}$ . Тогда  $\exists T \subset C T \in \mathfrak{C}$ . Но  $\forall A \subset C : A \neq C A \in I$ , следовательно  $T = C$ .  $\square$

**Теорема 10** (Аксиоматизация рангами). Пусть  $r: 2^X \rightarrow \mathbb{Z}_+$ . И пусть выполнены аксиомы

1.  $0 \leq r(A) \leq |A|$ .

2. Если  $A \subset B$ , то  $r(A) \leq r(B)$ .

3.  $r(A \cup B) + r(A \cap B) \leq r(A) + r(B)$ .

Тогда существует матроид, для которого  $r$  — ранговая функция.

$$I = \{A \mid r(A) = |A|\}$$

Без доказательства.

**Теорема 11** (Аксиоматизация замыканиями). Пусть  $\text{span}: 2^X \rightarrow 2^X$  (далее  $\text{span } A = \langle A \rangle$ ). Пусть выполнены следующие аксиомы:

1.  $A \subset \langle A \rangle$ .

2.  $A \subset B \Rightarrow \langle A \rangle \subset \langle B \rangle$ .

3.  $\langle \langle A \rangle \rangle = \langle A \rangle$ .

4. Если  $p \notin \langle A \setminus q \rangle$ , то  $q \notin \langle A \setminus p \rangle$ .

Тогда существует матроид, для которого  $\text{span}$  — функция замыкания.

$$I = \{A \mid \forall p \in A \ p \notin \langle A \setminus p \rangle\}$$

Без доказательства.

### Пересечение матроидов.

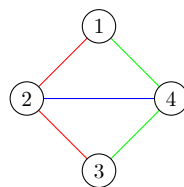
**Определение 10.** Пусть заданы  $X, I \subset 2^X$ . Эта пара называется пересечением матроидов  $(X; I_1)$  и  $(X; I_2)$ , если

$$I = I_1 \cap I_2$$

*Пример.* Пересечение матроидов может быть матроидом (если  $I_1 = I_2$ , например)))

*Пример.* ...а может и не быть.

Разноцветные леса: возьмём неориентированный граф, покрасим его рёбра в случайные цвета от 1 до  $k$  и сделаем себе графовый матроид и разноцветный матроид. Если правильно покрасить, то пересечение матроидом не будет:



Тогда взяв  $A = \{12, 24, 34\}$  и  $B = \{12, 14\}$ , получим, что добавить в  $B$  нечего.

*Пример.* Возьмём паросочетания в двудольном графе  $((L; R); E)$ . В качестве  $I_1$  возьмём множество рёбер, у которых все левые концы различны, а  $I_2$  — у которых правые концы различны. И тогда в пересечении мы будем иметь паросочетания. И хотя матроидом это не является, пример довольно показательный.

**Свойство 10.1.** Тривиально, пересечение матроидов является предматроидом.

*Замечание.* Поскольку матроидом не является, жадный алгоритм не работает. Зато у нас есть пример с паросочетаниями. Мы же умеем искать максимальное паросочетание в двудольном графе...

Как мы это делаем? Начнём с пустого паросочетания. Дальше будем делать следующее: рассмотрим непокрытую вершину. Если её вместе с каким-то ребром можно добавить в паросочетание, добавляем. Если нет, выкинем ребро, которое мешает нам добавить текущую вершину. Но тогда мы обидим

вершину, которая была в паросочетании, поэтому после этого у неё спросим, можем ли мы добавить в паросочетание с ней кого-то другого. Делаем это рекурсивно.

Переводя на язык графов, мы ищем чередующийся путь, который начинается и кончается рёбрами не из паросочетания. Он позволяет увеличить паросочетание на один. Такой называется «дополняющим путём».

Переведём это на язык матроидов: пытаемся добавить элемент в первый матроид. Если нельзя — убираем из второго матроида и пытаемся добавить в первый два элемента. И т.д.

Сделаем график замен для множества  $A$  в  $M_1 \cap M_2$ . В него входит  $\overrightarrow{uv} \in A \times (X \setminus A)$ , если  $A \setminus u \cup v \in I_2$  и  $\overleftarrow{xu} \in (X \setminus A) \times A$  аналогично. И ещё построим  $S = \{x \mid A \cup x \in I\}$  и  $T = \{x \mid A \cup x \in I_2\}$ .

Если  $S \cap T \neq \emptyset$ , то  $\exists z \in S \cap T$   $A \cup z \in I$ . А что если  $S \cap T = \emptyset$ ? Давайте по рёбрам, описанным выше, найдём путь из  $S$  в  $T$ .

*Замечание.* Есть лишь проблема: это не работает. Можно придумать пример. Но оказывается, что это работает, если брать путь  $S \leadsto T$  кратчайшей длины.

А ещё нужно доказать, что если пути нет, то множество максимально.

**Теорема 12** (Теорема Эдмондса — Лоурера).

$$\max_{A \in I_1 \cap I_2} |A| = \min_{B \subset X} (r_1(B) + r_2(X \setminus B))$$

**Лемма 8.**

$$\forall A \in I_1 \cap I_2 \quad \forall B \subset X \quad |A| \leq r_1(B) + r_2(X \setminus B)$$

*Доказательство.* Очевидно,

$$\begin{aligned} r_1(B) &\geq |A \cap B| \\ r_2(X \setminus B) &\geq |A \setminus B| \end{aligned}$$

□

**Следствие 8.1.** Если  $A \in I_1 \cap I_2$  и  $\exists B \subset X$   $|A| = r_1(B) + r_2(X \setminus B)$ , то  $A$  — максимальное среди  $I_1 \cap I_2$ .

*Замечание.* Теперь запустим вот такой алгоритм:

Пусть  $A \in I_1 \cap I_2$  изначально пусто, а на каждом шаге будем делать вот что: выделим из  $X \setminus A$   $S = \{x \in X \mid A \cup x \in I_1\}$  и  $T = \{x \in X \mid A \cup x \in I_2\}$ . Если  $S$  и  $T$  пересекаются, можно добавить их пересечение в  $A$  (хотя для алгоритма это, вообще говоря, не нужно).

Пусть пересечения нет. Проведём такие рёбра:  $\overrightarrow{uv}$ , если  $A \cup u \setminus v \in I_1$  и  $\overleftarrow{ba}$ , если  $A \setminus a \cup b \in I_2$ . Докажем следующее: если в полученном графе есть путь из  $S$  в  $T$ , то взяв кратчайший путь, можно получить  $A$  побольше, а если нет, то  $A$  максимально.

**Утверждение.** Если в комментарии выше нельзя добраться из  $S$  в  $T$ , то  $A$  максимально.

*Доказательство.* Пусть  $R_S$  — множество тех  $x \in X$ , до которых можно дойти из  $S$ . Утверждается, что если  $B = \overline{R_S}$ , то  $r_1(B) + r_2(X \setminus B) = |A|$ .

Возьмём в  $B$  базу. Если это  $A \cap B$ , то хорошо. Иначе достроим до базы  $B_1$ . Если оно содержит всё  $A$  и ещё какую-то вершину, её можно добавить в  $A$  с сохранением независимости. Иначе есть элемент  $v \in B_1 \setminus A$ . Давайте докидывать элементы из  $A$  в  $B_1$ , пока они не сравняются по мощности (получим  $\widehat{B}_1$ ). Закончим тогда, когда получим  $u \in A \setminus \widehat{B}_1$ . Но тогда по определению из  $u$  в  $v$  должно идти ребро, подозрительно.

Итого  $r_1(B) = |A \cap B|$ , аналогично  $r_2(B) = |A \setminus B|$ . □

**Утверждение.** Докажем утверждение про кратчайший путь.

*Доказательство.* рассмотрим пока один матроид. Рассмотрим  $A \in I$ ,  $X \setminus A$ . Проведём ребро  $\overrightarrow{uv}$ , если  $A \setminus u \cup v \in I$ . Обозначим наш граф  $G_A$ .

Рассмотрим произвольное  $B$  той же мощности, что и  $A$ . Тогда  $|A| = |B|$  и  $|A \setminus B| = |B \setminus A|$ .

**Лемма 9.** Если в графе  $G_A$  существует единственное совершенное паросочетание на  $A \oplus B$ , то  $B$  независимо.

*Доказательство.* Ориентируем рёбра паросочетания из  $X \setminus A$  в  $A$ , а остальные — направо.

Утверждается, что полученный граф ациклический, так как паросочетание единственно.

Сделаем в этом графе топологическую сортировку. Возьмём такую, что рёбра паросочетания рядом (чтобы не рёбра паросочетания шли от меньших номеров к большим).

Пронумеруем элементы  $A \setminus B$  и  $B \setminus A$  (первые как  $y_i$ , вторые — как  $x_i$ ). Если  $B$  не независимо, в нём есть цикл  $C$ . Он точно содержит хотя бы один элемент  $B$ , а значит возьмём  $x_i$  — минимальный по номеру элемент  $B$  из него. Утверждается, что если  $x \in C \setminus x_i$ , то  $y_i x$  — не ребро  $G_A$ . Если мы возьмём  $x_{k>i}$ , то это уж явно не ребро потому что топологическая сортировка. А  $x_{k<i}$  мы взять не можем, потому что  $x_i$  — наименьший элемент в  $C$ . В таком случае  $A \setminus y_i \cap x \notin I$ , следовательно  $r(A \setminus y_i \cup x) = |A| - 1$ . Отсюда  $x \in \langle A \setminus y_i \rangle$ . Отсюда

$$C \setminus x_i \subset \langle A \setminus y_i \rangle \Rightarrow \langle C \setminus x_i \rangle \subset \langle \langle A \setminus y_i \rangle \rangle = \langle A \setminus y_i \rangle$$

Известно, что

$$r(C \setminus x_i \cup x_i) = r(C) = |C| - 1$$

А значит

$$x_i \in \langle C \setminus x_i \rangle \Rightarrow x_i \in \langle A \setminus y_i \rangle \Rightarrow r(A \setminus y_i \setminus x_i) = r(A \setminus y_i) = |A| - 1$$

А отсюда

$$A \setminus y_i \cup x_i \notin I$$

Что противоречит с ребром  $y_i x_i$ . □

Как использовать лемму? Возьмём кратчайший путь  $S \rightsquigarrow T$ . Во-первых, если  $S$  пересекается с  $T$ , путь имеет длину ноль, поэтому алгоритмически отдельно разбирать этот случай не нужно.

Теперь пусть не пересекаются. Добавим в первый матроид виртуальную вершину  $x$ , которая не влияет на независимость:  $M_1 + U_{1,1}$ . Если добавить этот  $x$  в  $A$ , то всё будет хорошо. Из этого  $x$  есть рёбра во все  $S$ , и давайте рассматривать путь не из  $S$  в  $T$ , а из  $x$  в  $T$ . Он тоже кратчайший, но теперь имеет чётное число рёбер. Возьмём  $B$ , состоящее из тех вершин  $A$ , которые не на пути, и тех вершин  $X \setminus A$ , которые на пути. Тогда  $A \oplus B$  — в точности вершины пути. В них есть полное паросочетание, но непонятно, почему единственное. Ну, если есть ещё одно, то пронумеруем вершины по удалению от  $x$ . В ещё одном паросочетании есть ребро, которое не является ребром первого и ведущее из вершины с меньшим номером в вершину с большим. Тогда путь можно укоротить. А такое ребро точно есть, иначе не паросочетание. Отсюда из леммы  $B \in I_1$ . Аналогично можно доказать, что  $B \in I_2$ . □

*Замечание.* Что делать, если матроид взвешенный? Надо на рёбрах написать стоимость замены, и искать кратчайший путь по рёбрам, а среди них — минимальный по весу.

*Замечание.* А что делать, если надо пересекать больше двух матроидов? Тогда придётся страдать, потому что это задача NP-трудного характера. Можно свести гамильтонов путь к этой задаче: по графу построим три матроида и число  $k$  такие что в графе есть гамильтонов путь тогда и только тогда, когда в пересечении  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$  есть независимое множество размера  $k$ .

Рассмотрим ориентированный граф.  $M_1$  — выходящие «солнышки» или «квазидеревья» — граф, у которого из каждой вершины выходит не больше одного ребра.  $M_2$  — то же самое, но в каждую вершину входит не больше одного ребра.  $M_1$  и  $M_2$  — разноцветные матроиды, в первом цвет — номер исходящей вершины, во втором — входящей. Пересечение  $M_1$  и  $M_2$  — пути и циклы. А  $M_3$  — графовый матроид на неориентированном графе. Тогда в пересечении трех матроидов есть множества  $A$ , у которых мощность —  $n$  минус количество путей в них. Максимизируем это и скажем, что  $k = n - 1$ . Всё.

**Определение 11.** Пусть  $M_1 = (X; I_1)$  и  $M_2 = (X; I_2)$  — матроиды с одинаковым носителем. Тогда **объединение матроидов** — это

$$M_1 \cup M_2 = (X; I) \mid I = \{A_1 \cup A_2 \mid A_1 \in I_1, A_2 \in I_2\}$$

**Теорема 13.** Объединение произвольного количества матроидов является матроидом.

*Доказательство.* Возьмём  $X$  и заменим его элемент  $x$  на набор элементов  $(x; i)$  для всех  $i$  от 1 до номера последнего матроида. Тогда возьмём  $M_1 + M_2 + \dots + M_k$  — это точно матроид. А теперь возьмём функцию  $f: (x; i) \mapsto x$ , и  $f(M_1 + \dots + M_k) = M_1 \cup \dots \cup M_k$ , а применение  $f$  к матроиду — это проекция матроида, которая тоже является матроидом.  $\square$

*Замечание.* Но это неконструктивно, мы так не умеем проверять, является ли  $A$  независимым в объединении матроидов. А хочется.

Сведём поиск максимального независимого множества в объединении (произвольного количества матроидов) к поиску максимального независимого множества в пересечении двух матроидов.

Задублируем  $X$   $k$  раз, это будет новый носитель. И скрафтим на нём два матроида:  $\widetilde{M}_1 = M_1 + M_2 + \dots + M_k$ , а  $\widetilde{M}_2$  — разноцветный матроид. Одинаковым цветом обладают одинаковые элементы из  $X$ . Тогда  $M_1 \cap M_2$  состоит из тех же множеств, что и объединение.