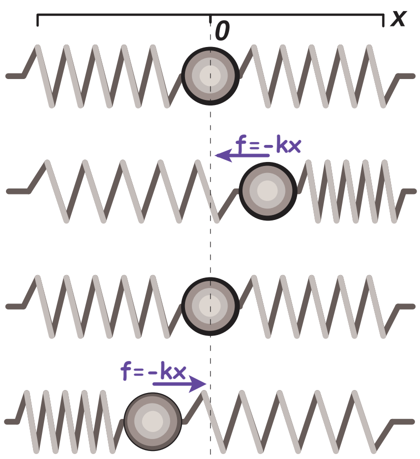
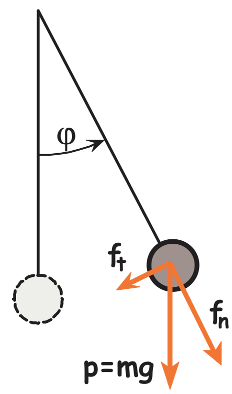
КОЛЕБАНИЯ и ВОЛНЫ

ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ



Сила f, действующая на шарик с массой m, пропорциональна величине отклонения x от точки равновесия 0 и направлена к этой точке: $\boxed{f = -kx}$. Такие силы называются **упругими**. Под ее действием шарик возвращается. В момент прохода через 0 сила тоже =0, но из-за инерции шарик каждый раз проскакивает эту точку. Потенциальная энергия пружины переходит в кинетическую энергию шара and vice versa.

Другой пример (не самый лучший): маятник. Сила действует всегда только одна – вес шарика $p = mg$, но при отклонении от вертикали на угол φ меняется разложение веса на радиальную силу натяжения ($f_n = p\,\cos\varphi$) и тангенциальную силу возврата ($f_t = p\,\sin\varphi$). Эта сила f_t пропорциональна не углу отклонения φ, а его синусу. Но при небольших углах $\sin\varphi \simeq \varphi$, и тогда можно считать эту силу **квазиупругой**.



В обоих перечисленных случаях возвращающая сила пропорциональна (или почти пропорциональна) отклонению. Это значит (по 2ЗН), что и ускорение пропорционально отклонению. В 1 случае мы получаем дифф.ур.:

$$m\,\ddot{x} = -k\,x \tag{1}$$

Во втором случае вместо возвращающей силы f_t лучше рассматривать ее момент $\mathcal{M} = f_t \times L$, где L – длина подвеса, а вместо массы маятника m – его момент инерции $\mathcal{I} = mL^2$. Используя вместо 2ЗН его аналог $\mathcal{M} = \mathcal{I}\,\ddot{\varphi}$, получим для углового ускорения $mL^2\ddot{\varphi} = -mg\varphi$, или после сокращений:

$$L\,\ddot{\varphi} = -g\,\varphi \tag{2}$$

у нас получились очень похожие уравнения. В обоих случаях множитель при ускорении (как линейном, так и угловом) характеризует инерционность подвижного элемента, а множитель при отклонении – жесткость, то есть, масштаб возвращающей силы. Если переписать оба уравнения в виде

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

где под ω^2 понимать отношение k/m в первом случае и g/L во втором, то наиболее общее решение уравнения будет иметь вид:

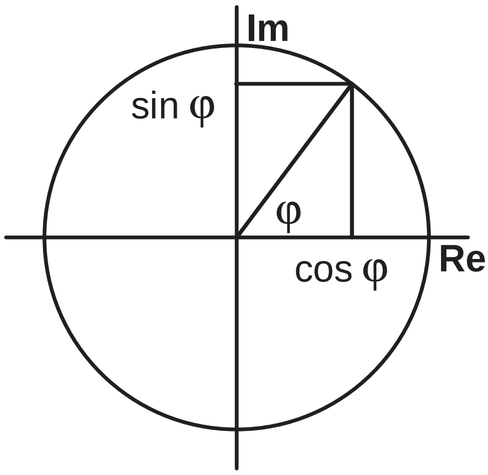
$$x = A\, e^{i(\omega t+\alpha)}, \tag{3}$$

причем аргументы A, ω и α находятся из каких-то дополнительных (начальных или граничных) условий. Проверка:

$$\dot{x} = A\, e^{i(\omega t+\alpha)} \cdot i\omega; \qquad \ddot{x} = A\, e^{i(\omega t+\alpha)} \cdot (i\omega)^2 = (-\omega^2) \cdot A\, e^{i(\omega t+\alpha)} = -\omega^2 x$$

<u>Лирическое отступление</u>. Формула Эйлера (Leonhard Euler, 1707 Basel – 1783 СПб):

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^4}{4!} + \tfrac{x^5}{5!} + \tfrac{x^6}{6!} + \ldots \\ \sin x &= x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} - \tfrac{x^5}{5!} + \ldots \\ \cos x &= 1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} - \tfrac{x^6}{6!} + \ldots \\ e^{ix} &= \cos x + i\, \sin x \end{aligned}$$



Известно, что если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ являются решениями дифференциального уравнения, то и их суперпозиция $a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)$ также является решением (& vice versa). Таким образом, в качестве уравнения гармонического колебания можно использовать любое из трех:

$$x = A\, e^{i(\omega t+\alpha)} \tag{4}$$

$$x = A\, \sin(\omega t + \alpha) \tag{5}$$

$$x = A\, \cos(\omega t + \alpha) \tag{6}$$

Первое из них удобнее применять при работе с электрическими цепями, а последние два – в механике, причем они более наглядны и отличаются друг от друга только фазой. Будем в дальнейшем пользоваться только одним из них (например, последним).

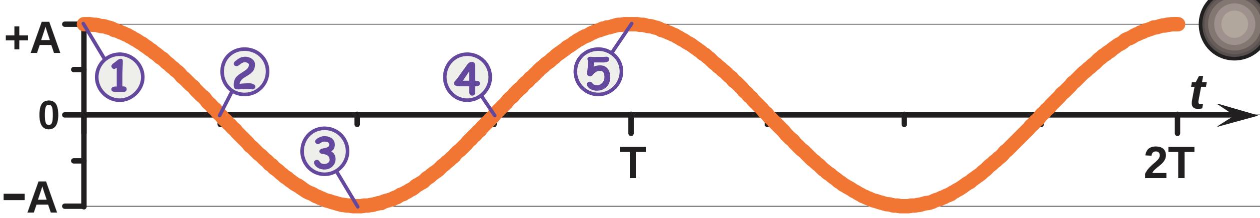
Итак, движение шарика на пружинке описывается уравнением

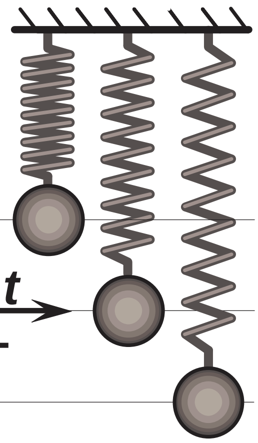
$$x = A\,cos(\omega t + \alpha) \qquad \text{где } \omega^2 = k/m$$

а движение маятника (при небольшом его размахе) – уравнением

$$\varphi = A\,cos(\omega t + \alpha) \qquad \text{где } \omega^2 = g/L$$

В обоих случаях A – амплитуда колебания, т.е. его максимальное отклонение от точки равновесия, $(\omega t + \alpha)$ – фаза, α – начальная фаза, а ω – частота. Для упрощения будем считать α=0 и начнем рассмотрение с максимального отклонения.





1. (ωt=0). В этот момент $\cos 0$=1, отклонение максимально: x=+A, скорость $\vec{v}$=$\dot{x}$=–$\omega A \sin 0$=0, и система покоится.

2. (ωt=$\frac{\pi}{2}$). На этой фазе $\cos\frac{\pi}{2}$=0, шарик находится в положении равновесия: x=0, но скорость $\vec{v}$=$\dot{x}$=–$\omega A \sin\frac{\pi}{2}$=–$\omega A$ максимальна, и шарик это положение по инерции проскакивает.

3. (ωt=π). Теперь $\cos\pi$=–1, отклонение снова максимально, но с другим знаком: x=–A, скорость $\vec{v}$=$\dot{x}$=–$\omega A \sin\pi$=0, и шарик останавливается.

4. (ωt=$\frac{3\pi}{2}$). На фазе $\cos\frac{3\pi}{2}$=0 шарик опять проходит положение равновесия (x=0) с максимальнй скоростью $\vec{v}$=$\dot{x}$=–$\omega A \sin\frac{3\pi}{2}$=+$\omega A$.

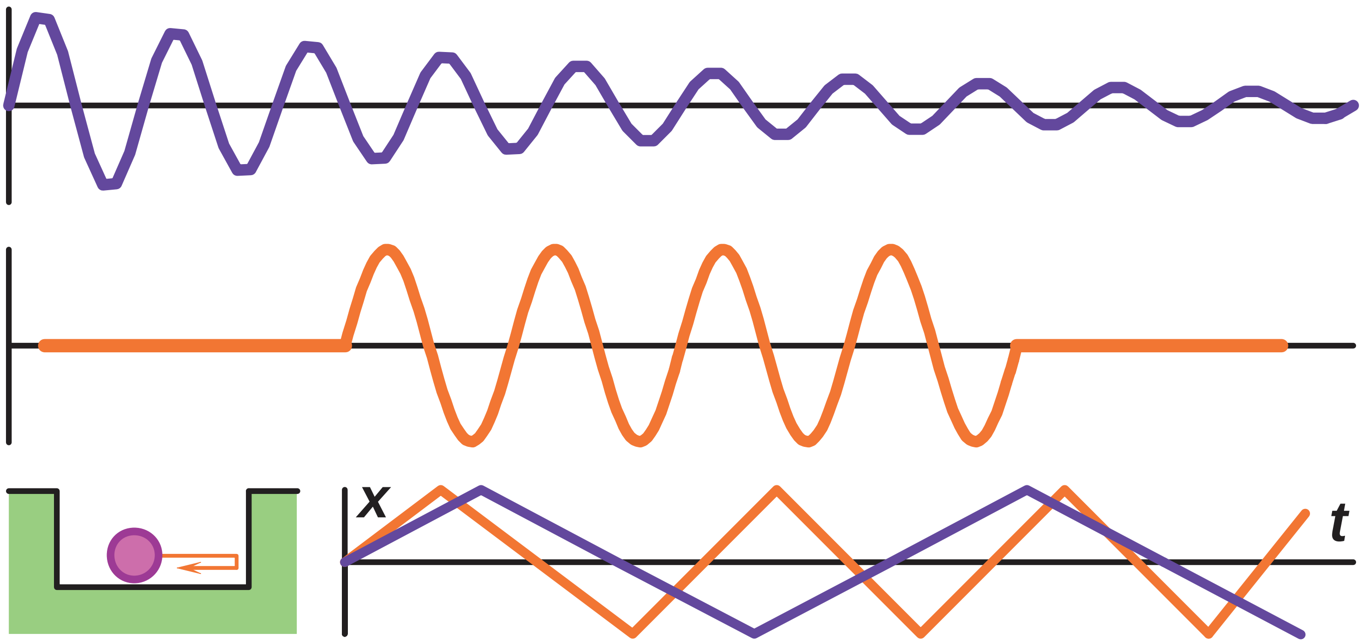
5. (ωt=2π). Система вернулась в исходное состояние. Время, которое для этого потребовалось, — **период**: $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Величина, обратная периоду — **частота** $\nu \equiv \frac{1}{T}$ (не путать с параметром ω, который в 2π раз больше и называется циклической частотой; циклическая частота показывает, не *сколько колебаний* происходит в единицу времени, а на *какой угол* в эту единицу времени меняется *фаза* колебания).

Уравнение гармонического колебания (6) может быть записано с помощью разных параметров:

$$x = A\,\cos(\omega t + \alpha) = A\,\cos(2\pi\nu t + \alpha) = A\,\cos(2\pi\frac{t}{T} + \alpha) \qquad (7)$$

Гармоническое движение – бесконечно. Оно не уменьшается и не увеличивается, происходит с постоянной частотой. При этом для конкретной колебательной системы **частота не зависит от амплитуды**, с которой оно происходит, а зависит исключительно от динамических характеристик: для шарика на пружине – это масса и жесткость; для маятника – длина подвеса и напряженность гравитационного поля; для электрического резонансного контура – индуктивность и емкость; и т. п.

Если какое-то из перечисленных свойств отсутствует — то это НЕ **гармоническое** колебание. Примеры таких негармонических колебаний:

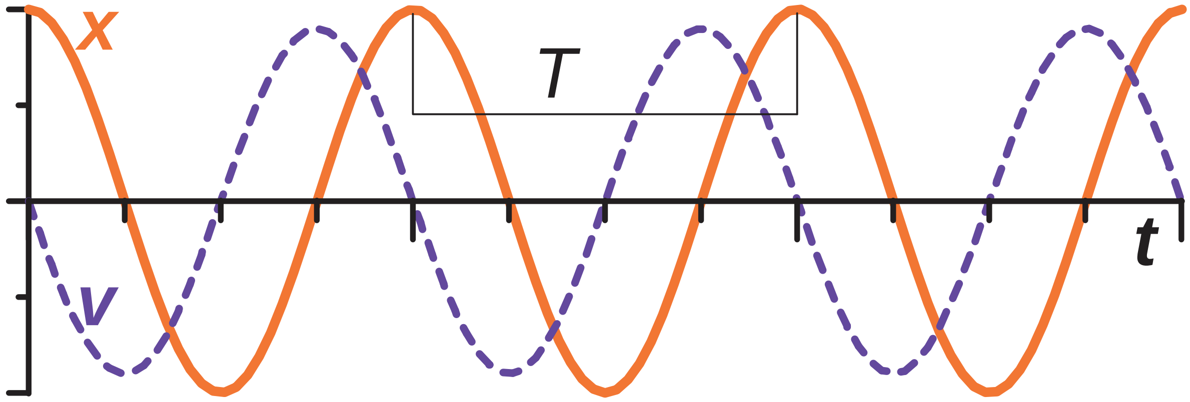


В действительности, конечно, **истинно гармонических** колебаний не бывает – все они когда-то начинаются и когда-то заканчиваются, либо плавно затухают, либо частота их меняется со временем и зависит от амплитуды (т.е., это *“не совсем синус”*).

Тем не менее, гармонический осциллятор – очень хорошее приближение к многим явлениям в природе. Свет, звук, строение атома и атомного ядра, – все это может быть объяснено гармоническими колебаниями. Высокая стабильность г.к. $\Rightarrow$ часы; эталон частоты $\Rightarrow$ эталон длины.

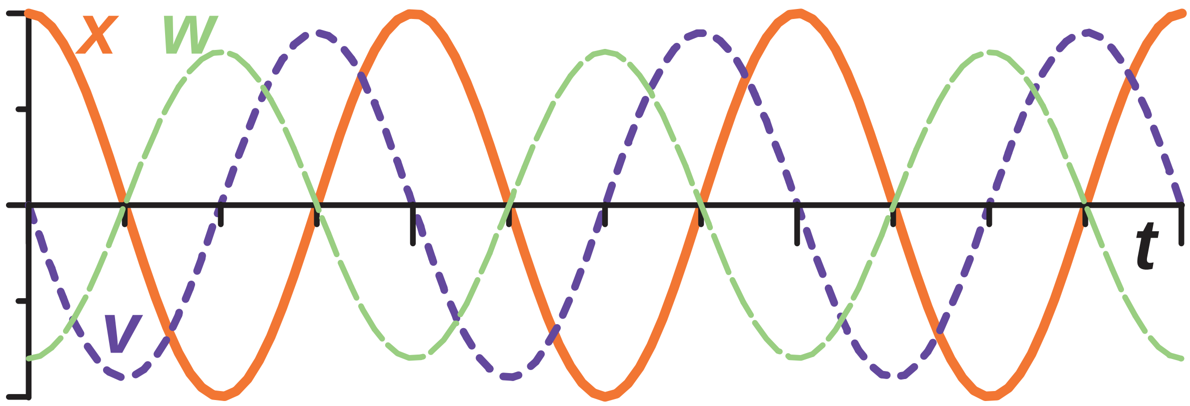
Поговорим о <u>**скорости**</u>, <u>**ускорении**</u> и <u>**энергии**</u> в процессе гармонического колебания.

$$\text{Смещение:}\quad x = A\cos(\omega t+\alpha)$$
$$\text{Скорость:}\quad v = \dot{x} = -\omega A\sin(\omega t+\alpha) = \omega A\cos(\omega t+\alpha+\tfrac{\pi}{2})$$
$$\text{Ускорение:}\quad w = \ddot{x} = -\omega^2 A\cos(\omega t+\alpha) = \omega^2 A\cos(\omega t+\alpha+\pi)$$



Скорость описывается точно таким же законом (sin или cos), как и отклонение, но опережает его по фазе на $\frac{\pi}{2}$ (на четверть периода).

То же справедливо и для ускорения, но там опережение еще больше – на π (половину периода):



Таким образом, скорость (и, соответственно, кинетическая энергия) достигает своего максимума при прохождении точек равновесия.

Ускорение же вызывается действием возвращающей силы, а она (сила) пропорциональна отклонению и, следовательно, ускорение максимально при максимальном отклонении, но направлено в противоположную сторону.

Кинетическая энергия в любой момент (с учетом того, что $\omega^2 = k/m$):

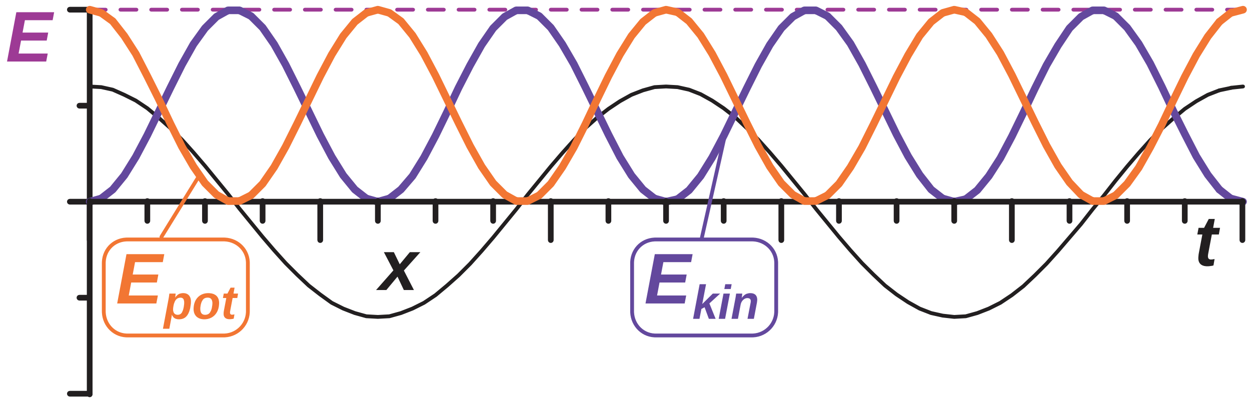
$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t+\alpha) = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\alpha)$$

Если шарик колеблется на пружине горизонтально (это для упрощения; результат будет тот же), то потенциальная энергия равна

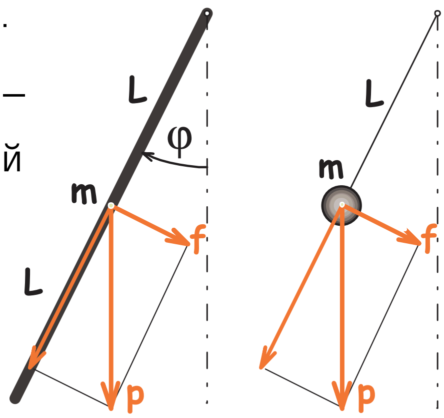
$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \alpha)$$

Полная энергия системы (сумма $E_k + E_p$) составит

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \alpha) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \alpha) = \frac{1}{2}kA^2$$



Как видим, кинетическая и потенциальная энергия при колебании переходят друг в друга с частотой, в 2 раза большей (потому как $E_p(-x) = E_p(+x)$, а $E_k(-v) = E_k(+v)$), в то время как их сумма остается постоянной, пропорциональной жесткости и квадрату амплитуды.



Рассмотрим для примера два маятника с массой m – физический (стержень длиной $2L$) и математический (материальную точку на невесомом подвесе L). Центры масс обоих маятников лежит на одинаковом расстоянии L от точки подвеса. Возвращающий момент силы тоже одинаков:

$\mathcal{M} = pL\sin\varphi \simeq pL\varphi$;   или с учетом направления: $\vec{\mathcal{M}} \simeq -pL\vec{\varphi}$

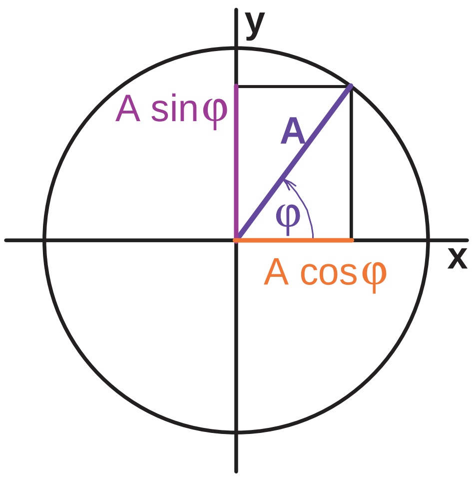
Различие появляется, когда мы начинаем вычислять угловое ускорение: $\ddot{\varphi} = \mathcal{M}/\mathcal{I}$. Дело в том, что моменты инерции $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$ у маятников разные:

для стержня: $\mathcal{I}_1 = mL^2 + \dfrac{mL^2}{3} = \dfrac{4}{3}mL^2$ для точки: $\mathcal{I}_2 = mL^2$

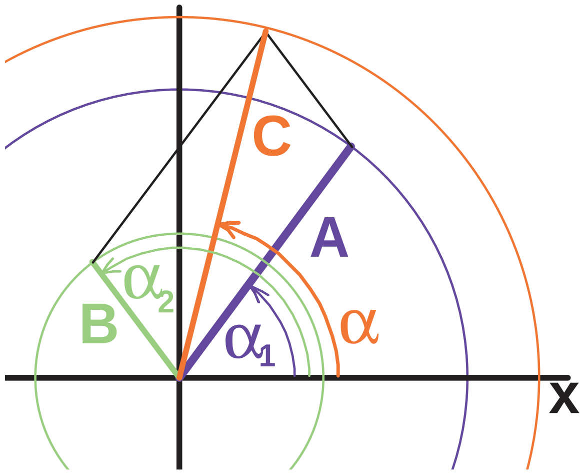
Поэтому и периоды колебаний $T = 2\pi\sqrt{\mathcal{I}/mgL}$ тоже будут отличаться:

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{4L}{3g}} \simeq 1.15\,T_2$$

Сложение колебаний



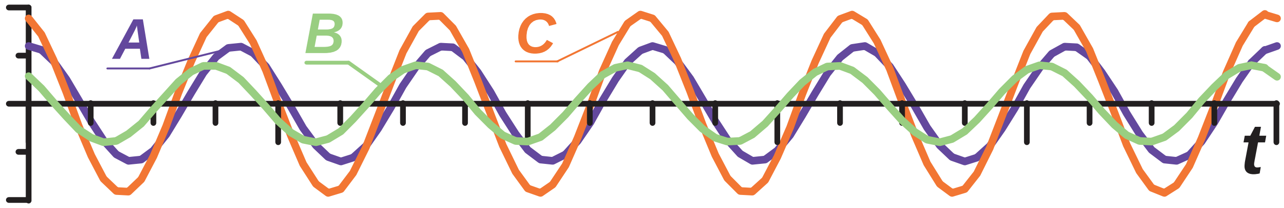
Любое гармоническое колебание, записанное в виде $x_1 = A\cos(\omega t + \alpha_1)$, можно формально представить как проекцию на ось $\vec{x}$ от вращающегося с частотой ω вектора, длина которого равна амплитуде A. Тогда, если в одном и том же направлении происходят одновременно 2 колебания с одинаковой частотой: $x_1 = A\cos(\omega t + \alpha_1)$ и $x_2 = B\cos(\omega t + \alpha_2)$ – то суммарное движение, равное суперпозиции двух гармоничеких осцилляций, представляет собой проекцию вектора, равного сумме двух амплитуд (так как частоты одинаковы, то оба вектора вращаются синхронно, и угол между ними постоянен ⇒ суммарный вектор тоже постоянен по длине).



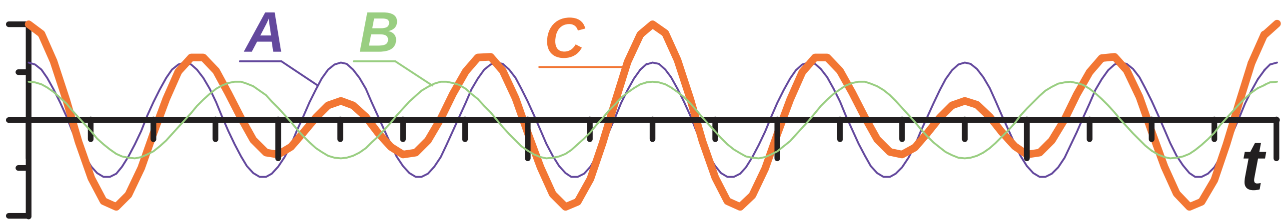
$$x = x_1 + x_2 = C\cos(\omega t + \alpha)$$

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos(\alpha_2 - \alpha_1)$$

И это будет тоже гармоническое колебание!



Другая картина при сложении колебаний с РАЗНОЙ частотой. Здесь угол между складываемыми векторами все время меняется ⇒ суммарный вектор $\neq$ const., и получается уже НЕ гармоническое колебание.



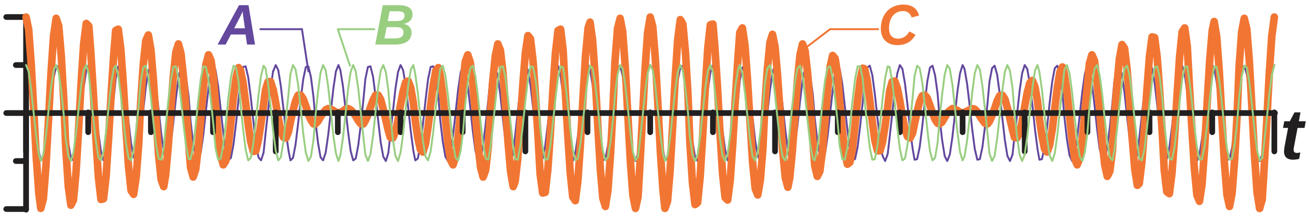
В зависимости от того, как соотносятся частоты складываемых колебаний, получаются совершенно разные (но очень важные!) результаты. Рассмотрим их подробнее.

- **Частоты отличаются очень мало.** Пусть $\omega_2 = \omega_1 + 2\varepsilon$, а амплитуды обоих колебаний равны друг другу: $A = B$. Длина суммарного вектора $\vec{C}$ (по теореме косинусов) зависит от разности фаз колебаний:

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos(\omega_2 - \omega_1)t = 2A^2 \cdot (1 + \cos 2\varepsilon t) = 4A^2\cos^2\varepsilon t$$

$$C = \sqrt{4A^2\cos^2\varepsilon t} = 2A\cos\varepsilon t$$

Получилось, что длина результирующего вектора будет меняться со временем как $\cos\varepsilon t$, то есть, возникает что-то вроде БИЕНИЙ с этой разностной частотой

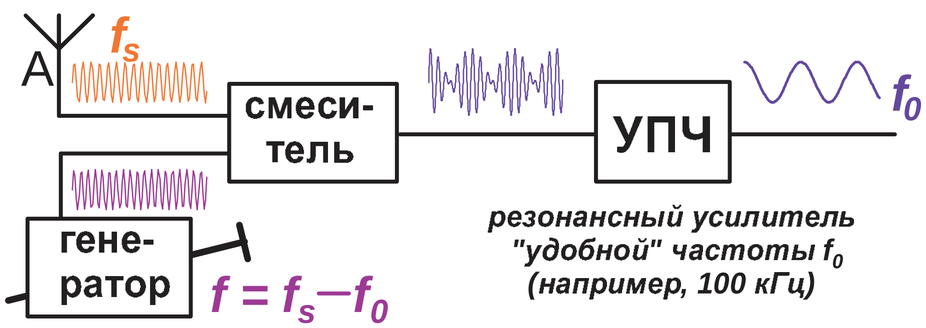


Фаза этого суммарного вектора $\vec{C}$ равна среднему арифметическому от фаз слагаемых векторов, поэтому его проекция будет

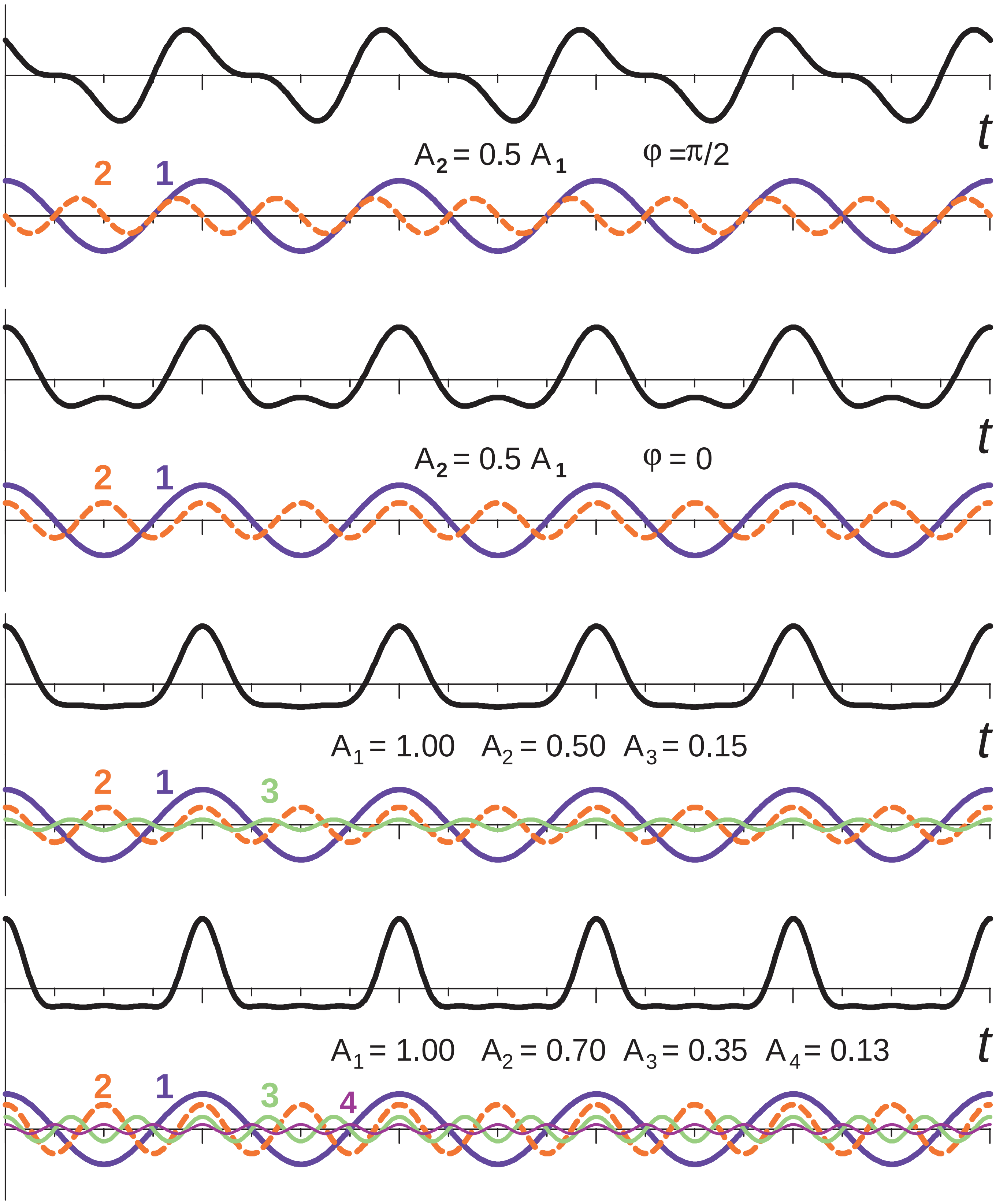
$$x = C\,\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t + \alpha\right) = (2A\cos\varepsilon t)\cdot\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t + \alpha\right)$$

То есть, получилось как бы гармоническое колебание с частотой $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$, амплитуда которого не постоянна, но медленно меняется с частотой $\varepsilon = (\omega_2 - \omega_1)/2$.

Это явление широко используется в радиотехнике для преобразования слишком высокой принимаемой несущей частоты f_s в удобную промежуточную частоту f_0. Для этого регулируемый генератор (**гетеродин**) производит свою дополнительную частоту f, которая подбирается так, чтобы $f_0 = f_s - f$.



- **Частоты отличаются в целое число раз.** Пусть $\omega_2 = 2\omega_1$, сдвиг фаз $\varphi = \pi/2$ и 0, а отношение амплитуд A_2/A_1=0.5. Построив с помощью компьютера такие графики, а также графики с добавкой $\omega_3 = 3\omega_1$ и $\omega_4 = 4\omega_1$, получим:



Видим, что, комбинируя амплитуды и фазы кратных частот (**высших гармоник**), можно получить любую форму функции с периодом, соответствующим основной частоте ω_1.
На этом основан анализ Фурье – разложение произвольной периодической функции $f(x)$ в ряд гармоник (или непериодической – в непрерывный частотный спектр).
Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830, Paris, FR)

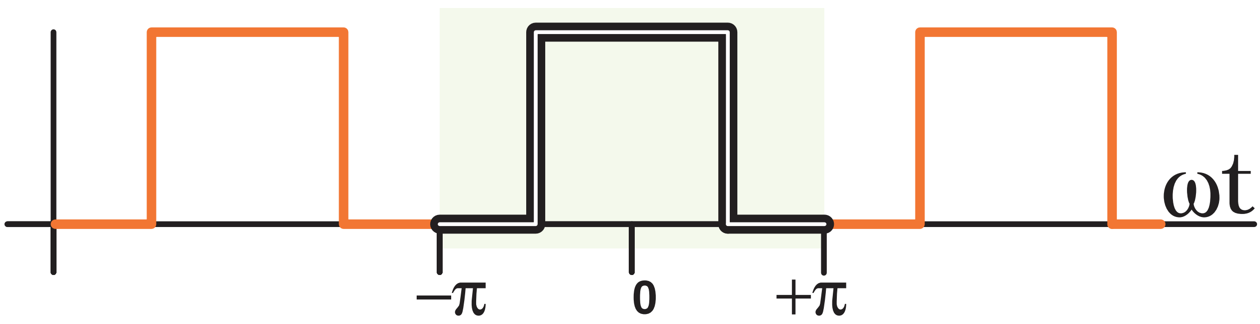
$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx))$$

где амплитуды A_n и B_n находятся из формул

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$$

Пример: разложить в ряд Фурье симметричный меандр:



Решение: Рассмотрим отрезок длиной в один период, расположив его симметрично относительно начала шкалы. Тогда $f(x)$=1 при -$pi/2 < x < +\pi/2$ и $f(x)$=0 правее и левее. Вычисляем амплитуды A_n и B_n для $n = 0, 1, 2, 3...$. Сначала заметим, что наша функция $f(x)$ – четная (то есть, $f(x)$=$f(-x)$). Из этого следует, что синусы в разложении участвовать не должны, и все коэф-ты $B_n = 0$. Проверим это для произвольного n:

$$\pi \cdot B_n = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sin(nx)\, dx = \int_{-n\pi/2}^{+n\pi/2} \sin(z) \frac{dz}{n} = -\frac{\cos(z)}{n}\Bigg|_{-n\pi/2}^{+n\pi/2} = 0$$

Последнее равенство обусловлено тем, что $\forall\varphi$ всегда $\cos(\varphi) \equiv \cos(-\varphi)$. Теперь посчитаем коэффициенты при косинусах. A_0 – это особый случай:

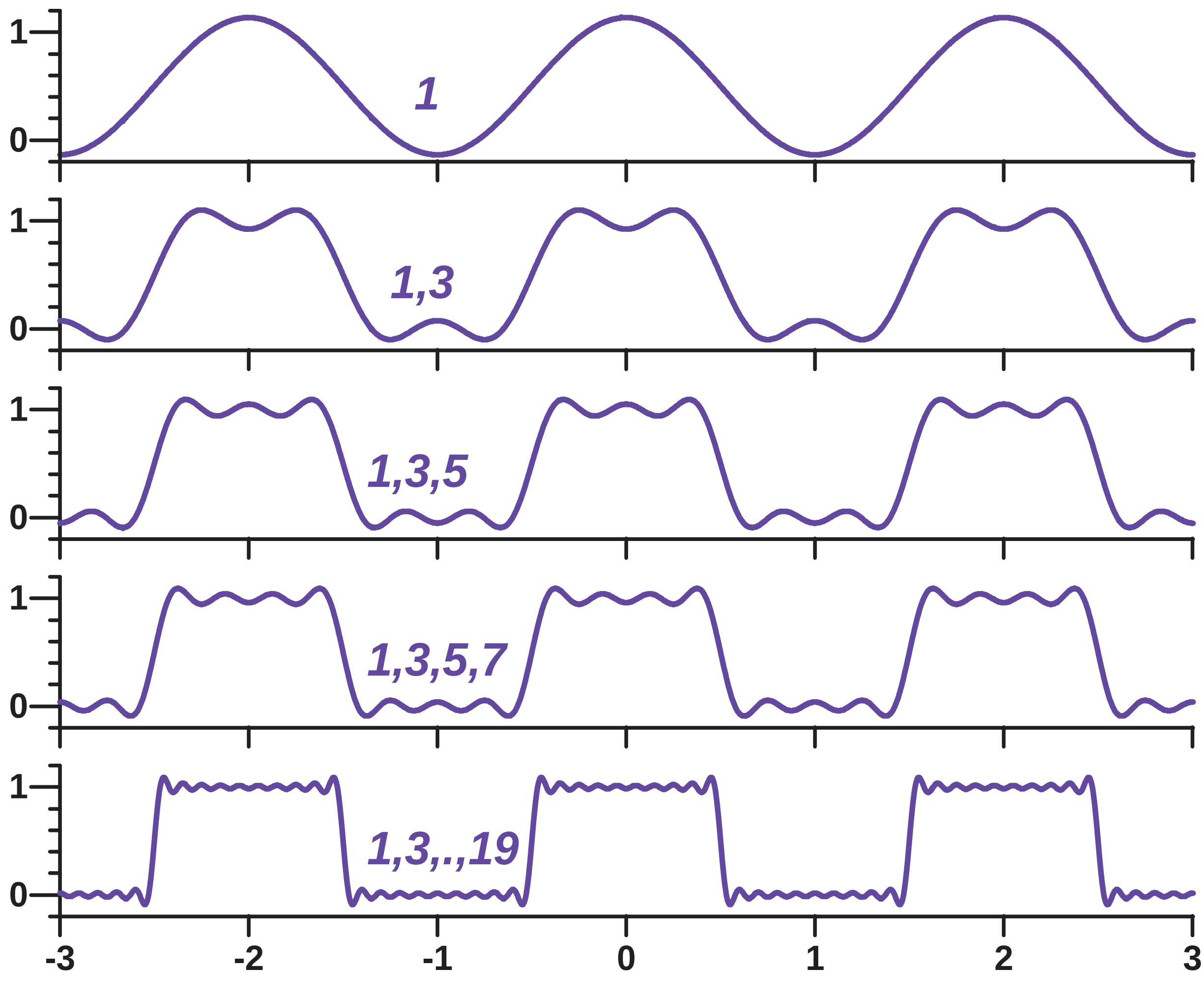
$$\pi \cdot A_0 = \int\limits_{-\pi/2}^{+\pi/2} 1 \cos(0)\,dx = x\Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \pi \quad \Rightarrow \quad A_0 = 1.0$$

Остальные A_n находим заменой переменной интегрирования $nx \to z$:

$$\pi \cdot A_n = \int\limits_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos(nx)\,dx = \int\limits_{-n\pi/2}^{+n\pi/2} \cos(z)\,\frac{dz}{n} = \frac{\sin(z)}{n}\Bigg|_{-n\pi/2}^{+n\pi/2} = \frac{2}{n}\sin\frac{n\pi}{2}$$

Для четных $n = 2k$ полученная величина $\sin\frac{n\pi}{2} = \sin(k\pi) = 0$, а для нечетных эта величина поочередно равна или +1, или –1.

Таким образом, получаем: B_n=0; $A_0 = 1.0$; $A_1 = +\frac{2}{\pi}$; $A_3 = -\frac{2}{3\pi}$; $A_5 = +\frac{2}{5\pi}$; $A_7 = -\frac{2}{7\pi}$; $A_9 = +\frac{2}{9\pi}$; $A_{11} = -\frac{2}{11\pi}$; $A_{13} = +\frac{2}{13\pi}$; ...



Сложение колебаний вдоль разных осей

Пусть для начала это перпендикулярные оси $\vec{x}$ и $\vec{y}$, и частоты равны. Тогда

$$\begin{cases} x = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1) \\ y = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2) \end{cases}$$

Чтобы отследить траекторию, исключим отсюда время t. Для этого перепишем уравнения, домножим их на $\cos(\alpha_{2,1})$ и вычтем:

$$\begin{cases} \frac{x}{A_1} = \cos(\omega t)\cdot\cos(\alpha_1) - \sin(\omega t)\cdot\sin(\alpha_1) \\ \frac{y}{A_2} = \cos(\omega t)\cdot\cos(\alpha_2) - \sin(\omega t)\cdot\sin(\alpha_2) \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot\cos(\alpha_2) \\ \cdot\cos(\alpha_1) \end{array} \right.$$

$$\frac{x}{A_1}\cos(\alpha_2) - \frac{y}{A_2}\cos(\alpha_1) = \sin(\omega t)\cdot\sin(\alpha_2 - \alpha_1)$$

Если теперь сделать то же самое, но домножать не на $\cos(\alpha_{2,1})$ а на $\sin(\alpha_{2,1})$, то получится

$$\frac{x}{A_1}\sin(\alpha_2) - \frac{y}{A_2}\sin(\alpha_1) = \cos(\omega t)\cdot\sin(\alpha_2 - \alpha_1)$$

Если теперь возвести в квадрат и сложить оба полученных уравнения, то ωt уходит, и остается уравнение траектории:

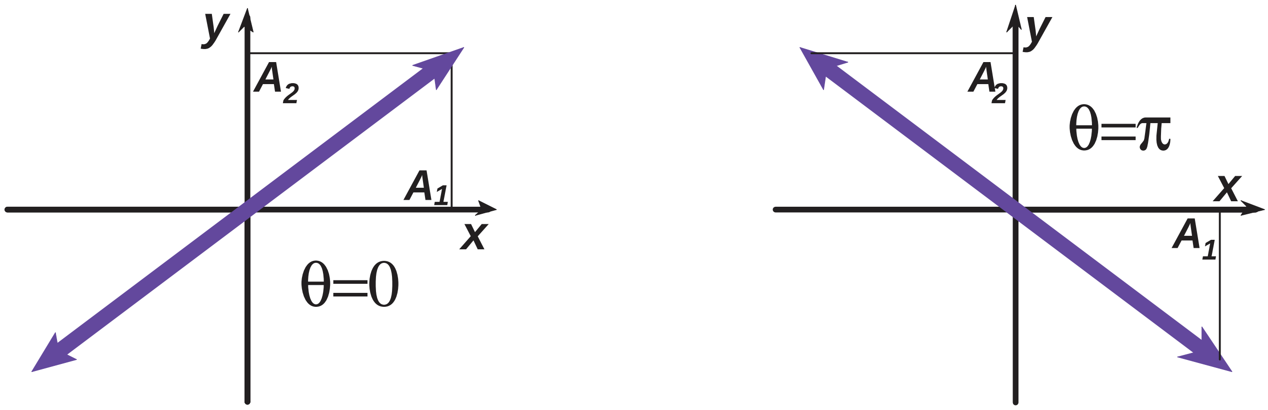
$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2}\cos(\alpha_2 - \alpha_1) = \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)$$

Это – уравнение ЭЛЛИПСА, характеристики которого зависят от разности фаз $\theta = (\alpha_2 - \alpha_1)$.

- Пусть фазы совпадают: $\theta = 0$, и $\alpha_2 = \alpha_1 = \alpha$. Тогда

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{y} = \frac{A_1}{A_2}$$

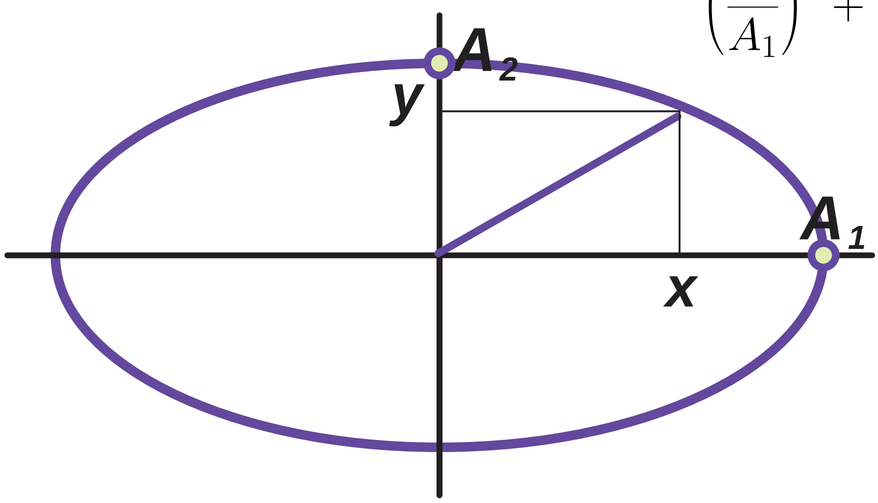
Это – прямая линия. Если колебания не *в фазе*, а *в противофазе* ($\theta = \pi$), то тоже будет прямая, но наклон – в другую сторону:



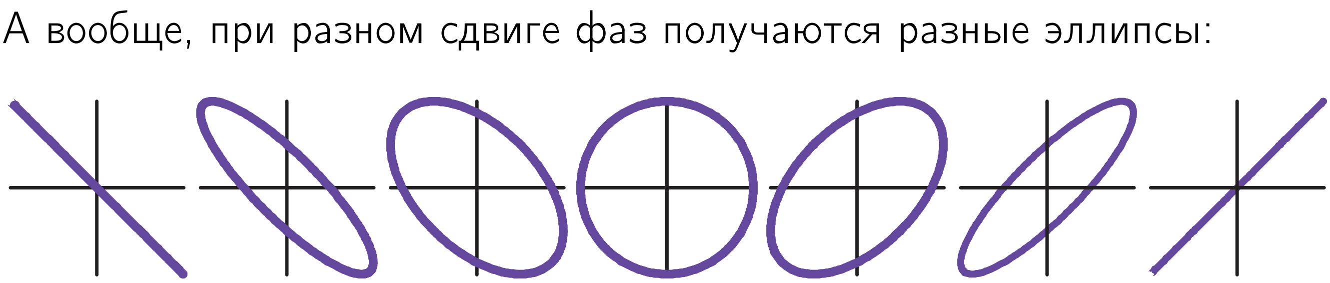
Колебание вдоль этой наклонной прямой будет тоже гармоническим с таким же периодом и с амплитудой $s = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$.

- Если фазы сдвинуты на $\pi/2$, то получается уравнение эллипса:

$$\left(\frac{x}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_2}\right)^2 = 1$$

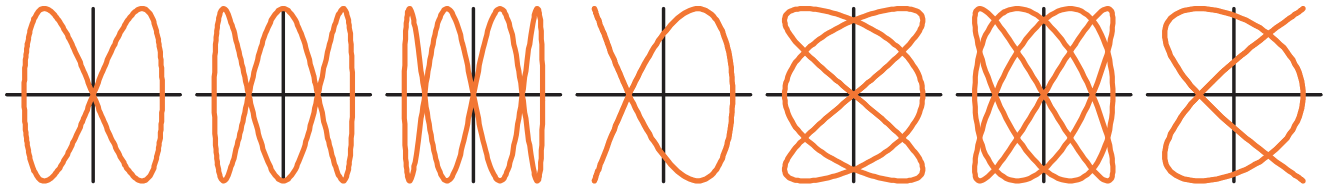


- А вообще, при разном сдвиге фаз получаются разные эллипсы:



Значит, движение точки по эллипсу можно представить как сумму двух гармонических взаимно $\perp$ колебаний.

- Если частоты (или периоды) соотносятся как целые числа, то получаются не только эллипсы, но и более сложные фигуры Лисажу:



Затухающие колебания

Любое реальное колебание без внешней подпитки рано или поздно затухает. Это вызвано потерей энергии на трение в подвесе, сопротивление внешней среды, нагрев из-за ненулевого электрического сопротивления, электромагнитное излучение и т. п. Для примера рассмотрим колебание в вязкой среде (в воздухе). В этом случае сила трения пропорциональна скорости тела (в первом приближении!), и тогда уравнение по 2ЗН выглядит так:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} \qquad \text{или} \qquad \ddot{x} = -\frac{k}{m}x - \frac{r}{m}\dot{x}$$

Введем обозначения: $\quad \dfrac{k}{m} \equiv \omega_0^2; \quad \dfrac{r}{m} \equiv 2\beta$

Тогда дифф. ур. преобразуется в

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\beta\dot{x}$$

Как его решать? Если бы не было торможения ($\beta \to 0$), то все свелось бы к гармоническому осциллятору. Но это, к сожалению не так. Интуиция подсказывает, что с каждым очередным колебанием система должна терять примерно одну и ту же **долю** своей энергии, $\Rightarrow$ амплитуда должна убывать со временем **экспоненциально**, причем крутизна экспоненты должна быть пропорциональна коэффициенту сопротивления. Введем такую замену переменной:

$$x = z\,e^{-\beta t}, \qquad \dot{x} = \dot{z}\,e^{-\beta t} - \beta\,z\,e^{-\beta t}, \qquad \ddot{x} = \ddot{z}\,e^{-\beta t} - 2\beta\,\dot{z}\,e^{-\beta t} + \beta^2\,z\,e^{-\beta t}$$

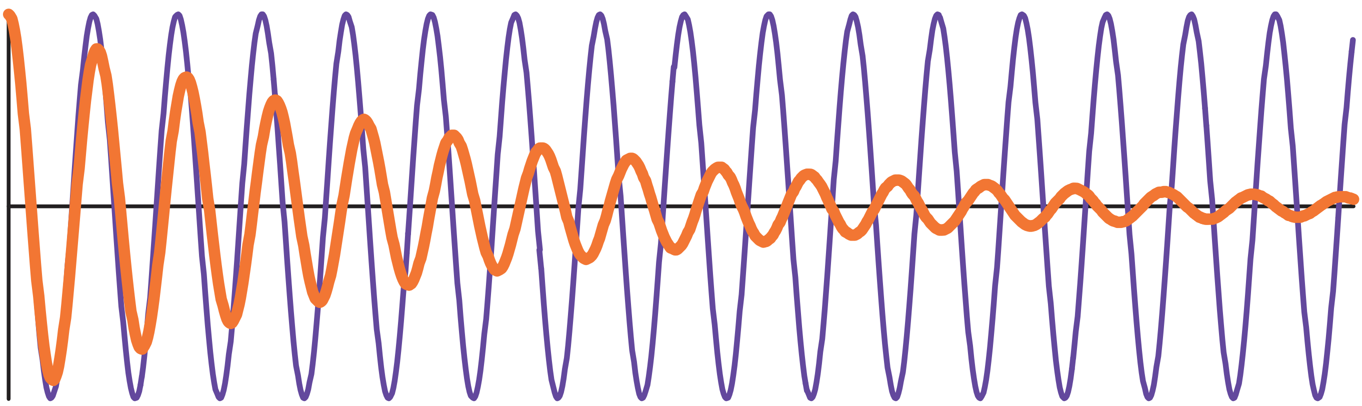
Подставив это вместо x, $\dot{x}$ и $\ddot{x}$ в наше дифф. ур-ние, получим

$$\ddot{z} - 2\beta\dot{z} + \beta^2 z = -\omega_0^2 z + 2\beta^2 z - 2\beta\dot{z} \qquad \text{или} \quad \ddot{z} = -(\omega_0^2 - \beta^2)\,z$$

Это последнее уравнение – в точности такое же, как и для гармонического колебания, только частота здесь несколько уменьшилась: $\omega^2 \equiv (\omega_0^2 - \beta^2)$. В качестве его решения получаем любое из следующих выражений:

$$\begin{aligned} x = &\ A_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot e^{i(\omega t+\alpha)} \\ x = &\ A_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \sin(\omega t + \alpha) \\ x = &\ A_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t + \alpha) \end{aligned}$$

причем не следует забывать, что здесь $\omega^2 \equiv (\omega_0^2 - \beta^2)$. Как видим, сопротивление играет двоякую роль: уменьшает амплитуду колебаний со временем (она теперь не постоянна) и уменьшает частоту (частота постоянна, но меньше по величине).



Либо можно сказать, что период колебаний в вязкой среде стал больше:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} > \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Если взять отношение амплитуд для двух соседних периодов – то это будет константа, логарифм которой называется **логарифмическим декрементом затухания** λ.

$$\lambda = \ln \frac{A_0\, e^{-\beta t}}{A_0\, e^{-\beta(t+T)}} = \ln\, e^{\beta T} = \beta T$$

Тогда можно, во-первых, записать уравнение колебаний в новом виде:

$$x = A_0 \cdot e^{-\lambda \frac{t}{T}} \cdot \cos\left(2\pi \frac{t}{T} + \alpha\right)$$

и, во-вторых, определять коэф-т сопротивления среды r из затухания колебаний:

$$r = 2\beta m = 2\frac{\lambda}{T} m$$

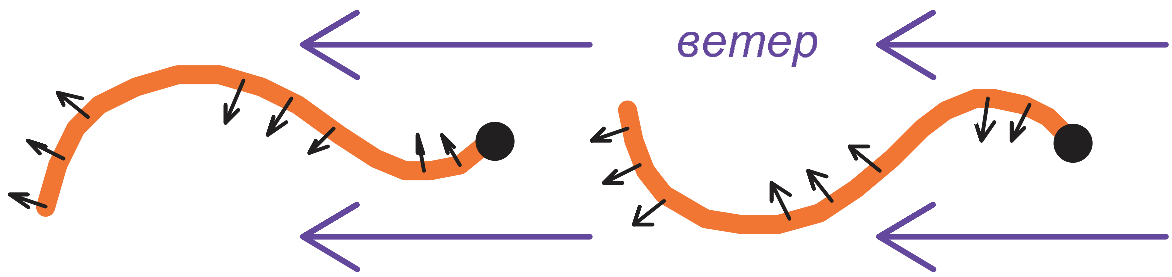
Пример: лог.декркмент λ=0.02; во сколько раз уменьшится амплитуда после 100 колебаний?
Решение: в начальный момент (t=0) амплитуда = A_0. В последующее время t формула колебания выглядит как

$$x = A_0 \cdot e^{-\lambda \frac{t}{T}} \cdot \cos\left(2\pi \frac{t}{T} + \alpha\right)$$

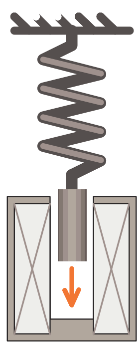
через 100 периодов ($t = 100\,T$) амплитуда станет равна

$$A = A_0 \cdot e^{-\lambda \frac{t}{T}} = A_0 \cdot e^{-0.02 \cdot 100} = A_0 \cdot e^{-2} \simeq 0.135 A_0 \simeq \frac{A_0}{7.39}$$

Если как-то компенсировать потери на трение, то есть, в нужные моменты подталкивать систему, то затухания не будет. **Автоколебания.** Пример: балансир часов. Находясь в нужной фазе, балансир с помощью храпового механизма на короткое время дает возможность пружине себя подтолкнуть. Другой пример: хлопанье флага на ветру.



Вынужденные колебания



Что будет, если кроме упругой силы и сил сопротивления, на тело действует внешняя периодическая **вынуждающая** сила? Например, эта сила меняется во времени как

$$f(t) = H\ \cos(\omega t)$$

Уравнение, выражающее 2ЗН будет следующим:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + H\cos(\omega t)$$

Введя обозначения:

$$\frac{k}{m} \equiv \omega_0^2; \qquad \frac{r}{m} \equiv 2\beta; \qquad h \equiv \frac{H}{m}$$

получим такое дифф. уравнение

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\beta\dot{x} + h\cos(\omega t)$$

Будем искать решение в виде $x = A\cos(\omega t + \alpha)$, то есть, по нашему мнению, внешняя сила должна "победить". Если это так, то первая и вторая производные равны, соответственно

$$\dot{x} = -A\omega\sin(\omega t + \alpha); \quad \ddot{x} = -A\omega^2\cos(\omega t + \alpha)$$

Подставив все это в исходное уравнение, получим:

$$-A\omega^2\cos(\omega t + \alpha) = -A\omega_0^2\cos(\omega t + \alpha) + 2A\beta\omega\sin(\omega t + \alpha) + h\cos(\omega t)$$

Приведем подобные члены:

$$A(\omega^2 - \omega_0^2)\cos(\omega t + \alpha) + 2A\beta\omega\sin(\omega t + \alpha) + h\cos(\omega t) = 0$$

и заменим sin и cos суммы углов на произведения. Левая часть:

$$A(\omega^2 - \omega_0^2)(\cos\omega t \cdot \cos\alpha - \sin\omega t \cdot \sin\alpha) + 2\beta A\omega(\sin\omega t \cdot \cos\alpha + \cos\omega t \cdot \sin\alpha) + h\cos\omega t$$

Чтобы это равенство превратилось в тождество (т.е., выполнялось $\forall t$), надо, чтобы коэффициенты при $\sin\omega t$ и при $\cos\omega t$ равнялись 0. Так мы приходим к системе двух уравнений:

$$\begin{cases} A(\omega^2 - \omega_0^2)\cos\alpha + 2A\beta\omega\sin\alpha &= -h \\ A(\omega^2 - \omega_0^2)\sin\alpha - 2A\beta\omega\cos\alpha &= 0 \end{cases}$$

Из второго уравнения находим сдвиг фазы α:

$$\tan\alpha = \frac{2\beta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}.$$

То есть, при наличии сопротивления движение не совпадает по фазе с вынуждающей силой. ($\alpha \neq 0$).

Возводя в квадрат и затем складывая оба уравнения, получим:

$$A^2\left[\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2\right] = h^2$$

откуда следует, что амплитуда установившихся вынужденных колебаний равна

$$A = \frac{h}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

Амплитуда колебаний $\propto$ амплитуде вынуждающей силы h (это естественно). В знаменателе по корнем стоит положительное число. Но при некоторой частоте оно минимально. Найдем это **условие резонанса**, приравняв нулю первую производную по частоте:

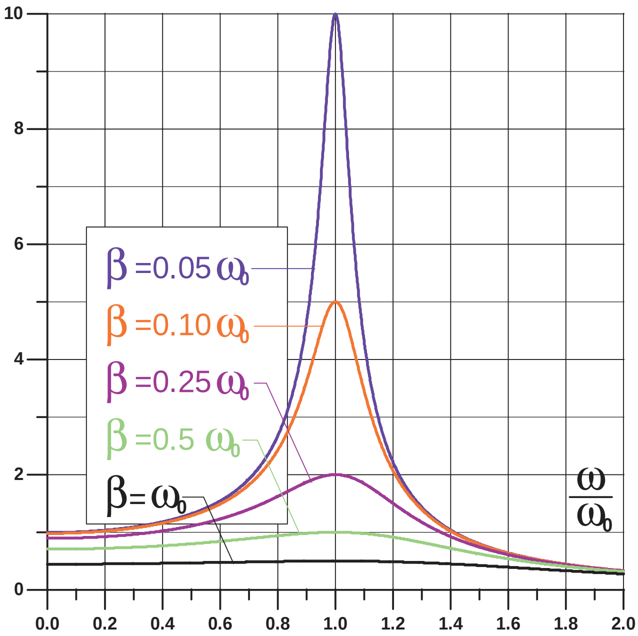
$$0 = \frac{d}{d\omega}\left(\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2\right) = 2\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)\cdot 2\omega + 8\beta^2\omega$$

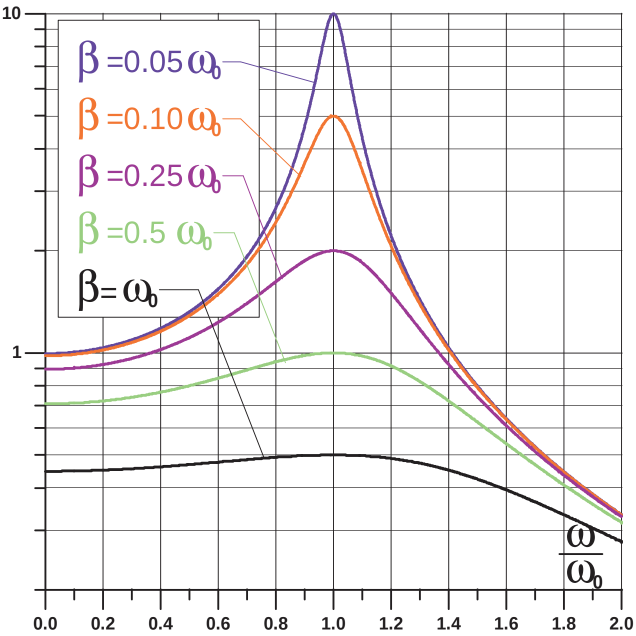
Решая это ур-ние относительно ω и учитывая, что $\omega > 0$, найдем:

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

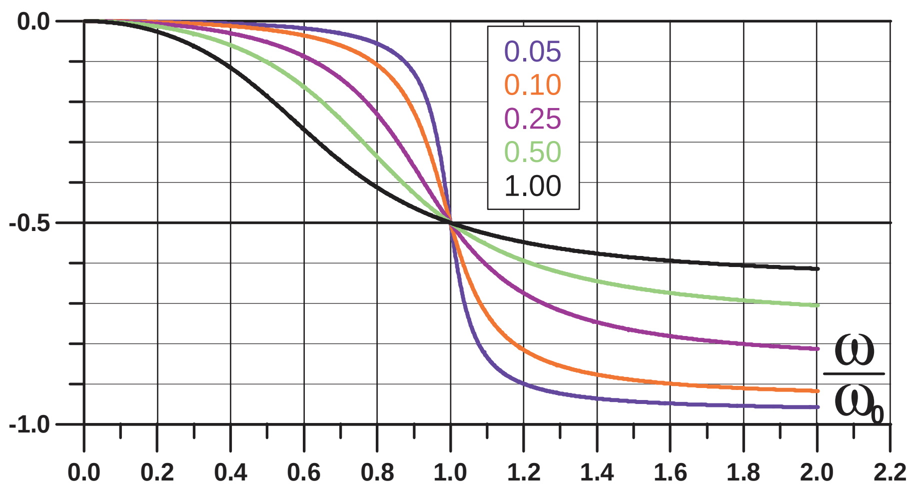
При резонансе амплитуда колебаний будет максимальна и составит

$$A_{\text{res}} = \frac{h}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$





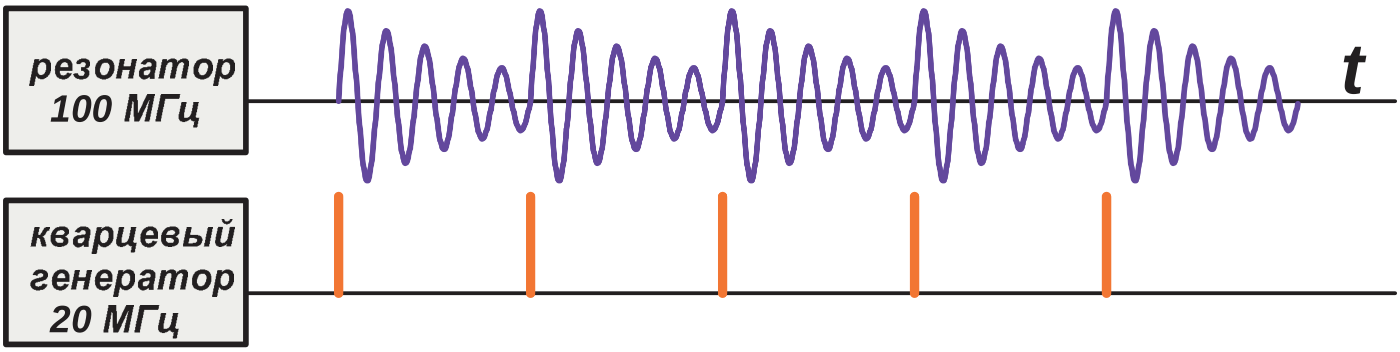
Если бы сопротивление полностью отсутствовало (чего в действительности, конечно не бывает), то резонанс наступил бы при $\omega = \omega_0$, и амплитуда выросла бы до ∞. Фаза колебания отстает при резонансе от фазы вынуждающей силы ровно на $\frac{\pi}{2}$; получается, что сила каждый раз подталкивает систему по направлению ее движения, совершая положительную работу.



Эта работа никуда не тратится (трения-то нет!), а идет на неограниченное возрастание энергии системы.

При низких частотах система просто следует за вынуждающей силой (α=0), а при больших – из-за своей инерционности за силой не поспевает.

Вообще говоря, вынуждающая сила не обязательно должна меняться по гармоническому закону. Это могут быть, например, короткие импульсы. Но для достижения резонанса они должны следовать синхронно с собственной частотой колебания – должны *"попадать в такт"*. Не обязательно каждый период, можно, например, 1 раз из 5. Пример: нужен стабильный генератор с частотой 100 МГц, а имеется кварц только на 20 МГц. Решение:



Если синхронно меняется не сила, а параметр системы (момент инерции, длина подвеса), то это – **параметрический резонанс**. Пример: человек на качелях.

ВОЛНЫ

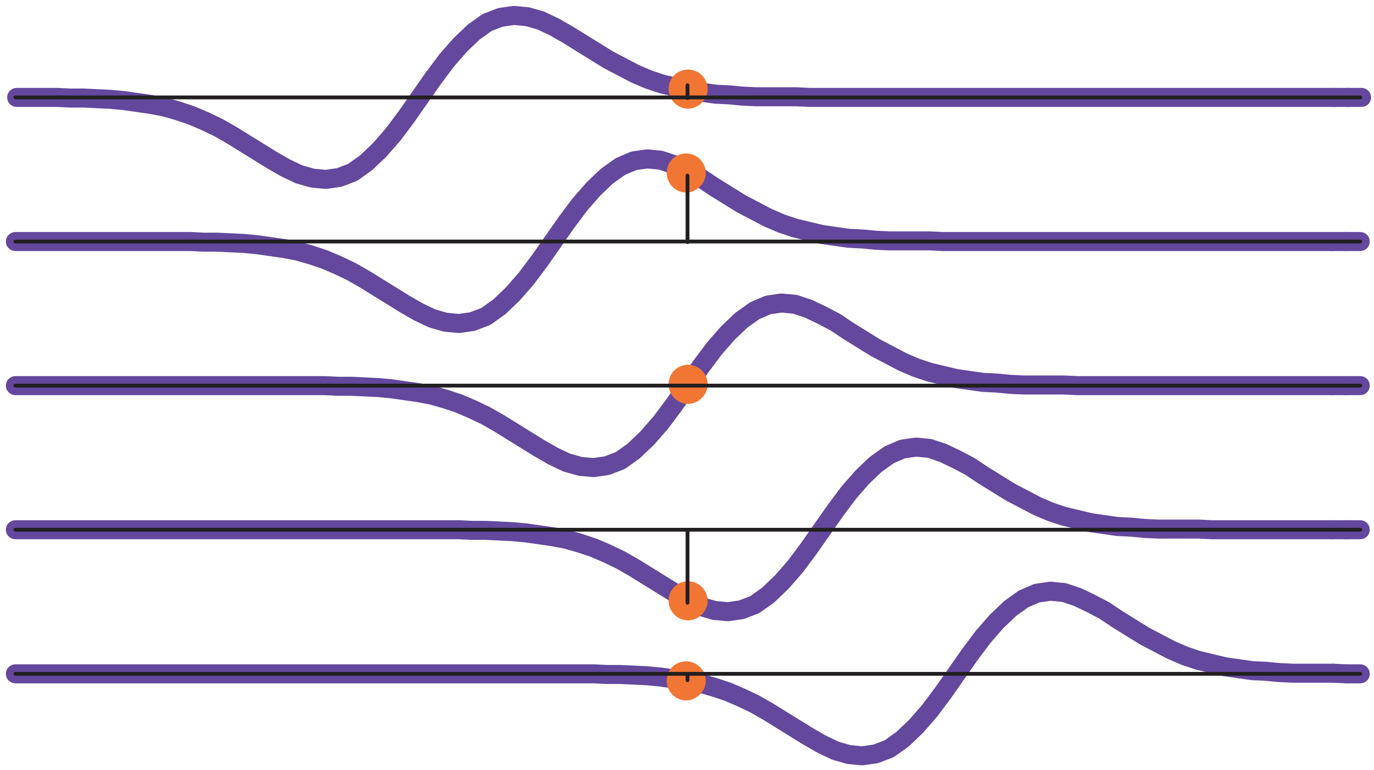
Если колеблющаяся точка – в среде, все точки которой как-то связаны, то колебание может им передаваться. Волна – явление распространения колебаний в среде.

Частицы не перемещаются с волной, а только колеблются возле своего положения равновесия.

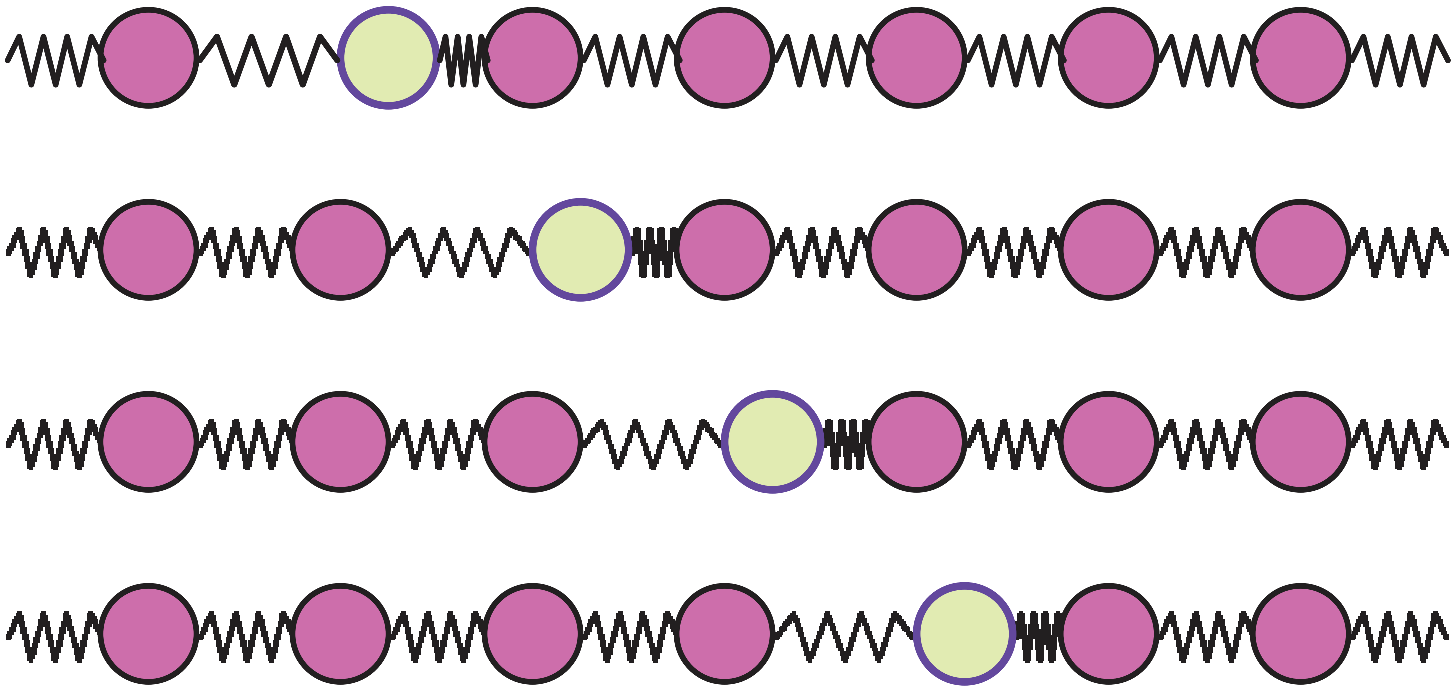
Продольная волна – если частицы колеблются вдоль той же прямой, по которой распространяется колебание

Поперечная волна – если частицы колеблются поперек.

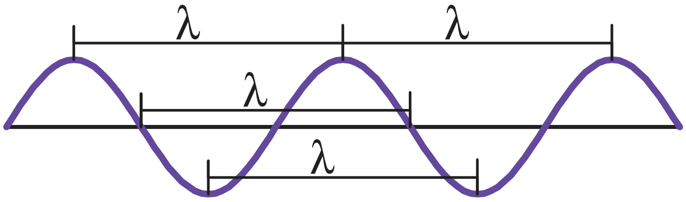
Распространение **поперечной волны** возможно, если при сдвиге слоя возникают упругие возвращающие силы.



Распространение **продольной волны** обусловлено повышением давления. В жидкости и газе возможны только продольные волны.



Длина волны λ – расстояние между ближайшими точками, колеблющимися в одинаковых фазах.



Скорость распространения волны V – это ее **фазовая скорость**, т. е. не скорость колеблющихся точек, а скорость распространения данной фазы колебания.

Направления распространения колебаний – **лучи**.

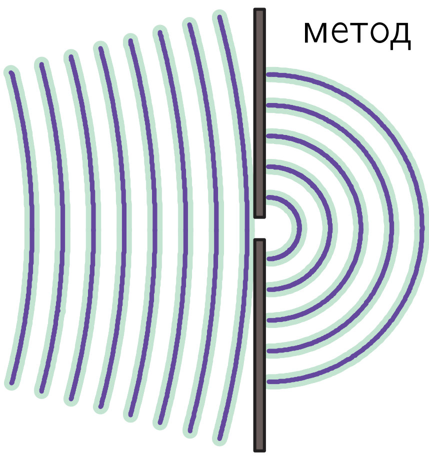
Г.м.т., до которых к некоторому моменту дошло колебание – **фронт волны**.

Г.м.т., колеблющихся в одинаковых фазах, – **волновая поверхность**. (Фронт волны – частный случай волновой поверхности). В изотропной среде колебания от центра колебаний тоже распространяются изотропно, и волновые поверхности – сферы, а лучи направлены по радиусам.

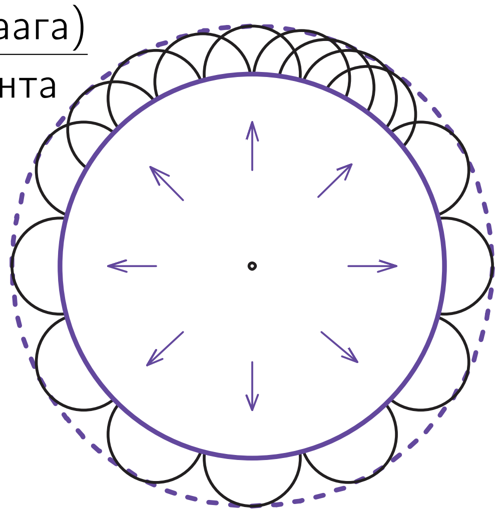
Форма фронта $\Rightarrow$ тип волны (плоская, цилиндрическая, и т. п.).

Принцип Гюйгенса (1629–1695, Гаага)

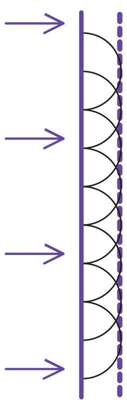
метод построения волнового фронта



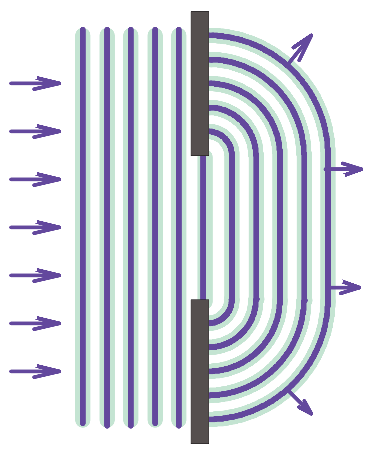
Каждая точка существующего волнового фронта рассматривается как источник нового колебания $\Rightarrow$ сферические волны $\Rightarrow$ огибающая = новый фронт.



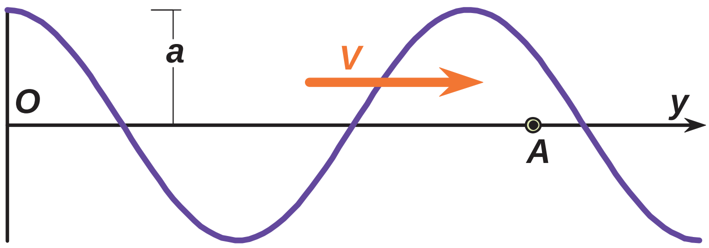
В изотропной среде у сферической волны фронт – это сфера. При $R \to \infty$ фронт – это плоская волна.



Если на пути волны оказывается препятствие с отверстием $> \lambda$, то центральная часть волны пройдет прямо, а по краям направление изменится – явление **диффракции**. Чем меньше размеры отверстия – тем сильнее выражена диффракция.



Уравнение волны



Пусть из точки O в направлении y со скоростью V распространяется волна. Колебания в точке O: $x = a\cos(\omega t)$. До произвольной точки A на расстоянии y волна докатится за время $\tau = y/V$.

Таким образом, точка A тоже начнет колебаться с такой же частотой и амплитудой, но с запаздыванием на время τ:

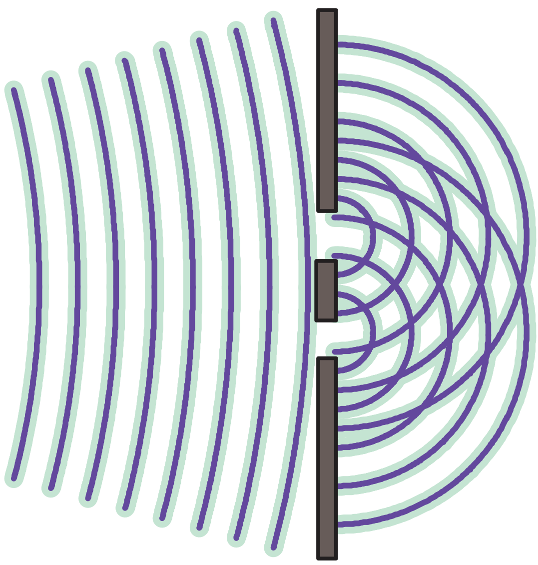
$$x = a\cos\omega(t-\tau) = a\cos\omega\left(t - \frac{y}{V}\right) = a\cos\left(\omega t - 2\pi\frac{y}{\lambda}\right)$$

Если расстояние между точками = целому числу волн $(n\cdot\lambda)$, то они колеблются в одинаковой фазе, а если полуцелому $(n\cdot\lambda + \frac{\lambda}{2})$ – то в противофазе.

У сферической волны ее амплитуда убывает обратно пропорционально радиусу. Поэтому ее уравнение:

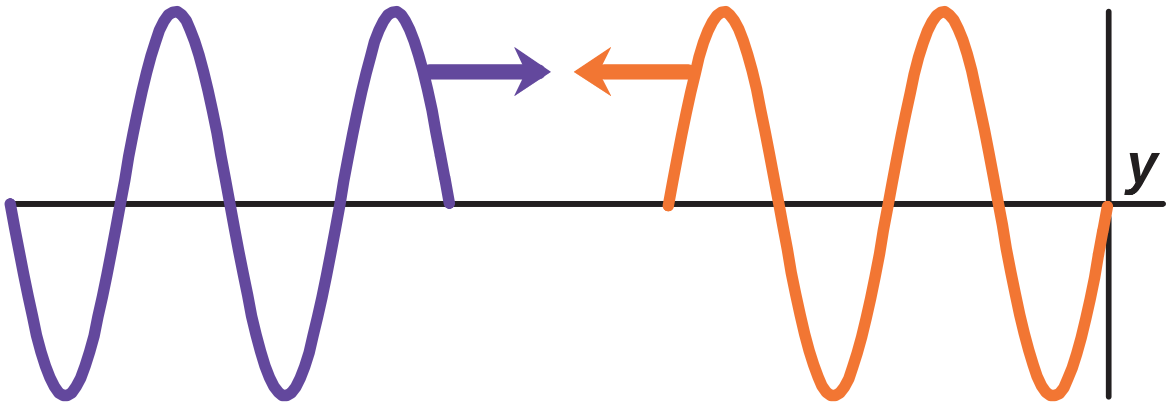
$$x = \frac{a}{r}\cos\omega\left(t - \frac{r}{V}\right)$$

Если есть несколько источников, то для волн соблюдается **принцип суперпозиции** (волны распространяются совершенно независимо друг



от друга, и соответствующие отклонения линейно суммируются). Если эти источники "работают" синхронно (с одной частотой и с постоянным сдвигом фазы), то есть, являются **когерентными**, то наблюдается явление **интерференции** волн, когда при сложении они усиливаются или, наоборот, компенсируют друг друга.

Частный случай интерференции – когда две когерентные волны идут навстречу друг другу (чаще всего это бывает при отражении от препятствия).



Тогда колебания, вызываемые прямой и отраженной волнами, будут, соответственно:

$$\begin{aligned} x_+ &= a\,\cos 2\pi\left(\nu t - \tfrac{y}{\lambda}\right) \\ x_- &= a\,\cos 2\pi\left(\nu t + \tfrac{y}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

Суммарное колебание по принципу суперпозиции равно

$$x = x_+ + x_- = a\,\cos 2\pi\left(\nu t - \frac{y}{\lambda}\right) + a\,\cos 2\pi\left(\nu t + \frac{y}{\lambda}\right)$$

когда заменим косинус суммы, то получим:

$$x = 2a\,\cos\left(2\pi\frac{y}{\lambda}\right)\cdot\cos 2\pi\nu t$$

Второй косинус задает колебания во времени с частотой ν, а первый косинус показывает распределение амплитуды колебаний в пространстве (с периодом = длине волны λ).

Получились так называемые **стоячие волны**. Они как бы не движутся вправо/влево, а колебание происходит только по вертикали (для данного примера).

Те точки в пространстве, где амплитуда максимальна, называбтся **пучностями**, а где минимальна – **узлами**. Точки, симметрично расположенные от узлов, колеблются в противофазе.

Стоячие волны бывают как поперечные, так и продольные.