2.1 แคลคูลัสของการแปรผันเบื้องต้น

แคลคูลัสของการแปรผัน (Calculus of variations) คือสาขาวิชาในวิชา คณิตศาสตร์วิเคราห์ เพื่อใช้สำหรับแก้ปัญหาค่าเหมาะสม โดยจะสนใจที่จะหาฟังก์ชันที่เหมาะสมแทนที่จะหาค่าของตัวแปรที่เหมาะสม แคลคูลัสของการแปรผันนั้นมักจะเกี่ยวข้องกับปัญหาที่ต้องการปริมาณน้อยสุดหรือมากสุดซึ่งปรากฏอยู่ในรูปของอนุพันธ์หรือปริพันธ์ที่ไม่ทราบค่าฟังก์ชัน

ซึ่งฟังก์ชันหาค่าต่ำสุด มักจะมีรูปทั่วไปดังสมการ 2.1.1

$$\min_{u} \int \mathcal{J}(u) \tag{2.1.1}$$

โดยที่ $\mathcal{J} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่ส่งจากฟังก์ชันไปยังจำนวนจริง เรียกว่า ฟังก์ชันนัล (functional) พร้อมทั้งกำหนด $\mathcal{U}$ เป็นปริภูมิของคำตอบซึ่งประกอบด้วยฟังก์ชันค่าต่ำสุดของ $\mathcal{J}$ และ $\mathcal{V}$ เป็นปริภูมิทดสอบซึ่งบริภูมินี้สามารถเขียนเป็นผลต่างระหว่าง 2 ฟังก์ชันได้ นั่นคือ

$$\mathcal{V} = \{v | v = u - \hat{u} \ \text{ และ } \ u, \hat{u} \in \mathcal{U}\} \tag{2.1.2}$$

บทนิยาม 1. *(ย่านใกล้เคียง) ให้ $\mathcal{U}$ เป็นปริภูมิคำตอบ ฟังก์ชัน $\hat{u} \in \mathcal{U}$ และ $\epsilon > 0$ แล้ว $\mathcal{B}_\epsilon$ จะเป็นย่านใกล้เคียงของ $\hat{u}$ เมื่อ*

$$\mathcal{B}_\epsilon = \{u \in \mathcal{U} | ||u - \hat{u}|| < \epsilon\}$$

จาก 2.1.1 โลคอลมินิไมเซอร์ (local minimizer) จะกำหนดโดย

บทนิยาม 2. *(โลคอลมินิไมเซอร์) ให้ $\mathcal{U}$ เป็นปริภูมิคำตอบ และฟังก์ชันนัล $\mathcal{J} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ จะเรียก $\hat{u} \in \mathcal{U}$ ว่าโลตอลมินิไมเซอร์ของ $\mathcal{J}$ ถ้าทุก $\epsilon > 0$ มี $\delta > 0$ โดยที่ $\mathcal{J}(\hat{u}) \leq \mathcal{J}(u)$ สำหรับทุก $u \in \mathcal{B}_\epsilon(\hat{u})$*

ในการนิยามเงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับโลคอลมินิไมเซอร์ของ $\mathcal{J}$ จำเป็นต้องมีการกำหนดการหาอนุพันธ์แบบมีทิศทาง

บทนิยาม 3. *(Gâteaus-differentiable) $\mathcal{U}$ เป็นปริภูมิคำตอบม $\mathcal{V}$ เป็นปริภูมิทดสอบ และฟังก์ชันนัล $\mathcal{J} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ แล้ว $\mathcal{J}$ เป็น Gâteaus-differentiable เมื่อทุก $u \in \mathcal{U}$ อยู่ในทิศทางของ $v \in \mathcal{V}$ ถ้า*

1. *มีจำนวน $\hat{\epsilon} > 0$ ซึ่งทำให้ $u_\epsilon = u + \epsilon v \in \mathcal{U}$ สำหรับทุก $|e| \leq \hat{\epsilon}$*

2. ฟังก์ชัน $J(\epsilon) = \mathcal{J}(u_\epsilon)$

โดยอนุพันธ์อันดับแรกของ Gâteaus หรือคการแปรผันอันดับแรก (first variation) ของ $\mathcal{J}$ สำหรับ u ที่อยู่ในทิศทางของ v กำหนดโดย

$$\delta\mathcal{J}(u;v) = J'(0) = \frac{d\mathcal{J}(u+\epsilon v)}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} = \lim_{\epsilon=0}\frac{\mathcal{J}(u+\epsilon v)}{\epsilon}$$

และนิยามจุดคงตัว (stationary point) โดย

บทนิยาม 4. *(จุดคงตัว) $\mathcal{U}$ เป็นปริภูมิคำตอบม $\mathcal{V}$ เป็นปริภูมิทดสอบ และฟังก์ชันนัล $\mathcal{J}:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ สมมติให้บาง $\hat{u}\in\mathcal{U}$ แล้ว $\mathcal{J}$ เป็น Gâteaus-differentiable สำหรับทุกฟังก์ชันทดสอบ $v\in\mathcal{V}$ แล้ว $\hat{u}$ จะเรียกว่าจุดคงของ $\mathcal{J}$ ก็ต่อเมื่อ $\delta\mathcal{J}(\hat{u};v)=0$ สำหรับทุก $v\in\mathcal{V}$*

เงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับมินิไมเซอร์นั้นสามารถสร้างได้จากการใช้จุดคงตัว

ทฤษฎีบท 2.1. *(เงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับโลคอลมินิไมเซอร์) ให้ $\mathcal{U}$ เป็นปริภูมิคำตอบ ซึ่ง $\hat{u}\in\mathcal{U}$, ฟังก์ชันนัล $\mathcal{J}:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$, $\mathcal{V}$ เป็นปริภูมิทดสอบโดยที่ v เป็นฟังก์ชันทดสอบซึ่ง $v\in\mathcal{V}$ และ $\mathcal{J}$ เป็น Gâteaus-differentiable สำหรับทุก $\hat{u}$*
ถ้า $\hat{u}$ เป็นโลคอลมินิไมเซอร์ของ $\mathcal{J}$ แล้ว $\hat{u}$ เป็นจุดคงตัวของ $\mathcal{J}$
สำหรับบทพิสูจน์จะพบได้ใน [?]

ด้วยทฤษฎีบทนี้เราจะศึกษาเงื่อนไขของจุดคงตัวเพิ่มเติมโดยเราเลือกฟังก์ชันนัลทั่วไป $\mathcal{J}$ ซึ่งนิยามโดย

$$\mathcal{J}(u) = \int_\Omega F[x, u(x), \nabla u(x)]dx \tag{2.1.3}$$

โดยที่ $\Omega\subset\mathbb{R}^d, d>1$ เป็นเซ็ตเปิดมีขอบเขตและ F เป็นฟังก์ชันนัลที่ขึ้นอยู่กับ $x=(x_1,x_2,...,X_d)^\top$ สมมติให้ $\mathcal{J}$ เป็น Gâteaus-differentiable ในทุกทิศทางของปริภูมิทดสอบ ดังนั้นจึงสมมุติได้ว่า F เป็นอนุพันธ์ย่อยที่ต่อเนื่อง
ก่อนที่จะแนะนำเงื่อนไขสำหรับจุดคงตัวของ $\mathcal{J}$ เราแนะนำ

$$\nabla_u F = \partial F/\partial u = F_u \tag{2.1.4}$$

สำหรับเกรเดียนซ์ของ F ซึ่งขึ้นอยู่กับ u จะกำหนดโดย

$$\nabla F = (\partial F/\partial x_1, ...\partial F/\partial x_d,)^\top \tag{2.1.5}$$

ในทำนองเดียวกันเกรเดียนซ์ของ F ซึ่งขึ้นอยู่กับ ∇u กำหนดโดย

$$\nabla_{\nabla u} F = (\partial F/\partial u_{x_1}, ..., \partial F/\partial u_{x_d})^\top \in \mathbb{R}^d \tag{2.1.6}$$

โดยในขั้นนี้เราจะเลือกคำตอบที่เจาะจงโดยการเพิ่มเงื่อนไขค่าขอบเข้าไป ตัวอย่างเช่น

$$\tilde{\mathcal{U}} = \{u \in \mathcal{U} | u = c\text{บน}\partial\Omega\} \tag{2.1.7}$$

และเช่นเดียวกันปริภูมิทดสอบจะถูกกำหนดโดย

$$\tilde{\mathcal{V}} = \{v \in \mathcal{V} | v = 0\text{บน}\partial\Omega\} \tag{2.1.8}$$

อีกทั้งขั้นตอนที่กล่าวมาไม่เพียงครอบคลุมปริภูมิทั่วไป $\mathcal{U}$ และ $\mathcal{V}$ แต่ยังครอบคลุมไปถึงกรณีที่เป็นเวคเตอร์เมื่อ $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, ..., u_d)^\top : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$

ทฤษฏีบทประกอบ 2.1.1. *(จุดคงตัวของ $\mathcal{J}$) ฟังก์ชัน $u \in \mathcal{U}$ เป็นจุดคงตัวของฟังก์ชันนัลทั่วไป $\mathcal{J}$ 2.1.3 ถ้า*

$$\int_\Omega \left\langle \nabla_u F - \nabla \cdot \nabla_{\nabla u} F, v \right\rangle_{\mathbb{R}^d} dx = 0 \tag{2.1.9}$$

บทพิสูจน์ของทฤษฏีบทประกอบนี้สามารถดูได้จาก [?]

เห็นได้ชัดว่า 2.1.9 เป็นจริงสำหรับฟังก์ชันทดสอบคงตัวที่ค่าไม่เจาะจง เพราะถ้า $\nabla_u F - \nabla \cdot \nabla_{\nabla u}$ การยืนยันทฤษฏีบทนี้ เป็นทฤษฏีบทที่รู้กันดีอยู่แล้ว ดังนั้น $u \in \tilde{U}$ เป็นจุดคงตัวของฟังก์ชันนัล $\mathcal{J}$ ซึ่งเป็น Gâteaus-differentiable ถ้า

$$\nabla u F - \nabla\ \nabla_{\nabla u} F = 0\text{บน}\Omega \tag{2.1.10}$$

โดยการใช้ทฤษฎีบท 2.1 กับ 2.1.10 จะได้เงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับโลคอลมินิไมเซอร์ของ 2.1.1 จาก $d > 1$ และ 2.1.10 จะนำไปสู่สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ซึ่งรู้จักกันในชื่อของสมการออยเลอร์-ลากรางซ์ ที่มีเงื่อนไขค่าขอบ โดยจะเรียก 2.1.1 ที่มีเงื่อนไขค่าขอบว่า รูปแบบการแปรผัน (variational formulation) และถ้าเงื่อนไขค่าขอบนั้นถูกกำหนดไว้ชัดเจนตามทฤษฎีบทประกอบที่

บรรณานุกรม

[1] T.F. Chan and J. Shen , “Mathematical models of local non-texture inpaintings”, SIAM Journal on Applied Mathematics, vol. 62, no. 3, pp. 1019–1043, 2001.

[2] L. I. Rudin, S. Osher, E. Fatemi, “Nonlinear total variation based noise removal algorithms”, Physica D: Nonlinear Phenomena, vol 60, issues 1–4, pp. 259-268, 1992.

[3] C.R. Vogel and M.E. Oman,“Iterative methods for total variation denoising”, SIAM Journal on Scientific Computing. vol. 17, pp. 227-238, 1996.

[4] T. Goldstein and S. Osher,“The Split Bregman Method for L1-Regularized Problems”, SIAM Journal on Imaging Sciences. vol. 2, issue 2, pp. 323-343, 2009.

[5] E.H. Andelson and C.H. Anderson and J.R. Bergen and P.J. Burt and J.M. Ogden. ”Pyramid methods in image processing”. 1984

[6] David Salomon. Data Compression: The Complete Reference (4 ed.). Springer. pp. 281. 2007.

[7] Zhou Wang, Alan Conrad Bovik, Hamid Rahim Sheikh and Eero P. Simoncelli, ”Image quality assessment: from error visibility to structural similarity,” in IEEE Transactions on Image Processing, vol. 13, no. 4, pp. 600-612, 2004.

[8] A. N. Tikhonov and V. Y. Arsenin. Solutions of Ill-posed Problems. Wiston and Sons, Washington, D.C., 1977