

Оптимизация — это о чём? Ну, о том, что мы ищем минимум (или максимум) какой-то функции на каком-то множестве. Причём минимум ищется обычно локальный, потому что глобальный искать очень сложно.

Рассмотрим непрерывную оптимизацию: наша функция непрерывна. В таких методах применяется принцип чёрного ящика: мы не анализируем то, что делает функция, нас интересуют только её значения. Иногда нас также интересует градиент функции и/или гессиан. В зависимости от того, производная какого порядка нам нужна в нашем методе, говорят о том, что наш метод — это метод соответствующего порядка (если не использовать ни градиент, ни гессиан, то это метод нулевого порядка, если использовать только градиент — первого,...). Методы второго порядка — это, например, методы Ньютона. Также есть методы квази-Ньютона, которые пытаются как-то аппроксимировать гессиан, но сейчас не о них.

Зачем нам вообще градиент и гессиан? Потому что они позволяют разложить функцию в ряд Тейлора, и выглядеть он будет так:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x^T \nabla f(x) + \frac{1}{2} \Delta x^T H_f(x) \Delta x + o(\|\Delta x\|^2)$$

Более высокие порядки не используются обычно, потому что там возникают такие операции как взятие обратной матрицы, которые вводят численную нестабильность.

Как это глобально работает: нам дают функцию, градиент (и гессиан, если для метода надо), и мы уже дальше интерпретируем функцию, градиент и гессиан как чёрные ящики.

*Пример.* Тернарный поиск. Все мы его знаем. Это метод нулевого порядка. Берём функцию, которая сначала убывает, потом возрастает и итеративно делим отрезок на три части, на каждом этапе отбрасывая одну треть.

Можно немного упростить жизнь себе, используя метод золотого сечения. А именно отрезок  $[a; b]$  мы делим на три части точками  $x_1 = b - \frac{b-a}{\Phi}$ ,  $x_2 = a + \frac{b-a}{\Phi}$ , где  $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . Остальное как в обычном тернарном поиске. При таком разделении значение в одной из двух точек будет переиспользовано, ведь  $x_1$  делит  $[a; x_2]$  в соотношении золотого сечения и  $x_2$  делит  $[x_1; b]$  в соотношении золотого сечения.

Нулевого порядка в целом больше ничего не придумать.

Для методов первого порядка обычно итеративно выбирают последовательность точек, значения в которых должны уменьшаться. Как выбирать — рассмотрим позже. А сейчас подумаем, когда останавливаться.

**Определение 1.** Пусть  $\{x_k\}$  — последовательность точек, которые выбирает метод, а  $x^*$  — локальный минимум, к которому метод стремится. Тогда если выполнено

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x_{k+1} - x^*\|}{\|x_k - x^*\|^\mu} < r$$

то  $r$  называют **скоростью сходимости**, а  $\mu$  — **степенью сходимости**.

**Определение 2.** **Контурными линиями** называются множества

$$L_f(a) = \{x \mid f(x) = a\}$$

**Утверждение.** *Контурные линии ортогональны градиенту функции.*

**Условия оптимальности.** Хочется найти какие-нибудь критерии оптимальности точки в какой-то окрестности. У нас могут быть достаточные условия, могут быть необходимые, и все они следуют из квадратичной аппроксимации функции.

Ну, точка оптимальна, если при добавлении произвольного  $\Delta x$  функция возрастёт. Заметим, что  $\nabla f(x)$  и  $H_f(x)$  никак не зависят от  $x$ . Для методов первого порядка есть только необходимое условие:

**Теорема 1.** *Если точка оптимальна, то  $\nabla f(x) = 0$ .*

*Доказательство.* Ну, если он не ноль, то можно найти достаточно маленькое  $\Delta x$ , противоположное  $\nabla f(x)$ , и функция уменьшится. А значит точка не оптимальна была.  $\square$

Самое интересное, что для хороших функций можно решить уравнение  $\nabla f(x) = 0$  и получить аналитическое решение. Например, так отлично решается линейная регрессия.

А вот если у нас есть гессиан, то мы и достаточное условие можем сформулировать. Это условие доказывается через спектральное разложение гессиана.

**Теорема 2.** *Если все собственные числа гессиана в точке положительные, то эта точка — минимум.*

*Если точка — минимум, то все собственные числа гессиана неотрицательны.*

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) &\approx f(x) + \frac{1}{2} \Delta x^T H_f(x) \Delta x = \\ &= f(x) + \frac{1}{2} \Delta x^T Q \wedge Q^T \Delta x = \\ &= f(x) + \frac{1}{2} (Q^T \Delta x)^T \wedge Q^T \Delta x = \\ &= f(x) + \frac{1}{2} \sum_i \lambda_i \|(Q^T \Delta x)_i\|^2 \end{aligned}$$

□

**Линейные ограничения.** Давайте добавим какие-нибудь ограничения. Например, линейные ограничения: минимизировать функцию  $f$  при условии  $Ax = b$ . Тогда как выглядит наша окрестность  $x$ ? Ну, чтобы получить окрестность в подпространстве  $Ax = b$ , можно взять большую окрестность и взять оттуда только подходящие точки. То есть у нас окрестность их точек  $x + \Delta x$  и мы берём только такие  $x + \Delta x$ , у которых  $A(x + \Delta x) = b$ . Тогда  $A\Delta x = 0$ . Соответственно, проверяя условия необходимости и/или достаточности, нам надо проверять только те направления, для которых верно  $A\Delta x = 0$ . Как с этим работать? Ну, довольно легко: надо рассмотреть базис  $\ker A$  (назовём  $N$  матрицу проекции на  $\ker A$ ). И все  $\Delta x$  надо заменить на  $N\Delta x$ . Тогда наш  $\Delta x$  всегда будет правильным. Что будет с нашим рядом Тейлора?

$$f(x + N\Delta x) = f(x) + \Delta x^T N^T \nabla f(x) + \frac{1}{2} \Delta x^T N^T H_f(x) N \Delta x + o(\|\Delta x\|^2)$$

В итоге можно только домножать градиент и гессиан на  $N$  (с нужных сторон с нужным транспонированием), и необходимое и достаточное условия останутся.

## 1 Непрерывная оптимизация.

Пока без доказательств, потому что нужны практики.

**Метод множителей Лагранжа.** Минимизировать  $f(x)$ , при условии  $g(x) = 0$ . Чтобы это решить, введём функцию Лагранжа:

$$L(x, \lambda) = f(x) - \lambda g(x)$$

$\lambda$  называется **множителем Лагранжа**.

Оказывается, что для поиска минимума  $f(x)$ , при условии  $g(x) = 0$  можно рассмотреть градиент  $\nabla L$  и приравнять нулю. Этот градиент равен нулю тогда и только тогда, когда  $f'(x) = \lambda g'(x)$  и  $g(x) = 0$ . Если ограничений у нас несколько, надо ввести несколько множителей, по одному на каждое ограничение.

**Метод градиентного спуска.** Обычный итеративный метод, в котором мы берём точки так:  $\Delta x_{k+1} = -\alpha \nabla f(x_k)$ . Основано на простом факте: функция быстрее убывает в направлении антиградиента.

При этом в общем случае градиентный спуск сходится как-нибудь случайно, возможно, никак. Поэтому мы хотим узнавать какие-нибудь свойства функций. Одно из них: липшицевость градиента:

$$\exists M \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq M\|x - y\|$$

Другое: строгая выпуклость с параметром  $m$ :

$$(\nabla f(y) - \nabla f(x))^T(y - x) \geq \|y - x\|^2$$

Так вот, если функция удовлетворяет обоим условиям, то наш градиентный спуск линейно сходится:

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq \left(1 - \frac{2\alpha m M}{M + m}\right) \|x_0 - x^*\|$$

Оптимальное  $\alpha$  получается равным  $\frac{2}{M+m}$ .

**Стохастический градиентный спуск.** Этот чёрт используется для обучения нейронок. Пусть у нас функция представима как сумма каких-то более простых функций. Тогда, очевидно, градиент представим в виде суммы градиентов компонент. И стохастический градиентный спуск заключается в том, что мы считаем не весь градиент сразу, а только у компонент (по очереди, в каком-нибудь случайном порядке). Или у нескольких компонент сразу (эти несколько компонент называются batch). Экспериментально выяснено, что так будет лучше (с точки зрения количества вычислений). Как это практически работает? Ну, смотрите. В нейронках у нас есть какие-то образцы и обычный градиентный спуск должен взять ошибку для каждого из образцов и сложить. И исходя из градиента этого нечто сдвинуться. А поскольку образцов очень много, градиент получается весьма сложный. В чём тут заключается стохастический градиентный спуск? В том, чтобы считать за один шаг ошибку по одному образцу. Или по нескольким пачкой (если с batch'ами).

**Метод Ньютона.** Рассматриваем квадратичную аппроксимацию:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + \Delta x^T \nabla f(x) + \frac{1}{2} \Delta x^T H_f(x) \Delta x$$

Возьмём квадратичную аппроксимацию, посмотрим на производную по  $\Delta x$ , получив  $\nabla f(x) + H_f(x)t$ . Соответственно, берём

$$x_{k+1} = x_k - \nabla f(x_k) H_f^{-1}(x_k)$$

Очень весело, надо инвертировать гессиан. С этим можно просто жить и страдать (потому что любой способ инвертирования матриц численно нестабилен), а можно пользоваться методами квази-Ньютона, но о них позже.

Для выпуклых функций всё круто, оно сходится к минимуму. Иначе оно может искать седловые точки вместо минимума. Если мы этого хотим, то хорошо. Если нет, увы и ах.

Важный прикол: тут можно обойтись без  $\alpha$ , потому что у квадратичной функции есть минимум, (а в методе Ньютона функция линейная и есть только направление). Но в целом, можно добавить, хуже не будет.