ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Как уже говорилось, любое движение = поступательное + вращение.
Поступательное: все точки тела имеют равные $\vec{v}$ и равные $\vec{a}$. Если мысленно разбить тело на кусочки, то $\forall \Delta m_i$ по 2зН: $\Delta m_i \cdot \vec{a} = \vec{f_i} + \vec{F_i}$, где $\vec{f_i}$ – внутренние силы от других элементов тела, а $\vec{F_i}$ – силы внешние. По 3зН: $\sum \vec{f_i} = 0$, поэтому

$$\sum_i \Delta m_i \cdot \vec{a} = \sum_i \vec{F_i} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \cdot \sum_i \Delta m_i = \sum_i \vec{F_i} \quad \Rightarrow \quad M \cdot \vec{a} = \vec{F}$$

$\vec{F} = \sum \vec{F_i}$ – **главный вектор внешних сил**.

Рассмотрение поступательного движения твердого тела можно заменить рассмотрением движения одной материальной точки с массой тела, находящейся под действием главного вектора внешних сил.

При более сложном (непоступательном) движении: **разные** точки тела имеют **разные** скорости $\vec{v_i}$ и **разные** ускорения $\vec{a_i}$.

Пример: на этом повороте левые колеса проезжают больший путь, чем правые $\Rightarrow$ водитель движется с большей скоростью, чем пассажир!

Разбив (мысленно) тело на малые кусочки, для каждого кусочка получим:

$$\Delta m_i \cdot \vec{a_i} = \vec{f_i} + \vec{F_i}$$

Если просуммировать и учесть, что $\sum \vec{f_i} = 0$, а $\sum \vec{F_i} = \vec{F}$, то

$$\sum_i \Delta m_i \cdot \vec{a_i} = \sum_i \vec{F_i} = \vec{F} \tag{1}$$

но тут уже все $\vec{a_i}$ – разные, и их из-под знака $\sum$ не вынести… Что делать?

Центр масс $\equiv$ центр инерции $\equiv$ центр тяжести: $(\cdot)$C

$$x(C) = \frac{\sum x_i \cdot \Delta m_i}{M} \qquad y(C) = \frac{\sum y_i \cdot \Delta m_i}{M} \qquad z(C) = \frac{\sum z_i \cdot \Delta m_i}{M}$$

$$x(C) = \int x\,\rho\,dV/M \qquad y(C) = \int y\,\rho\,dV/M \qquad z(C) = \int z\,\rho\,dV/M$$

Если тело C состоит из частей A+B, то его центр масс совпадает со средне-взвешенным от центров масс отдельных частей:

$$\vec{r}(C) = \frac{m_A \cdot \vec{r}(A) + m_B \cdot \vec{r}(B)}{m_A + m_B}$$

Ускорение центра масс $\vec{a}(C)$ по составляющим:

$$a_x(C) \equiv \frac{d^2x(C)}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\sum x_i \cdot \Delta m_i}{M}\right) = \frac{\sum \Delta m_i \cdot \frac{d^2x_i}{dt^2}}{M} = \frac{\sum \Delta m_i \cdot a_{ix}}{M}$$

$$a_y(C) \equiv \frac{d^2y(C)}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\sum y_i \cdot \Delta m_i}{M}\right) = \frac{\sum \Delta m_i \cdot \frac{d^2y_i}{dt^2}}{M} = \frac{\sum \Delta m_i \cdot a_{iy}}{M}$$

$$a_z(C) \equiv \frac{d^2z(C)}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\sum z_i \cdot \Delta m_i}{M}\right) = \frac{\sum \Delta m_i \cdot \frac{d^2z_i}{dt^2}}{M} = \frac{\sum \Delta m_i \cdot a_{iz}}{M}$$

или сразу в векторном виде:

$$\vec{a}(C) \equiv \frac{d^2\vec{r}(C)}{dt^2} = \frac{\sum \Delta m_i \cdot \vec{a}_i}{M}$$

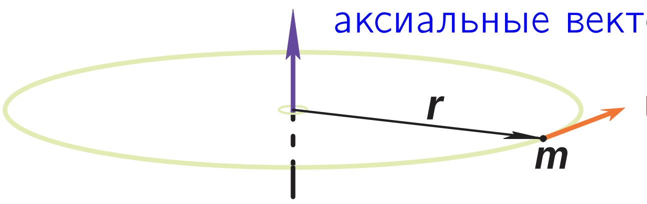
Сравнивая с (1), получаем: $\qquad M\vec{a}(C) = \vec{F}$

Центр масс (ц.м.) тела движется так, как движется материальная точка с массой, равной массе тела, под действием силы, равной главному вектору внешних сил.

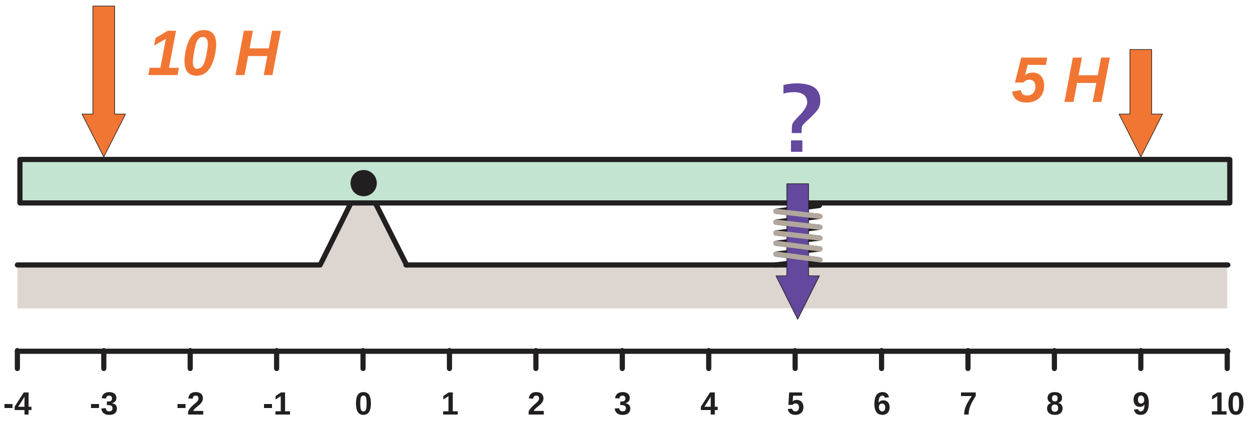
Если $\vec{F}$=0, то ц.м. покоится (или движется прямолинейно и равномерно). Внутренние силы не могут изменить движение ц.м.

Поступательное движение		**Вращательное движение**	
Физические величины и понятия:			
расстояние	s	угол	φ
координата	$\vec{s}$	угол	$\vec{\varphi}$
скорость	$\vec{v} = \dot{\vec{s}}$	угловая скорость	$\vec{\omega} = \dot{\vec{\varphi}}$
ускорение	$\vec{a} = \ddot{\vec{s}}$	угловое ускорение	$\vec{\beta} = \ddot{\vec{\varphi}}$
масса	m	момент инерции	$\mathcal{I} = mr^2$
кол.дв. (импульс)	$\vec{p} = m\vec{v}$	момент импульса	$\vec{\mathcal{L}} = [\vec{r} \times \vec{p}] = \mathcal{I}\vec{\omega}$
сила	$\vec{f}$	момент силы	$\vec{\mathcal{M}} = \left[\vec{r} \times \vec{f}\right]$
импульс силы	$\vec{f}\Delta t$	импульс момента силы	$\vec{\mathcal{M}}\Delta t$
кин.энергия	$E_k = \frac{mv^2}{2}$	энергия вращения	$\mathcal{E}_{\mathrm{rot}} = \frac{\mathcal{I}\omega^2}{2}$
Законы сохранения для изолированной системы:			
импульса	$\vec{p}$ =const	момента импульса	$\vec{\mathcal{L}}$ =const
Второй закон Ньютона:			
$\vec{f}\Delta t = \Delta(\vec{p})$		$\vec{\mathcal{M}}\Delta t = \Delta(\vec{\mathcal{L}})$	
$\vec{f} = m\vec{a}$		$\vec{\mathcal{M}} = \mathcal{I}\vec{\beta}$	

аксиальные векторы $d\vec{\varphi}$ $\vec{\omega}$ $\vec{\beta}$ $\vec{\mathcal{L}}$ $\vec{\mathcal{M}}$



векторы $d\vec{s}$ $\vec{v}$ $\vec{a}$ $\vec{p}$ $\vec{f}$

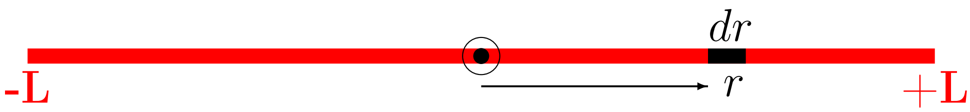


Задачка: какое усилие испытывают динамометр и ось рычага?
Решение:

- момент правой силы $= \mathcal{M}_1 = 9 \cdot 5 = +45$
- момент левой силы $= \mathcal{M}_2 = (-3) \cdot 10 = -30$
- суммарный момент $= \mathcal{M}_\Sigma = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 = +15$
- сила на динамометре $F_{\text{Д}} = \mathcal{M}_\Sigma / 5 = +3$ Н
- сила давления на ось $F_o = 10 + 5 - 3 = 12$ Н

Еще задачка: каков момент инерции различных простых тел?

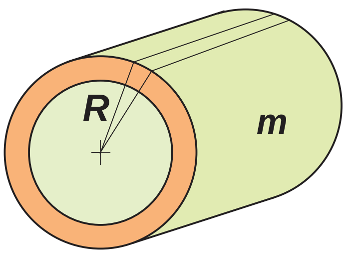
- Тонкий стержень массой m и длиной $2L$:



Разделим стержень на кусочки. Пусть один такой кусочек длиной dr находится от оси вращения на расстоянии r. Его масса $dm = m \cdot dr/2L$, а момент инерции $d\mathcal{I} = r^2\, dm = mr^2 dr/2L$. Момент инерции всего стержня равен

$$\mathcal{I} = 2\int_0^L m\frac{r^2 dr}{2L} = \frac{1}{3}mL^2.$$

- Тонкостенный цилиндр массой m и радиусом R:

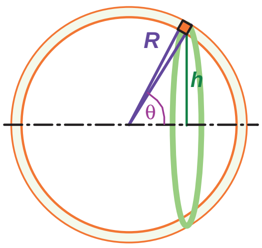


Разобьем цилиндр на полоски с массой по Δm_i.
Момент инерции полоски $\Delta\mathcal{I}_i = \Delta m_i R^2$.
Момент инерции всего цилиндра $\mathcal{I} = \sum \Delta\mathcal{I}_i = \sum \Delta m_i R^2 = R^2 \sum \Delta m_i = mR^2$.

• Сплошной цилиндр представим как набор полых цилиндриков с радиусами r от 0 до R и толщинами dr. Тогда масса каждого цилиндрика будет $dm_i = m \cdot \frac{2\pi r \cdot dr}{\pi R^2}$, а суммарный момент инерции, соответственно –

$$\int_0^m r^2 dm = \int_0^R r^2 m \frac{2r \cdot dr}{R^2} = \frac{2m}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{2m}{R^2}\frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} m R^2$$

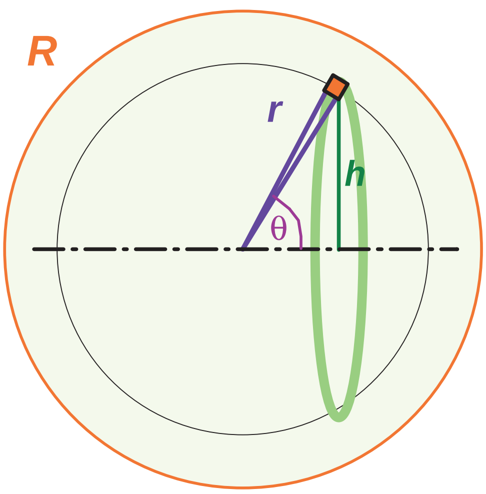
• Сфера: разобьем ее на кольца сечением $R\, d\theta$ и длиной $2\pi h = 2\pi\, R \sin\theta$.



Площадь одного кольца $dS = 2\pi R^2 \sin\theta\, d\theta$, его масса $dm = m\frac{dS}{S} = m\,(2\pi R^2 \sin\theta\, d\theta)/(4\pi R^2) = m\, \sin\theta\, d\theta/2$, а момент инерции $d\mathcal{I} = h^2\, dm = \frac{mR^2}{2} \sin^3\theta\, d\theta$. Для всей сферы:

$$\mathcal{I} = \int_0^\pi \frac{mR^2}{2} \sin^3\theta\, d\theta = \frac{mR^2}{2}\frac{4}{3} = \frac{2}{3} m R^2$$

• Однородный шар: выделим кольцо сечением $r d\theta \times dr$ и длиной $2\pi h =$



$= 2\pi\, r\, \sin\theta$. Объем одного такого кольца $dV = 2\pi r^2 \sin\theta\, d\theta\, dr$. Поскольку шар однороден, то масса кольца dm пропорциональна dV и равна

$$dm = m\frac{dV}{V} = m\,\frac{2\pi r^2 \sin\theta\, d\theta\, dr}{4\pi R^3/3},$$

а момент инерции кольца $d\mathcal{I}$ составляет

$$d\mathcal{I} = h^2\, dm = m\,\frac{3r^4 \sin^3\theta\, d\theta\, dr}{2R^3}$$

Чтобы получить суммарный момент инерции всего шара, надо проинтегрировать $d\mathcal{I}$ по θ от 0 до π и по r от 0 до R:

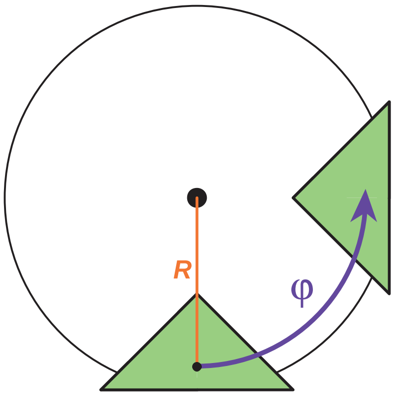
$$\mathcal{I} = \int_0^\pi \int_0^R d\mathcal{I} = \frac{3m}{2R^3} \int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta \int_0^R r^4\, dr$$

Второй из нтегралов равен $R^5/5$, а для вычисления первого сделаем замену: $x \equiv -\cos\theta$. Тогда $dx = \sin\theta$, а $\sin^2\theta = (1 - x^2)$, и, как и для сферы,

$$\int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^1 = \frac{4}{3}$$

Подставив значения обоих интегралов, получим:

$$\mathcal{I} = \frac{3mR^5 \cdot 4}{2R^3 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{2}{5} m R^2$$

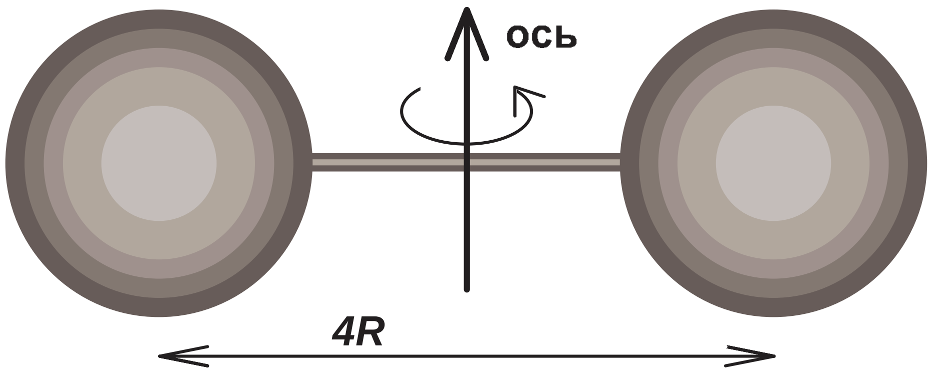


Поворот тела на угол φ вокруг внешней оси эквивалентен поступательному движению по дуге и повороту относительно собственной оси на тот же угол φ. При этом, для поступательного движения важен только центр масс тела, а для вращения – его собственный момент инерции $\mathcal{I}_0$.

Теорема Штейнера: Момент инерции тела $\mathcal{I}$ относительно какой-либо оси равен сумме собственного момента инерции $\mathcal{I}_0$ (относительно параллельной оси, но проходящей через его центр масс) и момента инерции центра масс:

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 + MR_C^2$$

Задача: найти момент инерции гантели (2 шара радиусами R и массами M на расстоянии $4R$ друг от друга)



Решение: собственный момент инерции каждого из двух шаров $\mathcal{I}_0 = MR^2 \cdot 2/5$, а момент инерции центра масс каждого шара относительно оси $\mathcal{I}_C = M(2R)^2 = 4MR^2$. Итого, в сумме получается:

$$\mathcal{I} = 2\mathcal{I}_0 + 2\mathcal{I}_C = 8.8\,MR^2$$

Если гантель вращается с угловой скоростью ω, то какова энергия вращения? Каждый элемент с массой Δm_i имеет одну и ту же угловую скорость ω, но линейные скорости v_i будут различны: $v_i = r_i\omega$. Кинетическая энергия каждого кусочка будет $\Delta E_i = \Delta m_i v_i^2/2 = \omega^2/2 \cdot \Delta m_i r_i^2$, а энергия всего тела –

$$E_{\mathtt{rot}} = \sum_i \Delta E_i = \omega^2/2 \cdot \sum_i \Delta m_i r_i^2$$

Но последняя сумма – это же момент инерции! Таким образом, действительно

$$E_{\mathtt{rot}} = \frac{\mathcal{I}\omega^2}{2}$$

Пусть по наклонной плоскости без трения скатываются: 1) пустая бочка, 2) бочка со смолой и 3) бочка с водой. Которая скатится быстрее?

У всех потенциальная энергия mgh переходит в кинетическую, состоящую из энергии поступательного движения $mv^2/2$ и энергии вращения $\mathcal{I}\omega^2/2$. Для катящейся бочки ее линейная и угловая скорости связаны как $v = R\omega$, поэтому для каждой из них справедливо уравнение

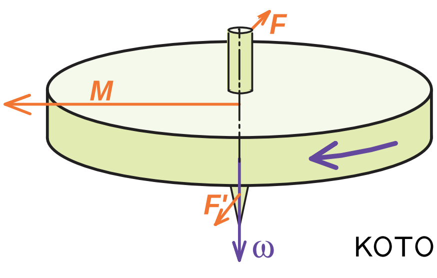
$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{\mathcal{I}v^2}{2R^2}$$

Полагая пустую бочку тонкостенным цилиндром, вспоминаем, что в этом случае $\mathcal{I} = mR^2$. Для бочки со смолой, эквиваленитной сплошному цилиндру, $\mathcal{I} = \frac{1}{2}mR^2$. Бочка же с водой – это особый случай. Считая вязкость воды бесконечно малой, а массу намного большей, чем масса самой бочки, можно заявить, что вода внутри вообще не крутится, и что энергией вращения можно пренебречь.

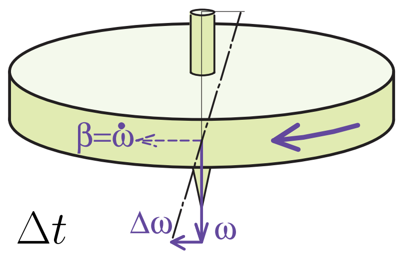
Тогда для трех бочек получаем три разные уравнения:

$$\begin{array}{llll} 1) & mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2} & \Rightarrow & v^2 = gh \\ 2) & mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{4} & \Rightarrow & v^2 = 1.5gh \\ 3) & mgh = \frac{mv^2}{2} + 0 & \Rightarrow & v^2 = 2gh \end{array}$$

Гироскоп



Приложим к гироскопу пару сил $\vec{F}\vec{F}'$, создающих момент $\vec{M}$. Он создаст угловое ускорение $\vec{\beta} = \dot{\vec{\omega}}$, которое за малый отрезок времени Δt



изменит угловую скорость $\vec{\omega}$ на приращение $\vec{\Delta\omega}$ и тем самым повернет ось вращения вовсе не туда, куда тянули ее силы $\vec{F}\vec{F}'$! Это и есть **гироскопический эффект**.

Использование: стабилизация и/или ориентация в пространстве (гирокомпас нарезное огнестрельное оружие, орудия в танках и на флоте, стабилизация аэрокосмических аппаратов).

Прецессия – круговое смещение оси вращения под действием постоянного опрокидывающего момента. Ядерный магнитный резонанс (ЯМР).