1.1 วิธีการทำซ้ำสำหรับระบบสมการเชิงเส้น

โดยในหัวข้อนี้จะแนะนำถึงวิธีการทำซ้ำเพื่อแก้ปัญหาระบบสมการเชิงเส้น

$$Ax = b \tag{1.1.1}$$

เมื่อ $x \in \mathbb{R}^N$ และ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $N \times N$ โดยการทำซ้ำนี้จะเริ่มจากค่าประมาณเริ่มต้น (intial approximation) $x^{(0)}$ และทำการสร้างลำดับ $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ จากความสัมพันธ์

$$x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c \tag{1.1.2}$$

เมทริกซ์ความสัมพันธ์ T และเวคเตอร์ c มาจากการแบ่ง $A = M - N$ ของเมทริกซ์ A เมื่อ M เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน โดยแยกระบบเดิม 1.1.1 ออกเป็น

$$Ax = (M - N)x = b \tag{1.1.3}$$

นั่นคือ

$$x = (M^{-1}N)x + M^{-1}b = Tx + c \tag{1.1.4}$$

เมื่อ $T = M^{-1}N$ และ $c = M^{-1}b$

1.1.1 วิธีการจาโคบี

วิธีการจาโคบีจะแก้สมการที่ i ของ $Ax = b$ โดยหา x_i ซึ่งกำหนดโดย

$$x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \left(\frac{-a_{ij}x_j}{a_{ii}}\right) + \frac{b_i}{a_{ii}} \qquad \text{เมื่อ } i = 1, ..., N \tag{1.1.5}$$

ให้ $x^{(k-1)}$ สำหรับทุก $k \geq 1$ ซึ่งก่อกำเนิดโดย

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{-a_{ij} x_j^{(k-1)}}{a_{ii}} \right) + \frac{b_i}{a_{ii}} \qquad \text{เมื่อ } i = 1, ..., N \tag{1.1.6}$$

ซึ่งจำเป็นที่ $a_{ii} \neq 0$ สำหรับ $i = 1, ..., N$ แต่ถ้ามีอย่างน้อยหนึ่ง $a_{ii} = 0$ และระบบไม่เอกฐาน ก็สามารถสับเปลี่ยนลำดับเพื่อให้ไม่มี a_{ii} ที่เป็น 0 ได้ และการเขียน $Ax = b$ เป็น $x = Tx + c$ จะทำการเปลี่ยน A เป็น $A = D - L - U$ เมื่อ D เป็นเมทริกซ์แทยงมุมของ A, $-L$ เป็นสามเหลี่ยมส่วนล่างของ A และ $-U$ เป็นสามเหลี่ยมส่วนบนของ A จึงได้ว่า

$$Ax = (D - L - U)x = b \tag{1.1.7}$$

หรือ

$$x = D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b \tag{1.1.8}$$

เมื่อทำการแบ่งเมทริกซ์เป็น $A = M - N$ โดยที่ $M = D$ และ $N = L + U$ แล้วจะได้ว่าเมทริกซ์สำหรับวิธีการจาโคบีคือ

$$x^(k) = T_j x^(x - 1) + c_J \tag{1.1.9}$$

เมื่อ $T_J = D^{-1}(L + U)$ และ $c_J = D^{-1}b$

1.1.2 วิธีการเกาส์-ไซเดล

จากวิธีการจาโคบีมีคำนวณค่า $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_{i-1}^{(k)}$ ซึ่งสามารถเพิ่มประสิทธิภาพได้ด้วยการเปลี่ยนสมการของ $x_i^{(k)}$ เป็น

$$x_i^{(k)} = \frac{-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{N} a_{ij} x_j^{(k-1)} + b_i}{a_{ii}} \tag{1.1.10}$$

วิธีการนี้เรียกว่า วิธีการเกาส์-ไซเดล ซึ่งสามารถเขียนสมการใหม่ได้เป็น

$$a_{ii}x_i^{(k)} + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} = -\sum_{j=i+1}^{N} a_{ij}x_j^{(k-1)} + b_i \tag{1.1.11}$$

จะได้รูปแบบเมทริกซ์ของวิธีเกาส์-ไซเดลเป็น

$$(D-L)x^{(k)} = Ux^{(k-1)} + b \tag{1.1.12}$$

ซึ่งสมมูลกับ

$$x^{(k)} = T_{GS}x^{(k-1)} + c_{GS} \tag{1.1.13}$$

เมื่อ $T_{GS} = (D-L)^{-1}U$ และ $c_{GS} = (D-L)^{-1}b$ นั่นคือเกาส์-ไซเดล มีพื้นฐานมาจากการแยกเมทริกซ์ด้วย $M = D - L$ และ $N = U$

บรรณานุกรม

[1] T.F. Chan and J. Shen , “Mathematical models of local non-texture inpaintings”, SIAM Journal on Applied Mathematics, vol. 62, no. 3, pp. 1019–1043, 2001.

[2] L. I. Rudin, S. Osher, E. Fatemi, “Nonlinear total variation based noise removal algorithms”, Physica D: Nonlinear Phenomena, vol 60, issues 1–4, pp. 259-268, 1992.

[3] C.R. Vogel and M.E. Oman,“Iterative methods for total variation denoising”, SIAM Journal on Scientific Computing. vol. 17, pp. 227-238, 1996.

[4] T. Goldstein and S. Osher,“The Split Bregman Method for L1-Regularized Problems”, SIAM Journal on Imaging Sciences. vol. 2, issue 2, pp. 323-343, 2009.

[5] E.H. Andelson and C.H. Anderson and J.R. Bergen and P.J. Burt and J.M. Ogden. ”Pyramid methods in image processing”. 1984

[6] David Salomon. Data Compression: The Complete Reference (4 ed.). Springer. pp. 281. 2007.

[7] Zhou Wang, Alan Conrad Bovik, Hamid Rahim Sheikh and Eero P. Simoncelli, ”Image quality assessment: from error visibility to structural similarity,” in IEEE Transactions on Image Processing, vol. 13, no. 4, pp. 600-612, 2004.

[8] A. N. Tikhonov and V. Y. Arsenin. Solutions of Ill-posed Problems. Wiston and Sons, Washington, D.C., 1977

[9] B. Dacorogna. Introduction to the Calculus of Varations. Introduction to the Calculus of Varations, 2004.

[10] N. Chumchob. A study of effective variational models and efficient numerical methods for image registration. University of Liverpool, UK 2010

[11] E. Giusti. Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation. Monographs in Mathematics, Vol. 80. Birkhauser, 1984