บทที่ 2

ความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์

2.1 ปริภูมิที่มีค่าประจำ

ค่าประจำ (norm) เป็นเครื่องมือที่ใช้สำหรับบอกขนาดของเวคเตอร์หนึ่งในปริภูมิเวคเตอร์ ซึ่งค่าประจำนั้น มีนิยามดังนี้

บทนิยาม 1. *(ค่าประจำ) ค่าประจำบนปริภูมิเวคเตอร์ V คือฟังก์ชันค่าจริง $||\cdot||$ ซึ่งนิยามบน V โดยที่*

1. $||u|| > 0$ *ถ้า* $u \neq 0$
2. $||\lambda u|| = |\lambda|||u||$ *สำหรับทุกสเกลาร์* λ *และทุกเวคเตอร์* u
3. $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$ *สำหรับทุก* $u, v \in V$

โครงงานวิจัยเรื่องนี้รูปภาพเฉดเทาเป็นฟังก์ชันที่อยู่ในปริภูมิแบบยูคลิด (Euclidean space) นั่นคือค่าประจำทั้งหมดที่พูดถึงในโครงงานวิจัยเรื่องนี้จะเป็นค่าประจำแบบยูคลิด ซึ่งมีนิยามดังนี้

บทนิยาม 2. *(ค่าประจำแบบยูคลิด) ปริภูมิยูคลิด n มิติ สามารถเขียนเวคเตอร์ในปริภูมิยูคลิดได้ว่า* $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$

$$||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$$

2.2 แคลคูลัสของการแปรผันเบื้องต้น

แคลคูลัสของการแปรผัน (Calculus of variations) คือสาขาวิชาในวิชา คณิตศาสตร์วิเคราห์ เพื่อใช้สำหรับแก้ปัญหาค่าเหมาะสม โดยจะสนใจที่จะหาฟังก์ชันที่เหมาะสมแทนที่จะหาค่าของตัวแปรที่เหมาะสม แคลคูลัสของการแปรผันนั้นมักจะเกี่ยวข้องกับปัญหาที่ต้องการปริมาณน้อยสุดหรือมากสุดซึ่งปรากฏอยู่ในรูปของอนุพันธ์หรือปริพันธ์ที่ไม่ทราบค่าฟังก์ชัน

ซึ่งฟังก์ชันหาค่าต่ำสุด มักจะมีรูปทั่วไปดังสมการ 2.2.1

$$\underset{u}{min} \int \mathcal{J}(u) \tag{2.2.1}$$

โดยที่ $\mathcal{J} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่ส่งจากฟังก์ชันไปยังจำนวนจริง เรียกว่า ฟังก์ชันนัล (functional) พร้อมทั้งกำหนด $\mathcal{U}$ เป็นปริภูมิของคำตอบซึ่งประกอบด้วยฟังก์ชันค่าต่ำสุดของ $\mathcal{J}$ และ $\mathcal{V}$ เป็นปริภูมิทดสอบซึ่งบริภูมินี้สามารถเขียนเป็นผลต่างระหว่าง 2 ฟังก์ชันได้ นั่นคือ

$$\mathcal{V} = \{v | v = u - \hat{u} \text{ และ } u, \hat{u} \in \mathcal{U}\} \tag{2.2.2}$$

บทนิยาม 3. *(ย่านใกล้เคียง) ให้ $\mathcal{U}$ เป็นปริภูมิคำตอบ ฟังก์ชัน $\hat{u} \in \mathcal{U}$ และ $\epsilon > 0$ แล้ว $\mathcal{B}_\epsilon$ จะเป็นย่านใกล้เคียงของ $\hat{u}$ เมื่อ*

$$\mathcal{B}_\epsilon = \{u \in \mathcal{U} | ||u - \hat{u}|| < \epsilon\}$$

จาก 2.2.1 โลคอลมินิไมเซอร์ (local minimizer) จะกำหนดโดย

บทนิยาม 4. *(โลคอลมินิไมเซอร์) ให้ $\mathcal{U}$ เป็นปริภูมิคำตอบ และฟังก์ชันนัล $\mathcal{J} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ จะเรียก $\hat{u} \in \mathcal{U}$ ว่าโลตอลมินิไมเซอร์ของ $\mathcal{J}$ ถ้าทุก $\epsilon > 0$ มี $\delta > 0$ โดยที่ $\mathcal{J}(\hat{u}) \leq \mathcal{J}(u)$ สำหรับทุก $u \in \mathcal{B}_\epsilon(\hat{u})$*

ในการนิยามเงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับโลคอลมินิไมเซอร์ของ $\mathcal{J}$ จำเป็นต้องมีการกำหนดการหาอนุพันธ์แบบมีทิศทาง

บทนิยาม 5. *(Gâteaus-differentiable) $\mathcal{U}$ เป็นปริภูมิคำตอบม $\mathcal{V}$ เป็นปริภูมิทดสอบ และฟังก์ชันนัล $\mathcal{J} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ แล้ว $\mathcal{J}$ เป็น Gâteaus-differentiable เมื่อทุก $u \in \mathcal{U}$ อยู่ในทิศทางของ $v \in \mathcal{V}$ ถ้า*

1. *มีจำนวน $\hat{\epsilon} > 0$ ซึ่งทำให้ $u_\epsilon = u + \epsilon v \in \mathcal{U}$ สำหรับทุก $|e| \leq \hat{\epsilon}$*

2. *ฟังก์ชัน* $J(\epsilon) = \mathcal{J}(u_\epsilon)$

โดยอนุพันธ์อันดับแรกของ Gâteaus หรือการแปรผันอันดับแรก (first variation) ของ $\mathcal{J}$ *สำหรับ* u *ที่อยู่ในทิศทางของ* v *กำหนดโดย*

$$\delta\mathcal{J}(u;v) = J'(0) = \frac{d\mathcal{J}(u+\epsilon v)}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} = \lim_{\epsilon=0}\frac{\mathcal{J}(u+\epsilon v)}{\epsilon}$$

และนิยามจุดคงตัว (stationary point) โดย

บทนิยาม 6. *(จุดคงตัว)* $\mathcal{U}$ *เป็นปริภูมิคำตอบม* $\mathcal{V}$ *เป็นปริภูมิทดสอบ และฟังก์ชันนัล* $\mathcal{J} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ *สมมติให้บาง* $\hat{u} \in \mathcal{U}$ *แล้ว* $\mathcal{J}$ *เป็น Gâteaus-differentiable สำหรับทุกฟังก์ชันทดสอบ* $v \in \mathcal{V}$ *แล้ว* $\hat{u}$ *จะเรียกว่าจุดคงของ* $\mathcal{J}$ *ก็ต่อเมื่อ* $\delta\mathcal{J}(\hat{u};v) = 0$ *สำหรับทุก* $v \in \mathcal{V}$

เงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับมินิไมเซอร์นั้นสามารถสร้างได้จากการใช้จุดคงตัว

ทฤษฎีบท 2.1. *(เงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับโลคอลมินิไมเซอร์) ให้* $\mathcal{U}$ *เป็นปริภูมิคำตอบ ซึ่ง* $\hat{u} \in \mathcal{U}$*, ฟังก์ชันนัล* $\mathcal{J} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$*,* $\mathcal{V}$ *เป็นปริภูมิทดสอบโดยที่* v *เป็นฟังก์ชันทดสอบซึ่ง* $v \in \mathcal{V}$ *และ* $\mathcal{J}$ *เป็น Gâteaus-differentiable สำหรับทุก* $\hat{u}$
ถ้า $\hat{u}$ *เป็นโลคอลมินิไมเซอร์ของ* $\mathcal{J}$ *แล้ว* $\hat{u}$ *เป็นจุดคงตัวของ* $\mathcal{J}$
สำหรับบทพิสูจน์จะพบได้ใน [9]

ด้วยทฤษฎีบทนี้เราจะศึกษาเงื่อนไขของจุดคงตัวเพิ่มเติมโดยเราเลือกฟังก์ชันนัลทั่วไป $\mathcal{J}$ ซึ่งนิยามโดย

$$\mathcal{J}(u) = \int_\Omega F[x, u(x), \nabla u(x)]dx \qquad (2.2.3)$$

โดยที่ $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d > 1$ เป็นเซ็ตเปิดมีขอบเขตและ F เป็นฟังก์ชันนัลที่ขึ้นอยู่กับ $x = (x_1, x_2, ..., X_d)^\top$ สมมติให้ $\mathcal{J}$ เป็น Gâteaus-differentiable ในทุกทิศทางของปริภูมิทดสอบ ดังนั้นจึงสมมุติได้ว่า F เป็นอนุพันธ์ย่อยที่ต่อเนื่อง
ก่อนที่จะแนะนำเงื่อนไขสำหรับจุดคงตัวของ $\mathcal{J}$ จะแนะนำ

$$\nabla_u F = \partial F/\partial u = F_u \qquad (2.2.4)$$

สำหรับเกรเดียนซ์ของ F ซึ่งขึ้นอยู่กับ u จะกำหนดโดย

$$\nabla F = (\partial F/\partial x_1, ...\partial F/\partial x_d,)^\top \qquad (2.2.5)$$

ในทำนองเดียวกันเกรเดียนซ์ของ F ซึ่งขึ้นอยู่กับ ∇u กำหนดโดย

$$\nabla_{\nabla u} F = (\partial F/\partial u_{x_1}, ..., \partial F/\partial u_{x_d})^\top \in \mathbb{R}^d \tag{2.2.6}$$

โดยในขั้นนี้เราจะเลือกคำตอบที่เจาะจงโดยการเพิ่มเงื่อนไขค่าขอบเข้าไป ตัวอย่างเช่น

$$\tilde{\mathcal{U}} = \{u \in \mathcal{U} | u = c \text{ บน } \partial\Omega\} \tag{2.2.7}$$

และเช่นเดียวกันปริภูมิทดสอบจะถูกกำหนดโดย

$$\tilde{\mathcal{V}} = \{v \in \mathcal{V} | v = 0 \text{ บน } \partial\Omega\} \tag{2.2.8}$$

อีกทั้งขั้นตอนที่กล่าวมาไม่เพียงครอบคลุมปริภูมิทั่วไป $\mathcal{U}$ และ $\mathcal{V}$ แต่ยังครอบคลุมไปถึงกรณีที่เป็นเวคเตอร์เมื่อ $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, ..., u_d)^\top : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$

ทฤษฎีบทประกอบ 2.2.1. *(จุดคงตัวของ $\mathcal{J}$) ฟังก์ชัน $u \in \mathcal{U}$ เป็นจุดคงตัวของฟังก์ชันนัลทั่วไป $\mathcal{J}$ 2.2.3 ถ้า*

$$\int_\Omega \left\langle \nabla_u F - \nabla \cdot \nabla_{\nabla u} F, v \right\rangle_{\mathbb{R}^d} dx = 0 \tag{2.2.9}$$

บทพิสูจน์ของทฤษฎีบทประกอบนี้สามารถดูได้จาก [10]

เห็นได้ชัดว่า 2.2.9 เป็นจริงสำหรับฟังก์ชันทดสอบคงตัวที่ค่าไม่เจาะจง เพราะถ้า $\nabla_u F - \nabla \cdot \nabla_{\nabla u}$ การยืนยันทฤษฎีบทนี้ เป็นทฤษฎีบทที่รู้กันดีอยู่แล้ว ดังนั้น $u \in \tilde{U}$ เป็นจุดคงตัวของฟังก์ชันนัล $\mathcal{J}$ ซึ่งเป็น Gâteaus-differentiable ถ้า

$$\nabla u F - \nabla\ \nabla_{\nabla u} F = 0 \text{ บน } \Omega \tag{2.2.10}$$

โดยการใช้ทฤษฎีบท 2.1 กับ 2.2.10 จะได้เงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับโลคอลมินิไมเซอร์ของ 2.2.1 จาก $d > 1$ และ 2.2.10 จะนำไปสู่สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ซึ่งรู้จักกันในชื่อของสมการออยเลอร์-ลากรางซ์ ที่มีเงื่อนไขค่าขอบ โดยจะเรียก 2.2.1 ที่มีเงื่อนไขค่าขอบว่า รูปแบบการแปรผัน (variational formulation) และถ้าเงื่อนไขค่าขอบนั้นถูกกำหนดไว้ชัดเจนตามทฤษฎีบทประกอบที่ 2.2.1 จะเรียกเงื่อนไขนี้ว่า เงื่อนไขจำเป็น (essential condition) และในทางกลับกันหากค่าขอบไม่ถูกกำหนดไว้ชัดเจนจะเรียกว่า เงื่อนไขธรรมชาติ (natural condition) โดยสรุปแล้วทุกคำตอบ $u* \in \mathcal{U}$ ในปัญหาค่าเหมาะสมทั่วไปดังเช่น 2.2.1 ที่มีฟังก์ชันนัล $\mathcal{J}$ ซึ่งเป็น Gâteaus-differentiable ที่ถูกกำหนดโดย 2.2.3 จะเป็นคำตอบของปัญหาค่าขอบซึ่งเป็นส่วนประกอบของสมการออยเลอร์-ลากรางซ์

$$\nabla_u F - \nabla \cdot \nabla_{\nabla u} F = 0 \text{ บน } \Omega$$

ส่วนเงื่อนไขค่าขอบนั้นสามารถเป็นแบบเงื่อนไขจำเป็น หรือเงื่อนไขธรรมชาติก็ได้

$$\langle \nabla_{\nabla u} F, n \rangle_{\mathbb{R}^d} = 0 \text{ บน } \partial\Omega$$

เมื่อ $n = (n_1, ..., n_d)^\top$ หมายถึงเวคเตอร์หนึ่งหน่วยปกติภายนอก (outer normal vector unit) ของ $\partial\Omega$

ตัวอย่าง 2.2.1. *ให้* $d = 2, \Omega = [0,1]^2, F = |\nabla u|$*เมื่อ*$u = u(x)$ *และรูปแบบแปรผันเป็น*

$$\underset{min}{u} \int_\Omega |\nabla u| dx$$

กำหนดให้

$$\mathcal{R}(u) = \int_\Omega |\nabla u| d\Omega = \int_\Omega \sqrt{u_x^2 + u_y^2} d\Omega$$

สำหรับการแปรผันอันดับหนึ่งของ $\mathcal{R}$ *กำหนดให้* $\Phi(s) = s$ *จะได้*

$$\frac{\delta}{\delta u}\mathcal{R}(u;v) = \frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{R}(u+\varepsilon v)\bigg|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon}\int_\Omega \Phi(|\nabla(u+\varepsilon v)|)d\Omega\bigg|_{\varepsilon=0}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta u}\mathcal{R}(u;v) &= \int_\Omega \frac{d}{d\varepsilon}\Phi(\sqrt{(u_x+\varepsilon v_x)^2 + (u_y+\varepsilon v_y)^2})\bigg|_{\varepsilon=0} d\Omega \\
&= \int_\Omega \Bigg[\Phi'(\sqrt{(u_x+\varepsilon v_x)^2 + (u_y+\varepsilon v_y)^2})\frac{(u_x+\varepsilon v_x)v_x}{\sqrt{(u_x+\varepsilon v_x)^2 + (u_y+\varepsilon v_y)^2}} \\
&\quad + \Phi'(\sqrt{(u_x+\varepsilon v_x)^2 + (u_y+\varepsilon v_y)^2})\ \frac{(u_y+\varepsilon v_y)v_y}{\sqrt{(u_x+\varepsilon v_x)^2 + (u_y+\varepsilon v_y)^2}}\Bigg]\Bigg|_{\varepsilon=0} d\Omega \\
&= \int_\Omega \Phi'(|\nabla u|)\left(\frac{u_x v_x}{|\nabla u|} + \frac{u_y v_y}{|\nabla u|}\right) d\Omega \\
&= \int_\Omega \frac{\Phi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|}(\nabla u \cdot \nabla v) d\Omega \\
&= \int_\Omega \Phi'(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \cdot \nabla v d\Omega
\end{aligned}$$

โดยเอกลักษณ์อันดับหนึ่งของกรีน จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta u}\mathcal{R}(u;v) &= -\int_\Omega v\nabla \cdot \left(\Phi'(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) d\Omega + \int_{\partial\Omega} v\left(\Phi'(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \cdot \boldsymbol{n}\right) dS \\
&= -\int_\Omega v\nabla \cdot \left(\Phi'(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) d\Omega + \int_{\partial\Omega} v\left(\Phi'(|\nabla u|)\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right) dS
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{\delta}{\delta u}\mathcal{R}(u;v) = -\int_{\Omega} v\nabla\cdot\left(\Phi'(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)d\Omega + \int_{\partial\Omega} v\left(\Phi'(|\nabla u|)\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)dS$$

เมื่อ $\boldsymbol{n}$ *แทนเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับขอบของภาพในทิศทางชี้ออก*

จะได้สมการออยเลอร์ที่สมนัยกับปัญหานี้คือ

$$-\triangle u = 0 \text{ บน } \Omega$$
$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = 0 \text{ บน } \partial\Omega$$

2.3 ฟังก์ชันของการแปรผันที่มีขอบเขต

ให้ Ω เป็นเซ็ตเปิดมีขอบเขตของ $\mathbb{R}^d$ และให้ $u \in L^1(\Omega)$ กำหนดให้การแปรผันรวม u เป็น

$$\int_{\Omega}|Du| = \sup\Big\{\int_{\Omega} u\nabla\cdot\varphi\Big\} \tag{2.3.1}$$

เมื่อ เป็น (Lebesgue measure) แลต $C_0^1(\Omega,\mathbb{R}^d)$ คือปริภูมิของฟังก์ชันต่อเนื่องที่หาอนุพันธ์ได้และกระชับใน Ω

ตามที่ได้ถูกกล่าวถึงใน [11] สำหรับกรณีเฉพาะซึ่งเป็นที่น่าสนใจ $u \in C^1(\Omega,\mathbb{R}^d)$ โดยการใช้ปริพันธ์แบบแยกส่วน

$$\int_{\Omega} u\nabla\cdot\varphi dx = -\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi_i dx \tag{2.3.2}$$

สำหรับทุก $\varphi \in C_0^1(\Omega,\mathbb{R}^d)^d$ และ

$$\int_{\Omega}|Du| = \int_{\Omega}|\nabla u|dx \tag{2.3.3}$$

ฟังก์ชัน $u \in L^1(\Omega)$ เรียกว่ามีขอบเขตการแปรผันใน Ω ถ้า $\int_{\Omega}|Du| < \infty$ โดยเรากำหนดให้ $BV(\Omega)$ เป็นปริภูมิของฟังก์ชันทั้งหมดใน $L^1(\Omega)$ การแปรผันที่มีขอบเขต

ตัวอย่าง 2.3.1. *ฟังก์ชัน* $f1, f2$*และ* $f3$ *ต่อไปนี้กำหนดโดย*

$$f1(x) = sinx, \tag{2.3.4}$$

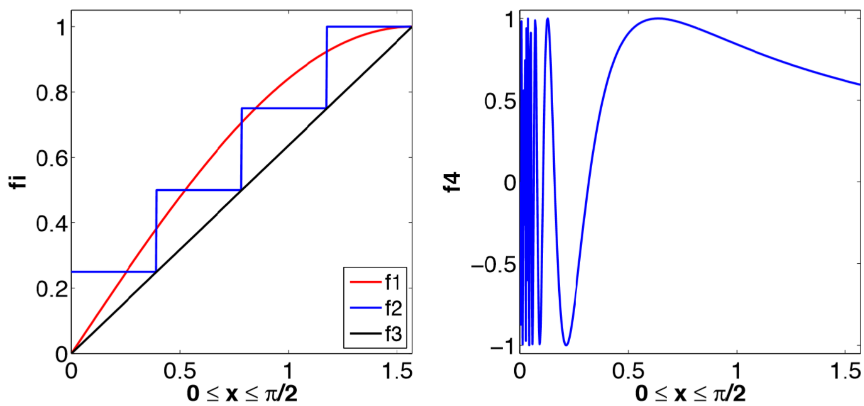
$$f2(x) = \begin{cases} 1/4, & x \in [0, \Pi/8] \\ 1/2, & x \in [\Pi/8, \Pi/4] \\ 3/4, & x \in [\Pi/4, 3\Pi/8] \\ 1, & x \in [3\Pi/8, \Pi/2] \end{cases} \tag{2.3.5}$$

$$f3(x) = \frac{2x}{\Pi}, \tag{2.3.6}$$

จาก $BV(\Omega)$ ซึ่ง $\Omega = [0, \Pi/2]$ และมีการแปรผันรวมมีค่าเป็น 1 ให้ฟังก์ชัน $f4$ กำหนดโดย

$$f4(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ sin1/x, & x \in (0, a) และ a > 0 \end{cases} \tag{2.3.7}$$

มีการแปรผันไม่จำกัดและไม่อยู่ใน $BV(\Omega)$ ซึ่ง $\Omega = [0, a]$ สำหรับทุก $a > 0$



รูปที่ 2.3.1: ฟังก์ชันแปรผันมีขอบเขตทั้งสามฟังก์ชันที่มีการแปรผันรวมเหมือนกันเท่ากับ 1 และฟังก์ชันที่มีการแปรผันไม่จำกัด

ซึ่งสำหรับในหัวข้อนี้เราสามารถสรุปได้เป็นสูตรของคลอเลีย (Coarea formula)

ทฤษฎีบท 2.2. *(Coarea fomula) ให้ $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ เป็นเซ็ตเปิดและให้ $u \in BV(\Omega)$ และ $L_\lambda = \{x \in \Omega | u(x) < \lambda\}$ เป็นระดับโดเมน (level domain) แล้ว*

$$\int_\Omega |Du| = \int_{-\infty}^{\infty} Per(L_\lambda, \Omega) d\lambda$$

เมื่อ $Per(L_\lambda, \Omega) = \int_\Omega |D_{x^{L_\lambda}}|$ *คือ perimeter ของ* L_λ *ใน* Ω *และ* χ^{L_λ} *คือลักษณะเฉพาะ (characteristic) ของฟังก์ชัน* L_λ
โดยบนพิสูจน์สามารถดูได้ใน [11]

2.4 วิธีการเร็กกิวลาร์ไลซ์เซชัน

ในโครงงานวิจัยเรื่องนี้ จะพบปัญหา Ill-posed ซึ่งทำให้การแก้ปัญหานั้นเกิดความยากลำบากขึ้น จึงจำเป็นต้องหาวิธีแก้ปัญหา Ill-posed ให้เป็นปัญหา Well-posed ก่อนนำไปแก้ปัญหาถัดไป

2.4.1 ปัญหา Well-posed และปัญหา Ill-posed

บทนิยาม 7. *(ปัญหา Well-posed) จะเรียกปัญหาต่อไปนี้ว่าเป็นปัญหา Well-posed เมื่อปัญหามีคุณสมบัติดังนี้*

1. *มีคำตอบ*
2. *มีเพียงคำตอบเดียว*
3. *คำตอบขึ้นอยู่กับความต่อเนื่อง*

หากปัญหาไม่ตรงคุณสมบัติใดจากทั้ง 3 ข้อ จะเรียกปัญหาดังกล่าวว่า ปัญหา Ill-posed

2.4.2 ปัญหาย้อนกลับ

ปัญหาย้อนกลับ (Inverse problem) คือปัญหาสำหรับการกู้คืนข้อมูลพารามิเตอร์จากตัวแบบทางคณิตศาสตร์โดยใช้ข้อมูลบางพารามิเตอร์ที่ทราบค่าอยู่ ซึ่งโดยทั่วไปแล้วปัญหาย้อนกลับนี้มักจะเป็นปัญหา Ill-posed

ตัวอย่าง 2.4.1. *สำหรับตัวอย่างปัญหาย้อนกลับ เช่น จงหาค่า* x *และ* y *ที่ทำให้* $x + y = 5$ *จะเห็นว่ามีชุดของคำตอบ* $x + y = 5$ *อยู่มากมาย ซึ่งทำให้เป็นปัญหา Ill-posed เนื่องจากคำตอบของปัญหาไม่ได้มีเพียงชุดเดียว*

ในส่วนของการต่อเติมภาพที่เสียหายนั้นเป็นปัญหาย้อนกลับและเป็นปัญหา Ill-posed ด้วยเนื่องจากคำตอบในบริเวณที่จะต่อเติมไม่ได้มีเพียงคำตอบเดียว ตัวอย่างเช่น ภาพที่ 2.4.1 ภาพช้างทีเสียหาย[1] ในบริเวณภาพสีแดงซึ่งภาพเกิดความเสียหายขึ้น อาจจะมีคำตอบเป็นขาของช้าง หรือมีคำตอบเป็นสิงโตดังในภาพก็ได้

รูปที่ 2.4.1: ตัวอย่างการต่อเติมภาพที่ไม่มีคำตอบเฉพาะเจาะจง

ตัวอย่าง 2.4.2. *ตัวอย่างปัญหาย้อนกลับ เมื่อ z เป็นภาพซึ่ง นิยามอยู่ใน $\Omega \in \mathbb{R}^2$ η คือสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียนที่มีส่วนเบี่ยงเบนมาตราฐานเป็น σ^2 และ u คือภาพที่มีสัญญาณรบกวน โดยที่ $u = z + \eta$ เราสามารถนำสัญญาณรบกวนออกได้โดยหา u ที่เหมาะสมจาก*

$$\underset{min}{u}\left\{\left|\int_\Omega |u - z|^2 d\Omega - \sigma^2\right|\right\} \tag{2.4.1}$$

ซึ่ง u ที่เหมาะสมมีหลายคำตอบจึงได้ว่า u นี่เป็นปัญหา Ill-posed

2.4.3 เร็กกิวลาไลซ์เซชัน

วิธีเร็กกิวลาไลซ์เซชัน (Regularization) เป็นวิธีการทำให้ปัญหาย้อนกลับกลายเป็นปัญหา Well-posed ได้ โดยคุณ Tikhonov และคุณ Arsenin [8] ได้นำเสนอวิธีการสำหรับจัดการปัญหาค่าเหมาะสมโดยใช้การแนะนำวิธีการแก้ปัญหานี้โดยการทำให้ปัญหามีคำตอบอยู่ในชุดของคำตอบใด คำตอบหนึ่ง หรือทำให้มีคุณลักษณะที่เฉพาะเจาะจง

จากตัวอย่าง 2.4.1 สามารถทำให้คำตอบเจาะจงขึ้นได้ โดยการเพิ่มเงื่อนไขเข้าไปว่า $x + y = 5$ เมื่อ $\sqrt{x^2 + y^2}$ มีค่าน้อยที่สุด

[1] ภาพจาก https://9gag.com/gag/aer4VwB สืบค้นเมื่อ 10 มีนาคม 2562

จากตัวอย่าง 2.4.2 เราสามารทำให้คำตอบเจาะจงขึ้นได้โดยการเพิ่มพจน์เข้าไปดังนี้

$$\underset{min}{u}\left\{\left|\int_{\Omega}|u-z|^2 d\Omega-\sigma^2\right|+\alpha\int_{\Omega}|\nabla u|^2\right\} \tag{2.4.2}$$

โดยจะเรียกพจน์แรกว่าพจน์ปรับค่าข้อมูล (Data fitting term) และพจน์ที่ 2 ว่าพจน์เร็กกิวลาไลซ์เซชัน (Regularization term) โดยเมื่อคำตอบ u มีค่าเกรเดียนต์ที่น้อยแล้วจะได้ผลลัพธ์ออกมาเป็นภาพที่ไม่มีสัญญาณรบกวน

2.5 วิธีการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนจ์เบื้องต้น

วิธีการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนจ์ (finite difference method) ถูกคิดค้นโดย เป็นวิธีการเชิงตัวเลขที่พัฒนาขึ้นเพื่อแก้ไขปัญหาค่าขอบ ซึ่งทั่วไปแล้วขั้นตอนของวิธีการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์สำหรับการแก้ปัญหาค่าขอบประกอบดวยสามขั้นตอนสำคัญดังนี้

1. ดิสครีตไทซ์ (discretize) โดเมนของผลเฉลย (solution domain) ออกเป็นช่องตาราง (mesh) ของจุดกริด (grid point) ที่ต้องการหาผลเฉลยเชิงตัวเลข

2. ประมาณอนุพันธ์ที่ปรากฏในปัญหาค่าขอบด้วยการประมาณแบบไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ (finite difference approximation) ในขั้นตอนนี้ การประมาณดังกล่าวจะนำไปสู่ระบบสมการเชิงเส้น หรือระบบสมการไม่เป็นเชิงเส้นขนาดใหญ่ที่สมนัยกับปัญหาค่าขอบตั้งต้น

3. แก้ระบบสมการเชิงเส้นหรือระบบสมการไม่เป็นเชิงเส้นขนาดใหญ่ที่เกิดขึ้นในขั้นตอนที่ 2 เพื่อกำหนดผลเฉลยเชิงตัวเลข

กำหนดให้ $u(x)$ แทนฟังก์ชันค่าจริงและเป็นฟังก์ชันราบเรียบ (smooth function) นั่นคือ u สามารถหาอนุพันธ์ได้หลายครั้ง โดยแต่ละครั้ง อนุพันธ์ที่หาได้เป็นฟังก์ชันที่ถูกนิยามอย่างดี (well-defined) และมีขอบเขตเหนือช่วงที่มีจุดที่สนใจ $\bar{x}$

ในการประมาณ $u'(\bar{x})$ โดยใช้ค่าของ u ที่เกิดจากจุดที่อยู่ในบริเวณใกล้เคียงกับ $\bar{x}$ สามารถใช้สูตรการประมาณแบบไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ที่ถูกกำหนดได้ดังต่อไปนี้

1. สูตรฟอร์เวิร์ดดิฟเฟอเรนซ์ (forward-difference formular)

$$D_{+}u(\bar{x}) = \frac{u(\bar{x}+h) - u(\bar{x})}{h}$$

2. สูตรแบ็คเวิร์ดดิฟเฟอเรนซ์ (backward-difference formular)

$$D_{-}u(\bar{x}) = \frac{u(\bar{x}) - u(\bar{x}-h)}{h}$$

3. สูตรเซ็นทรัลดิฟเฟอเรนซ์ (forward-difference formular)

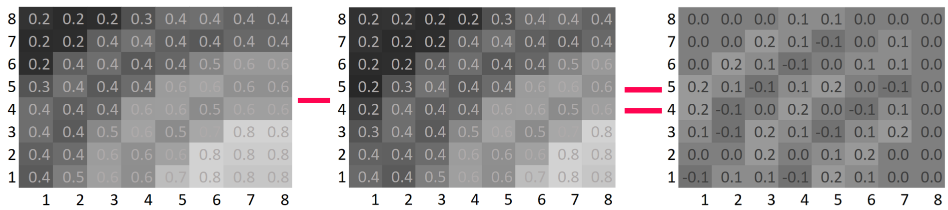
$$D_{0}u(\bar{x}) = \frac{u(\bar{x}+h) - u(\bar{x}-h)}{2h}$$

โดยที่ h เป็นจำนวนจริงที่มีค่าน้อยๆ ซึ่ง $h > 0$

สำหรับโครงงานวิจัยนี้ จะใช้วิธีการหาอนุพันธ์โดยประมาณไฟไนต์ดริฟเฟอเรนจ์แบบฟอร์เวิร์ดดิฟเฟอร์เรน จึงได้ว่าการหาอนุพันธ์ของค่าความเข้มที่พิกัดทางกายภาพเป็น (i, j) สามารถหาได้ดังนี้

$$\frac{d}{dx}u_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h}$$

เมื่อระบบกริดที่ใช้บนภาพมีความห่างเพียงหนึ่งหน่วย จึงได้ว่า $h = 1$ ทั้งนี้ระยะห่าง h อาจเปลี่ยนไปตามชั้นของพีระมิดรูปภาพ



รูปที่ 2.5.1: ตัวอย่างการหาอนุพันธ์บนภาพเฉดเทา

จากภาพ **??** เมื่อต้องการหาอนุพันธ์เทียบแกน x จะทำตามภาพที่ 2.5.1โดยทำการสร้างภาพซึ่งทำการตัดขอบทางซ้ายออกหนึ่งคอลัมม์และเพิ่มขอบทางขวาหนึ่งคอลัมม์โดยใช้เงื่อนไขค่าขอบแบบนิวแมน จากนั้นภาพที่สร้างขึ้นไปลบกับภาพเดิมจะได้อนุพันธ์ของภาพนั้นดังที่ปรากฏทางขวา ทั้งนี้หาก $h \neq 1$ สามารถทำการหารภาพผลลัพธ์ด้วยค่า h ได้เพื่อให้ได้ค่าที่ต้องการ

สำหรับการหาเกรเดียนซ์ (Gradient) จะใช้การหาอนุพันธ์โดยวิธีฟอร์เวิร์ดดิฟเฟอร์เรนจ์ดังที่กล่าวไปในข้างต้น ในแนวแกน x และแนวแกน y คำตอบที่ได้จะเป็นเวคเตอร์ของอนุพันธ์แนวแกน x และอนุพันธ์แนวแกน y ได้เวคเตอร์ดังนี้

$$\nabla \vec{v_{u_i}} = (\frac{\partial}{\partial x} u_{i,j}, \frac{\partial}{\partial y} u_{i,j})^\top$$

สำหรับไดเวอร์เจน (Divergence) จะเป็นการหาผลรวมของอนุพันธ์ในแต่ละแกนของเวคเตอร์ด้วยวิธีฟอร์เวิร์ดดิฟเฟอร์เรนจ์ นั่นคือ

$$\nabla \cdot (\vec{v_{i,j}}) = \frac{\partial}{\partial x} \vec{v_{i,j}}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{v_{i,j}}_y$$

สำหรับลาปาเซียน (Lapacian) นั่นคือการทำหาไดเวอร์เจนบนเวคเตอร์ที่หาแกรเดียนแล้ว แต่ทั้งนี้สามารถหาลาปาเซียนได้จาก

$$\triangle u_{i,j} = u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j}$$

2.6 วิธีการทำซ้ำสำหรับระบบสมการเชิงเส้น

ในหัวข้อนี้จะแนะนำถึงวิธีการทำซ้ำเพื่อแก้ปัญหาระบบสมการเชิงเส้น สำหรับโครงงานวิจัยเรื่องนี้มีการแก้ปัญหาของระบบสมการเชิงเส้น เพื่อทำการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ที่ถูกเปลี่ยนให้เป็นระบบสมการเชิงเส้นแล้ว โดยระบบสมการเชิงเส้นที่จะทำการแก้นั้นอยู่ในรูปของ

$$Ax = b \tag{2.6.1}$$

เมื่อ $x \in \mathbb{R}^N$ และ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $N \times N$ โดยการทำซ้ำนี้จะเริ่มจากค่าประมาณเริ่มต้น (intial approximation) $x^{(0)}$ และทำการสร้างลำดับ $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ จากความสัมพันธ์

$$x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c \tag{2.6.2}$$

เมทริกซ์ความสัมพันธ์ T และเวคเตอร์ c มาจากการแบ่ง $A = M - N$ ของเมทริกซ์ A เมื่อ M เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน โดยแยกระบบเดิม 2.6.1 ออกเป็น

$$Ax = (M - N)x = b \tag{2.6.3}$$

นั่นคือ

$$x = (M^{-1}N)x + M^{-1}b = Tx + c \tag{2.6.4}$$

เมื่อ $T = M^{-1}N$ และ $c = M^{-1}b$ โครงงงานวิจัยนี้ทางผู้วิจัยได้เลือกใช้วิธีเกาส์-ไซเดลซึ่งเป็นวิธีการที่พัฒนาต่อมาจากวิธีการจาโคบี จึงขอนำเสนอทั้งสองวิธีการ ดังนี้

2.6.1 วิธีการจาโคบี

วิธีการจาโคบีจะแก้สมการที่ i ของ $Ax = b$ โดยหา x_i ซึ่งกำหนดโดย

$$x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \left(\frac{-a_{ij}x_j}{a_{ii}}\right) + \frac{b_i}{a_{ii}} \qquad \text{เมื่อ } i = 1, ..., N \tag{2.6.5}$$

ให้ $x^{(k-1)}$ สำหรับทุก $k \geq 1$ ซึ่งก่อกำเนิดโดย

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{-a_{ij}x_j^{(k-1)}}{a_{ii}}\right) + \frac{b_i}{a_{ii}} \qquad \text{เมื่อ } i = 1, ..., N \tag{2.6.6}$$

ซึ่งจำเป็นที่ $a_{ii} \neq 0$ สำหรับ $i = 1, ..., N$ แต่ถ้ามีอย่างน้อยหนึ่ง $a_{ii} = 0$ และระบบไม่เอกฐาน ก็สามารถสับเปลี่ยนลำดับเพื่อให้ไม่มี a_{ii} ที่เป็น 0 ได้ และการเขียน $Ax = b$ เป็น $x = Tx + c$ จะทำการเปลี่ยน A เป็น $A = D - L - U$ เมื่อ D เป็นเมทริกซ์แทยงมุมของ A, $-L$ เป็นสามเหลี่ยมส่วนล่างของ A และ $-U$ เป็นสามเหลี่ยมส่วนบนของ A จึงได้ว่า

$$Ax = (D - L - U)x = b \tag{2.6.7}$$

หรือ

$$x = D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b \tag{2.6.8}$$

เมื่อทำการแบ่งเมทริกซ์เป็น $A = M - N$ โดยที่ $M = D$ และ $N = L + U$ แล้วจะได้ว่าเมทริกซ์สำหรับวิธีการจาโคบีคือ

$$x^(k) = T_j x^(x - 1) + c_J \tag{2.6.9}$$

เมื่อ $T_J = D^{-1}(L + U)$ และ $c_J = D^{-1}b$

ขั้นตอนวิธีจาโคบี

ขั้นตอนวิธีของจาโคบีเพื่อหาค่าใกล้เคียงของคำตอบ $Ax = b$ จะให้ค่าใกล้เคียงของคำจอบเริ่มต้นเป็น $x^{(0)}$ ให้จำนวนรอบการทำซ้ำสูงสุดเป็น $IMAX$ และให้ค่าความคลาดเคบื่อนเป็น $\epsilon > 0$

Algorithm 1: ขั้นตอนวิธีจาโคบี

$[x] \longleftarrow Jacobi(A, b, x^{(0)}, IMAX, \epsilon)$

1. ให้ $k = 1, N = size(x^{(0)})$, done = False
2. ถ้า done = False ทำซ้ำขั้นตอนที่ 3 และ 4
3. $x_i^{(x)} = \sum_{j=1}^{(k-1)} \left(\frac{-a_{ij}x_j^{(k-1)}}{a_i i} + \frac{b_i}{a_{ii}} \right)$
4. **if** $||b - Ax^{(k)}|| < \epsilon$ *หรือ* $||x^{(k)} - x^{(k-1)}|| < \epsilon$ *หรือ* $k \geq \epsilon$ **then**
   ให้ done = True และ $x = x^{(k)}$

else

ให้ $k = k + 1$

end

2.6.2 วิธีการเกาส์-ไซเดล

จากวิธีการจาโคบีมีคำนวณคำ $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_{i-1}^{(k)}$ ซึ่งสามารถเพิ่มประสิทธิภาพได้ด้วยการเปลี่ยนสมการของ $x_i^{(k)}$ เป็น

$$x_i^{(k)} = \frac{-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{N} a_{ij}x_j^{(k-1)} + b_i}{a_{ii}} \tag{2.6.10}$$

วิธีการนี้เรียกว่า วิธีการเกาส์-ไซเดล ซึ่งสามารถเขียนสมการใหม่ได้เป็น

$$a_{ii}x_i^{(k)} + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} = -\sum_{j=i+1}^{N} a_{ij}x_j^{(k-1)} + b_i \tag{2.6.11}$$

จะได้รูปแบบเมทริกซ์ของวิธีเกาส์-ไซเดลเป็น

$$(D - L)x^{(k)} = Ux^{(k-1)} + b \tag{2.6.12}$$

ซึ่งสมมูลกับ

$$x^{(k)} = T_{GS}x^{(k-1)} + c_{GS} \tag{2.6.13}$$

เมื่อ $T_{GS} = (D-L)^{-1}U$ และ $c_{GS} = (D-L)^{-1}b$ นั่นคือเกาส์-ไซเดล มีพื้นฐานมาจากการแยกเมทริกซ์ด้วย $M = D - L$ และ $N = U$

ขั้นตอนวิธีเกาส์-ไซเดล

ขั้นตอนวิธีเกาส์-ไซเดล เหมือนกับขั้นตอนวิธีจาโคบี แต่เปลี่ยนขั้นที่ 3 เป็นสมการที่ 2.6.10

บรรณานุกรม

[1] T.F. Chan and J. Shen , “Mathematical models of local non-texture inpaintings”, SIAM Journal on Applied Mathematics, vol. 62, no. 3, pp. 1019–1043, 2001.

[2] L. I. Rudin, S. Osher, E. Fatemi, “Nonlinear total variation based noise removal algorithms”, Physica D: Nonlinear Phenomena, vol 60, issues 1–4, pp. 259-268, 1992.

[3] C.R. Vogel and M.E. Oman,“Iterative methods for total variation denoising”, SIAM Journal on Scientific Computing. vol. 17, pp. 227-238, 1996.

[4] T. Goldstein and S. Osher,“The Split Bregman Method for L1-Regularized Problems”, SIAM Journal on Imaging Sciences. vol. 2, issue 2, pp. 323-343, 2009.

[5] E.H. Andelson and C.H. Anderson and J.R. Bergen and P.J. Burt and J.M. Ogden. ”Pyramid methods in image processing”. 1984

[6] David Salomon. Data Compression: The Complete Reference (4 ed.). Springer. pp. 281. 2007.

[7] Zhou Wang, Alan Conrad Bovik, Hamid Rahim Sheikh and Eero P. Simoncelli, ”Image quality assessment: from error visibility to structural similarity,” in IEEE Transactions on Image Processing, vol. 13, no. 4, pp. 600-612, 2004.

[8] A. N. Tikhonov and V. Y. Arsenin. Solutions of Ill-posed Problems. Wiston and Sons, Washington, D.C., 1977

[9] B. Dacorogna. Introduction to the Calculus of Varations. Introduction to the Calculus of Varations, 2004.

[10] N. Chumchob. A study of effective variational models and efficient numerical methods for image registration. University of Liverpool, UK 2010

[11] E. Giusti. Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation. Monographs in Mathematics, Vol. 80. Birkhauser, 1984