<u>Классическая механика</u>

кинематика + динамика

Г.Галилей (1564-1642) И.Ньютон (1642-1727) Л.Эйлер (1707-1783)

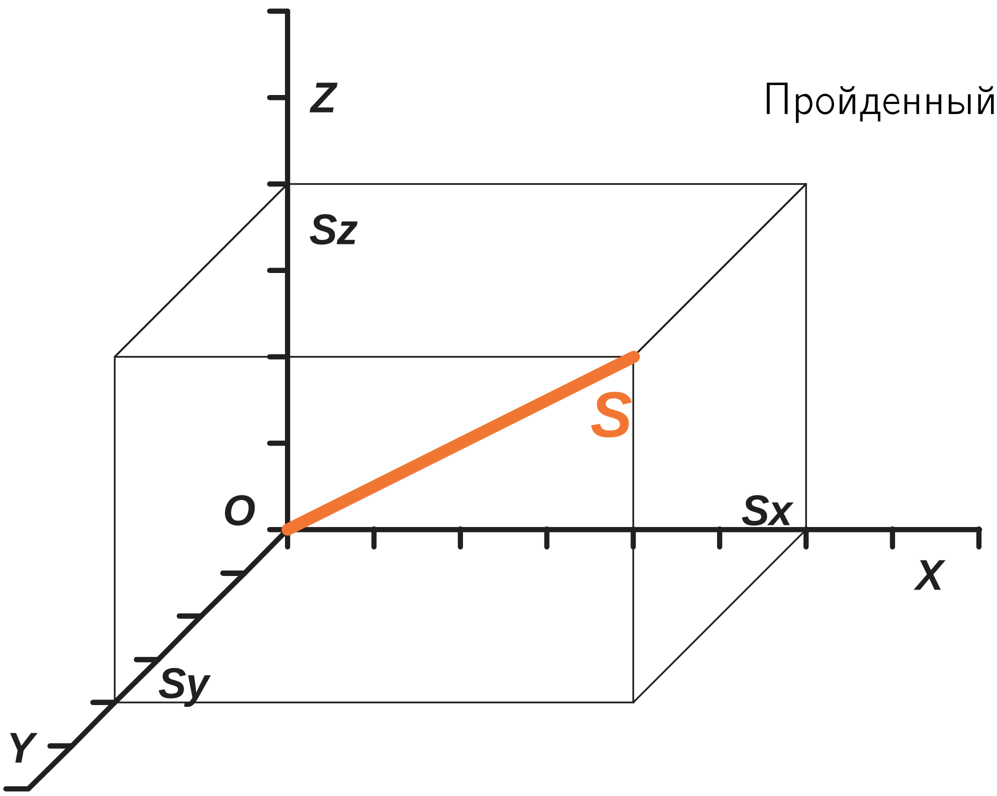
хорошее приближение к действительности (если речь не идет о больших скоростях, больших или малых объектах).

- Пространство
- Время
- Тело
- Материальная точка
- Движение

<u>КИНЕМАТИКА</u>

<u>Прямолинейное равномерное движение</u>

Движение вдоль прямой; равные ΔS за равные Δt.

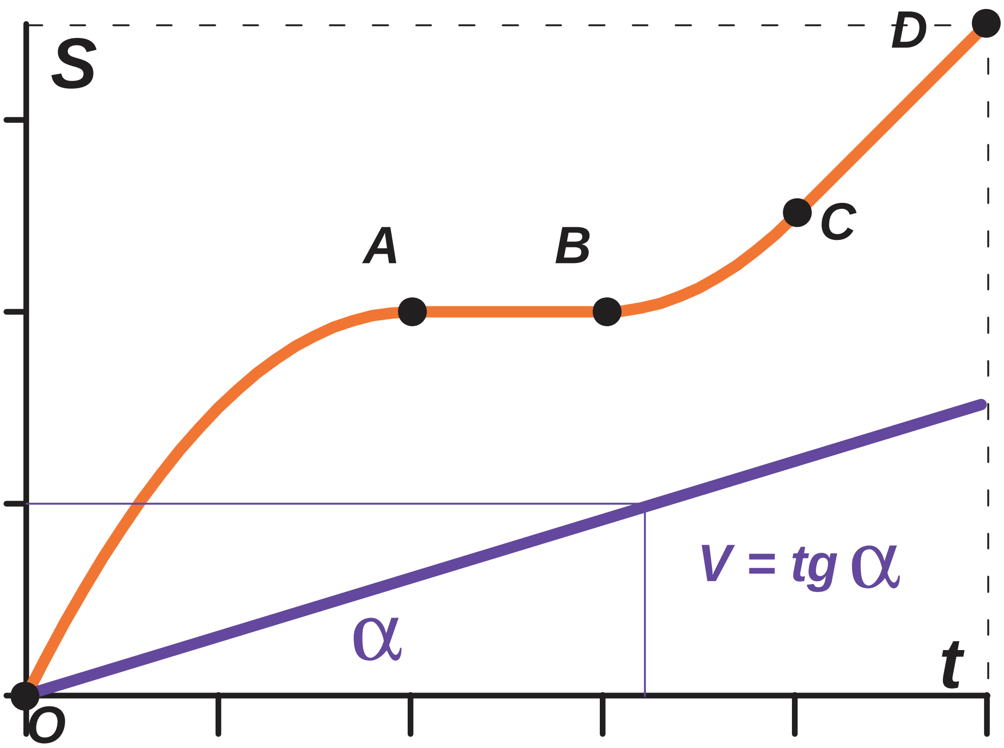


Пройденный путь: $S = f(t)$

$$S_x = f_1(t)$$
$$S_y = f_2(t)$$
$$S_z = f_3(t)$$

Скорость равномерного движения - физ. величина, прямо пропорциональная пройденному пути и обратно пропорциональная затраченному времени.

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t} \quad (= const)$$



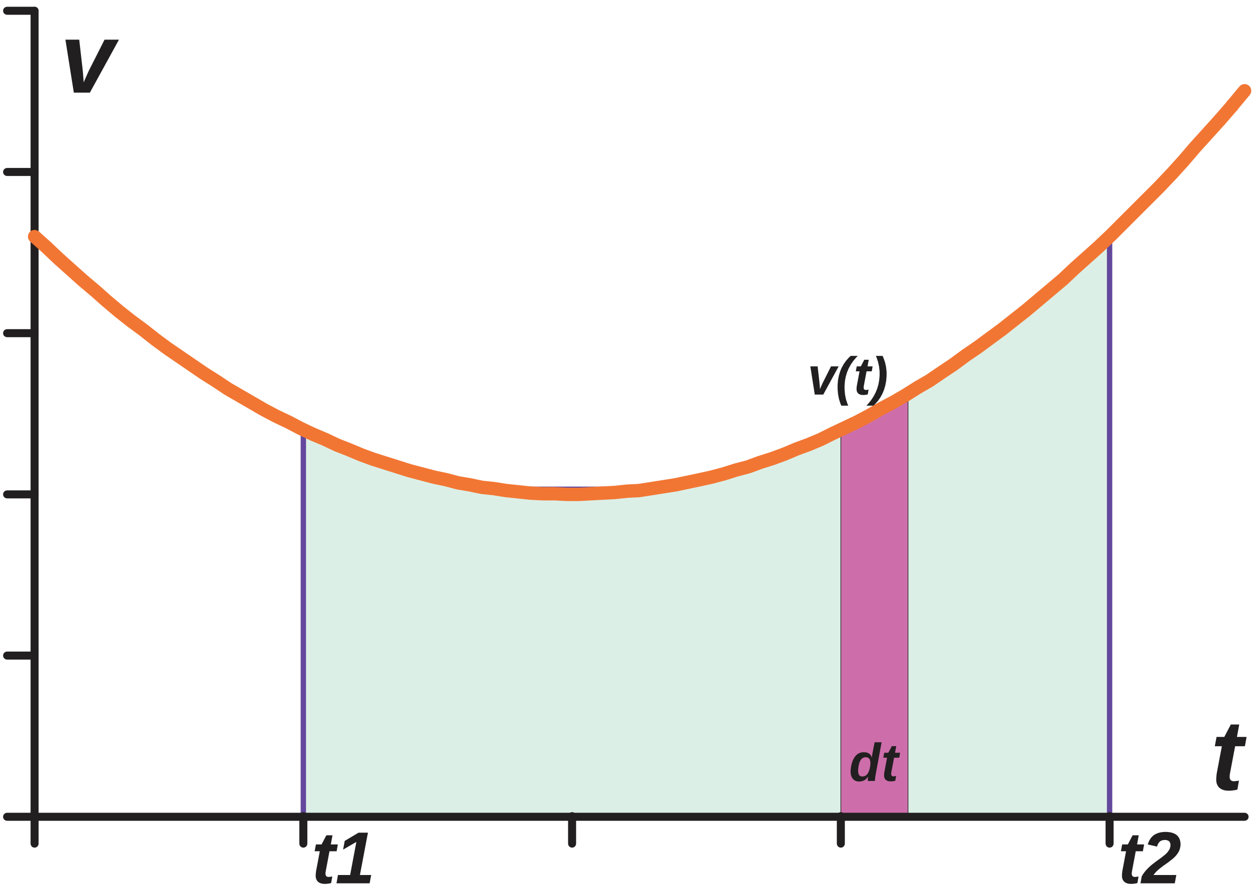
Неавномерное движение:

1. OA – торможение
2. AB – остановка (состояние покоя)
3. BC – ускорение
4. CD – равномерное движение

Средняя скорость: $v_{mean} = \langle v \rangle = \overline{v} = \frac{S}{t}$

Мгновенная скорость в момент $t = \tau$:

$$v(\tau) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(\tau + \Delta t) - S(\tau)}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}(\tau) = \dot{S}(\tau)$$



Путь, пройденный за время от t_1 до t_2 – ?

$$S = \sum_i \overline{v_i} \cdot \Delta t_i = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$$

Равнопеременное прямолинейное движение

Ускорение (положительное или отрицательное):

$$v = v_0 + a \cdot t \qquad a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Более точно:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta t} \right) = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{s} = const$$

Путь:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = v_0 \cdot (t_2 - t_1) + \frac{a \cdot (t_2 - t_1)^2}{2}$$

Произвольное прямолинейное движение

Если задан закон, по которому происходит движение

$$S = f(t) \quad ,$$

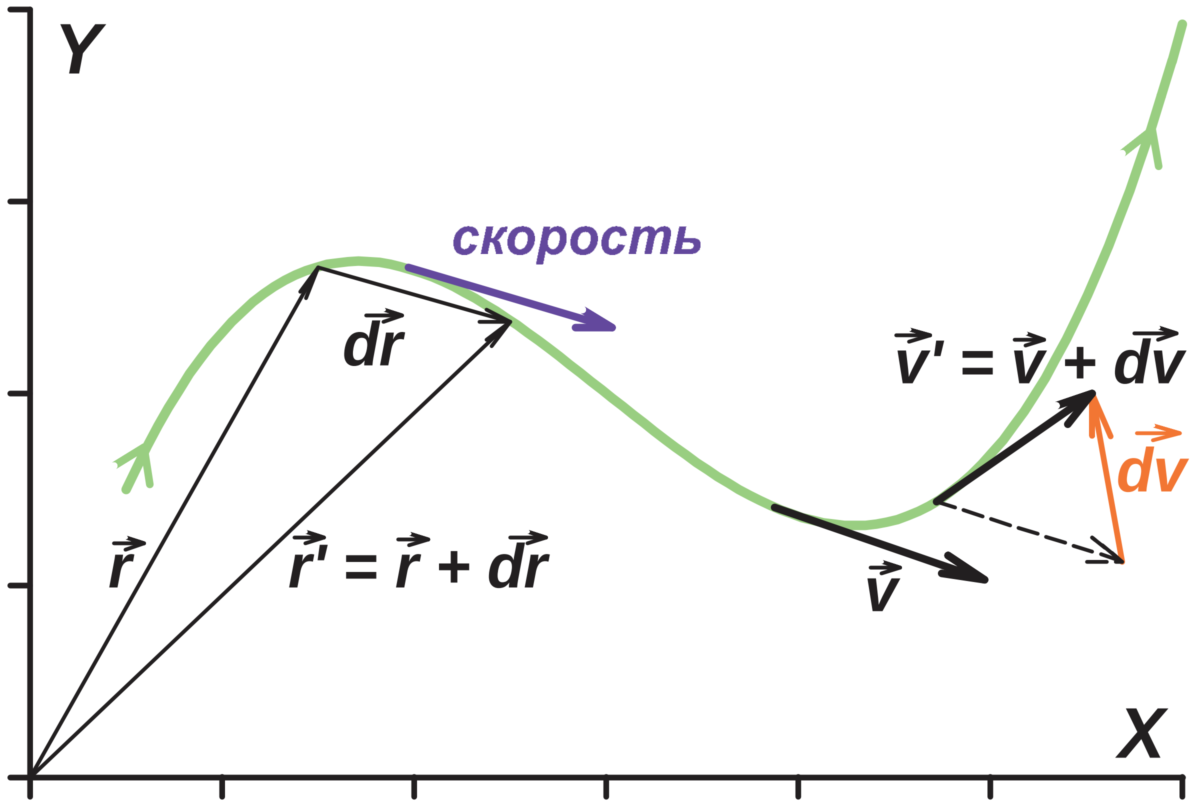
то мы всегда сможем найти скорость, ускорение и путь:

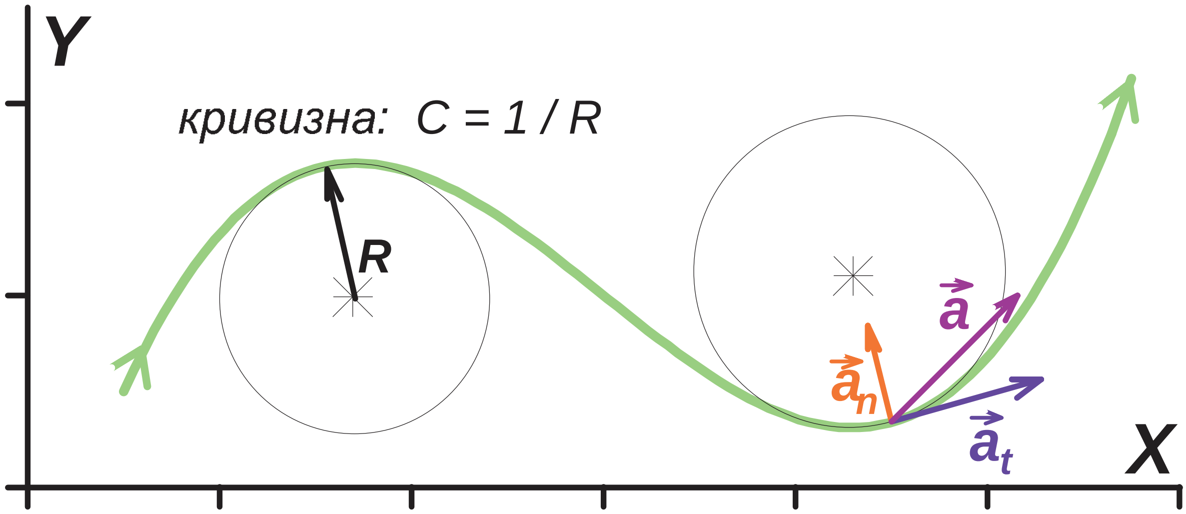
$$v = \dot{s} = \frac{df}{dt}$$

$$a = \dot{v} = \ddot{s} = \frac{d^2 f}{dt^2}$$

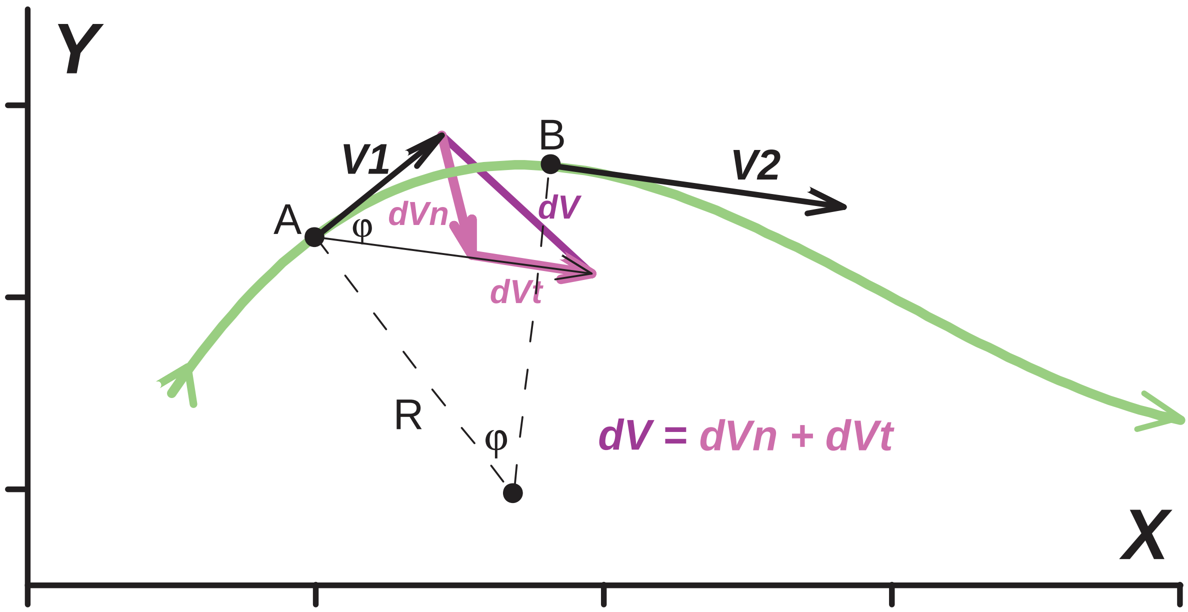
$$s = s_2 - s_1 = f(t_2) - f(t_1)$$

Поскольку движение имеет **направление**, то s, v и a – векторы (обозначаются как $\mathbf{s}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{a}$ или $\vec{s}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$). Все сказанное справедливо (в векторном виде) для криволинейного движения. Положение в пространстве – радиус-вектор $\vec{r}$.





Составляющие ускорения – тангенциальное и нормальное (радиальное, центростремительное): $\vec{a} = \vec{a_t} + \vec{a_n}$



$$|dV_t| = |V_2| - |V_1| \;; \qquad |dV_n| = |V_1| \cdot \varphi$$

$$|a_t| = \lim_{dt \to 0} \frac{|dV_t|}{dt}; \qquad \vec{a_t} \parallel \vec{V}$$

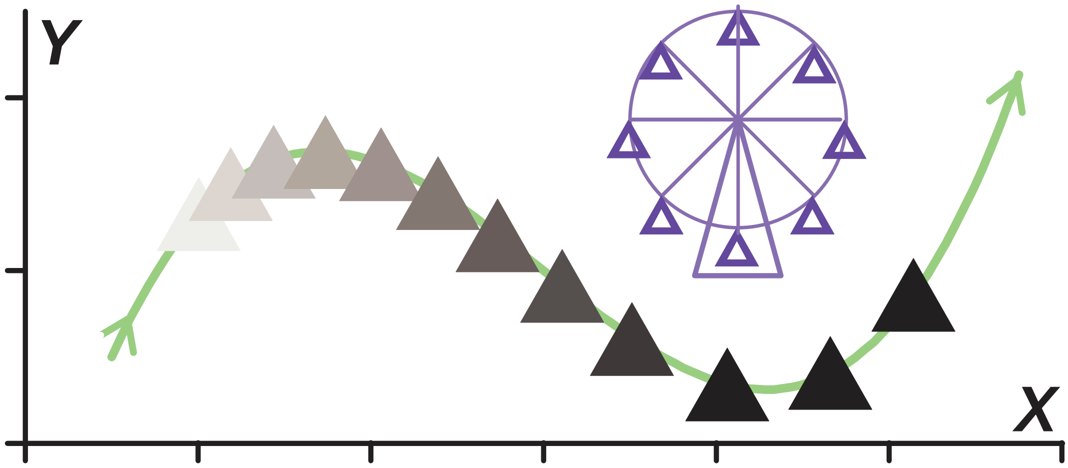
$$|a_n| = \lim_{dt \to 0} \frac{|dV_n|}{dt} = \lim_{dt \to 0} \frac{|V_1| \cdot \varphi}{dt} = \lim_{dt \to 0} \left(|V_1| \cdot \frac{\varphi}{AB} \cdot \frac{AB}{dt} \right) = \frac{|V|^2}{R}$$

$$\vec{a_n} \parallel \vec{R} \perp \vec{V}$$

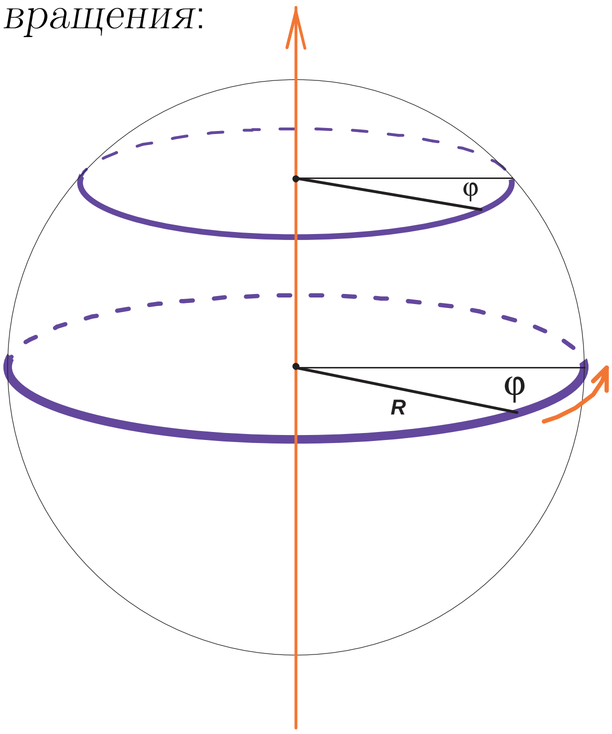
Равномерное движение по кривой: $|V|$=const, $\vec{a} = \vec{a_n} \perp \vec{V}$.

Кинематика (абсолютно) твердого тела

Поступательное движение – все точки тела имеют одинаковые скорости и ускорения:



Вращение – все точки тела описывают окружности с центрами на *оси вращения*:



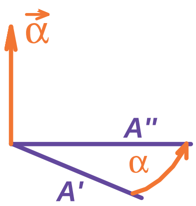
Угловая скорость:

$$\omega = \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$$

Угловое ускорение:

$$\beta = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

Угол как вектор:



$$\vec{\alpha} = \alpha \cdot \frac{\left[\vec{A}' \times \vec{A}''\right]}{\left|\left[\vec{A}' \times \vec{A}''\right]\right|}$$

Связь линейной и угловой скорости:

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{d(R \cdot \varphi)}{dt} = \omega R; \qquad \vec{V} = \left[\vec{\omega} \times \vec{R}\right]$$

Линейные и аксиальные векторы

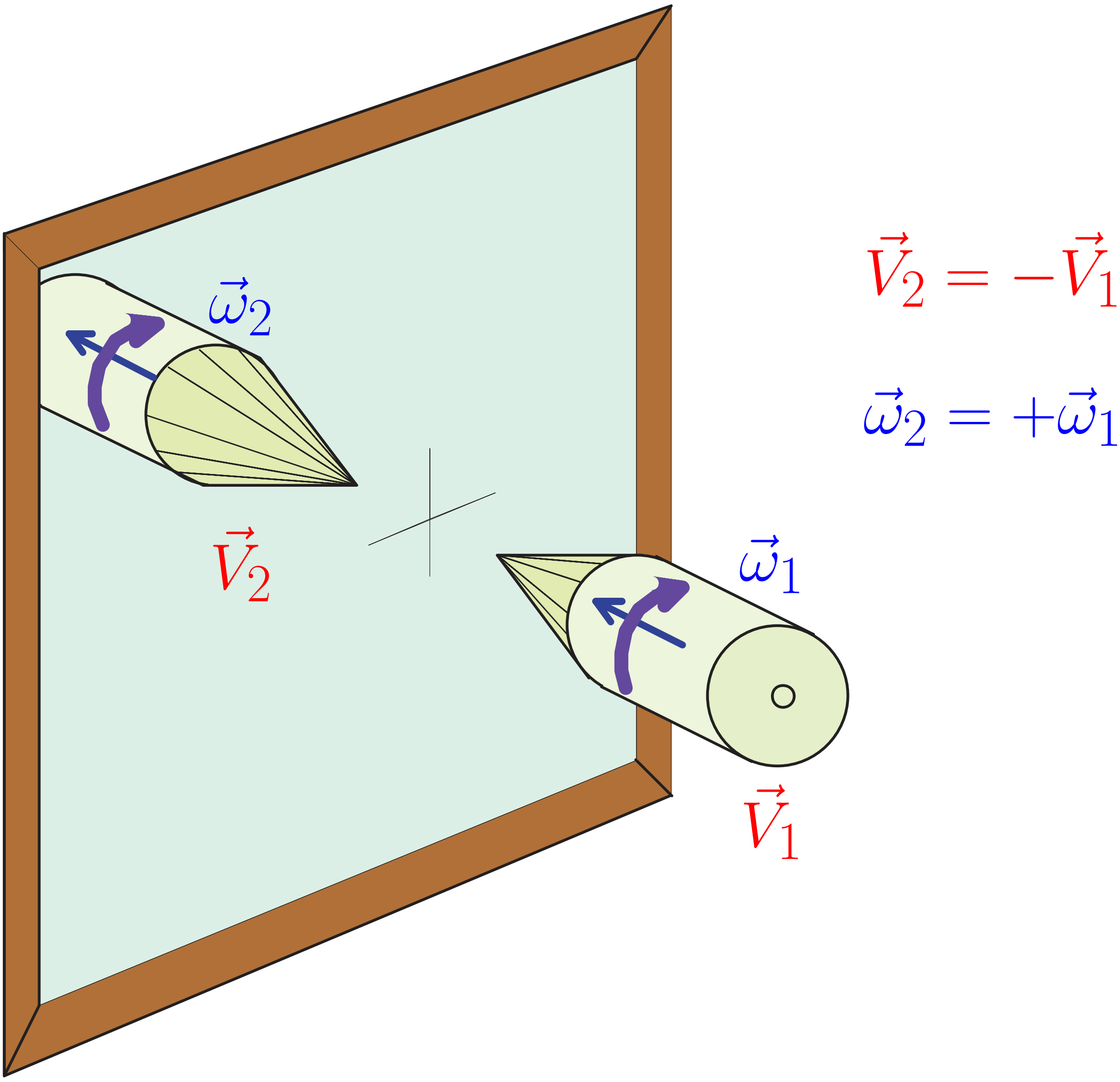
Линейные (истинные) векторы – те, что связаны с поступательным движением или направлением в пространстве:

$$\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}, \vec{V}, \vec{R}, \vec{a}, \vec{F},$$

Аксиальные векторы – те, что связаны с вращением:

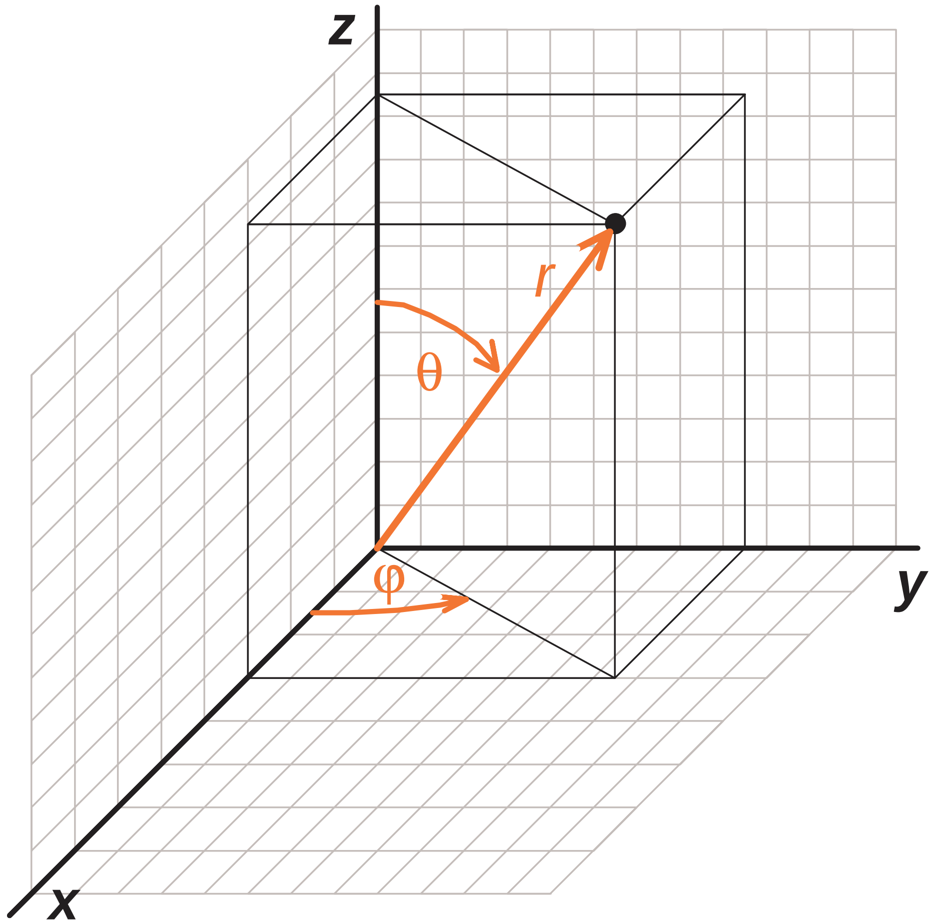
$$\vec{\varphi}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{L}, \vec{M}$$

Они отличаются своими свойствами симметрии: при зеркальном отражении (то есть, при замене $X \to -X$) линейные векторы меняют знак, а аксиальные - не меняют.



Связь декартовых и сферических координат

$$\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\} \quad \leftrightarrow \quad \left\{\vec{r}, \vec{\theta}, \vec{\varphi}\right\}$$



$$\begin{array}{ccccc} 0 & \leq & r & & \\ 0 & \leq & \theta & \leq & \pi \\ 0 & \leq & \varphi & \leq & 2\pi \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & r\sin\theta\cos\varphi \\ y & = & r\sin\theta\sin\varphi \\ z & = & r\cos\theta \end{array} \right\} \quad \leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} r & = & \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta & = & \arccos\left(z/r\right) \\ \varphi & = & \arctan\left(y/x\right) \end{array} \right\}$$

$$dx \cdot dy \cdot dz \quad = \quad dV \quad = \quad r^2 \cdot dr \cdot \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$$

ШПАРГАЛКА

Правила векторной алгебры

- длина вектора (модуль):

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

- сложение (вычитание):

$$\vec{C} = \vec{A} \pm \vec{B} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} C_x &= A_x \pm B_x \\ C_y &= A_y \pm B_y \\ C_z &= A_z \pm B_z \end{cases}$$

- умножение на число (масштабирование):

$$\vec{C} = k \cdot \vec{A} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} C_x &= k \cdot A_x \\ C_y &= k \cdot A_y \\ C_z &= k \cdot A_z \end{cases}$$

- дифференцирование:

$$\vec{C} = \frac{d\vec{A}}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} C_x &= dA_x/dt \\ C_y &= dA_y/dt \\ C_z &= dA_z/dt \end{cases}$$

- скалярное перемножение двух векторов:

$$C = \left(\vec{A}, \vec{B}\right) = \vec{A} \cdot \vec{B} \quad \Leftrightarrow \quad C = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z = |A| \cdot |B| \cdot \cos\theta$$

- векторное перемножение двух векторов:

$$\vec{C} = \left[\vec{A}, \vec{B}\right] = \vec{A} \times \vec{B} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} C_x &= A_y \cdot B_z - A_z \cdot B_y \\ C_y &= A_z \cdot B_x - A_x \cdot B_z \\ C_z &= A_x \cdot B_y - A_y \cdot B_x \end{cases}$$

$$|C| = |A| \cdot |B| \cdot \sin\theta; \quad \vec{C} \perp \vec{A}; \quad \vec{C} \perp \vec{B}$$