Электростатика

VII B.C. греческий философ **Фалес Милетский:** *Янтарь, потертый о шелк, притягивает легкие предметы!* $\underline{\eta\lambda\varepsilon\kappa\tau\rho o\nu}$ *(греч.)* = янтарь.

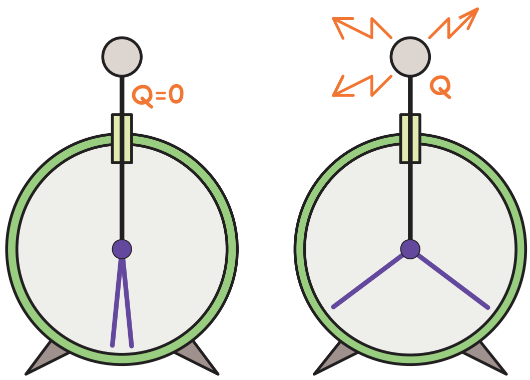
1600 г. английский врач **William Gilbert:** *То же бывает со стеклом и другими веществами!*
Термин "Электризация" (= "янтаризация" тел при их трении о шелк).

VIII век — попытки как-то теоретически это объяснить:

- 1753 г. **М.Ломоносов:** электричество = быстрое вращение частичек эфира.
- 1755 г. **Л.Эйлер:** электричество = натяжение в эфире.
- 1757 г. **Ф.Эпинус:** теория "электрической жидкости"наподобие *теплорода.*

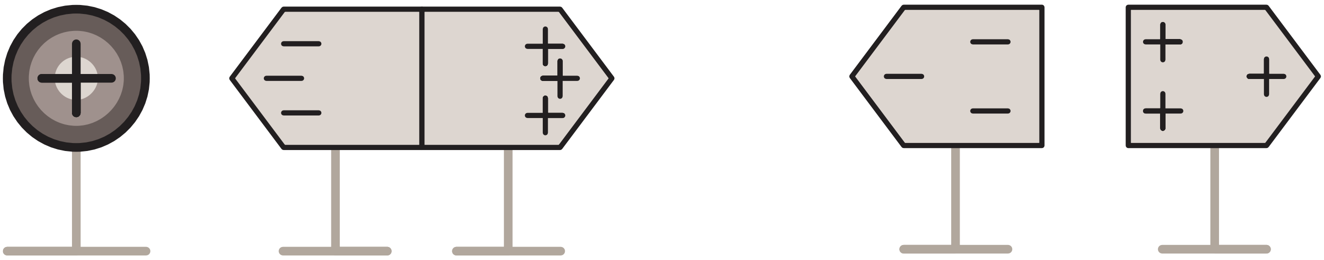
а также изучение свойств электричества как физического явления:

- 1789 г. **Гальвани:** физиологическое действие электричества (сокращение мышц препарированной лягушки).
- Электричество бывает 2 видов:
  - как у стекла, потертого о кожу (+)
  - как у кожи, потертой о стекло (−)
- Одноименно наэлектризованные тела отталкиваются, а разноименно – притягиваются.
- При соприкосновении тел электризация передается между ними (как тепло, только быстрее)
- 1745 г. **Г.В.Рихман:** электрический указатель (электроскоп)



- Электричества разного знака друг друга компенсируют. (Если тело, заряженное "минусом начать заряжать "плюсом то его электризация сначала уменьшается до нуля, и только потом снова растет.) Гипотеза: в незаряженных телах уже $\exists$ в равных количествах и +, и −.

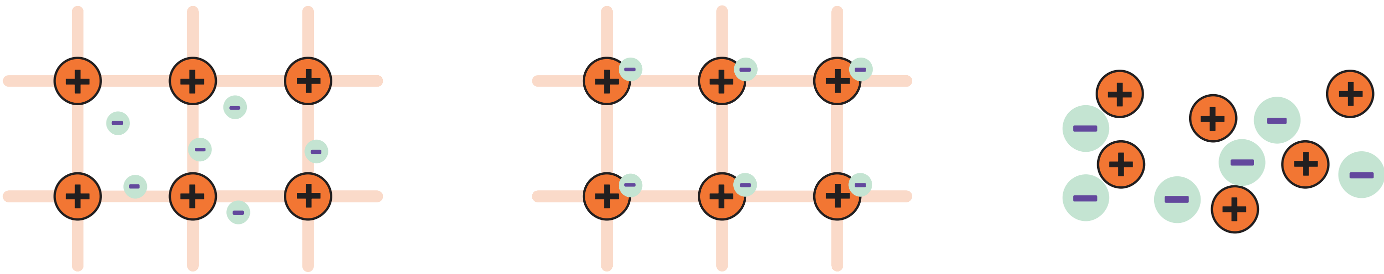
- Электризация **наведением**: наэлектризованное тело поляризует нейтральное. Если его затем разделить, то обе половины окажутся разнополярно наэлектризованы:



Закон сохранения электрического заряда:

Заряды не создаются и не пропадают; они лишь могут передаваться между телами или перемещаться внутри данного тела.

Теперь-то мы знаем, в чем дело. Каждый атом вещества – это электрически **нейтральная** система, состоящая из тяжелого ядра (+) и легких электронов (−). В проводниках (металлах) электроны с ядрами связаны слабо и могут дрейфовать. В изоляторах они связаны сильнее и могут только слегка смещаться (поляризация). При очень больших эл. силах изолятор может стать проводником (пробой). В электролитах (растворах) двигаться могут как легкие электроны, так и тяжелые ионы (+ и −).



В действительности (узнаем это из курса ядерной физики), в ядерных реакциях с большой энергией заряженные частицы могут и рождаться, и аннигилировать, но только па́рами: сколько +, столько же и −. При этом сумма их с учетом знака по-прежнему остается неизменной.

Закон взаимодействия зарядов – ?

Вспомним гравитацию: $\exists$ МАССА (*m = гравитационный заряд*). Разным телам мы приписываем разную массу – m_1, m_2, ..., и они притягиваются с силой f, зависящей от их масс и от расстояния r:

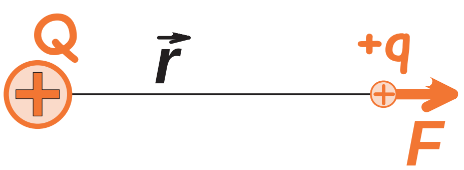
$$f = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \qquad \vec{f} = -\vec{r} \cdot G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^3}$$

Чтобы облегчить количественное описание этих сил, вводится понятие *силового гравитационного поля* – то есть, пространства, в каждой точке которого на пробный гравитационный заряд m действует вполне определенная сила $\vec{f} = m \cdot \vec{g}$ (где $\vec{g}$ – *напряженность поля*). Например, напряженность поля, создаваемого Землей у ее поверхности, направлена вертикально вниз и равна $g \simeq 9.8$ м/с^2.

Если $\exists$ несколько зарядов, то создаваемое ими поле подчиняются принципу суперпозиции (оно равно сумме полей, создаваемых каждым зарядом по-отдельности).

В электростатике вводится понятие *электрического заряда*. Наэлектризованные тела имеют избыток или недостаток электронов, и $\Rightarrow$ какой-то электрический заряд q.

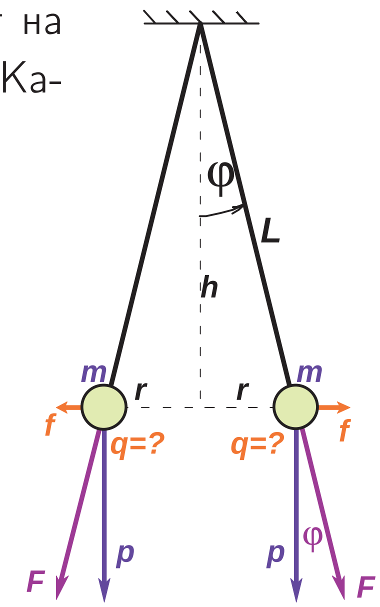
Точечный заряд q отталкивается от другого *точечного* заряда Q (если их знаки одинаковы) или притягивается к нему (если их знаки различны)



Закон, открытый Шарлем Кулоном (Charles-Augustin de Coulomb) в 1785 г:

$$f = k \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2} \qquad \vec{f} = \vec{r} \cdot k \cdot \frac{Q \cdot q}{r^3}$$

Что принять за единицу заряда? Для этого положим $k \equiv 1$. Например, в CGS-системе это – такой точечный заряд, который взаимодействует с равным ему точечным зарядом, находящимся на расстоянии 1 см, с силой в 1 дину. В электротехнике другая единица: 1 Кулон (1 Кл) $= 3 \cdot 10^9$ CGSE.



<u>Задачка:</u> Два одинаково заряженных шарика по 0.1 г на ниточках по 25 см разошлись на расстояние $2r$=5 см. Каков их заряд?

<u>Решение:</u> Сила отталкивания $f = q^2/(2r)^2$.
Равновесие – когда ранодействующая сила $\vec{F} = \vec{p} + \vec{f}$ направлена вдоль нити.

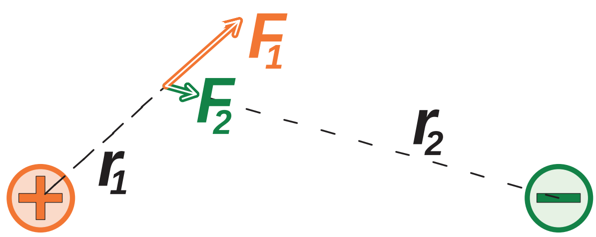
Из подобия треугольников при малом φ получаем:

$$\frac{r}{L} \simeq \frac{r}{h} = \frac{f}{p} = \frac{q^2}{mg(2r)^2}$$

Откуда находим заряд в единицах CGSE:

$$q = 2r \cdot \sqrt{\frac{mgr}{L}} = 5 \cdot \sqrt{\frac{0.1 \cdot 981 \cdot 2.5}{25}} \simeq 15.6 \ \ \mathrm{CGSE} \quad (= 5.2 \cdot 10^{-9}\ K)$$

Для облегчения количественного описания сил между зарядами в электростатике тоже вводится понятие *силового поля*. Что это такое?

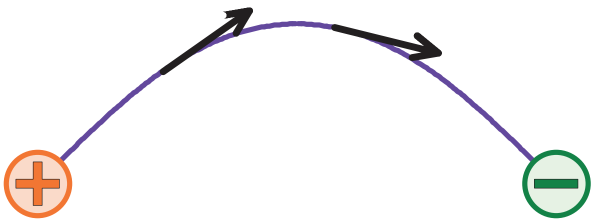


Пусть имеется какая-то система зарядов. Для изучения ее свойств будем помещать в каждую точку <u>*пробный заряд q*</u> и смотреть, какая сила $\vec{F}$ на него действует.
Этот пробный заряд должен быть:

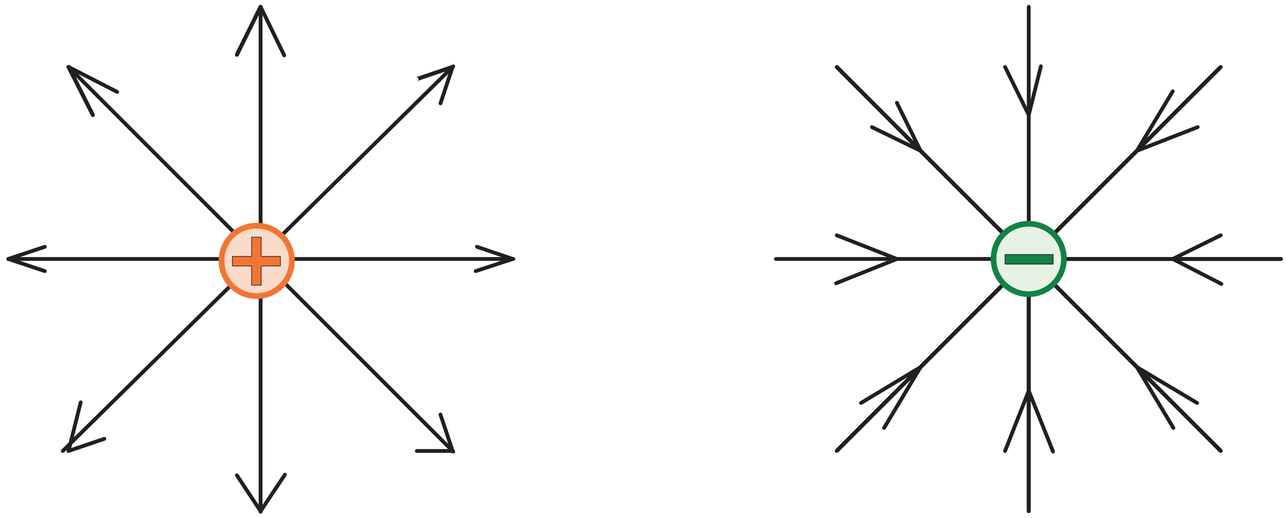
- Маленький – чтобы он собою не искажал изучаемую систему;
- Точечный – чтобы было проще;
- Положительный – просто для определенности.

По закону Кулона сила $\vec{F}$ всегда будет пропорциональна заряду q, поэтому лучше приводить не саму эту силу, а ее отношение к заряду q – *"удельную силу"* или, иначе, <u>*НАПЯЖЕННОСТЬ*</u> $\vec{E} \equiv \vec{F}/q$. Таким образом, мы в каждой точке найдем $\vec{E}$ и тем самым определим силовое *электрическое поле*, созданное системой зарядов. Теперь можно про заряды забыть, а говорить о свойствах поля.

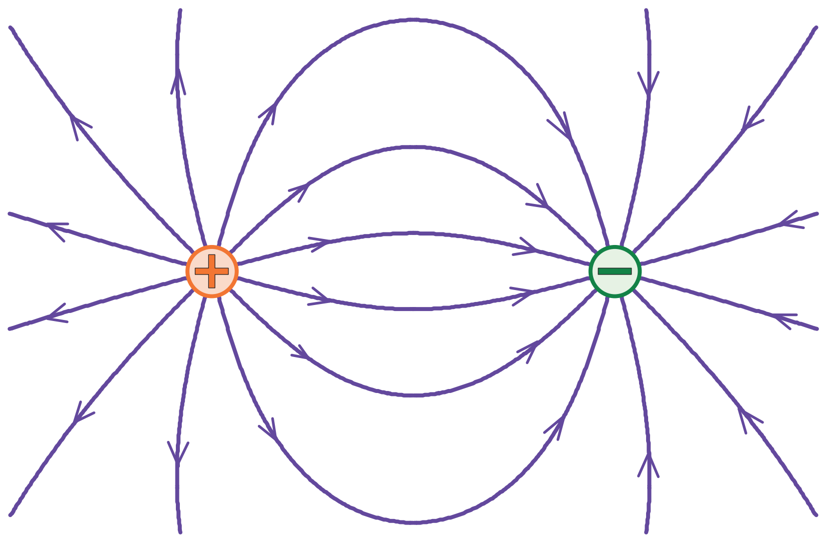
Кроме напряженности полезно ввести понятие *<u>силовой линии</u>* – такой линии, в каждой точке которой напряженность направлена по касательной.



Точечный заряд создает сферически-симметричное поле:



Поле двух разноименных зарядов (диполь):



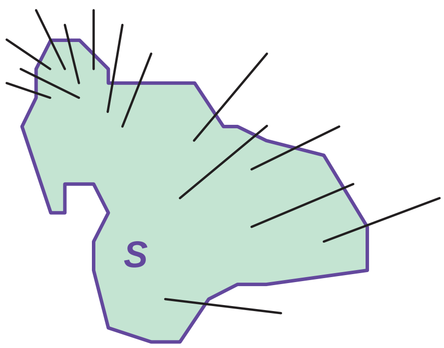
Силовые линии – это условность. На самом деле нет там никаких линий! Сколько их нарисовать – наше дело.

Давайте условимся: чем больше НАПРЯЖЕННОСТЬ – тем ГУЩЕ рисуем линии.

Более того, давайте условимся, чтобы число линий N через площадку S численно равнялось напряженности E:

$$\frac{N}{S} = E \qquad \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta S} = E \qquad \frac{dN}{dS} = E$$

Если E не перпендикулярна поверхности S, то надо брать только ее нормальную составляющую $E_n = E \cdot \cos\alpha$.



Таким образом, если в электрическом поле $\exists$ какая-то поверхность S, то общее количество силовых линий N, пересекающих эту поверхность, (т.е., ПОТОК НАПРЯЖЕННОСТИ), будет равен

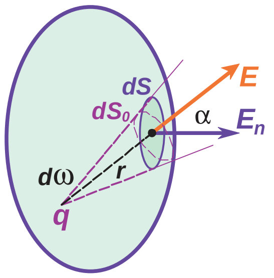
$$N = \int\limits_S E_n dS$$

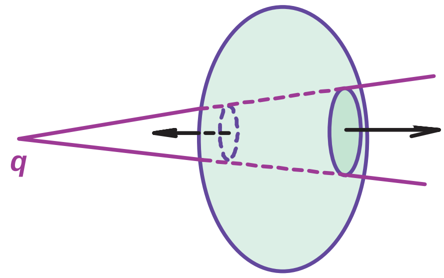
Рассмотрим точечный заряд q. Сколько линий из него выходит? Проведем (мысленно) вокруг него сферу радиуса R. Тогда, по закону Кулона, на поверхности сферы $E = q/R^2$ (причем $\vec{E} \perp$ поверхности), площадь сферы $S = 4\pi R^2$, а число линий $N = 4\pi q$.

Теорема Остроградского-Гаусса:

Поток напряженности через любую замкнутую поверхность равен произведению 4π на сумму охватываемых зарядов.

Доказательство: рассмотрим замкнутую поверхность, внутри которой $\exists$ заряд q





Поток напряженности через малую площадку dS равен

$$dN = E_n\, dS \;=\; E\, \cos\alpha\, dS \;=\; E\, dS_0 \;=\; \frac{q}{r^2}\, dS_0 \;=\; \frac{q}{r^2}\, r^2\, d\omega \;=\; q\, d\omega$$

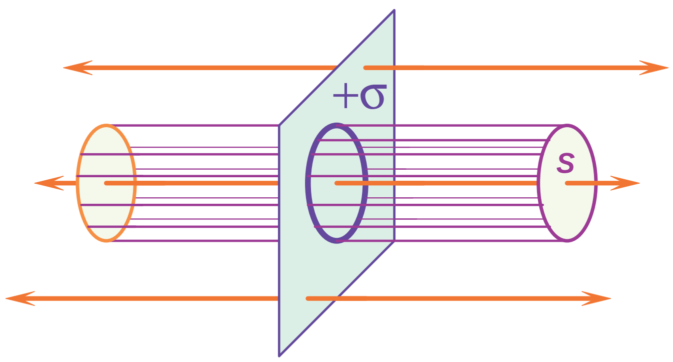
Полный поток напряженности через всю поверхность S равен

$$N \;=\; \oint_S dN \;=\; q\, \oint_S d\omega \;= 4\pi q$$

Если заряд q $\exists$ вне замкнутой поверхности, то при интегрировании $\forall$ $d\omega$ войдет дважды: один раз на входе в поверхность (со знаком $-$), а второй раз – на выходе (со знаком $+$), и в итоге $N = 0$.

Применение теоремы Остроградского-Гаусса

- **Поле равномерно заряженной ∞ плоскости.**



Пусть плотность заряда $\frac{\partial q}{\partial S} = +\sigma$. Ясно, что $\vec{E}$ везде $\perp$ плоскости; но какова ее величина? Выделим цилиндрический объем и найдем поток напряженности через его торцы (чезез боковую поверхность поток =0, т.к. $\vec{E} \parallel$ ей):

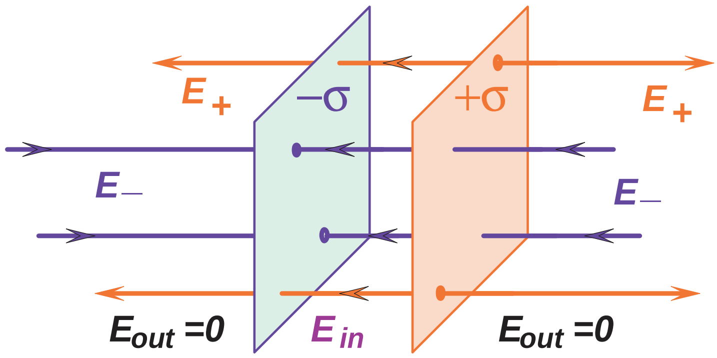
$$N = N_1 + N_2 = ES_1 + ES_2 = 2ES$$

А по теореме О-Г, поток $= N = 4\pi q = 4\pi S\sigma$. Сравнивая, получаем:

$$2ES = 4\pi S\sigma \qquad \Rightarrow \qquad E = 2\pi\sigma$$

Не зависит от расстояния до плоскости!!!

• **Поле двух равномерно заряженных ∞ плоскостей.**



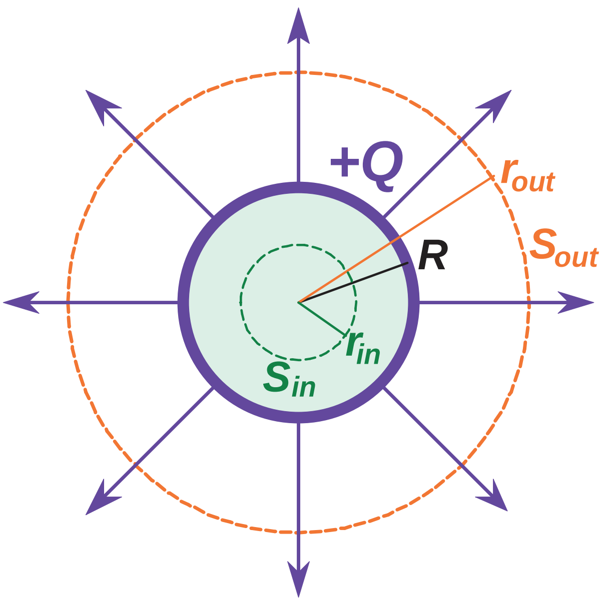
Плоскости заряжены одинаково, но разным знаком. Одна создает поле $\vec{E}_+$, другая – поле $\vec{E}_-$. Вне пластин поля направлены в разные стороны, и они компенсируют друг друга:

$$\vec{E}_{\rm out} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = 0\ ,$$

а между пластин направления полей совпадают, и они суммируются:

$$\vec{E}_{\rm in} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = 2 \cdot 2\pi\sigma = 4\pi\sigma$$

• **Поле равномерно заряженной сферы.**



Сфера радиуса R имеет равномерно распределенный по поверхности заряд Q. Ясно, что поле везде направлено $\parallel$ радиусу. Мысленно проведем сферу с радиусом $r_{\rm out}$. Ее площадь $S_{\rm out} = 4\pi r_{\rm out}^2$, поле $\vec{E}_{\rm out}$ везде $\perp$ ее поверхности, и по теореме О-Г:

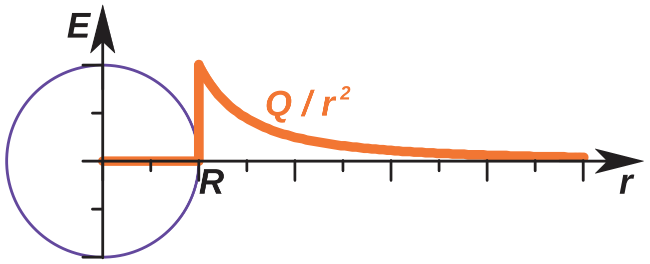
$$E_{\rm out} \cdot S_{\rm out} = 4\pi Q$$

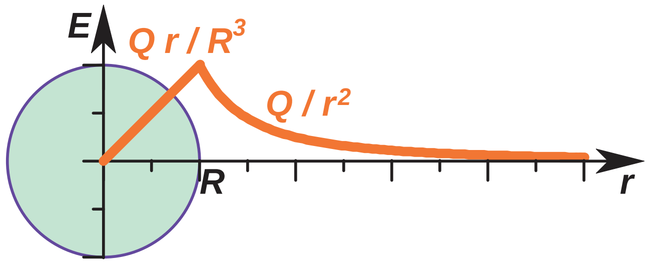
откуда получаем, что поле $E_{\rm out} = Q/r_{\rm out}^2$ (как если бы заряд Q был точечным).

ВНУТРИ сферы (при $r_{\rm in} < R$) по теореме О-Г $E_{\rm in} \cdot S_{\rm in} = 0$, и поля НЕТ.

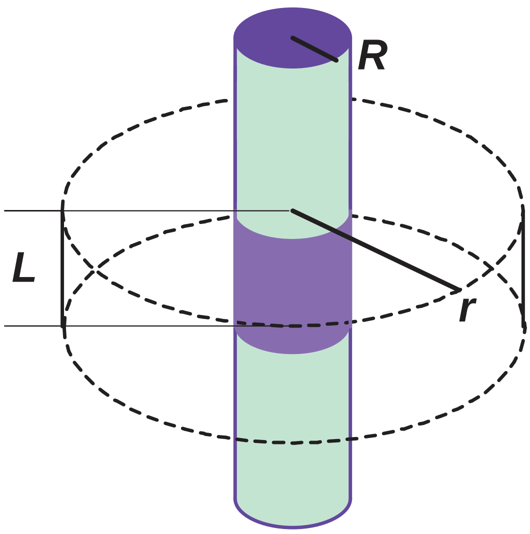
• **Поле равномерно заряженного шара.**

Если заряд Q распределен не по ПОВЕРХНОСТИ сферы, а по всему ее внутреннему ОБЪЕМУ, то внешнее поле будет таким же: $E_{\rm out} = Q/r_{\rm out}^2$. А вот внутреннее (при $r_{\rm in} < R$) будет по теореме О-Г определяться не всем зарядом Q только той его частью q, которая находится ВНУТРИ воображаемой сферы радиусом $r_{\rm in}$. Поскольку эта часть $\propto$ объему $V_{\rm in} = \frac{4}{3}\pi r_{\rm in}^3$, то $q = Q \cdot (r_{\rm in}/R)^3$, и поле $E_{\rm in} = q/r_{\rm in}^2 = Q \cdot r_{\rm in}/R^3$.





- **Поле равномерно заряженного ∞ цилиндра.**



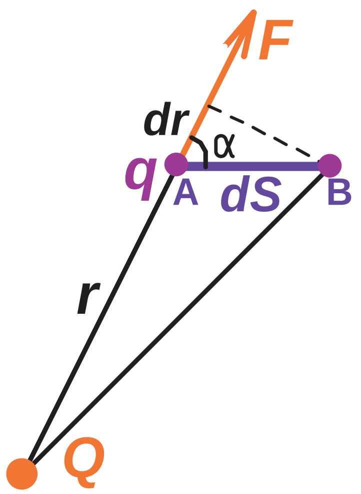
по цилиндру с радиусом R распределен заряд с поверхностной плотностью $\frac{\partial q}{\partial S} = +\sigma$. Поле E на расстоянии $r > R$ от оси цилиндра найдем, проведя воображаемый цилиндр с таким же радиусом и высотой L. Поток напряженности через торцы $= 0$ (поле $\perp$ оси), а через боковую поверхность — $N = S \cdot E = 2\pi r L \cdot E$. Заряд внутри цилиндра: $q = \sigma \cdot 2\pi R L$. Но по теореме О-Г должно быть $N = 4\pi q$, поэтому

$$2\pi r L \cdot E = 4\pi\sigma \cdot 2\pi R L \qquad \Rightarrow \qquad E = 4\pi\sigma\,\frac{R}{r}$$

Внутри же заряженного цилиндра (как и в случае со сферой) поле $= 0$.

<u>Работа электрических сил.</u>

Пусть в поле заряда Q из точки А в точку В перемещается заряд q, проходя малый путь dS. При этом совершается работа dA:

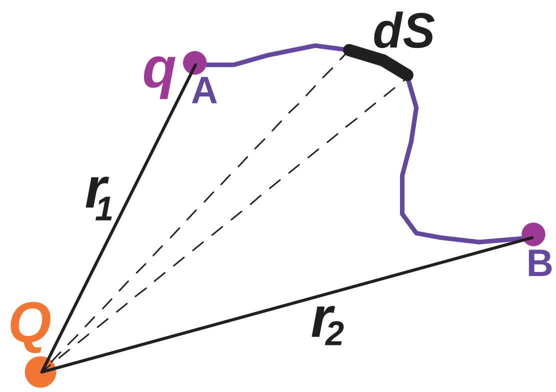


$$dA = F_s \cdot dS = F\ \cos\alpha \cdot dS = F \cdot dr$$

Поскольку путь dS – МАЛЫЙ, то и изменение расстояния от заряда dr – тоже малое, и можно считать, что на всем этом пути

$$F = \text{const.} = \frac{Qq}{r^2}$$

и работа равна
$$dA = \frac{Qq}{r^2} \cdot dr$$



Пусть теперь путь из точки A в точку B тернист и извилист. Разобьем его на малые кусочки. На каждом таком кусочке dS элементарная работа будет

$$dA = \frac{Qq}{r^2} \cdot dr$$

Полная же работа на участке AB составит

$$A = \int\limits_S dA = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{Qq}{r^2} \cdot dr = Qq \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = Qq \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = q \left(\frac{Q}{r_1} - \frac{Q}{r_2} \right)$$

Как видим, работа по перемещению заряда q пропорциональна величине этого заряда (это очевидно!) и разнсти неких величин, характеризующих НАЧАЛЬНОЕ и КОНЕЧНОЕ состояния. При этом, она НЕ ЗАВИСИТ от формы пути. Как мы видели в механике, такое свойство присуще ПОТЕНЦИАЛЬНЫМ силам.

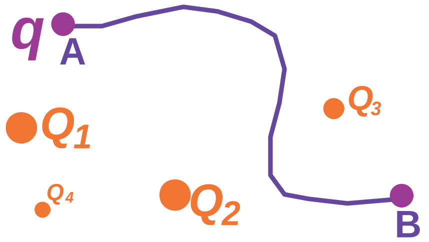
Введем функцию **потенциал**:

$$V = \frac{Q}{r} + C$$

Тогда можно сказать, что работа по перемещению заряда на участке AB равна произведению заряда на разность потенциалов в начальной и конечной точках:

$$A = q \cdot (V_A - V_B)$$

Отсюда следует, что при перемещении по замкнутому контуру работа электрических сил $= 0$.



Если заряд Q, создающий поле, не один, то суммарная работа равна сумме работ, произведенных каждым из зарядов Q_i:

$$A = q\left(V_A^{(1)} - V_B^{(1)}\right) + q\left(V_A^{(2)} - V_B^{(2)}\right) + \ldots + q\left(V_A^{(n)} - V_B^{(n)}\right)$$

$$V_A \equiv V_A^{(1)} + \ldots + V_A^{(n)}; \quad V_B \equiv V_B^{(1)} + \ldots + V_B^{(n)}; \quad A = q \cdot (V_A - V_B)$$

Любое заряженную систему можно разделить на ∞ число малых зарядов и говорить о потенциале, создаваемом системой. Поэтому забудем о зарядах Q_i и будем оперировать ПОТЕНЦИАЛОМ ПОЛЯ.

Разность потенциалов в двух точках измеряется работой, совершаемой силами поля при перемещении единичного положительного заряда из первой точки во вторую.

Единицы измерения разности потенциалов:

- CGSE: когда при перемещении единичного заряда CGSE совершается работа в 1 эрг.
- СИ: 1 Вольт $= \frac{1}{300}$ электростатической разности потенциалов. При перемещении 1 Кулона на 1 Вольт совершается работа в 1 Джоуль.

Что такое РАЗНОСТЬ потенциалов – ясно. А что принять за сам ПОТЕНЦИАЛ? В гравитации: потенциальная энергия $= mgh$, потенциал $= gh$. Относительно ЧЕГО берется высота h? Уровня моря? Уровня стола?

Так же и в электростатике – выбор "нуля"произволен. Если в формуле для потенциала точечного заряда

$$V = \frac{Q}{r} + C$$

положить $C = 0$:

$$V = \frac{Q}{r}$$

то получим, что нулевым потенциал становится при $r \to \infty$. Поэтому чаще всего за "нулевой"потенциал выбирается потенциал бесконечно удаленной точки.

Потенциал данной точки поля численно равен работе, которую совершат силы поля при перемещении единичного положительного заряда из этой точки в бесконечно удаленную, потенциал которой принят за нулевой.

На практике за "ноль"принимают потенциал земной поверхности.

Рассмотрим теперь перемещение заряда q в произвольном поле, каждая точка которого характеризуется какой-то напряженностью $\vec{E}$. Аналогично тому, как мы это проделали с полем точечного заряда Q, разобьем траекторию на участочки dS и получим, что работа по перемещению на каждом участке равна

$$dA = F\cos\alpha\, dS = q\, E\, \cos\alpha\, dS = q\, E_s\, dS = q\, \left(\vec{E}\cdot d\vec{S}\right)$$

а вся работа на пути из А в В составит

$$A = \int_S dA = \int_A^B q\, E_s\, dS.$$

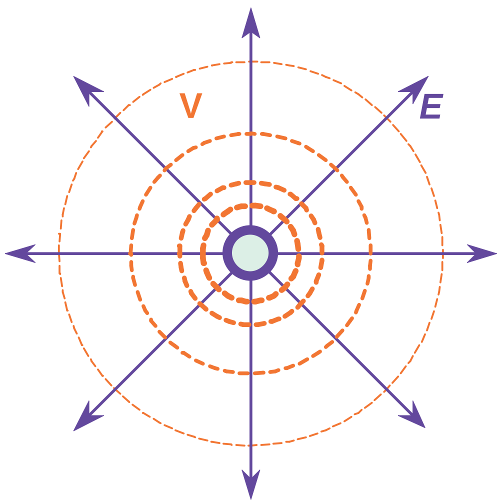
Поскольку она должна равняться $q(V_A - V_B)$, то получим:

$$\int_A^B E_s\, dS = V_A - V_B.$$

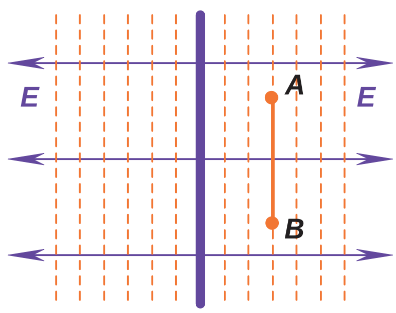
Для замкнутой траектории $$\oint_S E_s\, dS = 0,$$

и это можно считать определением потенциального характера поля.

Потенциал – скалярная величина, меняющаяся от точки к точке. Можно выделить места, где он одинаков – **эквипотенциальные поверхности**. Для точечного, сферического или шарообразного зарядов это – концентрические сферы (поскольку потенциал их имеет одинаковую форму: $V = Q/r$ – и зависит только от r).



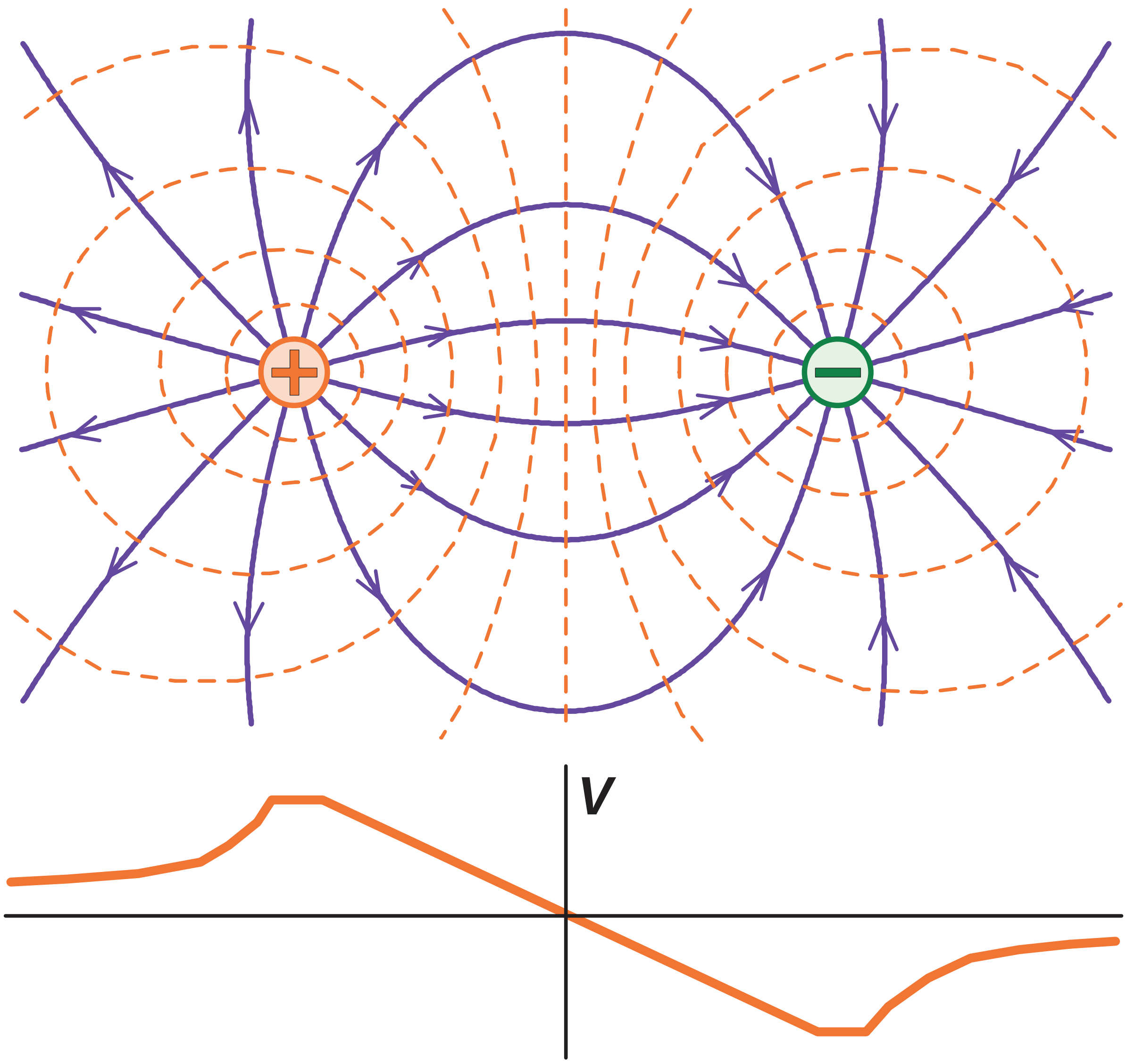
Для заряженной плоскости эквипотенциальные поверхности – это плоскости $\parallel$ ей. При движении заряда вдоль такой поверхности (из А в В) напряженность движению $\Rightarrow$ работа $=0$, что и ожидалось (потенциал $=$ const.)



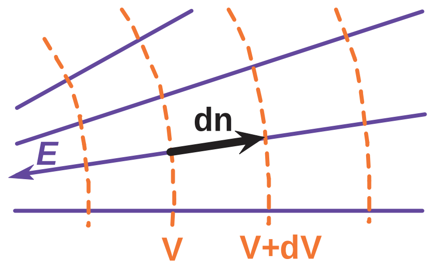
В общем случае: при малом перемещении в поле работа $dA = \left(\vec{F} \cdot d\vec{S}\right) = F\,\cos\alpha\,dS$. Чтобы она была =0, надо: $\cos\alpha$=0, то есть,$\vec{F} \perp d\vec{S}$. Эквипотенциальные поверхности всегда $\perp$ напряженности поля.

Если поле создано положительным зарядом, то силы толкают наш *пробный* заряд $+q$ прочь, к ∞, производя при этом положительную работу, и потенциал тоже положителен и убывает с радиусом.

Если же преобладают отрицательные заряды, то они будут наш *пробный* заряд $+q$ притягивать, и для удаления его на ∞ уже нам придется совершать работу против поля, потенциал является отрицательным, образуя потенциальную яму.



В какой-то точке проведем нормаль $\vec{n}$ к эквипотенциальной поверхности в сторону возрастания потенциала. Поскольку напряженность поля всегда $\perp$ этой поверхности, то она $\parallel$ нормали. Если двинуть пробный заряд $+q$ вдоль нормали на



малое расстояние dn, то работа поля составит $A = q\left(\vec{E}\cdot\vec{dn}\right) = q\,E\,dn$. Но, с другой стороны, эта работа должна быть

$$A = q\cdot(V_1 - V_2) = q\cdot[V_1 - (V_1 + dV)] = -q\,dV$$

Отсюда получаем, что

$$E = -\frac{dV}{dn} = q\cdot[V_1 - (V_1 + dV)] = -q\,dV$$

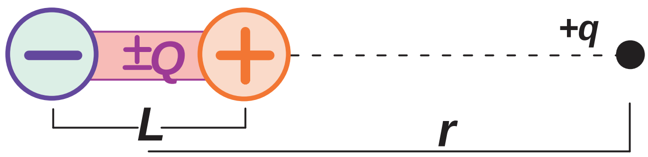
Вообще-то, нормаль к эквипотенциальной поверхности – это градиент. Тогда

$$E = -\vec{\mathrm{grad}}\,V = -\vec{\nabla}V$$

шпаргалка: *Если есть скалярная функция $U(x,y,z)$, то ее градиент $\vec{\nabla}U$ – это вектор с составляющими:*

$$\frac{\partial U}{\partial x},\quad \frac{\partial U}{\partial y},\quad \frac{\partial U}{\partial z}$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x},\qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y},\qquad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$



Задачка: Найти поле на оси диполя вдали от него ($r \gg L$).

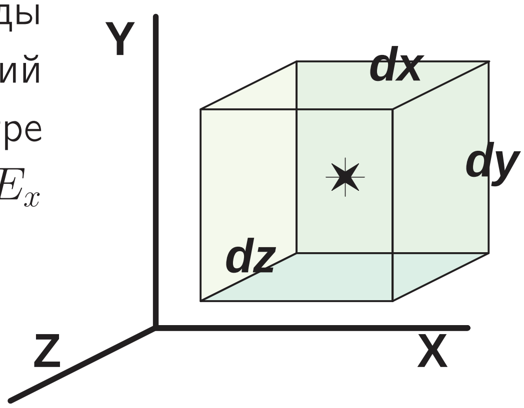
2 Решения ("в лоб"и через потенциал):

$$1)\quad E = \frac{Q}{r_+^2} - \frac{Q}{r_-^2} = Q\frac{r_-^2 - r_+^2}{r_+^2\,r_-^2} = Q\frac{(r_- - r_+)(r_- + r_+)}{r_+^2\,r_-^2} \simeq Q\frac{L(2r)}{r^4} = \frac{2QL}{r^3}$$

$$2)\quad V = \frac{-Q}{r_-} + \frac{+Q}{r_+} = Q\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-} = Q\frac{L}{r_+ r_-} \simeq Q\frac{L}{r^2}$$

$$E = -\vec{\nabla}V = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2QL}{r^3}$$

Пусть в пространстве как-то распределены заряды с плотностью $\rho(x,y,z)$. Выделим там маленький кубик $dx \times dy \times dz$. Напряженность поля в центре $= \vec{E}$ с составляющими E_x, E_y и E_z. Значение E_x на левой грани будет



$$E_x^L \;=\; E_x - \frac{\partial E_x}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2},$$

на правой –

$$E_x^R \;=\; E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2},$$

на нижней и верхней –

$$E_y^D \;=\; E_y - \frac{\partial E_y}{\partial y} \cdot \frac{dy}{2}, \qquad E_y^U \;=\; E_y + \frac{\partial E_y}{\partial y} \cdot \frac{dy}{2},$$

а на задней и передней –

$$E_z^B \;=\; E_z - \frac{\partial E_z}{\partial z} \cdot \frac{dz}{2}, \qquad E_z^F \;=\; E_z + \frac{\partial E_z}{\partial z} \cdot \frac{dz}{2}.$$

Поток напряженности через правую грань равен

$$dN^R = E_x^R \cdot (dy\,dz) = E_x\,dy\,dz + \frac{\partial E_x}{\partial x} \cdot \frac{1}{2}\,dx\,dy\,dz.$$

Для левой грани нормаль направлена **против** оси $\vec{X}$, поэтому нормальная составляющая напряженности $\vec{E}$ для этой грани равна не E_x^L, а $-E_x^L$, и поток через нее будет

$$dN^L = -E_x^L \cdot (dy\,dz) = -E_x\,dy\,dz + \frac{\partial E_x}{\partial x} \cdot \frac{1}{2}\,dx\,dy\,dz.$$

Суммарный поток через левую и правую грани кубика =

$$dN^{LR} = dN^L + dN^R = \frac{\partial E_x}{\partial x}\,dx\,dy\,dz.$$

Аналогично, суммарный поток через нижнюю и верхнюю грани =

$$dN^{DU} = dN^D + dN^U = \frac{\partial E_y}{\partial y}\,dx\,dy\,dz,$$

а через заднюю и переднюю –

$$dN^{BF} = dN^B + dN^F = \frac{\partial E_z}{\partial z}\,dx\,dy\,dz.$$

Полный заряд, находящийся внутри кубика: $q = \rho\, dx\, dy\, dz$, и по теореме О-Г получаем

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi\rho.$$

шпаргалка: *Если есть векторная функция $\vec{F}(x, y, z)$, то ее дивергенция div $\vec{F}$ – это сумма производных от составляющих функции по осям:*

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho$$

Если вспомнить, что напряженность выражается через потенциал как

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z},$$

то дифференцируя это второй раз, получим:

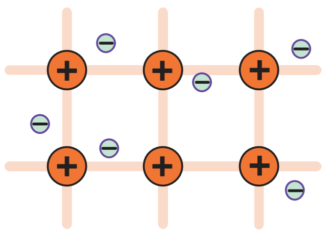
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\rho.$$

шпаргалка: *Если есть скалярная функция $U(x, y, z)$, то сумма ее вторых производных по осям обозначается как $\triangle U$, где $\triangle$ – это оператор Лапласа*

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\triangle V = -4\pi\rho.$$

Проводник в электрическом поле.



Как уже говорилось, проводник имеет свободные электроны, которые могут по нему перемещаться. Если бы на них действовало поле $\neq 0$, то они бы двигались, меняя это поле до тех пор, пока оно не стало бы =0. Коль скоро мы изучаем электроСТАТИКУ, то это значит: ничто не движется, и $\Rightarrow$ поле внутри проводника =0. Если мысленно выделить **внутри** проводника некий объем, то, поскольку напряженность везде =0, то и ее поток через поверхность =0, и по теореме О-Г нескомпенсированные заряды внутри =0.

Заряды в заряженном проводнике $\exists$ лишь на его поверхности.

Весь проводник имеет один и тот же потенциал.