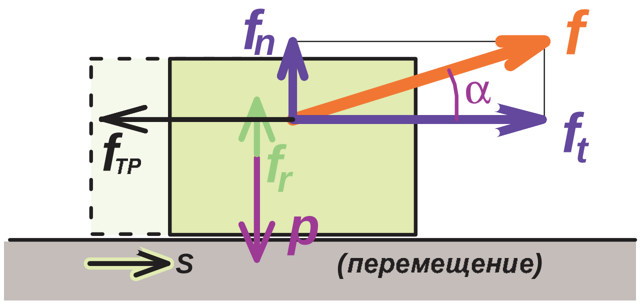
# РАБОТА и ЭНЕРГИЯ

Сила $\vec{f}$ вызывает перемещение тела. Характеристика ее действия – это РАБОТА $(\underline{A}ction)$.

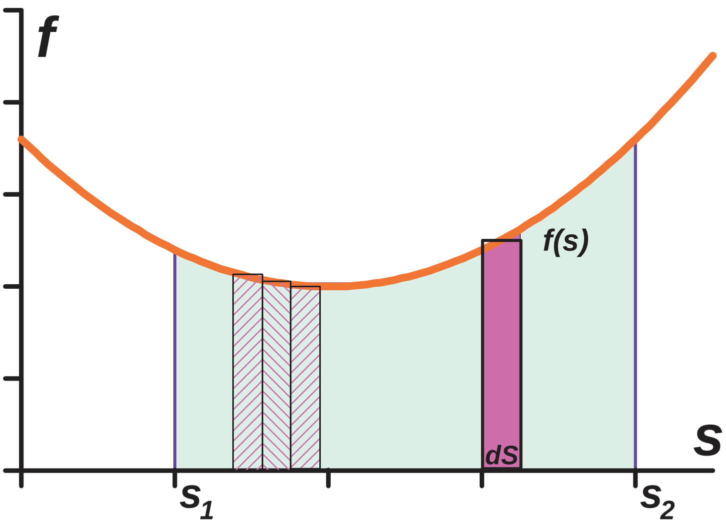



Не вся сила $\vec{f}$ принимает участие в перемещении тела, а только ее составляющая в направлении перемещения $\vec{f_t}$: $f_t = f \cdot \cos\alpha$

$$A = S \cdot f_t = S \cdot f \cdot \cos\alpha = \left(\vec{f} \cdot \vec{S}\right)$$

Здесь вертикальная составляющая $\vec{f_n}$, вес тела $\vec{p}$ и реакция опоры $\vec{f_r}$ никакой работы не производят. Сила трения $\vec{f_{TP}}$ делает **отрицательную** работу, поскольку направлена противоположно движению: $\left(\vec{f_{TP}} \cdot \vec{S}\right) < 0$.

Если сила не постоянна, а меняется во время движения:

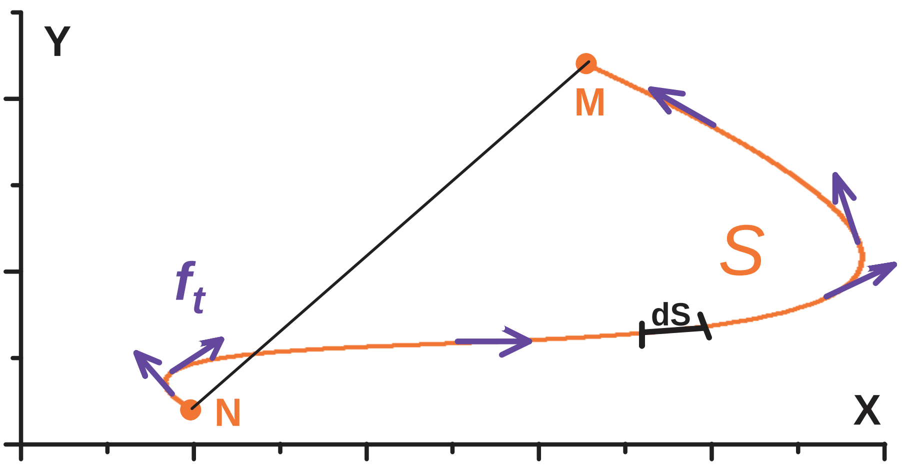



Разобьем весь путь $(S_2 - S_1)$ на малые отрезки $dS$ и на каждом из отрезков посчитаем работу:

$$dA = \left(\vec{f} \cdot d\vec{S}\right)$$

а затем все это просуммируем:

$$A = \int_{s_1}^{s_2} \left(\vec{f} \cdot d\vec{S}\right) \simeq \sum_i \left(f_i \cdot dS_i\right)$$




Для криволинейного движения надо интегрировать (суммировать) по пути $S$, а не по смещению $NM$:

$$A = \oint_N^M \left(\vec{f} \cdot d\vec{S}\right) =$$

$$\oint_N^M \left(f_x dx + f_y dy + f_z dz\right)$$

## Мощность

**Физ. величина, пропорциональная работе и обратно пропорциональная тому времени, за которое она совершена.**

Средняя мощность за промежуток времени $\Delta t$:

$$W = \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{f \cdot \Delta S}{\Delta t}$$

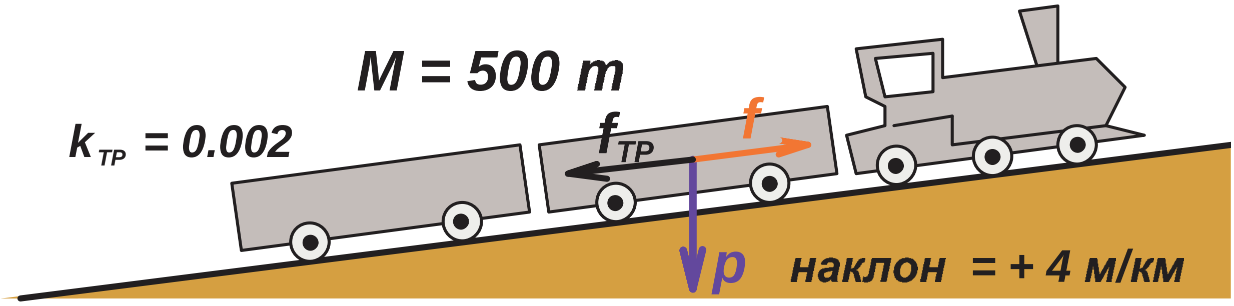
Мгновенная мощность в данный момет:

$$W(t = \tau) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt} = f_t \cdot \frac{dS}{dt} = \left(\vec{f} \cdot \vec{v}\right)$$

## Единицы работы и мощности

- CGS: $[s]$ = см, $[f]$ = дина = г·см/с$^2$
  $\Rightarrow$ $[A]$ = эрг = г·см$^2$/с$^2$
  $\Rightarrow$ $[W]$ = эрг/с = г·см$^2$/с$^3$
- SI: $[s]$ = м, $[f]$ = Ньютон (Н)= кг·м/с$^2$
  $\Rightarrow$ $[A]$ = Джоуль (Дж) = кг·м$^2$/с$^2$ = $10^7$ эргов
  $\Rightarrow$ $[W]$ = Ватт (Вт) = кг·м$^2$/с$^3$ = $10^7$ эргов/с
- несистемные:
  $\Rightarrow$ $[A]$ = кВт·час = 3.6·$10^6$ Дж
  $\Rightarrow$ $[W]$ = лошадиная сила (л.с.) = 736 Вт = 0.736 кВт

Пример: поезд едет с $v$=72 км/час. Мощность = ?




Решение: скатывающая сила $= p \cdot \sin\alpha \simeq p \cdot \alpha \simeq p \cdot \tan\alpha = 0.004p$; она складывается с силой трения $f_{TP} = p \cdot \cos\alpha \cdot k_{TP} \simeq 0.002p$. Поскольку ускорения нет, то все силы скомпенсированы, и $f = 0.006p = 0.006mg = 6 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^5$ кг·9.8 м/с$^2$ = 29.4 кН. Мощность = $f \cdot v = 2.94 \cdot 10^4 \cdot 72000/3600$ кг·м$^2/c^3 = 5.88 \cdot 10^5$ Вт = 588 кВт $\simeq$ 0.6 МВт $\simeq$ 433 л.с.

## Кинетическая энергия

Работа силы $f$ по разгону тела от $v_1$ до $v_2$ за время $t$: $A = fs$ при ускорении $a = (v_2 - v_1)/t$. Сила равна $f = ma = m(v_2 - v_1)/t$. Средняя скорость $\bar{v} = (v_1 + v_2)/2$, поэтому расстояние $s = t\bar{v}$. Подставив, получим:

$$A = m \cdot \frac{v_2 - v_1}{t} \cdot \frac{v_1 + v_2}{2} \cdot t = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$$

Работа силы $f$ численно равна приращению величины $E_k = mv^2/2$, которая называется кинетической энергией.

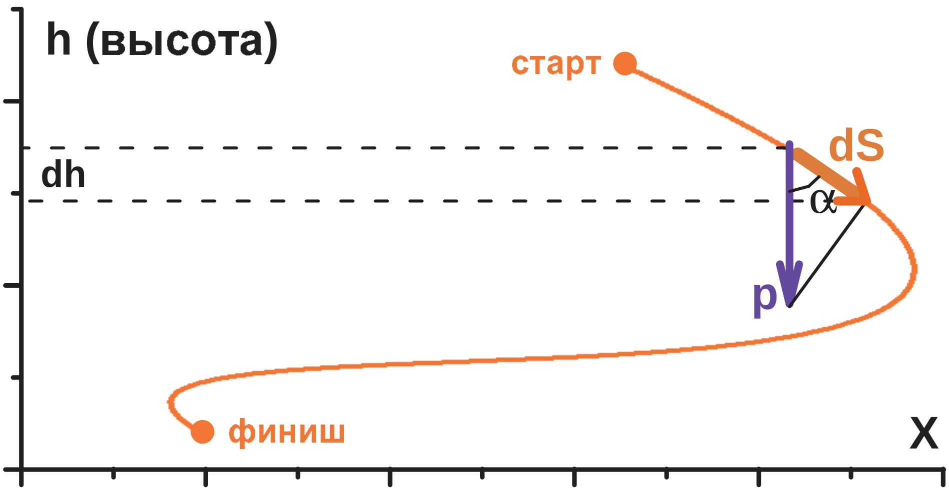
Если имеется несколько материальных точек, образующих систему, то сказанное справедливо для каждой из них и для всей системы:

$$E_k = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}; \qquad A = \Delta E_k$$

Изменение кинетической энергии системы равно работе всех сил, приложенных к материальным точкам, образующим систему.

## Потенциальная энергия

Силовое поле – пространство, где на тела действуют силы. Например: однородное гравитационное поле.




С горы съезжает сламолист. Разобьем его трассу на короткие **прямые** кусочки. Работа силы тяжести на каждом i-ом отрезке: $dA_i = dS_i \cdot p \cdot \cos\alpha_i$. Но ведь $dS_i \cdot \cos\alpha_i = dh_i$, поэтому вся (суммарная) работа от старта до финиша составляет

$$A = \sum_i dA_i = \sum_i p \cdot dh_i = p \cdot \sum_i dh_i = p \cdot h$$

и зависит не от формы или длины пути, а только от перепада высот! Такие силы называются потенциальными.

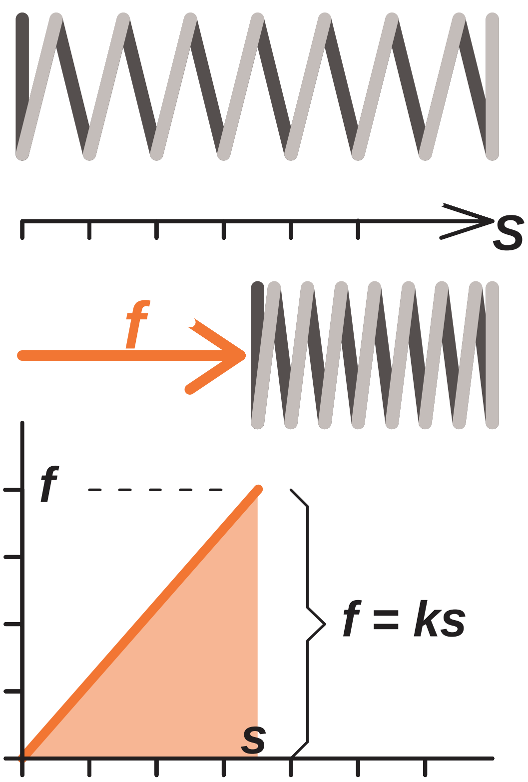
Введем понятие потенциальной энергии $E_p$ – такой величины, характеризующей положение материальной точки в поле потенциальных сил, что работа при перемещении из одной точки поля в другую будет равна разности значений $E_p$ в этих точках:

$$A_{1,2} = E_{p1} - E_{p2}$$

Заметим, что $E_p$ – не абсолютна, а задает только **разность** по сравнению с какой-то $E_p$, условно принятой за 0.

Для тела с массой $m$ потенциальная энергия в однородном гравитационном поле равна $E_p = mgh$, где $h$ – уровень относительно некой нулевой высоты.

Еще пример: сжимаем пружину с жесткостью $k$.




Сила непостоянна и растет: $f = ks$. Разбивая отрезок $s$ на короткие кусочки и считая силу на каждом кусочке постоянной, получим, что совершенная работа

$$A = \sum_i k \cdot s_i \cdot ds_i \quad \rightarrow \quad S_\Delta = s \cdot ks/2 = ks^2/2$$

или через интеграл:

$$A = \int_0^s f(s)ds = \int_0^s ks\, ds = ks^2/2$$

Сжимая пружину, **мы** совершаем работу, а **не пружина**, поэтому мы **увеличиваем** ее потенциальную энергию: $E_p = ks^2/2$.

Как и $E_k$, так же и $E_p$ системы равна сумме $E_{pi}$ частиц, составляющих эту систему. Если система изолирована и если все силы в ней – потенциальные, то полная работа $A_{1,2}$ при переходе из состояния 1 в состояние 2 зависит только от разности начальной и конечной конфигураций системы, но не от способа перемещений:

$$A_{1,2} = E_{p1} - E_{p2}$$

Это же можно сказать и про разность кинетических энергий системы в состояниях 1 и 2:

$$A_{1,2} = E_{k2} - E_{k1}$$

Сравнивая, получим:

$$E_{p1} + E_{k1} = E_{p2} + E_{k2}$$

> Закон сохранения механической энергии:
> Полная энергия изолированной системы, в которой действуют только потенциальные силы, остается постоянной.

Пусть $\exists$ замкнутая система с какой-то $E_p = E_0$ и $E_k = 0$ (все тела системы покоятся). Тогда при любом движении $E_k$ увеличится ($E_k$ не может быть отрицательной). Это увеличение возможно только за счет уменьшения $E_p$. Если оказалось, что $E_p$ и так минимальна, то:

> Замкнутая мех.система, $E_p$ которой имеет минимум и в которой отсутствует движение, находится в состоянии равновесия.

Что будет, если система неизолированная, и в ней есть трение? Силы в этой системе:

- внутренние потенциальные
- внутренние непотенциальные (трение)
- внешние

Тогда работа совершается этими тремя видами сил:

$$E_{k2} - E_{k1} = A_{1,2} = A_{\text{int}} + A_{\text{fr}} + A_{\text{ext}}$$

Из ЗСЭ следует, что **изменение полной механической энергии любой системы равно сумме работ внешних сил и сил трения**:

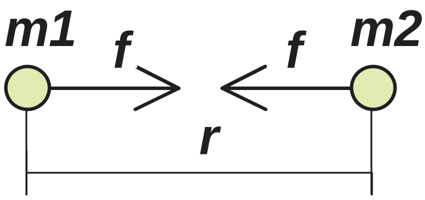
$$E_2 - E_1 = A_{\text{fr}} + A_{\text{ext}}$$

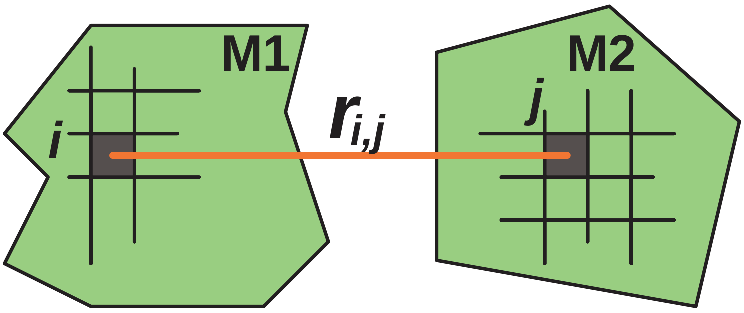
## Гравитация (силы тяготения).

Закон всемирного тяготения (Ньютон, 1687 г.):
Всякие тела притягиваются друг к другу с силой,
прямо пропорциональной произведению их масс
и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними.

$$f = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Это справедливо только если $r \ll$ размера тел. В противном случе надо интегрировать:




разбивать каждое тело на мелкие кусочки $\Delta M$, вычислять притяжение между каждой парой кусочков $\Delta f$ и затем все это суммировать:

$$f = \sum_{i,j} f_{i,j} = \sum_{i,j} G \cdot \frac{\Delta m_i \cdot \Delta m_j}{r_{i,j}^2}$$

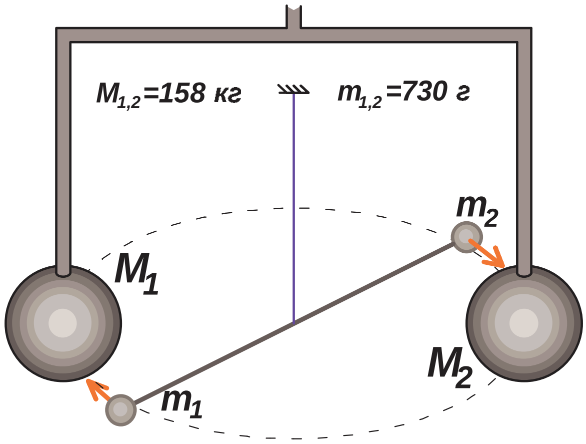
Результат интегрирования оказывается таким же только в том случае, когда тела имеют форму однородного шара или сферы – тогда в качестве $r$ надо просто взять расстояние между **центрами** тел.

## Измерение гравитационной постоянной $G$

Дж.Мичелл (1793): крутильные весы.
Г.Кавендиш (1798): плотность Земли
С.Пуассон (1811): термин "Гравитационная постоянная"

$$\boxed{G = 6.67428_{67} \cdot 10^{-8} \text{ дин см}^2/\text{г}^2}$$

$$\boxed{G = 6.67428 \pm 0.00067 \cdot 10^{-11} \text{ Н м}^2/\text{кг}^2}$$



У поверхности Земли ускорение тела с массой $m$, вызванное гравитацией:

$$g = \frac{f}{m} = G \cdot \frac{m \cdot M}{m \cdot R^2} = G \cdot \frac{M}{R^2}$$

Зная $g$ и радиус Земли (из географии, начиная с Архимеда), можно определить массу Земли и ее плотность (что и делал Кавендиш):

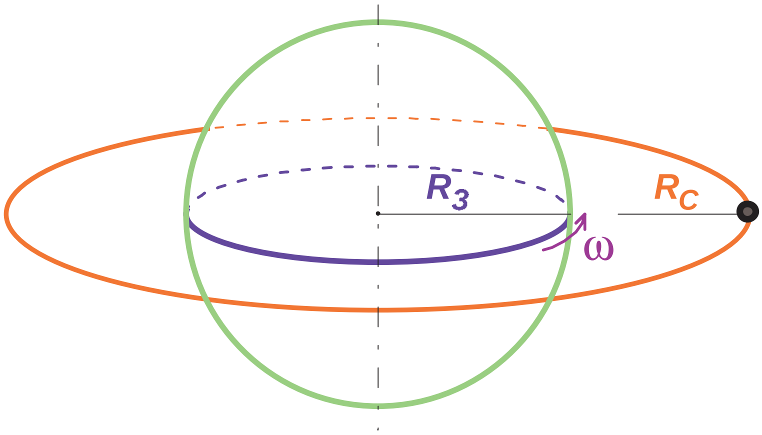
$$M = \frac{g \cdot R^2}{G} \simeq 5.98 \cdot 10^{27}\text{г}; \qquad \overline{d} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \simeq 5.5 \text{ г/см}^3$$

Зная радиус $r$ орбиты Земли относительно Солнца и период ее обращения, можно найти массу Солнца, т.к. гравитация играет роль центростремительной силы:

$$G \cdot \frac{M \cdot M_\odot}{r^2} = M \cdot r \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \quad \Rightarrow \quad M_\odot = \frac{4\pi^2}{G} \cdot \frac{r^3}{T^2} \simeq 1.98 \cdot 10^{33} \text{ г}$$

btw: отсюда следует, что для разных планет квадраты периодов обращения относятся как кубы радиусов орбит (третий закон Кеплера).

Еще задачка: какой высоты д.б. орбита спутника, чтобы с Земли казалось, что он висит неподвижно?




$$G \cdot \frac{M \cdot m}{R_c^2} = m \cdot R_c \cdot \frac{4\pi^2}{T^2}$$

$$R_c^3 = \frac{G \cdot M \cdot T^2}{4\pi^2}$$

$$R_c \simeq \sqrt[3]{75 \cdot 10^{21}\text{м}^3} \simeq$$

$$\simeq 4.2 \cdot 10^7\text{м} = 42000 \text{ км}$$

Какова потенциальная энергия покоящегося гравитирующего тела на $\infty$?

$$E_\infty = \int_R^\infty f(r)dr = \int_R^\infty \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} dr = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r}\Big|_R^\infty = \frac{G \cdot M \cdot m}{R}$$

Если такое тело упадет, то вся $E_p = E_\infty$ перейдет в $E_k = mv^2/2$:

$$\frac{G \cdot M \cdot m}{R} = \frac{m \cdot v^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \simeq 11.2 \text{ км/с}$$