

## บทที่ 2

# ความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์

### 2.1 ปริภูมิที่มีค่าประจำ

ค่าประจำ (norm) เป็นเครื่องมือที่ใช้สำหรับบอกขนาดของเวกเตอร์หนึ่งในปริภูมิเวกเตอร์ ซึ่งค่าประจำนั้น มีนิยามดังนี้

**บทนิยาม 1.** (ค่าประจำ) ค่าประจำบนปริภูมิเวกเตอร์  $V$  คือฟังก์ชันค่าจริง  $\|\cdot\|$  ซึ่งนิยามบน  $V$  โดยที่

1.  $\|u\| > 0$  ถ้า  $u \neq 0$
2.  $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$  สำหรับทุกสเกลาร์  $\lambda$  และทุกเวกเตอร์  $u$
3.  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$  สำหรับทุก  $u, v \in V$

โครงงานวิจัยเรื่องนี้รู้ภาพเฉดเทาเป็นฟังก์ชันที่อยู่ในปริภูมิแบบยูคลิด (Euclidean space) นั่นคือค่าประจำทั้งหมดที่พูดถึงในโครงงานวิจัยเรื่องนี้เป็นค่าประจำแบบยูคลิด ซึ่งมีนิยามดังนี้

**บทนิยาม 2.** (ค่าประจำแบบยูคลิด) ปริภูมิยูคลิด  $n$  มิติ สามารถเขียนเวกเตอร์ในปริภูมิยูคลิดได้ว่า  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

## 2.2 แคลคูลัสของการแปรผันเบื้องต้น

แคลคูลัสของการแปรผัน (Calculus of variations) คือสาขาวิชาในวิชา คณิตศาสตร์วิเคราะห์ เพื่อใช้สำหรับแก้ปัญหาค่าเหมาะสม โดยจะสนใจที่จะหาฟังก์ชันที่เหมาะสมแทนที่จะหาค่าของตัวแปรที่เหมาะสม แคลคูลัสของการแปรผันนั้นมักจะเกี่ยวข้องกับปัญหาที่ต้องการปริมาณน้อยสุดหรือมากที่สุดซึ่งปรากฏอยู่ในรูปของอนุพันธ์หรือปริพันธ์ที่ไม่ทราบค่าฟังก์ชัน

ซึ่งฟังก์ชันหาค่าต่ำสุด มักจะมีรูปทั่วไปดังสมการ 2.2.1

$$\min_u \int \mathcal{J}(u) \quad (2.2.1)$$

โดยที่  $\mathcal{J} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  เป็นฟังก์ชันที่ส่งจากฟังก์ชันไปยังจำนวนจริง เรียกว่า ฟังก์ชันนัล (functional) พร้อมทั้งกำหนด  $\mathcal{U}$  เป็นปริภูมิของคำตอบซึ่งประกอบด้วยฟังก์ชันค่าต่ำสุดของ  $\mathcal{J}$  และ  $\mathcal{V}$  เป็นปริภูมิทดสอบซึ่งปริภูมินี้สามารถเขียนเป็นผลต่างระหว่าง 2 ฟังก์ชันได้ นั่นคือ

$$\mathcal{V} = \{v | v = u - \hat{u} \text{ และ } u, \hat{u} \in \mathcal{U}\} \quad (2.2.2)$$

**บทนิยาม 3.** (ย่านใกล้เคียง) ให้  $\mathcal{U}$  เป็นปริภูมิคำตอบ ฟังก์ชัน  $\hat{u} \in \mathcal{U}$  และ  $\epsilon > 0$  แล้ว  $B_\epsilon$  จะเป็นย่านใกล้เคียงของ  $\hat{u}$  เมื่อ

$$B_\epsilon = \{u \in \mathcal{U} | \|u - \hat{u}\| < \epsilon\}$$

จาก 2.2.1 โลคอลมินิไมเซอร์ (local minimizer) จะกำหนดโดย

**บทนิยาม 4.** (โลคอลมินิไมเซอร์) ให้  $\mathcal{U}$  เป็นปริภูมิคำตอบ และฟังก์ชันนัล  $\mathcal{J} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  จะเรียก  $\hat{u} \in \mathcal{U}$  ว่าโลคอลมินิไมเซอร์ของ  $\mathcal{J}$  ถ้าทุก  $\epsilon > 0$  มี  $\delta > 0$  โดยที่  $\mathcal{J}(\hat{u}) \leq \mathcal{J}(u)$  สำหรับทุก  $u \in B_\epsilon(\hat{u})$

ในการนิยามเงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับโลคอลมินิไมเซอร์ของ  $\mathcal{J}$  จำเป็นต้องมีการกำหนดการหาอนุพันธ์แบบมีทิศทาง

**บทนิยาม 5.** (Gâteaux-differentiable)  $\mathcal{U}$  เป็นปริภูมิคำตอบ  $\mathcal{V}$  เป็นปริภูมิทดสอบ และฟังก์ชันนัล  $\mathcal{J} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  แล้ว  $\mathcal{J}$  เป็น Gâteaux-differentiable เมื่อทุก  $u \in \mathcal{U}$  อยู่ในทิศทางของ  $v \in \mathcal{V}$  ถ้า

1. มีจำนวน  $\hat{\epsilon} > 0$  ซึ่งทำให้  $u_\epsilon = u + \epsilon v \in \mathcal{U}$  สำหรับทุก  $|e| \leq \hat{\epsilon}$

2. ฟังก์ชัน  $J(\epsilon) = \mathcal{J}(u_\epsilon)$ 

โดยอนุพันธ์อันดับแรกของ Gâteaux หรือการแปรผันอันดับแรก (first variation) ของ  $\mathcal{J}$  สำหรับ  $u$  ที่อยู่ในทิศทางของ  $v$  กำหนดโดย

$$\delta\mathcal{J}(u; v) = J'(0) = \left. \frac{d\mathcal{J}(u + \epsilon v)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{J}(u + \epsilon v) - \mathcal{J}(u)}{\epsilon}$$

และนิยามจุดคงตัว (stationary point) โดย

**บทนิยาม 6.** (จุดคงตัว)  $\mathcal{U}$  เป็นปริภูมิค่าตอบ  $\mathcal{V}$  เป็นปริภูมิทดสอบ และฟังก์ชันนัล  $\mathcal{J} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  สมมติให้บาง  $\hat{u} \in \mathcal{U}$  แล้ว  $\mathcal{J}$  เป็น Gâteaux-differentiable สำหรับทุกฟังก์ชันทดสอบ  $v \in \mathcal{V}$  แล้ว  $\hat{u}$  จะเรียกว่าจุดคงของ  $\mathcal{J}$  ก็ต่อเมื่อ  $\delta\mathcal{J}(\hat{u}; v) = 0$  สำหรับทุก  $v \in \mathcal{V}$

เงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับมินิไมเซอร์นั้นสามารถสร้างได้จากการใช้จุดคงตัว

**ทฤษฎีบท 2.1.** (เงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับโลคอลมินิไมเซอร์) ให้  $\mathcal{U}$  เป็นปริภูมิค่าตอบ ซึ่ง  $\hat{u} \in \mathcal{U}$ , ฟังก์ชันนัล  $\mathcal{J} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{V}$  เป็นปริภูมิทดสอบโดยที่  $v$  เป็นฟังก์ชันทดสอบซึ่ง  $v \in \mathcal{V}$  และ  $\mathcal{J}$  เป็น Gâteaux-differentiable สำหรับทุก  $\hat{u}$

ถ้า  $\hat{u}$  เป็นโลคอลมินิไมเซอร์ของ  $\mathcal{J}$  แล้ว  $\hat{u}$  เป็นจุดคงตัวของ  $\mathcal{J}$   
สำหรับบทพิสูจน์จะพบได้ใน [9]

ด้วยทฤษฎีบทนี้เราจะศึกษาเงื่อนไขของจุดคงตัวเพิ่มเติมโดยเราเลือกฟังก์ชันนัลทั่วไป  $\mathcal{J}$  ซึ่งนิยามโดย

$$\mathcal{J}(u) = \int_{\Omega} F[x, u(x), \nabla u(x)] dx \quad (2.2.3)$$

โดยที่  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d > 1$  เป็นเซตเปิดมีขอบเขตและ  $F$  เป็นฟังก์ชันนัลที่ขึ้นอยู่กับ  $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)^\top$  สมมติให้  $\mathcal{J}$  เป็น Gâteaux-differentiable ในทุกทิศทางของปริภูมิทดสอบ ดังนั้นจึงสมมติได้ว่า  $F$  เป็นอนุพันธ์ย่อยต่อเนื่อง

ก่อนที่จะแนะนำเงื่อนไขสำหรับจุดคงตัวของ  $\mathcal{J}$  จะแนะนำ

$$\nabla_u F = \partial F / \partial u = F_u \quad (2.2.4)$$

สำหรับเกรเดียนซ์ของ  $F$  ซึ่งขึ้นอยู่กับ  $u$  จะกำหนดโดย

$$\nabla F = (\partial F / \partial x_1, \dots, \partial F / \partial x_d)^\top \quad (2.2.5)$$

ในทำนองเดียวกันเกรเดียนต์ของ  $F$  ซึ่งขึ้นอยู่กับ  $\nabla u$  กำหนดโดย

$$\nabla_{\nabla u} F = (\partial F / \partial u_{x_1}, \dots, \partial F / \partial u_{x_d})^\top \in \mathbb{R}^d \quad (2.2.6)$$

โดยในขั้นนี้เราจะเลือกคำตอบที่เจาะจงโดยการเพิ่มเงื่อนไขค่าขอบเข้าไป ตัวอย่างเช่น

$$\tilde{\mathcal{U}} = \{u \in \mathcal{U} | u = c \text{ บน } \partial\Omega\} \quad (2.2.7)$$

และเช่นเดียวกันปริภูมิทดสอบจะถูกกำหนดโดย

$$\tilde{\mathcal{V}} = \{v \in \mathcal{V} | v = 0 \text{ บน } \partial\Omega\} \quad (2.2.8)$$

อีกทั้งขั้นตอนที่กล่าวมาไม่เพียงครอบคลุมปริภูมิทั่วไป  $\mathcal{U}$  และ  $\mathcal{V}$  แต่ยังครอบคลุมไปถึงกรณีที่เป็นเวกเตอร์เมื่อ

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_d)^\top : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$$

**ทฤษฎีบทประกอบ 2.2.1.** (จุดคงตัวของ  $\mathcal{J}$ ) ฟังก์ชัน  $u \in \mathcal{U}$  เป็นจุดคงตัวของฟังก์ชันนัลทั่วไป  $\mathcal{J}$  2.2.3 ถ้า

$$\int_{\Omega} \langle \nabla_u F - \nabla \cdot \nabla_{\nabla u} F, v \rangle_{\mathbb{R}^d} dx = 0 \quad (2.2.9)$$

บทพิสูจน์ของทฤษฎีบทประกอบนี้สามารถดูได้จาก [10]

เห็นได้ชัดว่า 2.2.9 เป็นจริงสำหรับฟังก์ชันทดสอบคงตัวที่ค่าไม่เจาะจง เพราะถ้า  $\nabla_u F - \nabla \cdot \nabla_{\nabla u} F$  การยืนยันทฤษฎีบทนี้ เป็นทฤษฎีบทที่รู้จักกันดีอยู่แล้ว ดังนั้น  $u \in \tilde{\mathcal{U}}$  เป็นจุดคงตัวของฟังก์ชันนัล  $\mathcal{J}$  ซึ่งเป็น Gâteaux-differentiable ถ้า

$$\nabla_u F - \nabla \cdot \nabla_{\nabla u} F = 0 \text{ บน } \Omega \quad (2.2.10)$$

โดยใช้ทฤษฎีบท 2.1 กับ 2.2.10 จะได้เงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับโลคอลมินิไมเซอร์ของ 2.2.1 จาก  $d > 1$  และ 2.2.10 จะนำไปสู่สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ซึ่งรู้จักกันในชื่อของสมการออยเลอร์-ลากรางจ์ ที่มีเงื่อนไขค่าขอบ โดยจะเรียก 2.2.1 ที่มีเงื่อนไขค่าขอบว่า รูปแบบการแปรผัน (variational formulation) และถ้าเงื่อนไขค่าขอบนั้นถูกกำหนดไว้ชัดเจนตามทฤษฎีบทประกอบที่ 2.2.1 จะเรียกเงื่อนไขนี้ว่า เงื่อนไขจำเป็น (essential condition) และในทางกลับกันหากค่าขอบไม่ถูกกำหนดไว้ชัดเจนจะเรียกว่า เงื่อนไขธรรมชาติ (natural condition)

โดยสรุปแล้วทุกคำตอบ  $u^* \in \mathcal{U}$  ในปัญหาค่าเหมาะสมทั่วไปดังเช่น 2.2.1 ที่มีฟังก์ชันนัล  $\mathcal{J}$  ซึ่งเป็น Gâteaux-differentiable ที่ถูกกำหนดโดย 2.2.3 จะเป็นคำตอบของปัญหาค่าขอบซึ่งเป็นส่วนประกอบของสมการออยเลอร์-ลากรางจ์

$$\nabla_u F - \nabla \cdot \nabla_{\nabla u} F = 0 \text{ บน } \Omega$$

ส่วนเงื่อนไขค่าขอบนั้นสามารถเป็นแบบเงื่อนไขจำเป็น หรือเงื่อนไขธรรมชาติก็ได้

$$\langle \nabla_{\nabla u} F, n \rangle_{\mathbb{R}^d} = 0 \text{ บน } \partial\Omega$$

เมื่อ  $n = (n_1, \dots, n_d)^\top$  หมายถึงเวกเตอร์หนึ่งหน่วยปกติภายนอก (outer normal vector unit) ของ  $\partial\Omega$

ตัวอย่าง 2.2.1. ให้  $d = 2, \Omega = [0, 1]^2, F = |\nabla u|$  เมื่อ  $u = u(x)$  และรูปแบบแปรผันเป็น

$$u \int_{\Omega} |\nabla u| dx$$

กำหนดให้

$$\mathcal{R}(u) = \int_{\Omega} |\nabla u| d\Omega = \int_{\Omega} \sqrt{u_x^2 + u_y^2} d\Omega$$

สำหรับการแปรผันอันดับหนึ่งของ  $\mathcal{R}$  กำหนดให้  $\Phi(s) = s$  จะได้

$$\frac{\delta}{\delta u} \mathcal{R}(u; v) = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{R}(u + \varepsilon v) \right|_{\varepsilon=0} = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \int_{\Omega} \Phi(|\nabla(u + \varepsilon v)|) d\Omega \right|_{\varepsilon=0}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta u} \mathcal{R}(u; v) &= \int_{\Omega} \left. \frac{d}{d\varepsilon} \Phi(\sqrt{(u_x + \varepsilon v_x)^2 + (u_y + \varepsilon v_y)^2}) \right|_{\varepsilon=0} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left[ \Phi'(\sqrt{(u_x + \varepsilon v_x)^2 + (u_y + \varepsilon v_y)^2}) \frac{(u_x + \varepsilon v_x)v_x}{\sqrt{(u_x + \varepsilon v_x)^2 + (u_y + \varepsilon v_y)^2}} \right. \\ &\quad \left. + \Phi'(\sqrt{(u_x + \varepsilon v_x)^2 + (u_y + \varepsilon v_y)^2}) \frac{(u_y + \varepsilon v_y)v_y}{\sqrt{(u_x + \varepsilon v_x)^2 + (u_y + \varepsilon v_y)^2}} \right] \Big|_{\varepsilon=0} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \Phi'(|\nabla u|) \left( \frac{u_x v_x}{|\nabla u|} + \frac{u_y v_y}{|\nabla u|} \right) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \frac{\Phi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} (\nabla u \cdot \nabla v) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \Phi'(|\nabla u|) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \cdot \nabla v d\Omega \end{aligned}$$

โดยเอกลักษณ์อันดับหนึ่งของกรีน จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta u} \mathcal{R}(u; v) &= - \int_{\Omega} v \nabla \cdot \left( \Phi'(|\nabla u|) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) d\Omega + \int_{\partial\Omega} v \left( \Phi'(|\nabla u|) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \cdot \mathbf{n} \right) dS \\ &= - \int_{\Omega} v \nabla \cdot \left( \Phi'(|\nabla u|) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) d\Omega + \int_{\partial\Omega} v \left( \Phi'(|\nabla u|) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) dS \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{\delta}{\delta u} \mathcal{R}(u; v) = - \int_{\Omega} v \nabla \cdot \left( \Phi'(|\nabla u|) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) d\Omega + \int_{\partial\Omega} v \left( \Phi'(|\nabla u|) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) dS$$

เมื่อ  $\mathbf{n}$  แทนเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับขอบของภาพในทิศทางชี้ออก

จะได้สมการออยเลอร์ที่สมนัยกับปัญหานี้คือ

$$-\Delta u = 0 \text{ บน } \Omega$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ บน } \partial\Omega$$

## 2.3 ฟังก์ชันของการแปรผันที่มีขอบเขต

ให้  $\Omega$  เป็นเซตเปิดมีขอบเขตของ  $\mathbb{R}^d$  และให้  $u \in L^1(\Omega)$  กำหนดให้การแปรผันรวม  $u$  เป็น

$$\int_{\Omega} |Du| = \sup \left\{ \int_{\Omega} u \nabla \cdot \varphi \right\} \quad (2.3.1)$$

เมื่อ เป็น (Lebesgue measure) แล  $C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$  คือปริภูมิของฟังก์ชันต่อเนื่องที่หาอนุพันธ์ได้และกระชับใน  $\Omega$

ตามที่ได้ถูกกล่าวถึงใน [11] สำหรับกรณีเฉพาะซึ่งเป็นที่น่าสนใจ  $u \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$  โดยการใช้ปริพันธ์แบบแยกส่วน

$$\int_{\Omega} u \nabla \cdot \varphi dx = - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^d \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi_i dx \quad (2.3.2)$$

สำหรับทุก  $\varphi \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^d)^d$  และ

$$\int_{\Omega} |Du| = \int_{\Omega} |\nabla u| dx \quad (2.3.3)$$

ฟังก์ชัน  $u \in L^1(\Omega)$  เรียกว่ามีขอบเขตการแปรผันใน  $\Omega$  ถ้า  $\int_{\Omega} |Du| < \infty$  โดยเรากำหนดให้  $BV(\Omega)$

เป็นปริภูมิของฟังก์ชันทั้งหมดใน  $L^1(\Omega)$  การแปรผันที่มีขอบเขต

**ตัวอย่าง 2.3.1.** ฟังก์ชัน  $f_1, f_2$  และ  $f_3$  ต่อไปนี้กำหนดโดย

$$f_1(x) = \sin x, \quad (2.3.4)$$

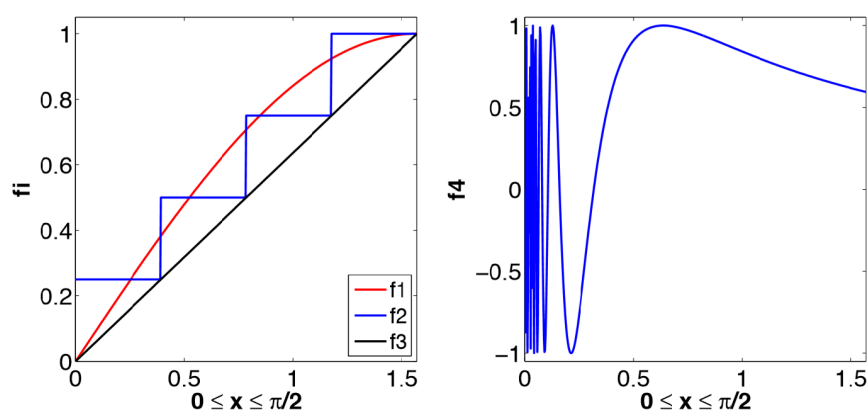
$$f_2(x) = \begin{cases} 1/4, & x \in [0, \pi/8] \\ 1/2, & x \in [\pi/8, \pi/4] \\ 3/4, & x \in [\pi/4, 3\pi/8] \\ 1, & x \in [3\pi/8, \pi/2] \end{cases} \quad (2.3.5)$$

$$f_3(x) = \frac{2x}{\pi}, \quad (2.3.6)$$

จาก  $BV(\Omega)$  ซึ่ง  $\Omega = [0, \pi/2]$  และมีการแปรผันรวมมีค่าเป็น 1 ให้ฟังก์ชัน  $f_4$  กำหนดโดย

$$f_4(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \sin 1/x, & x \in (0, a) \text{ และ } a > 0 \end{cases} \quad (2.3.7)$$

มีการแปรผันไม่จำกัดและไม่อยู่ใน  $BV(\Omega)$  ซึ่ง  $\Omega = [0, a]$  สำหรับทุก  $a > 0$



รูปที่ 2.3.1: ฟังก์ชันแปรผันมีขอบเขตทั้งสามฟังก์ชันที่มีการแปรผันรวมเหมือนกันเท่ากับ 1 และฟังก์ชันที่มีการแปรผันไม่จำกัด

ซึ่งสำหรับในหัวข้อนี้เราสามารถสรุปได้เป็นสูตรของคลอเลีย (Coarea formula)

**ทฤษฎีบท 2.2.** (Coarea fomula) ให้  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  เป็นเซตเปิดและให้  $u \in BV(\Omega)$  และ  $L_\lambda = \{x \in \Omega | u(x) < \lambda\}$  เป็นระดับโดเมน (level domain) แล้ว

$$\int_{\Omega} |Du| = \int_{-\infty}^{\infty} Per(L_\lambda, \Omega) d\lambda$$

เมื่อ  $Per(L_\lambda, \Omega) = \int_\Omega |D_{x^L_\lambda}|$  คือ perimeter ของ  $L_\lambda$  ใน  $\Omega$  และ  $\chi^{L_\lambda}$  คือลักษณะเฉพาะ (characteristic) ของฟังก์ชัน  $L_\lambda$

โดยบนพิสูจน์สามารถดูได้ใน [11]

## 2.4 วิธีการเร็กคิวลาร์ไลซ์เซชัน

ในโครงการวิจัยเรื่องนี้ จะพบปัญหา ill-posed ซึ่งทำให้การแก้ปัญหานั้นเกิดความยากลำบากขึ้น จึงจำเป็นต้องหาวิธีแก้ปัญห ill-posed ให้เป็นปัญหา Well-posed ก่อนนำไปแก้ปัญหาลัดไป

### 2.4.1 ปัญหา Well-posed และปัญหา Ill-posed

**บทนิยาม 7.** (ปัญหา Well-posed) จะเรียกปัญหาดังต่อไปนี้ว่าเป็นปัญหา Well-posed เมื่อปัญหามีคุณสมบัติดังนี้

1. มีคำตอบ
2. มีเพียงคำตอบเดียว
3. คำตอบขึ้นอยู่กับความต่อเนื่อง

หากปัญหาไม่ตรงคุณสมบัติใดจากทั้ง 3 ข้อ จะเรียกปัญหาดังกล่าวว่าเป็นปัญหา ill-posed

### 2.4.2 ปัญหาย้อนกลับ

ปัญหาย้อนกลับ (Inverse problem) คือปัญหาสำหรับการกู้คืนข้อมูลพารามิเตอร์จากตัวแบบทางคณิตศาสตร์โดยใช้ข้อมูลบางพารามิเตอร์ที่ทราบค่าอยู่ ซึ่งโดยทั่วไปแล้วปัญหาย้อนกลับนี้มักจะเป็นปัญหา ill-posed

**ตัวอย่าง 2.4.1.** สำหรับตัวอย่างปัญหาย้อนกลับ เช่น จงหาค่า  $x$  และ  $y$  ที่ทำให้  $x + y = 5$  จะเห็นว่ามีชุดของคำตอบ  $x + y = 5$  อยู่มากมาย ซึ่งทำให้เป็นปัญหา ill-posed เนื่องจากคำตอบของปัญหาไม่ได้มีเพียงชุดเดียว



ในส่วนของการต่อเติมภาพที่เสียหายนั้นเป็นปัญหาย้อนกลับและเป็นปัญหา ill-posed ด้วยเนื่องจากคำตอบในบริเวณที่จะต่อเติมไม่ได้มีเพียงคำตอบเดียว ตัวอย่างเช่น ภาพที่ 2.4.1 ภาพช้างที่เสียหาย<sup>1</sup> ในบริเวณภาพสีแดงซึ่งภาพเกิดความเสียหายขึ้น อาจจะมีคำตอบเป็นขาของช้าง หรือมีคำตอบเป็นสิงโตดังในภาพก็ได้



รูปที่ 2.4.1: ตัวอย่างการต่อเติมภาพที่ไม่มีคำตอบเฉพาะเจาะจง

**ตัวอย่าง 2.4.2.** ตัวอย่างปัญหาย้อนกลับ เมื่อ  $z$  เป็นภาพซึ่ง นิยามอยู่ใน  $\Omega \in \mathbb{R}^2$   $\eta$  คือสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียนที่มีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น  $\sigma^2$  และ  $u$  คือภาพที่มีสัญญาณรบกวน โดยที่  $u = z + \eta$  เราสามารถนำสัญญาณรบกวนออกได้โดยหา  $u$  ที่เหมาะสมจาก

$$u_{\min} \left\{ \left| \int_{\Omega} |u - z|^2 d\Omega - \sigma^2 \right| \right\} \quad (2.4.1)$$

ซึ่ง  $u$  ที่เหมาะสมมีหลายคำตอบจึงได้ว่า  $u$  นี้เป็นปัญหา ill-posed

### 2.4.3 รีเกร็กวลาไลซ์เซชัน

วิธีรีเกร็กวลาไลซ์เซชัน (Regularization) เป็นวิธีการทำให้ปัญหาย้อนกลับกลายเป็นปัญหา Well-posed ได้ โดยคุณ Tikhonov และคุณ Arsenin [8] ได้นำเสนอวิธีการสำหรับจัดการปัญหาค่าเหมาะสมโดยใช้การแนะนำวิธีการแก้ปัญหานี้โดยการทำให้ปัญหามีคำตอบอยู่ในชุดของคำตอบใด คำตอบหนึ่ง หรือทำให้มีคุณลักษณะที่เฉพาะเจาะจง

จากตัวอย่าง 2.4.1 สามารถทำให้คำตอบเฉพาะจงขึ้นได้ โดยการเพิ่มเงื่อนไขเข้าไปว่า  $x + y = 5$  เมื่อ  $\sqrt{x^2 + y^2}$  มีค่าน้อยที่สุด

<sup>1</sup>ภาพจาก <https://9gag.com/gag/aer4VwB> สืบค้นเมื่อ 10 มีนาคม 2562

จากตัวอย่าง 2.4.2 เราสามารถทำให้คำตอบจะเพิ่มขึ้นได้โดยการเพิ่มพจน์เข้าไปดังนี้

$$\min_u \left\{ \left| \int_{\Omega} |u - z|^2 d\Omega - \sigma^2 \right| + \alpha \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right\} \quad (2.4.2)$$

โดยจะเรียกพจน์แรกว่าพจน์ปรับค่าข้อมูล (Data fitting term) และพจน์ที่ 2 ว่าพจน์เร็กกิวลาไรเซชัน (Regularization term) โดยเมื่อคำตอบ  $u$  มีค่าเกรเดียนต์ที่น้อยแล้วจะได้ผลลัพธ์ออกมาเป็นภาพที่ไม่มีสัญญาณรบกวน

## 2.5 วิธีการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์เบื้องต้น

วิธีการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ (finite difference method) ถูกคิดค้นโดย เป็นวิธีการเชิงตัวเลขที่พัฒนาขึ้นเพื่อแก้ไขปัญหาค่าขอบ ซึ่งทั่วไปแล้วขั้นตอนของวิธีการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์สำหรับการแก้ปัญหาค่าขอบประกอบด้วยสามขั้นตอนสำคัญดังนี้

1. ดิสครีตไทม์ (discretize) โดเมนของผลเฉลย (solution domain) ออกเป็นช่องตาราง (mesh) ของจุดกริด (grid point) ที่ต้องการหาผลเฉลยเชิงตัวเลข
2. ประมาณอนุพันธ์ที่ปรากฏในปัญหาค่าขอบด้วยการประมาณแบบไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ (finite difference approximation) ในขั้นตอนนี้ การประมาณดังกล่าวจะนำไปสู่ระบบสมการเชิงเส้น หรือระบบสมการไม่เป็นเชิงเส้นขนาดใหญ่ที่สมนัยกับปัญหาค่าขอบตั้งต้น
3. แก่ระบบสมการเชิงเส้นหรือระบบสมการไม่เป็นเชิงเส้นขนาดใหญ่ที่เกิดขึ้นในขั้นตอนที่ 2 เพื่อกำหนดผลเฉลยเชิงตัวเลข

กำหนดให้  $u(x)$  แทนฟังก์ชันค่าจริงและเป็นฟังก์ชันราบเรียบ (smooth function) นั่นคือ  $u$  สามารถหาอนุพันธ์ได้หลายครั้ง โดยแต่ละครั้ง อนุพันธ์ที่หาได้เป็นฟังก์ชันที่ถูกระบุอย่างดี (well-defined) และมรขอบเขตเหนือช่วงที่มีจุดที่สนใจ  $\bar{x}$

ในการประมาณ  $u'(\bar{x})$  โดยใช้ค่าของ  $u$  ที่เกิดจากจุดที่อยู่ในบริเวณใกล้เคียงกับ  $\bar{x}$  สามารถใช้สูตรการประมาณแบบไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ที่ถูกกำหนดได้ดังต่อไปนี้

1. สูตรฟอร์เวิร์ดดิฟเฟอเรนซ์ (forward-difference formular)

$$D_+u(\bar{x}) = \frac{u(\bar{x} + h) - u(\bar{x})}{h}$$

2. สูตรแบ็คเวิร์ดดิฟเฟอเรนซ์ (backward-difference formular)

$$D_-u(\bar{x}) = \frac{u(\bar{x}) - u(\bar{x} - h)}{h}$$

3. สูตรเซ็นทรัลดิฟเฟอเรนซ์ (forward-difference formular)

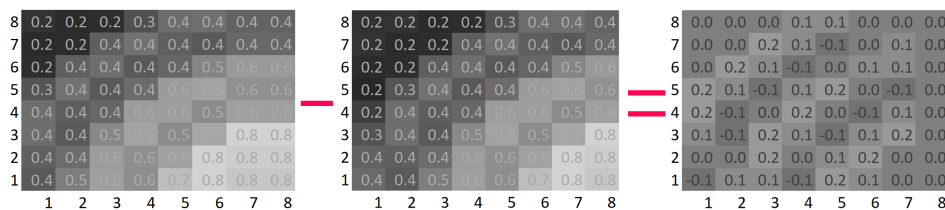
$$D_0u(\bar{x}) = \frac{u(\bar{x} + h) - u(\bar{x} - h)}{2h}$$

โดยที่  $h$  เป็นจำนวนจริงที่มีค่าน้อยๆ ซึ่ง  $h > 0$

สำหรับโครงการวิจัยนี้ จะใช้วิธีการหาอนุพันธ์โดยประมาณไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์แบบฟอร์เวิร์ดดิฟเฟอเรนซ์ จึงได้ว่าการหาอนุพันธ์ของค่าความเข้มที่พิกัดทางกายภาพเป็น  $(i, j)$  สามารถหาได้ดังนี้

$$\frac{d}{dx}u_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h}$$

เมื่อระบบกริดที่ใช้บนภาพมีความห่างเพียงหนึ่งหน่วย จึงได้ว่า  $h = 1$  ทั้งนี้ระยะห่าง  $h$  อาจเปลี่ยนไปตามชั้นของพีระมิดรูปภาพ



รูปที่ 2.5.1: ตัวอย่างการหาอนุพันธ์บนภาพเฉดเทา

จากภาพ ?? เมื่อต้องการหาอนุพันธ์เทียบแกน  $x$  จะทำตามภาพที่ 2.5.1 โดยทำการสร้างภาพซึ่งทำการตัดขอบทางซ้ายออกหนึ่งคอลัมน์และเพิ่มขอบทางขวาหนึ่งคอลัมน์โดยใช้เงื่อนไขค่าขอบแบบนิวแมน จากนั้นภาพที่สร้างขึ้นไปลบกับภาพเดิมจะได้อนุพันธ์ของภาพนั้นดังที่ปรากฏทางขวา ทั้งนี้หาก  $h \neq 1$  สามารถทำการหารภาพผลลัพธ์ด้วยค่า  $h$  ได้เพื่อให้ได้ค่าที่ต้องการ

สำหรับการหาเกรเดียนต์ (Gradient) จะใช้การหาอนุพันธ์โดยวิธีพอร์เวิร์ดดิฟเฟอร์เรนซ์ดังที่กล่าวไปในข้างต้น ในแนวแกน  $x$  และแนวแกน  $y$  คำตอบที่ได้จะเป็นเวกเตอร์ของอนุพันธ์แนวแกน  $x$  และอนุพันธ์แนวแกน  $y$  ได้เวกเตอร์ดังนี้

$$\nabla v_{u_i} = \left( \frac{\partial}{\partial x} u_{i,j}, \frac{\partial}{\partial y} u_{i,j} \right)^T$$

สำหรับไดเวอร์เจนซ์ (Divergence) จะเป็นการหาผลรวมของอนุพันธ์ในแต่ละแกนของเวกเตอร์ด้วยวิธีพอร์เวิร์ดดิฟเฟอร์เรนซ์ นั่นคือ

$$\nabla \cdot (v_{i,j}) = \frac{\partial}{\partial x} v_{i,j_x} + \frac{\partial}{\partial y} v_{i,j_y}$$

สำหรับลาปลาเซียน (Laplacian) นั่นคือการหาไดเวอร์เจนซ์บนเวกเตอร์ที่หาเกรเดียนต์แล้ว แต่ทั้งนี้สามารถหาลาปลาเซียนได้จาก

$$\Delta u_{i,j} = u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j}$$

## 2.6 วิธีการทำซ้ำสำหรับระบบสมการเชิงเส้น

ในหัวข้อนี้จะแนะนำถึงวิธีการทำซ้ำเพื่อแก้ปัญหาระบบสมการเชิงเส้น สำหรับโครงงานวิจัยเรื่องนี้มีการแก้ปัญหาระบบสมการเชิงเส้น เพื่อทำการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ที่ถูกเปลี่ยนให้เป็นระบบสมการเชิงเส้นแล้ว โดยระบบสมการเชิงเส้นที่จะทำการแก้กันอยู่ในรูปของ

$$Ax = b \quad (2.6.1)$$

เมื่อ  $x \in \mathbb{R}^N$  และ  $A$  เป็นเมทริกซ์ขนาด  $N \times N$  โดยการทำซ้ำนี้จะเริ่มจากค่าประมาณเริ่มต้น (initial approximation)  $x^{(0)}$  และทำการสร้างลำดับ  $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$  จากความสัมพันธ์

$$x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c \quad (2.6.2)$$

เมทริกซ์ความสัมพันธ์  $T$  และเวกเตอร์  $c$  มาจากการแบ่ง  $A = M - N$  ของเมทริกซ์  $A$  เมื่อ  $M$  เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน โดยแยกระบบเดิม 2.6.1 ออกเป็น

$$Ax = (M - N)x = b \quad (2.6.3)$$

นั่นคือ

$$x = (M^{-1}N)x + M^{-1}b = Tx + c \quad (2.6.4)$$

เมื่อ  $T = M^{-1}N$  และ  $c = M^{-1}b$  โครงงานวิจัยนี้ทางผู้วิจัยได้เลือกใช้วิธีเกาส์-ไซเดลซึ่งเป็นวิธีการที่พัฒนาต่อมาจากวิธีการจาโคบี จึงขอแนะนำทั้งสองวิธีการ ดังนี้

### 2.6.1 วิธีการจาโคบี

วิธีการจาโคบีจะแก้สมการที่  $i$  ของ  $Ax = b$  โดยหา  $x_i$  ซึ่งกำหนดโดย

$$x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \left( \frac{-a_{ij}x_j}{a_{ii}} \right) + \frac{b_i}{a_{ii}} \quad \text{เมื่อ } i = 1, \dots, N \quad (2.6.5)$$

ให้  $x^{(k-1)}$  สำหรับทุก  $k \geq 1$  ซึ่งก่อกำเนิดโดย

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^N \left( \frac{-a_{ij}x_j^{(k-1)}}{a_{ii}} \right) + \frac{b_i}{a_{ii}} \quad \text{เมื่อ } i = 1, \dots, N \quad (2.6.6)$$

ซึ่งจำเป็นที่  $a_{ii} \neq 0$  สำหรับ  $i = 1, \dots, N$  แต่ถ้ามีอย่างน้อยหนึ่ง  $a_{ii} = 0$  และระบบไม่เอกฐาน ก็สามารถสับเปลี่ยนลำดับเพื่อให้ไม่มี  $a_{ii}$  ที่เป็น 0 ได้ และการเขียน  $Ax = b$  เป็น  $x = Tx + c$  จะทำการเปลี่ยน  $A$  เป็น  $A = D - L - U$  เมื่อ  $D$  เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมของ  $A$ ,  $-L$  เป็นสามเหลี่ยมส่วนล่างของ  $A$  และ  $-U$  เป็นสามเหลี่ยมส่วนบนของ  $A$  จึงได้ว่า

$$Ax = (D - L - U)x = b \quad (2.6.7)$$

หรือ

$$x = D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b \quad (2.6.8)$$

เมื่อทำการแบ่งเมทริกซ์เป็น  $A = M - N$  โดยที่  $M = D$  และ  $N = L + U$  แล้วจะได้ว่าเมทริกซ์สำหรับวิธีการจาโคบีคือ

$$x^{(k)} = T_J x^{(k-1)} + c_J \quad (2.6.9)$$

เมื่อ  $T_J = D^{-1}(L + U)$  และ  $c_J = D^{-1}b$

### ขั้นตอนวิธีจาโคบี

ขั้นตอนวิธีของจาโคบีเพื่อหาค่าใกล้เคียงของคำตอบ  $Ax = b$  จะให้ค่าใกล้เคียงของคำตอบเริ่มต้นเป็น  $x^{(0)}$  ให้จำนวนรอบการทำซ้ำสูงสุดเป็น  $IMAX$  และให้ค่าความคลาดเคลื่อนเป็น  $\epsilon > 0$

---

**Algorithm 1:** ขั้นตอนวิธีจาโคบี

---

```

 $[x] \leftarrow \text{Jacobi}(A, b, x^{(0)}, IMAX, \epsilon)$ 
1. ให้  $k = 1, N = \text{size}(x^{(0)})$ , done = False
2. ถ้า done = False ทำซ้ำขั้นตอนที่ 3 และ 4
3.  $x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{(k-1)} \left( \frac{-a_{ij}x_j^{(k-1)}}{a_{ii}} + \frac{b_i}{a_{ii}} \right)$ 
4. if  $\|b - Ax^{(k)}\| < \epsilon$  หรือ  $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| < \epsilon$  หรือ  $k \geq \epsilon$  then
    ให้ done = True และ  $x = x^{(k)}$ 
else
    ให้  $k = k + 1$ 
end

```

---

### 2.6.2 วิธีการเกาส์-ไซเดล

จากวิธีการจาโคบีมีจำนวนค่า  $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_{i-1}^{(k)}$  ซึ่งสามารถเพิ่มประสิทธิภาพได้ด้วยการเปลี่ยนสมการของ  $x_i^{(k)}$  เป็น

$$x_i^{(k)} = \frac{-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^N a_{ij}x_j^{(k-1)} + b_i}{a_{ii}} \quad (2.6.10)$$

วิธีการนี้เรียกว่า วิธีการเกาส์-ไซเดล ซึ่งสามารถเขียนสมการใหม่ได้เป็น

$$a_{ii}x_i^{(k)} + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} = -\sum_{j=i+1}^N a_{ij}x_j^{(k-1)} + b_i \quad (2.6.11)$$

จะได้รูปแบบเมทริกซ์ของวิธีเกาส์-ไซเดลเป็น

$$(D - L)x^{(k)} = Ux^{(k-1)} + b \quad (2.6.12)$$

ซึ่งสมมูลกับ

$$x^{(k)} = T_{GS}x^{(k-1)} + c_{GS} \quad (2.6.13)$$

เมื่อ  $T_{GS} = (D - L)^{-1}U$  และ  $c_{GS} = (D - L)^{-1}b$  นั่นคือเกาส์-ไซเดล มีพื้นฐานมาจากการแยกเมทริกซ์ด้วย  $M = D - L$  และ  $N = U$

#### ขั้นตอนวิธีเกาส์-ไซเดล

ขั้นตอนวิธีเกาส์-ไซเดล เหมือนกับขั้นตอนวิธีจาโคบี แต่เปลี่ยนขั้นที่ 3 เป็นสมการที่ 2.6.10

## บรรณานุกรม

- [1] T.F. Chan and J. Shen , “Mathematical models of local non-texture inpaintings”, SIAM Journal on Applied Mathematics, vol. 62, no. 3, pp. 1019–1043, 2001.
- [2] L. I. Rudin, S. Osher, E. Fatemi, “Nonlinear total variation based noise removal algorithms”, Physica D: Nonlinear Phenomena, vol 60, issues 1–4, pp. 259-268, 1992.
- [3] C.R. Vogel and M.E. Oman, “Iterative methods for total variation denoising”, SIAM Journal on Scientific Computing. vol. 17, pp. 227-238, 1996.
- [4] T. Goldstein and S. Osher, “The Split Bregman Method for L1-Regularized Problems”, SIAM Journal on Imaging Sciences. vol. 2, issue 2, pp. 323-343, 2009.
- [5] E.H. Andelson and C.H. Anderson and J.R. Bergen and P.J. Burt and J.M. Ogden. ”Pyramid methods in image processing”. 1984
- [6] David Salomon. Data Compression: The Complete Reference (4 ed.). Springer. pp. 281. 2007.
- [7] Zhou Wang, Alan Conrad Bovik, Hamid Rahim Sheikh and Eero P. Simoncelli, ”Image quality assessment: from error visibility to structural similarity,” in IEEE Transactions on Image Processing, vol. 13, no. 4, pp. 600-612, 2004.
- [8] A. N. Tikhonov and V. Y. Arsenin. Solutions of Ill-posed Problems. Wiston and Sons, Washington, D.C., 1977



- [9] B. Dacorogna. Introduction to the Calculus of Variations. Introduction to the Calculus of Variations, 2004.
- [10] N. Chumchob. A study of effective variational models and efficient numerical methods for image registration. University of Liverpool, UK 2010
- [11] E. Giusti. Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation. Monographs in Mathematics, Vol. 80. Birkhauser, 1984