Курсовой проект

Прямой быстрый метод решения СЛАУ анизотропного уравнения диффузии

Группа Б01-816 Кумейко С.Е.

Постановка задачи

Рассмотрим анизотропное уравнение диффузии, дополненное условием Дирихле, в единичном квадрате,

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y) - 3\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y) + u(x,y) = f(x,y),\ в\ V = (0,1)$$

$$u(x,y) = 0\ на\ \Gamma.$$

Требуется численно решить уравнение на равномерной сетке $n \times n$ с шагом h. После аппроксимации методом конечных разностей второго порядка возникает система линейных алгебраических уравнений:

$$Au_h = f_h,$$

Для решения данного заданной СЛАУ можно использовать множество способов с различными арифметическими сложностями:

Метод	Оценка сложности
м. Гаусса	$O(N^3)$
м. матричной прогонки	$O(N^{2.5})$
м. Якоби и Зейделя	$O(N^2 log\frac{1}{\varepsilon})$
ДБСП	$O(NlogN)$

В данной работе рассмотрим ДБСП (двойное быстрое синус-преобразование) с арифметической сложностью $O(NlogN)$.

Дополнительные задачи:

- Решить уравнения аналитически с функцией $f(x,y)$;
- Исследовать точность аппроксимации в зависимости от сетки на задаче с известным решением $u(x,y)$;
- Сравнить время работы этого метода с временем работы метода Якоби на различных сетках;

Аналитическое решение

Рассмотрим $f(x, y) = 3sin(x\pi)$. Тогда наше уравнение примет вид:

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x, y) - 3\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x, y) + u(x, y) = 3sin(x\pi),\ в\ V = (0,1)$$

$$u(x, y) = 0\ на\ \Gamma.$$

1. Воспользуемся методом Фурье, то есть представим решение в виде:

$$u(x, y) = \sum_{k}^{\infty} f_k(y)g_k(x),$$

где $\left\{g_k(x)\right\}$- система базисных функций такая, что:

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}g_k(x) = \lambda_k^2 g_k(x),\ g_k(0) = 0, g_k(1) = 0, g_k(x) \not\equiv 0, 0 \le x \le 1.$$

a) $$\lambda_k = 0:$$

Тогда решением будет $g_k(x) \equiv 0$, что не согласуется с нашими требованиями.

b) $$\lambda_k \neq 0:$$

Тогда решением будет $g_k(x) \equiv sin(\lambda_k x)$, где $\lambda_k = \pi k,\ k \in N$.

2. Теперь требуется разложить краевые условия и правую часть уравнения по базисным функциям. Краевые условия имеют очевидное разложение, остается только правая часть уравнения.

$$sin(x\pi) = 3\sum_{k=1}^{\infty} a_k g_k(x), \text{где } a_k = 1\ при\ k = 1\ \ a_k = 0\ при\ k \neq 1.$$

3. Подставим $u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(y)g_k(x)\ \ sin(x\pi) = 3\sum_{k=1}^{\infty} a_k g_k(x)$в заданное уравнение и граничные условия, тогда получим:

$$-\sum_{k=1}^{\infty} f_k(y)g_k''(x) - 3\sum_{k=1}^{\infty} f_k''(y)g_k(x) + \sum_{k=1}^{\infty} f_k(y)g_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k g_k(x)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(0)g_k(x) = 0\ \ \sum_{k=1}^{\infty} f_k(1)g_k(x) = 0.$$

В связи с тем, что $\left\{g_k(x)\right\}$- система базисных функций, можно рассматривать отдельно уравнения для каждого k:

$$\lambda_k^2 f_k(y) \; - \; 3f_k''(y) \; + f_k(y) \; = 3a_k, \;\; f_k(0) = 0 \;\; f_k(1) = 0.$$

Требуется рассмотреть 2 случая:

a) $$k = 1:$$

$$f_1(y) = C_1 sh\left\{ y\left(\frac{\pi^2 \; + \; 1}{3}\right)^{1/2}\right\} - C_2 ch\left\{ y\left(\frac{\pi^2 \; + \; 1}{3}\right)^{1/2}\right\} + \frac{3}{\pi^2 + \; 1}$$

$$C_1 = \; -\frac{3}{\pi^2 + \; 1}, \; C_2 = \left[\frac{3}{\pi^2 + \; 1} ch\left\{\left(\frac{\pi^2 \; + \; 1}{3}\right)^{1/2}\right\} - \frac{3}{\pi^2 + \; 1}\right] / sh^{-1}\left\{\left(\frac{\pi^2 \; + \; 1}{3}\right)^{1/2}\right\}$$

b) $$k \neq 1:$$

$$f_k(y) = 0$$

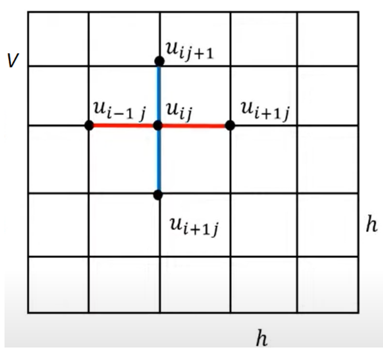
4.Общее решение представляет собой следующее:

$$u(x, y) = \left(C_1 sh\left\{ y\left(\frac{\pi^2 \; + \; 1}{3}\right)^{1/2}\right\} - C_2 ch\left\{ y\left(\frac{\pi^2 \; + \; 1}{3}\right)^{1/2}\right\} + \frac{3}{\pi^2 + \; 1}\right) sin(\pi x) \, .$$

Зная точное решение, можно приступить к численному решению и сравнению.

Аппроксимация

Рассмотрим разбиение области равномерной сеткой $n \; \times \; n$ с шагом h.



Используя аппроксимацию для частных производных по x:

$$-u_{xx}(x,y)\,\big|_{(x_i,y_j)} = \frac{-u_{i-1j} + 2u_{ij} - u_{i+1j}}{h^2} + O(h^2)$$

и аналогичную по y, после простых преобразований получим:

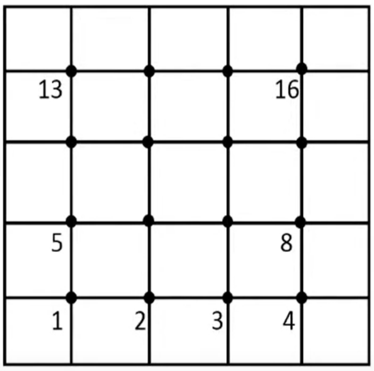
$$-u_{i-1j} - u_{i+1j} + (8\ +\ h^2)u_{ij} - 3u_{ij-1} - 3u_{ij+1} = h^2 f_{ij}$$

с условиями Дирихле на границе:

$$u_{ij} = 0$$

Число неизвестных совпадает с числом полученных уравнений. Получили СЛАУ с квадратной матрицей.

Используя лексикографическую нумерацию узлов:



получаем следующую запись:

$$Au_h = h^2 f_h,$$

где $u_h = (u_{11}u_{12}\ldots u_{1n}u_{21}\ldots u_{nn})$ $f_h = (f_{11}f_{12}\ldots f_{1n}f_{21}\ldots f_{nn})$. А матрица A имеет вид:

$8+h^2$	-1			-3											
-1	$8+h^2$	-1			-3										
	-1	$8+h^2$	-1			-3									
		-1	$8+h^2$				-3								
-3				$8+h^2$	-1			-3							
	-3			-1	$8+h^2$	-1			-3						
		-3			-1	$8+h^2$	-1			-3					
			-3			-1	$8+h^2$				-3				
				-3			-1	$8+h^2$	-1			-3			
					-3			-1	$8+h^2$	-1			-3		
						-3			-1	$8+h^2$	-1			-3	

							-3			-1	$8+h^2$				-3
								-3				$8+h^2$	-1		
									-3			1	$8+h^2$	-1	
										-3			-1	$8+h^2$	-1
											-3			-1	$8+h^2$

Данную систему предлагается решить, используя метод, основанный на двойном быстром синус-преобразовании.

Двойное быстрое синус-преобразование

Идея метода заключается в следующем. Если бы у матрицы A было доступно спектральное разложение:

$$A = WDW^{-1}$$

то решение можно было бы вычислить так:

$$u_h = WD^{-1}W^{-1}h^2 f_h$$

Однако, вычислять спектральное разложение больших разреженных матриц непрактично. В тоже время, легко получить значения собственных чисел и собственных векторов матрицы A (*сумма собственных значений конечно разностных операторов второй производной и самой функции[см IX.5.3 страница 14 в* ***Аристовой****]*):

$$\lambda_{km} = \frac{4}{h^2} sin^2\left(\frac{\pi kh}{2}\right) + \frac{12}{h^2} sin^2\left(\frac{\pi kh}{2}\right) + 1$$

$$w_{km,ij} = C sin\left(\pi ikh\right) sin\left(\pi jkh\right),$$

где k и m горизонтальные и вертикальные индексы узла сетки. Таким образом, матрицы W и D нам известны.

Введем следующие индексы:

$$i = (i_y - 1)(n-1) + i_x \;\; j = (j_y - 1)(n-1) + j_x$$

Рассмотрим умножение вектора f_h на W:

$$v_i = \sum_{j=1}^{N} W_{ij} p_j = C \sum_{j_y=1}^{n-1} sin(\pi i_y j_y h) \sum_{j_x=1}^{n-1} sin(\pi i_x j_x h) p_j$$

Легко заметить, что это умножение эквивалентно двумерному синус-преобразованию Фурье (ДСП). Эту операцию и обратную можно выполнить за $O(N logN)$.

Таким образом приходим к следующему алгоритму:

1. Умножение на матрицу W^{-1}за $O(NlogN)$ (обратное $2D$ДСП);
2. Умножение на диагональную матрицу D^{-1}за $O(N)$;
3. Умножение на матрицу Wза $O(NlogN)$ (прямое $2D$ДСП).

И арифметическая сложность всего алгоритма $O(NlogN)$.

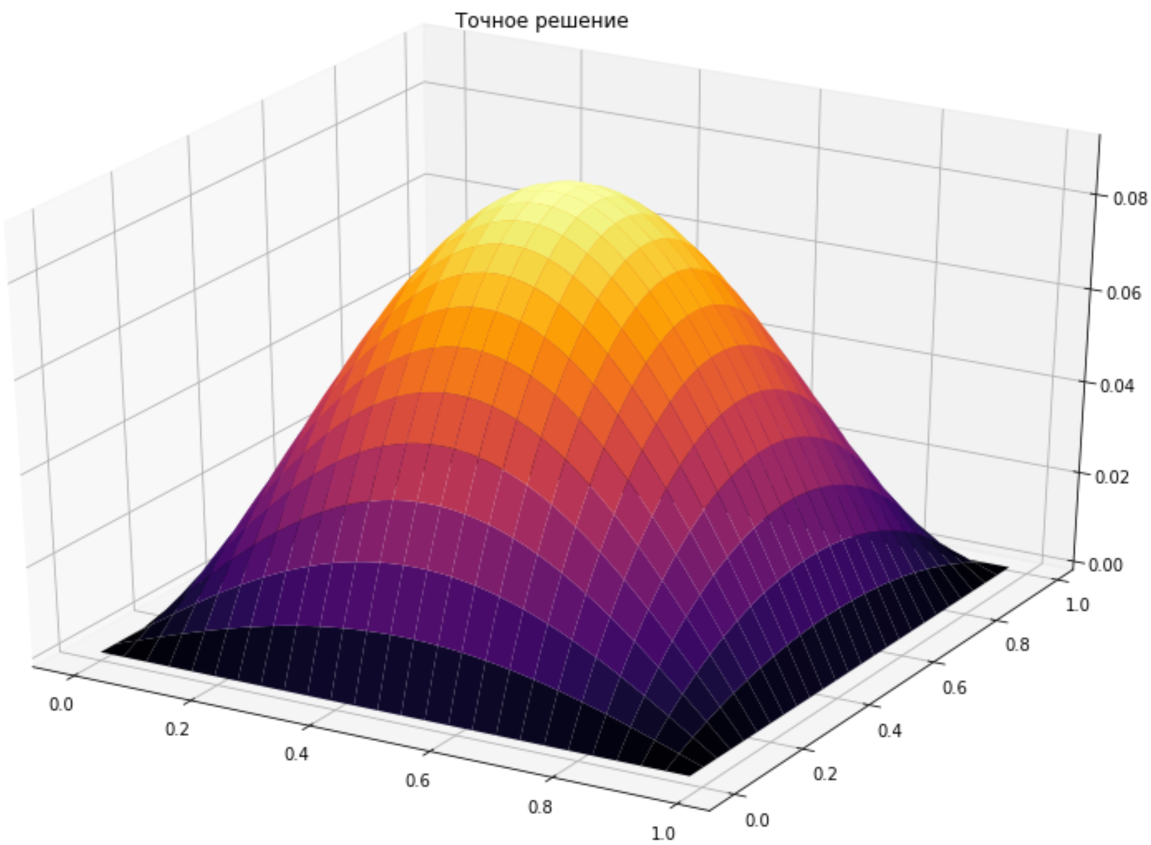
Процесс численного решения

Рассмотрим наше уравнение на сетке 50×50:

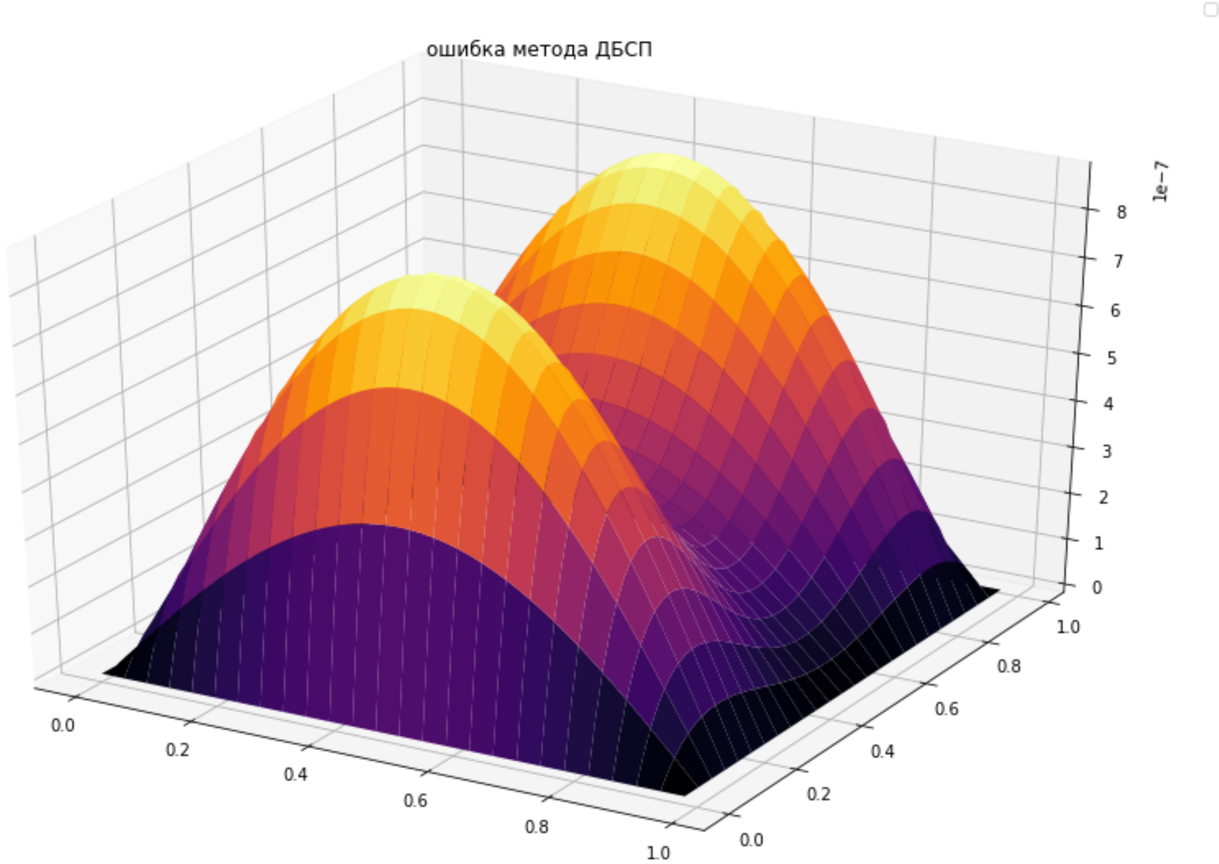
$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y) - 3\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y) + u(x,y) = 3sin(x\pi),\ в\ V = (0,1)$$

$$u(x,y) = 0\ на\ Г.$$

- Для найденного точного решения имеем графики:

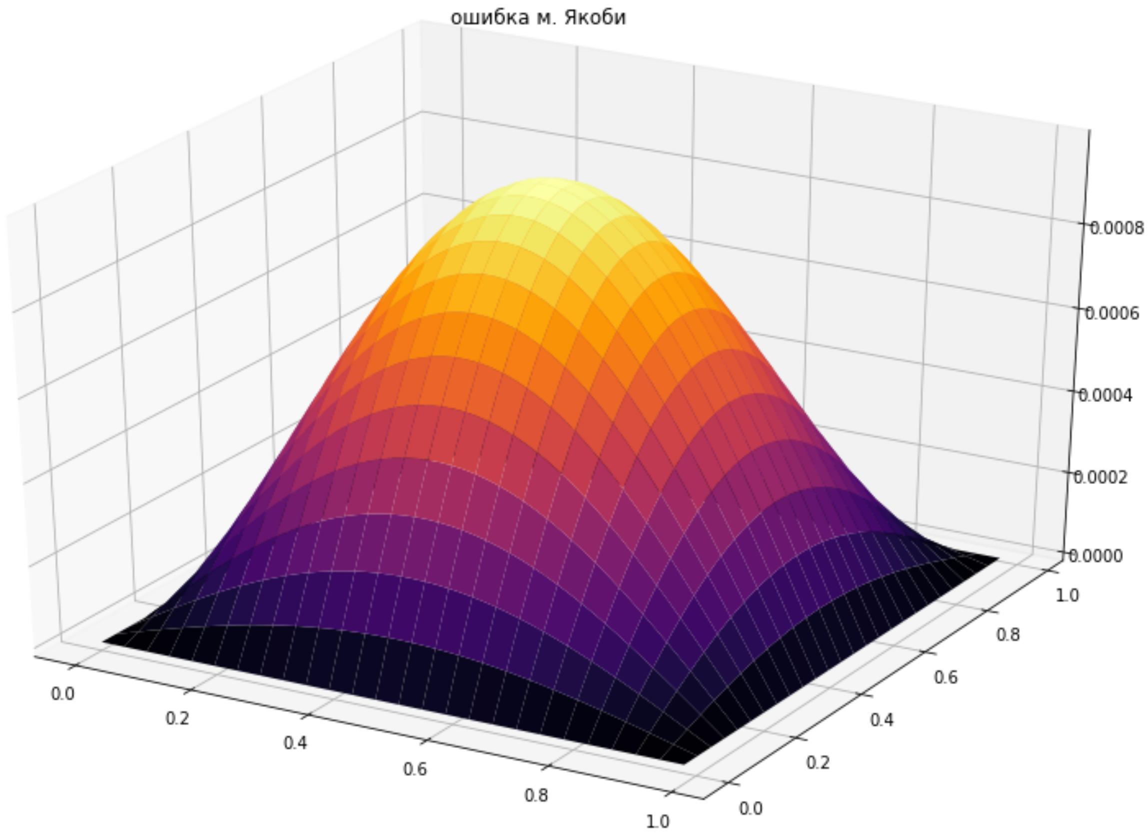


- Графики ошибки метода ДБСП (разница точного решения и численного):



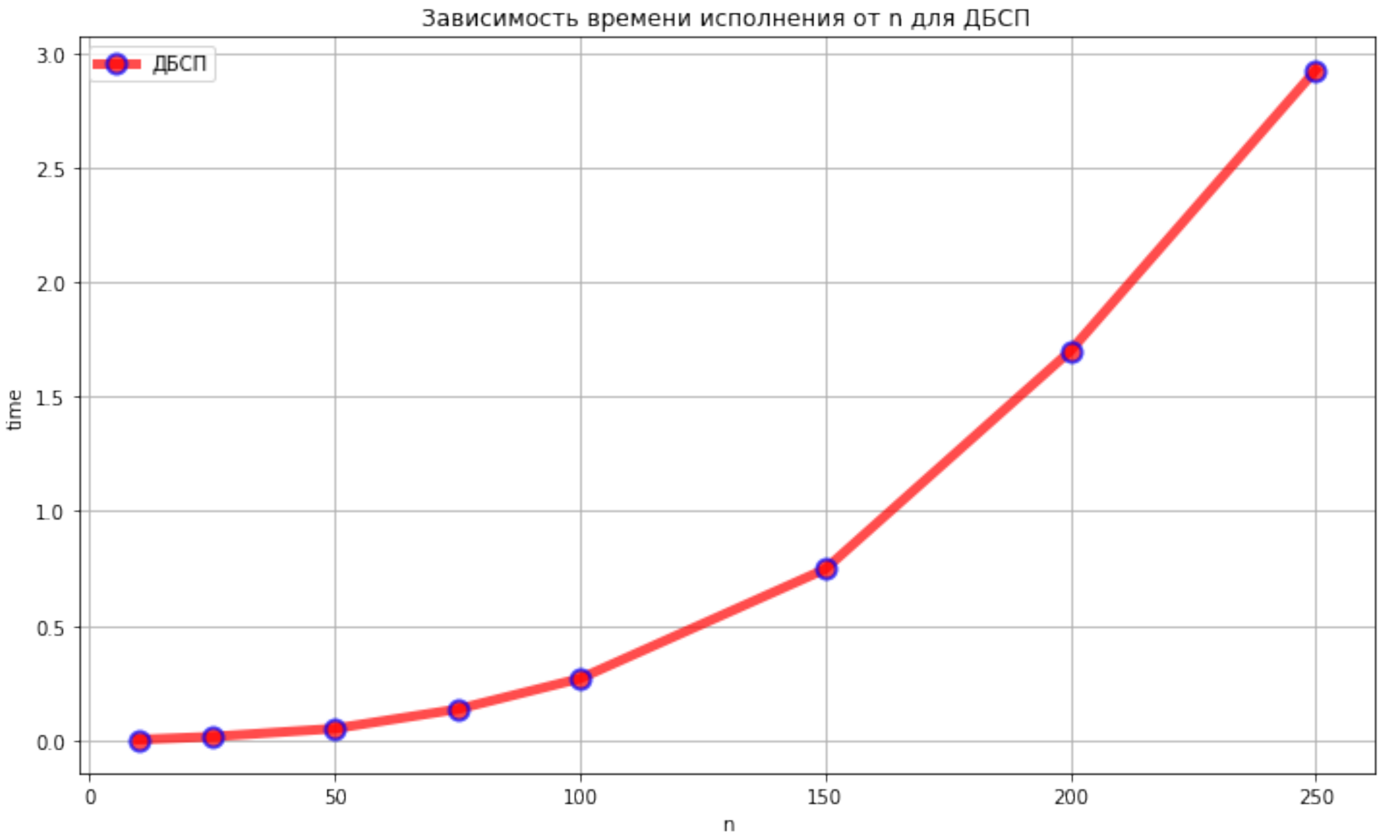
Как видно из графиков разницы решений, ошибка не превосходит 10^{-6}.

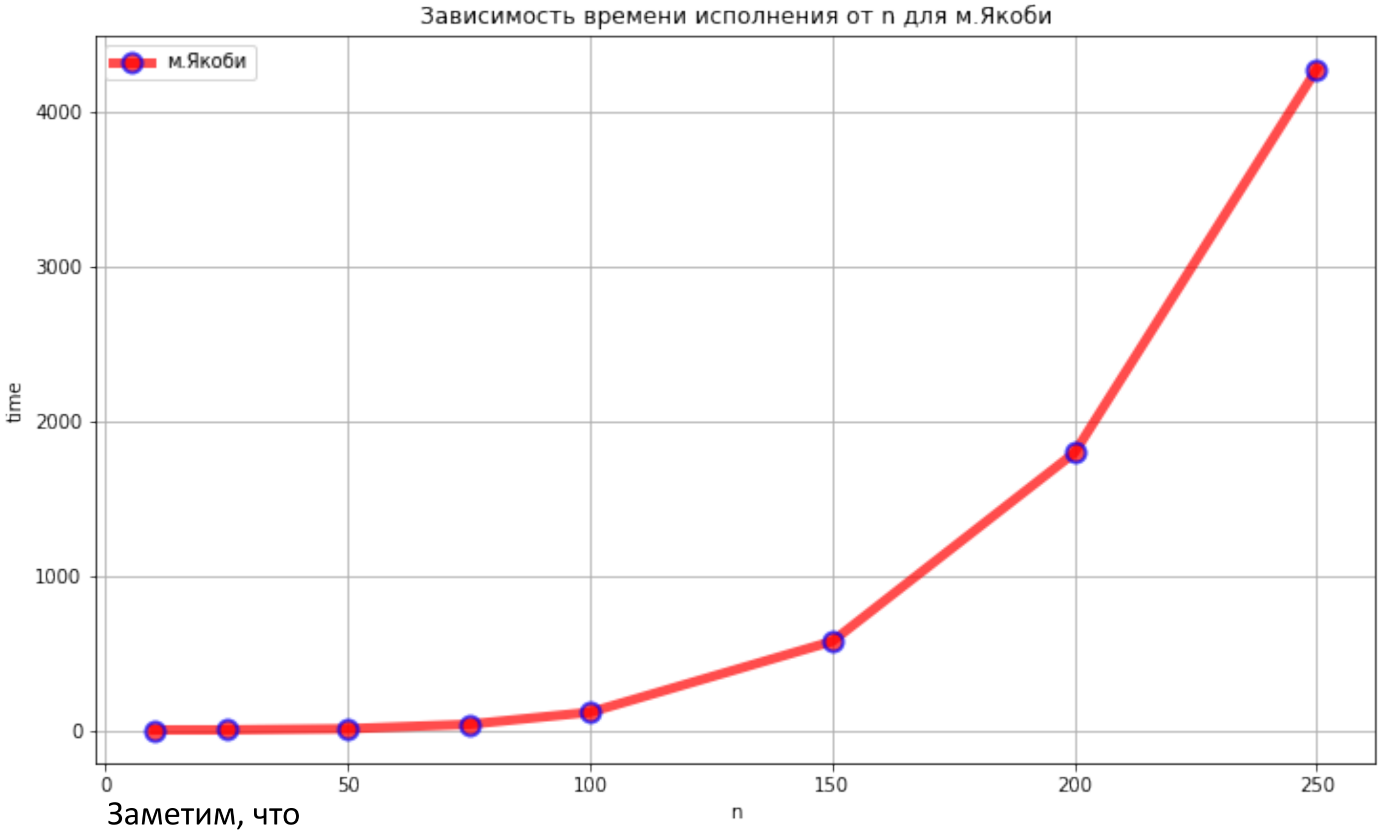
- Графики ошибки метода Якоби (заданная точность $\varepsilon = 10^{-3}$):



Перейдем к сравнению времени работы процессов при различных сетках.

	Разбиение	ДБСП (сек)	м.Якоби (сек)	итер м.Якоби
0	10	0.0036	0.0394	45
1	25	0.0164	0.6613	281
2	50	0.0516	7.9050	1124
3	75	0.1359	36.5800	2528
4	100	0.2697	114.6529	4494
5	150	0.7470	573.9669	10110
6	200	1.6994	1796.4629	17974
7	250	2.9245	4282.3175	28084





Заметим, что

метод основанный на ДБСП с арифметической сложностью $O(NlogN)$ справляется в разы быстрее, чем метод Якоби с арифметической сложностью $O(N^2 log\frac{1}{\varepsilon})$.

Вывод

В проделанной работе был рассмотрен метод решения анизотропного уравнения диффузии, основанный на методе двойного быстрого синус-преобразования и проведено сравнение с методом Якоби и сделаны следующие выводы:

- На сетках начиная с 50×50 разница во времени существенна между ДБСП и м. Якоби;
- Ошибка для ДБСП имеет порядок 10^{-6}

Все алгоритмы и порядок действий находятся в coursework_comp_math.ipynb. Алгоритм dst и idst (прямое и обратное двойное синус-преобразование) был реализован самостоятельно, так как библиотечная реализация не сходится с теорией.