1.1 ฟังก์ชันของการแปรผันที่มีขอบเขต

ให้ Ω เป็นเซ็ตเปิดมีขอบเขตของ $\mathbb{R}^d$ และให้ $u \in L^1(\Omega)$ กำหนดให้การแปรผันรวม u เป็น

$$\int_\Omega |Du| = \text{sup}\Big\{ \int_\Omega u\nabla \cdot \varphi \Big\} \tag{1.1.1}$$

เมื่อ เป็น (Lebesgue measure) แลต $C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$ คือปริภูมิของฟังก์ชันต่อเนื่องที่หาอนุพันธ์ได้และกระชับใน Ω

ตามที่ได้ถูกกล่าวถึงใน [11] สำหรับกรณีเฉพาะซึ่งเป็นที่น่าสนใจ $u \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$ โดยการใช้ปริพันธ์แบบแยกส่วน

$$\int_\Omega u\nabla \cdot \varphi dx = -\int_\Omega \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi_i dx \tag{1.1.2}$$

สำหรับทุก $\varphi \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^d)^d$ และ

$$\int_\Omega |Du| = \int_\Omega |\nabla u| dx \tag{1.1.3}$$

ฟังก์ชัน $u \in L^1(\Omega)$ เรียกว่ามีขอบเขตการแปรผันใน Ω ถ้า $\int_\Omega |Du| < \infty$ โดยเรากำหนดให้ $BV(\Omega)$ เป็นปริภูมิของฟังก์ชันทั้งหมดใน $L^1(\Omega)$ การแปรผันที่มีขอบเขต

ตัวอย่าง 1.1.1. *ฟังก์ชัน $f1, f2$และ$f3$ ต่อไปนี้กำหนดโดย*

$$f1(x) = sinx, \tag{1.1.4}$$

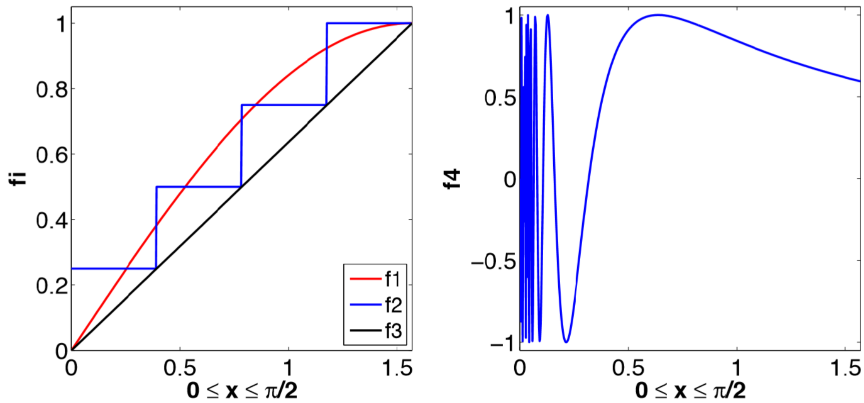
$$f2(x) = \begin{cases} 1/4, & x \in [0, \Pi/8] \\ 1/2, & x \in [\Pi/8, \Pi/4] \\ 3/4, & x \in [\Pi/4, 3\Pi/8] \\ 1, & x \in [3\Pi/8, \Pi/2] \end{cases} \tag{1.1.5}$$

$$f3(x) = \frac{2x}{\Pi}, \tag{1.1.6}$$

จาก $BV(\Omega)$ *ซึ่ง* $\Omega = [0, \Pi/2]$ *และมีการแปรผันรวมมีค่าเป็น 1 ให้ฟังก์ชัน* $f4$ *กำหนดโดย*

$$f4(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ sin1/x, & x \in (0, a) \text{และ} a > 0 \end{cases} \tag{1.1.7}$$

มีการแปรผันไม่จำกัดและไม่อยู่ใน $BV(\Omega)$ *ซึ่ง* $\Omega = [0, a]$ *สำหรับทุก* $a > 0$



รูปที่ 1.1.1: ฟังก์ชันแปรผันมีขอบเขตทั้งสามฟังก์ชันที่มีการแปรผันรวมเหมือนกันเท่ากับ 1 และฟังก์ชันที่มีการแปรผันไม่จำกัด

ซึ่งสำหรับในหัวข้อนี้เราสามารถสรุปได้เป็นสูตรของคลอเลีย (Coarea formula)

ทฤษฎีบท 1.1. *(Coarea fomula) ให้* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *เป็นเซ็ตเปิดและให้* $u \in BV(\Omega)$ *และ* $L_\lambda = \{x \in \Omega | u(x) < \lambda\}$ *เป็นระดับโดเมน (level domain) แล้ว*

$$\int_\Omega |Du| = \int_{-\infty}^{\infty} Per(L_\lambda, \Omega) d\lambda$$

เมื่อ $Per(L_\lambda, \Omega) = \int_\Omega |D_{x^{L_\lambda}}|$ *คือ perimeter ของ* L_λ *ใน* Ω *และ* χ^{L_λ} *คือลักษณะเฉพาะ (characteristic) ของฟังก์ชัน* L_λ

โดยบนพิสูจน์สามารถดูได้ใน [11]

บรรณานุกรม

[1] T.F. Chan and J. Shen , “Mathematical models of local non-texture inpaintings”, SIAM Journal on Applied Mathematics, vol. 62, no. 3, pp. 1019–1043, 2001.

[2] L. I. Rudin, S. Osher, E. Fatemi, “Nonlinear total variation based noise removal algorithms”, Physica D: Nonlinear Phenomena, vol 60, issues 1–4, pp. 259-268, 1992.

[3] C.R. Vogel and M.E. Oman,“Iterative methods for total variation denoising”, SIAM Journal on Scientific Computing. vol. 17, pp. 227-238, 1996.

[4] T. Goldstein and S. Osher,“The Split Bregman Method for L1-Regularized Problems”, SIAM Journal on Imaging Sciences. vol. 2, issue 2, pp. 323-343, 2009.

[5] E.H. Andelson and C.H. Anderson and J.R. Bergen and P.J. Burt and J.M. Ogden. ”Pyramid methods in image processing”. 1984

[6] David Salomon. Data Compression: The Complete Reference (4 ed.). Springer. pp. 281. 2007.

[7] Zhou Wang, Alan Conrad Bovik, Hamid Rahim Sheikh and Eero P. Simoncelli, ”Image quality assessment: from error visibility to structural similarity,” in IEEE Transactions on Image Processing, vol. 13, no. 4, pp. 600-612, 2004.

[8] A. N. Tikhonov and V. Y. Arsenin. Solutions of Ill-posed Problems. Wiston and Sons, Washington, D.C., 1977

[9] B. Dacorogna. Introduction to the Calculus of Varations. Introduction to the Calculus of Varations, 2004.

[10] N. Chumchob. A study of effective variational models and efficient numerical methods for image registration. University of Liverpool, UK 2010

[11] E. Giusti. Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation. Monographs in Mathematics, Vol. 80. Birkhauser, 1984