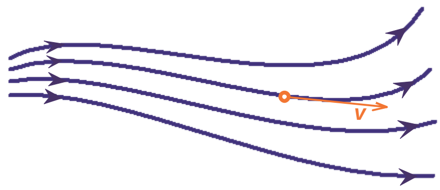
ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ

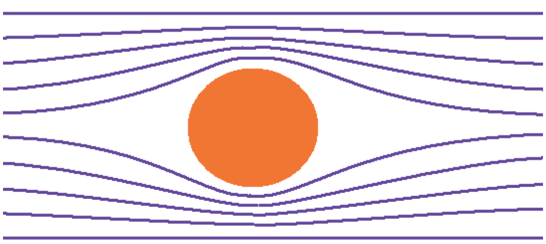
Сплошная среда *(continuum)*: непрерывное ∞ тело, в котором возможно перемещение различных частей относительно друг друга.

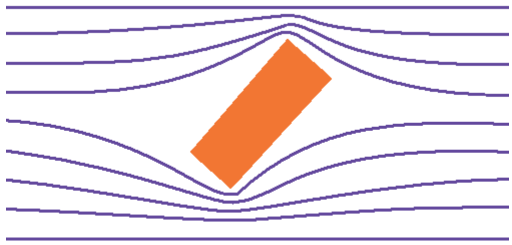
- Упругое тв. тело: относительные сдвиги, колебания
- Несжимаемая жидкость: течения
- Сжимаемая жидкость или газ: течения, колебания

Гидродинамика – часть механики, изучающая движение жидкостей.
Идеальная жидкость – несжимаемая и без вязкости (нет внутреннего трения)

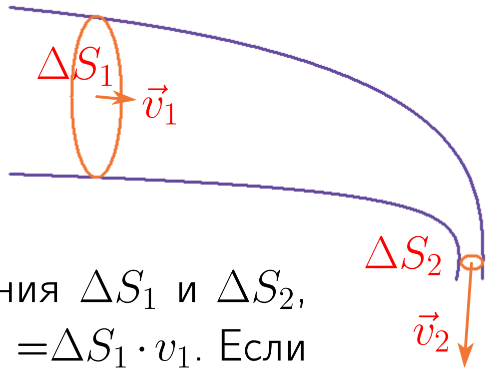
Поле вектора скорости: пространство, где можно провести линии тока – касательные к ним в каждой точке совпадают с направлением скорости частиц







Часть жидкости, ограниченная линиями тока – трубка тока. Линии тока образуют как бы невидимые границы: частицы жидкости их не пересекают (иначе скорость была бы направлена по-другому).

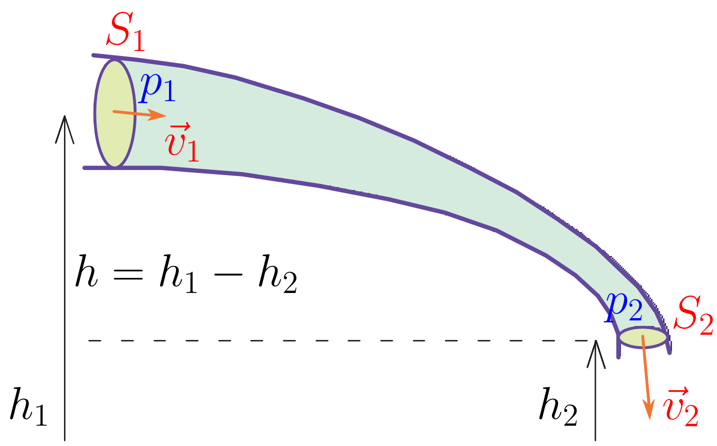


Если в трубке тока провести 2 нормальных сечения ΔS_1 и ΔS_2, то за единицу времени через ΔS_1 протечет объем $=\Delta S_1 \cdot v_1$. Если жидкость несжимаема, то через ΔS_2 протечет столько же: $\Delta S_2 \cdot v_2 = \Delta S_1 \cdot v_1$, и вообще для данной трубки

$$\Delta S \cdot v = \text{const} \qquad \text{- теорема о неразрывности струи}$$

Если $\exists$ реальная труба, то ее внутренний объем – трубка тока. Тогда: где труба у́же, там течение быстрее. Если трубка сужается, то скорость возрастает $\Rightarrow$ есть ускорение $\Rightarrow$ есть сила! Откуда? От разности давлений. Давление в широких местах $>$ чем в узких.

$S_{1,2}$ – сечение
$\vec{v}_{1,2}$ – скорость
$p_{1,2}$ – давление
$h_{1,2}$ – высота
m – порция жидкости (масса)
$E_{1,2}$ – полная энергия порции
A – работа по перемещению m
от сечения 1 до сечения 2



$$A = E_2 - E_1, \qquad E_{1,2} = E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}}$$

$$E_1 = \frac{m \cdot v_1^2}{2} + mgh_1 \qquad E_2 = \frac{m \cdot v_2^2}{2} + mgh_2$$

Пусть весь столб жидкости сдвигается за время t так, что через оба сечения проходит порция m. В точке (1) это смещение $L_1 = v_1 t$, а в точке (2) – $L_2 = v_2 t$. Сила, толкающая жидкость в точке (1) – это $f_1 = p_1 S_1$, а сила, сопротивляющаяся движению в точке (2) – это $f_2 = -p_2 S_2$ (знак "минус"именно потому, что давление p_2 направлено навстречу движению). Работа внешних сил

$$A = f_1 L_1 + f_2 L_2 = p_1 S_1 v_1 t - p_2 S_2 v_2 t.$$

Приравняв A и $E_2 - E_1$, получим:

$$\frac{m \cdot v_2^2}{2} + mgh_2 - \frac{m \cdot v_1^2}{2} - mgh_1 = p_1 S_1 v_1 t - p_2 S_2 v_2 t.$$

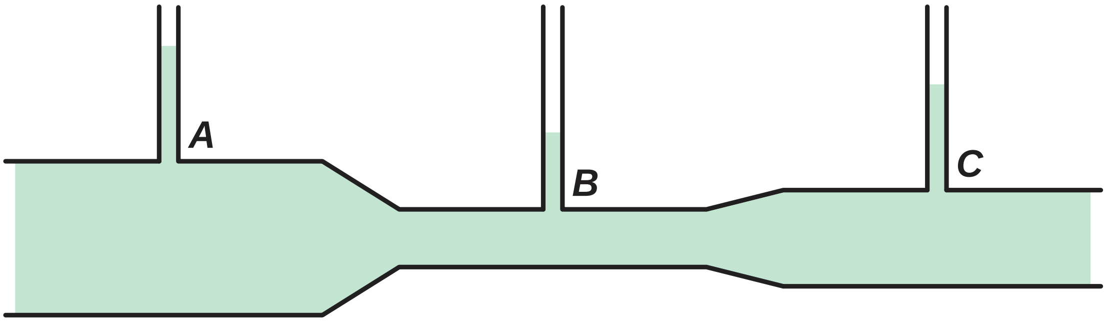
или

$$\frac{m \cdot v_1^2}{2} + mgh_1 + p_1 S_1 v_1 t = \frac{m \cdot v_2^2}{2} + mgh_2 + p_2 S_2 v_2 t. \qquad (1)$$

По закону неразрывности струи: $S_1 v_1 t = S_2 v_2 t$, и это – объем V, занимаемый порцией m. Поделим ур-ние (1) на V и учтем, что $\frac{m}{V}$ – это плотность ρ:

$$\frac{\rho \cdot v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho \cdot v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2.$$

Даниил БЕРНУЛЛИ (1700-1782), СПб

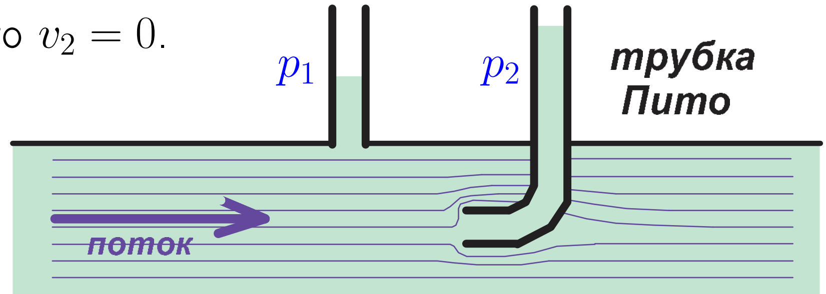


$$\frac{\rho \cdot v_A^2}{2} + p_A \quad = \quad \frac{\rho \cdot v_B^2}{2} + p_B \quad = \quad \frac{\rho \cdot v_C^2}{2} + p_C$$

Скорость жидкости непосредственно перед отверстием трубки Пито $v_2 = 0$.

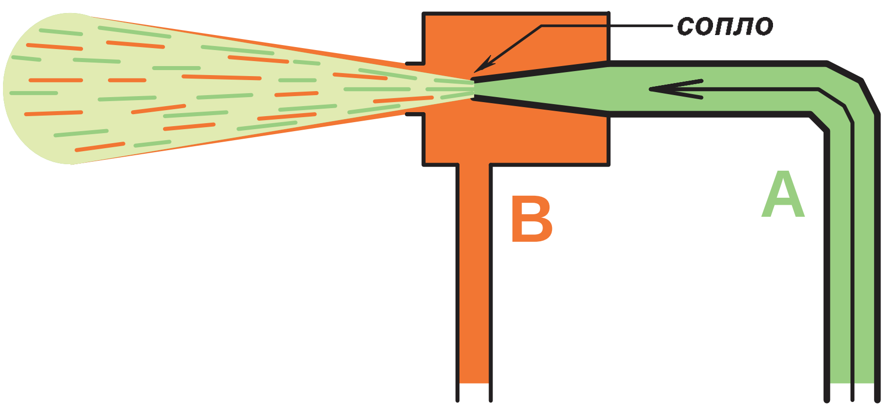
$$p_2 = \frac{\rho \cdot v_1^2}{2} + p_1$$

p_2 – динамическое давление

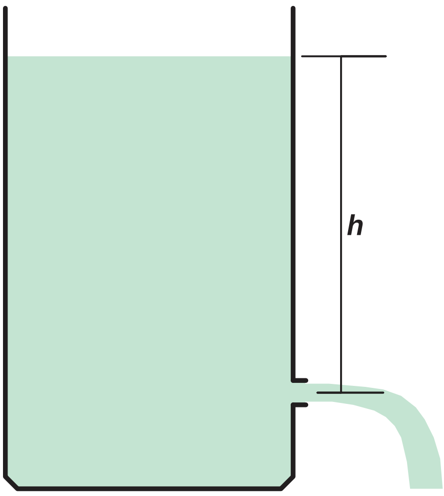


$p_1, p_2 \quad \Rightarrow$ измерение скорости жидкости (флот) или газа (авиация) по разности давлений.

Струйный насос:



При достаточно большой скорости жидкости A на выходе из сопла давление там может стать < атмосферного, и жидкость B будет засасываться в струю. (жидкость $\Leftrightarrow$ газ)



Весь сосуд – как одна трубка тока. Давление и у поверхности, и у отверстия = атмосферному. Уравнение Бернулли:

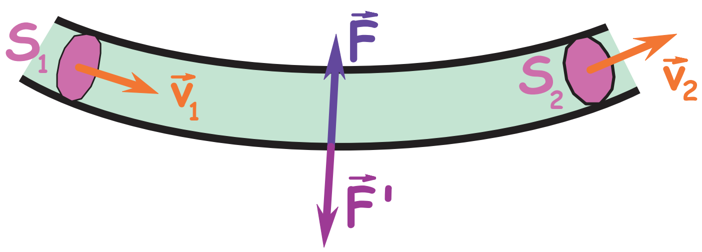
$$\frac{v_1^2}{2}+g(h_1-h_2)=\frac{v_2^2}{2}$$

Поскольку скорость у поверхности $\simeq 0$, то получим:

$$v_2=\sqrt{2g(h_1-h_2)}=\sqrt{2gh}$$

Закон сохранения количества движения: струя приобрела скорость вправо; если бы система была замкнутой, то сосуд двинулся бы влево.

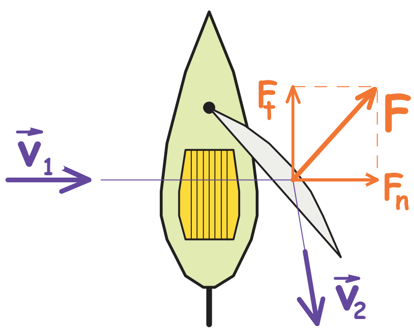
Пусть есть изогнутая труба постоянного сечения. За время t через S_1 протечет жидкость массой $m=\rho S_1 v_1 t$. Импульс этой массы: $\vec{p}_1=\rho S_1 v_1 t\vec{v}_1$.



Импульс той же массы жидкости, прходящей через S_2, равен $\vec{p}_2 = \rho S_2 v_2 t\vec{v}_2$. Поскольку $S_1{=}S_2{=}S$, то и $v_1{=}v_2{=}v$, и потому $\Delta\vec{p}=(\vec{p}_2{-}\vec{p}_1){=}\rho Svt(\vec{v}_2-\vec{v}_1)$. По 2зН это должно равняться импульсу сил, давящих на жидкость со стороны трубы: $\Delta\vec{p}{=}\vec{F}$t, и тогда, поделив на t, получаем:

$$\vec{F}=\rho Sv(\vec{v}_2-\vec{v}_1)$$

Противоположная ей сила $\vec{F}'=-\vec{F}$ действует со стороны текущей жидкости на стенку трубы.



Пример: ветер, отражаясь от косого паруса, меняет свое направление, а сила реакции давит на парус и толкает яхту вперед. Еще пример: лопатки турбины меняют направление потока газа, а сила реакции создает момент, который крутит турбину.

Реактивные двигатели.

По закону сохранения импульса: если газ выталкивается влево, то камера сгорания (вместе с ракетой) отталкивается вправо.

Турбореактивные двигатели (авиация): воздух для горения берется извне и нагнетается в камеру сгорания турбиной, которую крутит сам же двигатель.

И.В.Мещерский (1859 – 1935): теория движения тел с переменной массой.

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F} + \frac{dm_1}{dt}\vec{v}_1 - \frac{dm_2}{dt}\vec{v}_2$$

Конкретно для ракеты с массой m и относительной скоростью выбрасывания газов u:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \frac{dm}{dt}\vec{u}$$

К.Э.Циолковский (1857 – 1935): характеристическая скорость V – максимальная, после выработки всего топлива.

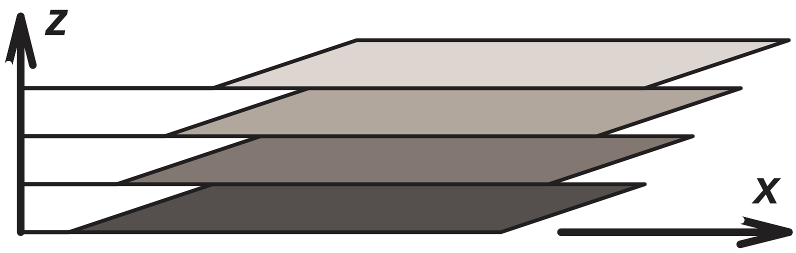
$$V = I \cdot \ln{(M_1/M_2)}$$

M_1 – начальная масса, M_2 – конечная масса

I – удельный импульс $\equiv$ отношение $\frac{\texttt{тяга двигателя}}{\texttt{масса топлива за секунду}}$

Выход из тупика: многоступенчатые носители.

Движение вязкой жидкости

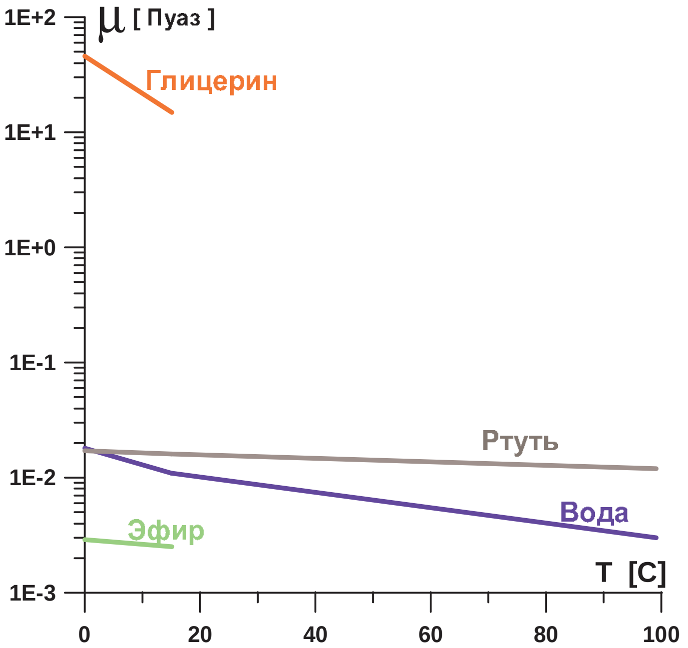


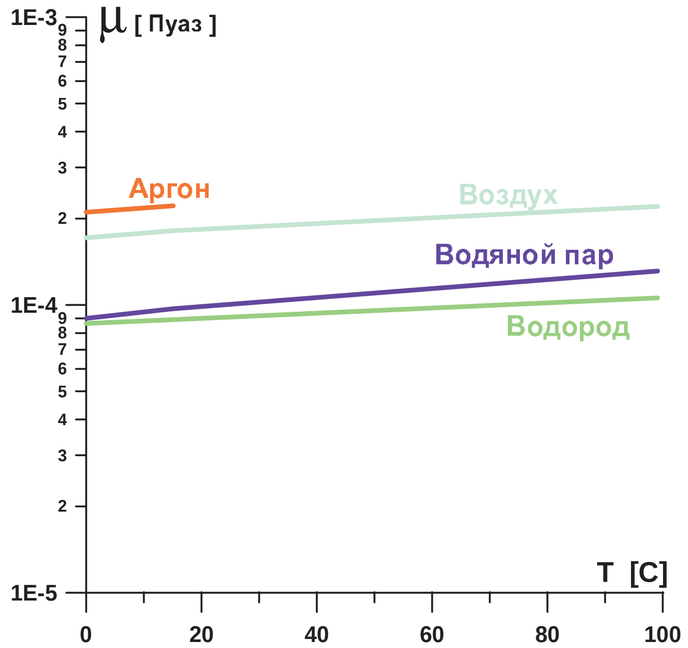
Если один слой (e.g., верхний) движется быстрее другого (e.g., нижнего), то между ними возникает трение (верхний тянет, а нижний тормозит).

Сила внутреннего трения f между слоями тем больше, чем больше площадка ΔS, которую мы рассматриваем, и чем больше разница в скорости у соседних слоев (i.e., чем больше градиент скорости $\frac{dv}{dz}$):

$$f = \mu \frac{dv}{dz} \Delta S$$

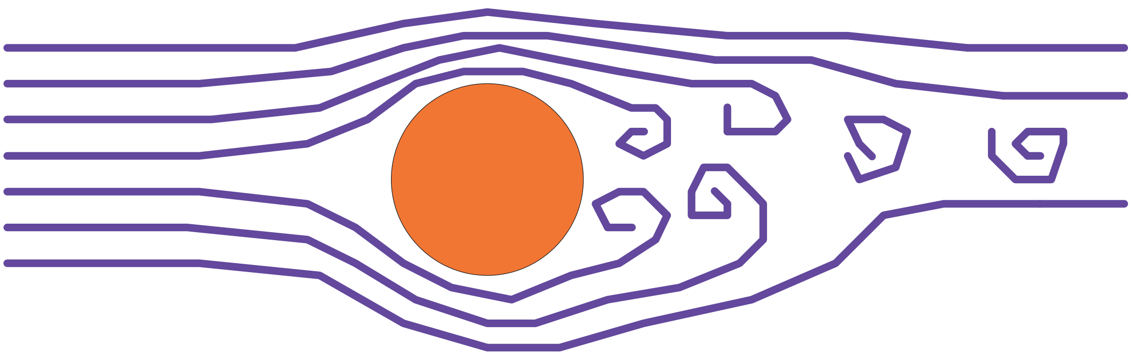
μ – коэфф.внутреннего трения $\equiv$ коэффициент вязкости [Пуаз=г/см/с].





П.Л.Капица: сверхтекучесть гелия при T<-271C (<2.19K).
Л.Д.Ландау: гидродинамическая теория сверхтекучести.

До сих пор речь шла о ЛАМИНАРНОМ (слоистом) движении. Теперь поговорим о ТУРБУЛЕНТНОМ (когда вектор скорости беспордочно отклоняется от среднего значения).



Поток распадается на отдельные вихри ($\mathbf{вихрь} = \mathbf{curl} = \mathbf{rotor}$)

Число Рейнольдса R: $R = \frac{\rho v L}{\mu}$, где ρ – плотность жидкости, L – характерный поперечный размер (диаметр трубы, ширина или глубина реки, и т.п.). При $R > R_{\text{критич.}}$ происходит переход движения от ламинарного к турбулентному. Для воды в трубе $R_{\text{критич.}} \simeq 1200$. Смысл R: работа сил трения по сравнению с кинетической энергией.

Закон Стокса для шара в вязкой жидкости: $f = 6\pi\mu r v$. Если учесть выталкивающую силу, то эффективный вес шара

$$P = (\rho_{\text{ш}} - \rho_{\text{ж}})g\frac{4}{3}\pi r^3$$

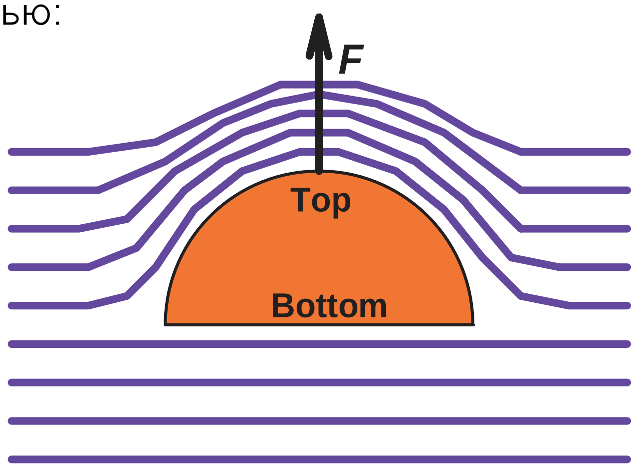
и для *установившейся скорости* падения шара в жидкости получим:

$$v = \frac{2(\rho_{\text{ш}} - \rho_{\text{ж}})gr^2}{9\mu}$$

Закон Стокса выполняется только при малых значениях R. При больших R начинают появляться вихри, которые уносят большую энергию $\Rightarrow$ сопротивление резко возрастает.

Подъемная сила. Н.Е.Жуковский (1847 – 1921). Обтекание НЕСИММЕТРИЧНОГО тела ВЯЗКОЙ жидкостью:

Давление внизу p_B равно давлению во всей жидкости p, а вверху скорость должна возрасти, и потому давление (по формуле Бернулли) должно уменьшиться: $p_T < p$. Результирующая сила направлена вверх!



Если рассмотреть движение вязкой жидкости в круглой трубе, то можно выделить цилиндрические слои. Быстрее всех движется самый центральный, а медленнее – прилегающий к стенке. Чем меньше радиус трубы – тем больше поперечный градиент скорости и тем больше трение. Решая страшные уравнения, можно получить:

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4L\mu}(R^2 - r^2)$$

Здесь L – длина трубы, R – ее радиус, $p_1 - p_2$ – разность давлений на входе и выходе, r – радиус рассматриваемого слоя. Интегрируя по r от 0 до R, найдем скорость прокачки – объем в единицу времени:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{(p_1 - p_2)\pi R^4}{8L\mu} \qquad \text{– формула Пуазейля}$$