1.1 วิธีการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนจ์เบื้องต้น

วิธีการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนจ์ (finite difference method) ถูกคิดค้นโดย เป็นวิธีการเชิงตัวเลขที่พัฒนาขึ้นเพื่อแก้ไขปัญหาค่าขอบ ซึ่งทั่วไปแล้วขั้นตอนของวิธีการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์สำหรับการแก้ปัญหาค่าขอบประกอบดวยสามขั้นตอนสำคัญดังนี้

1. ดิสครีตไทซ์ (discretize) โดเมนของผลเฉลย (solution domain) ออกเป็นช่องตาราง (mesh) ของจุดกริด (grid point) ที่ต้องการหาผลเฉลยเชิงตัวเลข
2. ประมาณอนุพันธ์ที่ปรากฏในปัญหาค่าขอบด้วยการประมาณแบบไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ (finite difference approximation) ในขั้นตอนนี้ การประมาณดังกล่าวจะนำไปสู่ระบบสมการเชิงเส้น หรือระบบสมการไม่เป็นเชิงเส้นขนาดใหญ่ที่สมนัยกับปัญหาค่าขอบตั้งต้น
3. แก้ระบบสมการเชิงเส้นหรือระบบสมการไม่เป็นเชิงเส้นขนาดใหญ่ที่เกิดขึ้นในขั้นตอนที่ 2 เพื่อกำหนดผลเฉลยเชิงตัวเลข

กำหนดให้ $u(x)$ แทนฟังก์ชันค่าจริงและเป็นฟังก์ชันราบเรียบ (smooth function) นั่นคือ u สามารถหาอนุพันธ์ได้หลายครั้ง โดยแต่ละครั้ง อนุพันธ์ที่หาได้เป็นฟังก์ชันที่ถูกนิยามอย่างดี (well-defined) และมรขอบเขตเหนือช่วงที่มีจุดที่สนใจ $\bar{x}$

ในการประมาณ $u'(\bar{x})$ โดยใช้ค่าของ u ที่เกิดจากจุดที่อยู่ในบริเวณใกล้เคียงกับ $\bar{x}$ สามารถใช้สูตรการประมาณแบบไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ที่ถูกกำหนดได้ดังต่อไปนี้

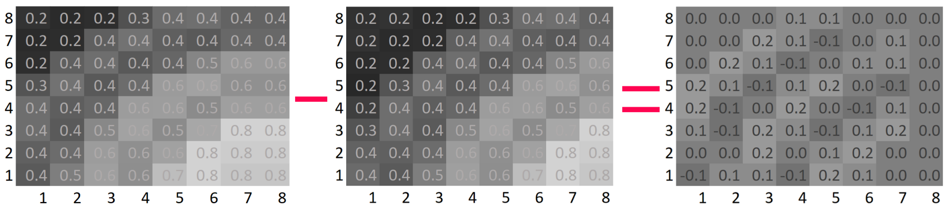
1. สูตรฟอร์เวิร์ดดิฟเฟอเรนซ์ (forward-difference formular)
$$D_+u(\bar{x}) = \frac{u(\bar{x}+h) - u(\bar{x})}{h}$$
2. สูตรแบ็คเวิร์ดดิฟเฟอเรนซ์ (backward-difference formular)
$$D_-u(\bar{x}) = \frac{u(\bar{x}) - u(\bar{x}-h)}{h}$$
3. สูตรเซ็นทรัลดิฟเฟอเรนซ์ (forward-difference formular)
$$D_0u(\bar{x}) = \frac{u(\bar{x}+h) - u(\bar{x}-h)}{2h}$$

โดยที่ h เป็นจำนวนจริงที่มีค่าน้อยๆ ซึ่ง $h > 0$

สำหรับโครงงานวิจัยนี้ จะใช้วิธีการหาอนุพันธ์โดยประมาณไฟไนต์ดริฟเฟอเรนจ์แบบฟอร์เวิร์ดดิฟเฟอร์เรน จึงได้ว่าการหาอนุพันธ์ของค่าความเข้มที่พิกัดทางกายภาพเป็น (i, j) สามารถหาได้ดังนี้

$$\frac{d}{dx}u_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h}$$

เมื่อระบบกริดที่ใช้บนภาพมีความห่างเพียงหนึ่งหน่วย จึงได้ว่า $h = 1$ ทั้งนี้ระยะห่าง h อาจเปลี่ยนไปตามชั้นของพีระมิดรูปภาพ



รูปที่ 1.1.1: ตัวอย่างการหาอนุพันธ์บนภาพเฉดเทา

จากภาพ **??** เมื่อต้องการหาอนุพันธ์เทียบแกน x จะทำตามภาพที่ 1.1.1โดยทำการสร้างภาพซึ่งทำการตัดขอบทางซ้ายออกหนึ่งคอลัมม์และเพิ่มขอบทางขวาหนึ่งคอลัมม์โดยใช้เงื่อนไขค่าขอบแบบนิวแมน จากนั้นภาพที่สร้างขึ้นไปลบกับภาพเดิมจะได้อนุพันธ์ของภาพนั้นดังที่ปรากฏทางขวา ทั้งนี้หาก $h \neq 1$ สามารถทำการหารภาพผลลัพธ์ด้วยค่า h ได้เพื่อให้ได้ค่าที่ต้องการ

สำหรับการหาเกรเดียนซ์ (Gradient) จะใช้การหาอนุพันธ์โดยวิธีฟอร์เวิร์ดดิฟเฟอร์เรนจ์ดังที่กล่าวไปในข้างต้น ในแนวแกน x และแนวแกน y คำตอบที่ได้จะเป็นเวคเตอร์ของอนุพันธ์แนวแกน x และอนุพันธ์แนวแกน y ได้เวคเตอร์ดังนี้

$$\nabla \vec{v_{u_i}} = \left(\frac{\partial}{\partial x}u_{i,j}, \frac{\partial}{\partial y}u_{i,j}\right)^\top$$

สำหรับไดเวอร์เจน (Divergence) จะเป็นการหาผลรวมของอนุพันธ์ในแต่ละแกนของเวคเตอร์ด้วยวิธีฟอร์เวิร์ดดิฟเฟอร์เรนจ์ นั่นคือ

$$\nabla \cdot (\vec{v_{i,j}}) = \frac{\partial}{\partial x}\vec{v_{i,j}}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{v_{i,j}}_y$$

สำหรับลาปาเซียน (Lapacian) นั่นคือการทำหาไดเวอร์เจนบนเวคเตอร์ที่หาแกรเดียนแล้ว แต่ทั้งนี้สามารถหาลาปาเชียนได้จาก

$$\triangle u_{i,j} = u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j}$$

บรรณานุกรม

[1] T.F. Chan and J. Shen , “Mathematical models of local non-texture inpaintings”, SIAM Journal on Applied Mathematics, vol. 62, no. 3, pp. 1019–1043, 2001.

[2] L. I. Rudin, S. Osher, E. Fatemi, “Nonlinear total variation based noise removal algorithms”, Physica D: Nonlinear Phenomena, vol 60, issues 1–4, pp. 259-268, 1992.

[3] C.R. Vogel and M.E. Oman,“Iterative methods for total variation denoising”, SIAM Journal on Scientific Computing. vol. 17, pp. 227-238, 1996.

[4] T. Goldstein and S. Osher,“The Split Bregman Method for L1-Regularized Problems”, SIAM Journal on Imaging Sciences. vol. 2, issue 2, pp. 323-343, 2009.

[5] E.H. Andelson and C.H. Anderson and J.R. Bergen and P.J. Burt and J.M. Ogden. ”Pyramid methods in image processing”. 1984

[6] David Salomon. Data Compression: The Complete Reference (4 ed.). Springer. pp. 281. 2007.

[7] Zhou Wang, Alan Conrad Bovik, Hamid Rahim Sheikh and Eero P. Simoncelli, ”Image quality assessment: from error visibility to structural similarity,” in IEEE Transactions on Image Processing, vol. 13, no. 4, pp. 600-612, 2004.

[8] A. N. Tikhonov and V. Y. Arsenin. Solutions of Ill-posed Problems. Wiston and Sons, Washington, D.C., 1977

[9] B. Dacorogna. Introduction to the Calculus of Varations. Introduction to the Calculus of Varations, 2004.

[10] N. Chumchob. A study of effective variational models and efficient numerical methods for image registration. University of Liverpool, UK 2010

[11] E. Giusti. Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation. Monographs in Mathematics, Vol. 80. Birkhauser, 1984