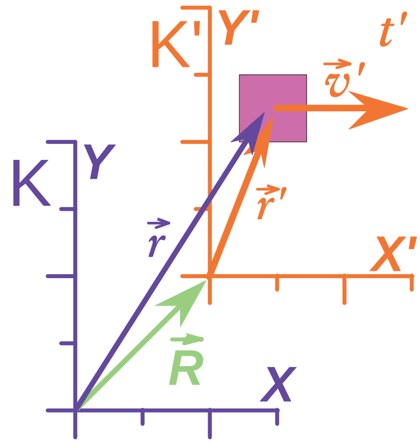
Элементы СТО

И.Е.Иродов, Основные законы механики, глава 6

Представления о пространстве и времени в классической (ньютоновской) механике:

1. Пространство – Евклидово и имеет 3 измерения.
2. $\exists$ время, не зависящее от пространства (но его измерение связано с законами движения)
3. Размеры тел и промежутки времени одинаковы для всех систем отсчета (Ньютон: пространство и время – абсолютны!)
4. справедлив 1зН: $\exists$ инерциальные системы, и в них $\exists$ механический принцип относительности Галилея
5. Из (1–4) вытекают преобразования Галилея:

   Если система K' описывается радиус-вектором $\vec{R}$ относительно системы K, то событие, описываемое в этой системе радиус-вектором $\vec{r'}$, будет в системе K иметь радиус-вектор $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r'}$. При этом $t{=}t'$ и, соответственно, $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r'}}$, то есть, $\vec{v} = \vec{V} + \vec{v'}$ или $\vec{r} = \vec{V}t + \vec{r'}$



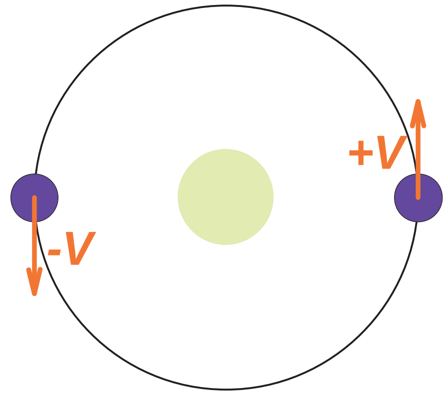
6. $\exists$ механический принцип относительности Галилея
7. $\exists$ принцип дальнодействия: все взаимодействия передаются мгновенно

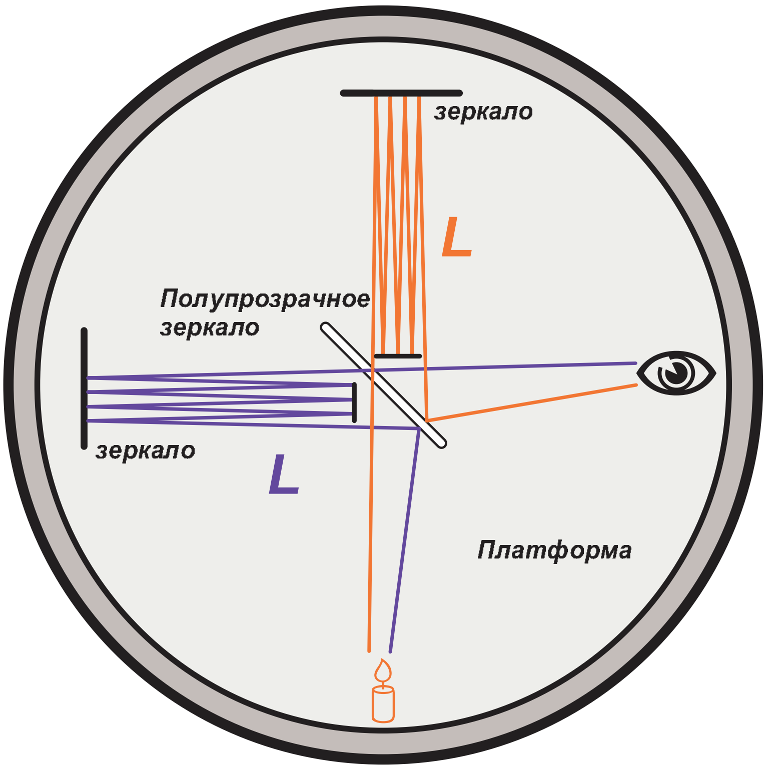
Вопрос: $\exists$ ли абсолютная система отсчета? $\exists$ ли явления (не механичес-кие), которые отличались бы в разных инерциальных системах?

Природа света: Считалось, что это колебания некой упругой среды наподобие воздуха ("эфир"). Но такая среда не может быть неподвижной относительно сразу всех инерциальных систем $\Rightarrow$ должна быть одна "абсолютная"система! Эфир?...

Опыт Майкельсона и Морли

Скорость света $c \simeq 300\ 000$ км/с
(с 1983 года $c \equiv 2.99792458 \times 10^8$ м/с)
Орбитальная скорость Земли $V \simeq 30$ км/с
$V/c \simeq 10^{-4}$, и можно попытаться увидеть результат сложения скоростей $c \pm V$.





1887 год. Гранитная платформа, плавающая в ванне со ртутью (убирает вибрации и облегчает вращение). Первый луч проходит путь nL на запад и nL на восток, а второй – nL на север и nL на юг. Пусть Земля в эфире движется на юг со скоростью V. В лабораторной системе (л.с.): эфир движется на север. Тогда в л.с. скорость света при движении луча на север $v_N = c + V$, на юг $v_S = c - V$, на восток и на запад $v_O = v_W = \sqrt{c^2 - V^2}$. Время, потраченное на весь путь первым лучем:

$$T_1 = T_O + T_W = \frac{nL}{v_O} + \frac{nL}{v_W} = \frac{2nL}{\sqrt{c^2 - V^2}} = \frac{2nL}{c \cdot \sqrt{1 - (V/c)^2}}$$

Время, потраченное на весь путь вторым лучем:

$$T_2 = T_N + T_S = \frac{nL}{v_N} + \frac{nL}{v_S} = \frac{nL}{c+V} + \frac{nL}{c-V} = \frac{2nLc}{c^2 - V^2} = \frac{2nL}{c \cdot (1 - (V/c)^2)}$$

Разность путей, пройденных обоими лучами **в эфире**:

$$\Delta L = cT_2 - cT_1 = \frac{2nL}{(1 - (V/c)^2)} - \frac{2nL}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} \simeq nL\,(V/c)^2 \simeq 12 \text{ нм}$$

При повороте платформы на 90° должно $\Delta L \leftrightarrow -\Delta L$, но никакой разности хода $2\Delta L \simeq 0.04\lambda$ обнаружено не было!

Могло, конечно, **случайно** оказаться, что в тот момент было V=0. Тогда через полгода должно быть V=60 км/с. Повторили – безрезультатно!

Выводы: 1) эфир никак не обнаружить 2) Скорость света не зависит от скорости источника.

Максвелл: скорость распространения эл.-маг. поля в пустоте c=const безотносительно к системам отсчета(?!)

Лоренц (1892): сокращение длины тела в направлении движения.

Пуанкаре (1905): принцип относительности Галилея надо распространить на **все явления, включая электродинамику**, а не только на механику. "Преобразования Лоренца". Одновременность событий не абсолютна. 4-мерный интервал $r^2+(ict)^2$ – инвариант преобразований Лоренца. Скорость распространения гравитации в эфире = c.

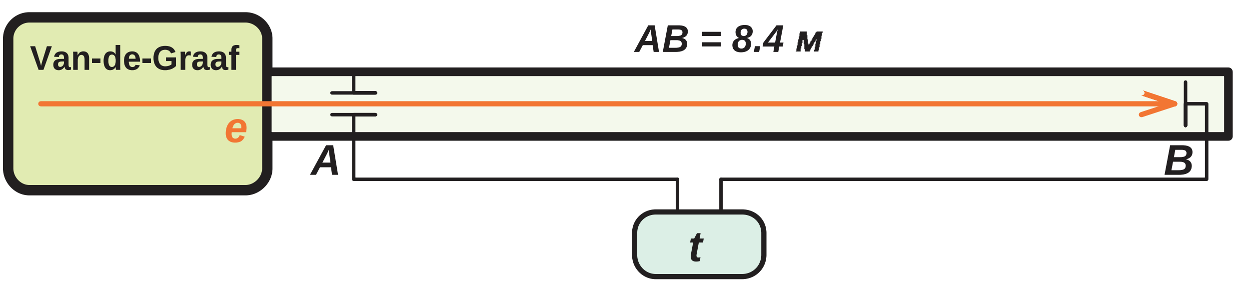
Эйнштейн (1905): Зачем эфир, если он ненаблюдаем? 2 постулата: спец. принцип относительности и постоянство c.

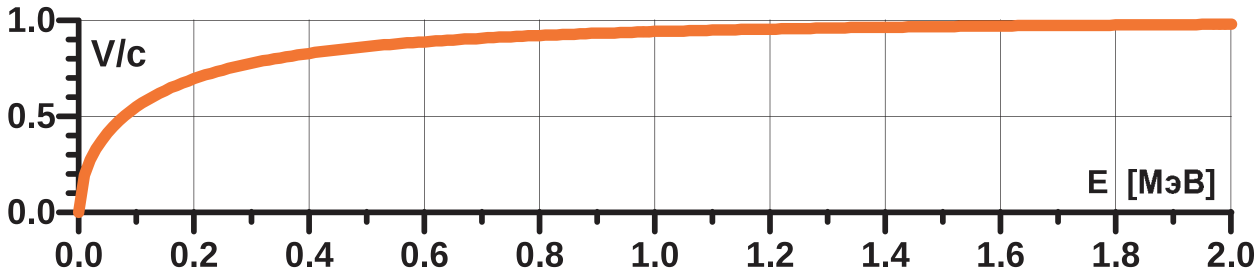
Планк (1906) и Эйнштейн (1907): релятивистская динамика и термодинамика.

Минковский (1907): математическая модель СТО (геометрия 4-мерного псевдоевклидова пространства.

Эйнштейн (1911-1916): ОТО (гравитация как проявление кривизны пространства-времени).

Неужели нельзя разогнать что-то до скорости >c? Эксперимент Бертоцци на ускорителе электронов Ван-де-Граафа:





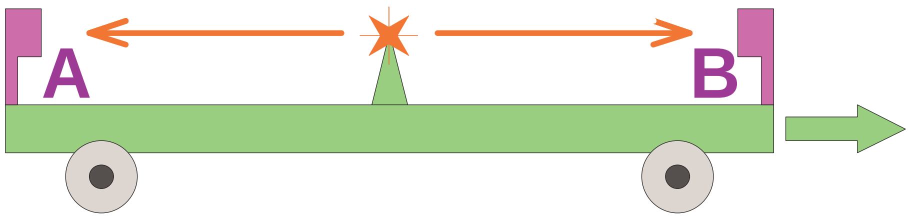
<u>**ПОСТУЛАТЫ Эйнштейна**</u> (он сложил их вместе):

1. Справедлив принцип относительности Эйнштейна – расширение принципа Галилея.
2. Скорость света не зависит от скорости источника во всех инерциальных системах.
3. Пространство и время однородны; пространство – изотропно.

Если пренебречь гравитацией (а это учитывается в ОТО), то СТО выполняется с точностью не хуже 10^{-12}.

Раз c=const, то преобразования Галилея для скоростей НЕ ВЕРНЫ.

На тележке, едущей вправо, вспыхивает лампочка. В системе тележки свет до фотоэлементов A и B доходит одновременно.



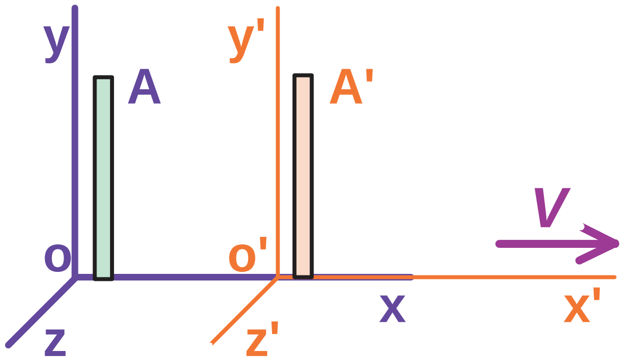
В л.с. пока свет летит, фотоэлемент A к нему приблизится и поймает сигнал раньше, чем B.

То есть, ОДНОВРЕМЕННОСТЬ событий – тоже относительна!

Рассмотрим систему K', движущуюся относительно покоящейся системы K со скоростью V в направлении оси x.

Вместо преобразований Галилея $\Rightarrow$ преобразования Лоренца.

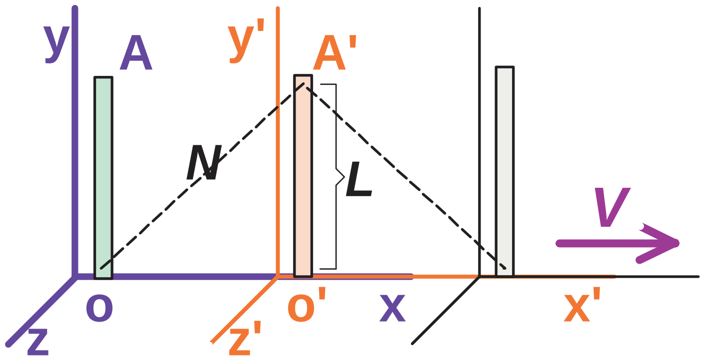
$x' = x - Vt$ $y' = y$ $z' = z$ $t' = t$	$x' = \frac{x-Vt}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$ $y' = y$ $z' = z$ $t' = \frac{t-Vx/c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$
длина r $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$	интервал s $s^2 = -c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2$
пространство {x,y,z} + время {t}	4-континуум {ict,x,y,z}



Пусть в двух системах есть по вертикальному стержню одинаковой длины $(OA \parallel y)$ и $(O'A' \parallel y')$. Совпадают ли их длины с точки зрения другой системы? Да. Когда системы в какой-то момент поравняются, мы это увидим. $\Rightarrow$ $y = y'$.

Поперечные размеры Лоренц-инвариантны

Теперь превратим стержень в "световые часы": свет бегает вдоль стержня, отражаясь от концов, а мы считаем число пробегов.

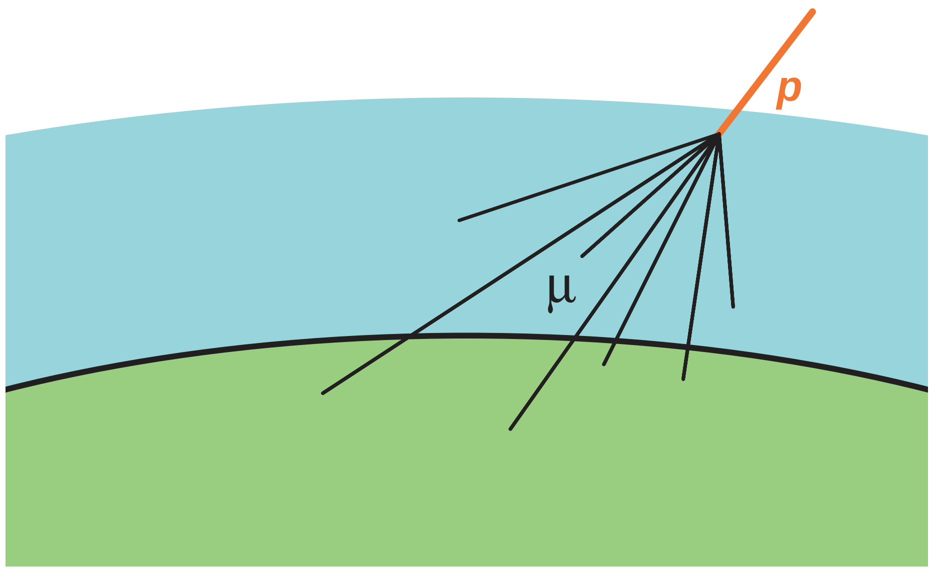


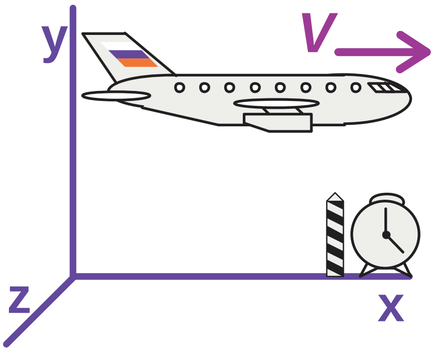
В движущейся системе длина одного пробега $L = (O'A')$, и он занимает время $t' = L/c$. С точки же зрения покоящейся системы, вместо катета L надо брать диагональ N, и пробег займет большее время $t = \frac{N}{c}$, причем

$$(Vt)^2 + L^2 = (ct)^2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{t'}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \quad \Rightarrow \quad t \geq t'$$

Движущиеся часы идут медленнее, чем покоящиеся

Покоящийся мюон живет $\tau \simeq 2$ мкс; за это время он не смог бы пролететь более 600 метров, даже двигаясь с $V \simeq c$. Однако, рождающиеся на высоте 20-30 км мюоны легко достигают земной поверхности и вредят экспериментаторам...





Пусть теперь самолет движется вдоль оси x. В покоящейся системе поставим пограничный столб с часами и засечем время t между моментами, когда со столбиком поравняются сначала кокпит, а затем киль самолета. Тогда его длина для стоящего возле столба пограничника покажется равной $L = Vt$. У пилота нет возможности вылезти на лету и измерить длину своей машины, но он связался по рации с пограничником и узнал о показаниях часов. Будучи достаточно образованным, пилот знает об эффекте замедления времени, а также о полном равноправии систем отсчета. Поэтому он считает, что часы пограничника идут медленнее (ведь они вместе со столбом движутся назад относительно самолета!) в $1/\sqrt{1-(V/c)^2}$ раз. Во столько же раз длина самолета оказывается больше с точки зрения пилота, чем это показалось пограничнику.

Размеры тела сокращаются в направлении движения

Попробуем вывести преобразования Лоренца для перехода от инерциальной системы K к движущейся относительно нее вдоль оси X со скоростью V инерциальной системе K'. Пространство и время однородны $\Rightarrow$ единица длины и единица времени одинаковы в любой точке пространства и в любой момент времени $\Rightarrow$ преобразования должны быть линейны:

$$\begin{cases} x' &= Ax + Bt \\ t' &= Mx + Nt \end{cases} \quad \rightarrow \quad \text{Найдем} \quad A, B, M, N \qquad (1)$$

Перемещение вдоль оси X в системе K':

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1 = A(x_2 - x_1) + B(t_2 - t_1) = A\Delta x + B\Delta t$$

Промежуток времени в системе K':

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = M(t_2 - t_1) + N(x_2 - x_1) = M\Delta x + N\Delta t$$

Учитывая, что скорости v и v' относительно систем K и K', соответственно, равны $v = \Delta x/\Delta t$ и $v' = \Delta x'/\Delta t'$, получим:

$$v' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{A\Delta x + B\Delta t}{M\Delta x + N\Delta t} = \frac{Av + B}{Mv + N} \qquad (2)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи. Например, точка покоится в системе K'. Тогда v'=0, v=V. Подставив это в (2), получим:

$$0 = \frac{AV + B}{MV + N} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{B = -AV} \tag{3}$$

Пусть теперь точка покоится в системе K. Тогда v=0, v'=$-V$. Подставим в (2):

$$-V = \frac{A \cdot 0 + B}{M \cdot 0 + N} = \frac{B}{N} = -\frac{AV}{N} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{N = A} \tag{4}$$

Теперь пусть в системе K' распространяется свет. Тогда v'=v=c. Подставим в (2):

$$c = \frac{Ac - AV}{Mc + A} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{M = -AV/c^2} \tag{5}$$

С учетом всего этого, формула (2) превращается в

формулу сложения скоростей:

$$v' = \frac{v - V}{1 - \frac{vV}{c^2}} \qquad\qquad v = \frac{v' + V}{1 + \frac{v'V}{c^2}}$$

Пример: две частицы летят навстречу друг другу со скоростями $+\frac{3}{4}c$ *и* $-\frac{3}{4}c$. *Какова их встречная скорость? Свяжем систему* K' *с первой частицей* ($V = +\frac{3}{4}c$). *Тогда с точки зрения этой первой частицы, скорость второй будет вовсе не* $(\frac{3}{4} + \frac{3}{4})c = 1.5c$, *а*

$$v' = \frac{-\frac{3}{4}c - \frac{3}{4}c}{1 - \frac{-9c^2}{16c^2}} = \frac{-\frac{3}{2}c}{\frac{25}{16}} = -\frac{24}{25}c = -0.96c$$

Теперь подставим найденные значения B, M, N в изначальные ф-лы (1)

$$\begin{cases} x' &= A(x - Vt) \\ t' &= A\left(t - \frac{Vx}{c^2}\right) \end{cases}$$

Поскольку пространство изотропно, то можно считать, что не K' движется со скоростью V, а K движется со скоростью $-V$. Тогда получим

$$\begin{cases} x &= A(x' + Vt) \\ t &= A\left(t' + \frac{Vx'}{c^2}\right) \end{cases}$$

"скрестив"эти четыре равенства, получим уравнение для A:

$$x = A^2\left(x - Vt + Vt - \frac{V^2 x}{c^2}\right) = xA^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)$$

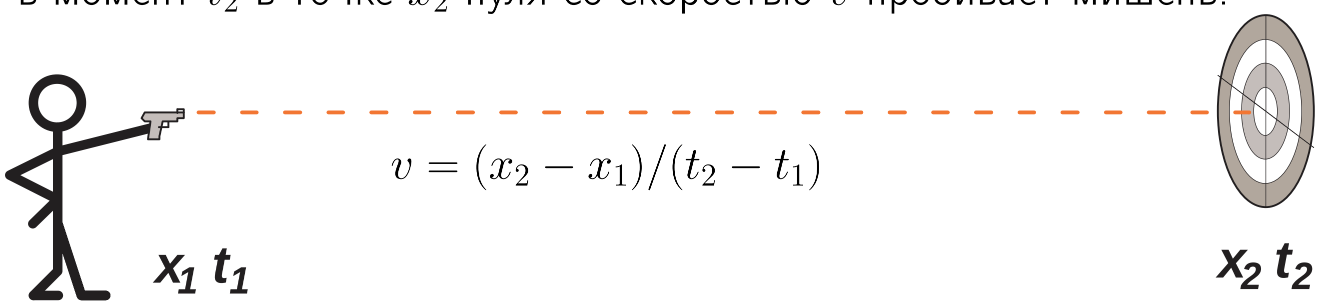
Поделив это на xA^2, найдем значение A:

$$\boxed{A = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \quad \equiv \quad \gamma \quad \equiv \quad \text{Лоренц-фактор} \geq 1}$$

С учетом этого, видим, что равенства представляют собой не что иное как преобразования Лоренца (что и требовалось)!

Хотя одновременность событий и относительна, но **причинно-следственная связь** преобразованиями Лоренца не нарушается. Причина и следствие: причина всегда раньше, и без нее следстве невозможно.

Причина: в момент времени t_1 в точке x_1 произведен выстрел. Следствие: в момент t_2 в точке x_2 пуля со скоростью v пробивает мишень.



Предположим, что есть какая-то система отсчета K', движущаяся со скоростью V. В ней интервал между выстрелом и попаданием

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1 - \frac{V}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-(V/c)^2}} = (t_2 - t_1)\frac{1 - \frac{vV}{c^2}}{\sqrt{1-(V/c)^2}} = \Delta t \cdot \xi$$

Поскольку $|v| \leq c$ и $|V| < c$, то множитель ξ всегда положителен, $\Rightarrow$ знаки $\Delta t'$ и Δt совпадают, то есть, действительно не найдется такой инерциальной системы, по отношению к которой причина и следствие поменялись бы местами.

<u>**Интервал**</u> s между событиями 1 и 2:

$$s_{12}^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = L^2 - c^2t^2,$$

где L – расстояние, а t – время между событиями 1 и 2. В системе K':

$$s'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = \frac{(x-Vt)^2}{1-V^2/c^2} + y^2 + z^2 - \frac{c^2(t-Vx/c^2)^2}{1-V^2/c^2} =$$

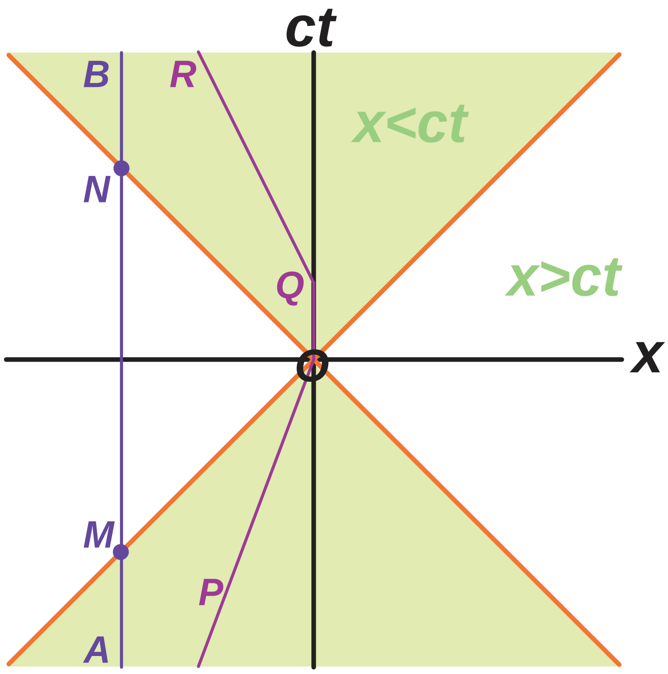
$$= \ldots = \frac{(x^2-c^2t^2)(1-V^2/c^2)}{1-V^2/c^2} + y^2 + z^2 = s^2$$

Преобразования Лоренца не меняют длину интервала

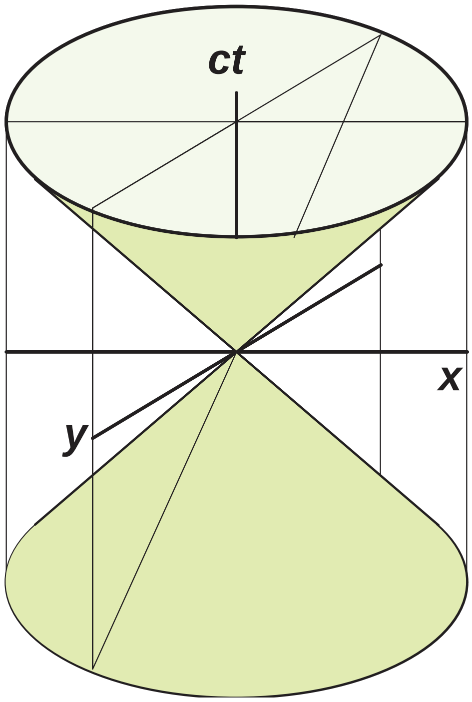
В чем смысл интервала? Лучше всего представить дело так, что вместо 3 пространственных осей (X, Y, Z) и одной временнóй оси (T), существуют 4 равноправные взаимно-ортогональные обобщенные оси X_0, X_1, X_2, X_3, причем обобщенные координаты любого события записываются как 4-мерный вектор $\vec{x}$ с составляющими x_μ $(\mu = 0\ldots3)$:

$$\vec{x} = \begin{Bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ict \\ x \\ y \\ z \end{Bmatrix}; \qquad |x|^2 = \sum_{\mu=0}^{3} x_\mu^2 \tag{6}$$

Забыв на время об y- и z-составляющих, нарисуем "диаграмму Минковского". Начало координат – это мы, то есть, **здесь** $(x{=}0)$ и **сейчас** $(t{=}0)$. Все остальные точки – это события, которые были $(t{<}0)$ и будут $(t{>}0)$ в разных закоулках Вселенной. Диагонали – мировые линии света от нашей лампочки. Прямая AB – мировая линия покоящегося объекта. Он сможет получить нашу телеграмму только на участке NB. $POQR$ – другой объект приблизился, побудет в гостях и удалится обратно.



(Ч.Киттель, В.Найт, М.Рудерман. Берклеевский Курс Физики. Механика.)



Если теперь вспомнить еще об одной пространственной координате (y), то вместо плоской диаграммы получается световой конус. Его поверхность – свет. Если что-то произошло раньше (ниже плоскости $t=0$), то любая информация об этом попадет к нам не раньше, чем дойдет свет. Так, если событие было внутри нижней части конуса, то какие-то отголоски уже могли, в принципе, до нас докатиться. Если мы что-нибудь отправим (посылку, ракету, радиограмму), то адресат имеет шанс получить послание только внутри верхнего конуса.

Вне конуса (то есть, при $c|t_{12}| < |L_{12}|$) не может быть причинно-следственной связи. Это значит, что мы никак не можем повлиять на исход завтрашних выборов на планетах α Центавра (слишком далеко). Да и узнать результат этих выборов мы сможем только через 4 года. К тому моменту Центавряне, как и мы, сдвинутся по оси ct и снова окажутся вне досягаемости, но та точка, где и когда они шли к избирательным урнам, окажутся внутри нижнего конуса относительно нас. А вот послать наши рекомендации к следующим выборам – наше право.

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ДИНАМИКА

Мы уже видели из эксперимента Бертоцци, что разгоняя частицу внешней силой и добавляя ей импульс, мы не увеличиваем ее скорость. $\Rightarrow$ 2зН не работает! Если рассмотреть процесс упругого соударения двух одинаковых шаров и применить к ним преобразования Лоренца, то можно показать, что при переходе в движущуюся систему закон сохранения импульса тоже нарушается. Это – из-за сокращения времени.

Оказывается, что все хорошо, если за импульс принять не $m\vec{v}$, а более сложное выражение:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m\vec{v}\gamma \tag{7}$$

$\exists$ 2 вариант поведения: считать, что, как и раньше, $\boxed{\vec{p} = M\vec{v}}$, но под M понимать не массу покоя m, а релятивистскую массу

$$M \equiv \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m\gamma \tag{8}$$

Теперь понятно, почему электроны не разогнать – их масса (8) с ростом скорости тоже растет, и сила для разгона нужна все больше и больше!

Составим тождество

$$\frac{1}{1 - v^2/c^2} - \frac{v^2/c^2}{1 - v^2/c^2} = 1 \qquad \text{или} \qquad \gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = 1$$

Поскольку 1 всегда = 1 независимо от системы координат, то левая часть этого тождества – Лоренц-инвариантна. Домножим на m^2c^4:

$$m^2c^4(\gamma^2 - \beta^2\gamma^2) = m^2c^4$$

Учитывая, что $p^2 = m^2c^2\beta^2\gamma^2$, получим: $\boxed{M^2c^4 - p^2c^2 = m^2c^4}$. Поскольку масса покоя m постоянна, то и m^2c^4 тоже постоянна $\Rightarrow$ Лоренц-инвариантна $\Rightarrow$ это равенство имеет самостоятельный физический смысл. Какой? Вспомнив, что $M = m\gamma = m(1-\beta^2)^{-1/2}$, разложим величину Mc^2 в ряд:

$$Mc^2 = mc^2(1-\beta^2)^{-1/2} \simeq mc^2\left(1 + \frac{\beta^2}{2} + \ldots\right) = mc^2 + \frac{mv^2}{2} + \ldots$$

Очень похоже на сумму кинетической энергии и еще чего-то, правда? Если мы определим полную релятивистскую энергию свободной частицы как

$$W \equiv Mc^2 \equiv \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m\gamma c^2$$

то получим:

$$W^2 - (pc)^2 = \left(mc^2\right)^2$$

Поскольку, как мы видели, это равенство Лоренц-инвариантно, то при переходе от одной системы K к другой K' и при замене $p \to p'$, $W \to W'$ должно соблюдаться $\boxed{W^2 - (pc)^2 = W'^2 - (p'c)^2 = (mc^2)^2}$

Вспомним о нашем определении 4-мерного интервала (6) и продифференцируем его по t, получив 4-мерную скорость $\vec{U}$:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{s}) = \vec{U} = \left\{ \begin{array}{c} ic \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} ic \\ \vec{v} \end{array} \right\} \tag{9}$$

домножив на $M = m\gamma$, получим 4-мерный импульс $\vec{P}$:

$$\vec{P} = M\vec{U} = \left\{ \begin{array}{c} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} icM \\ Mv_x \\ Mv_y \\ Mv_z \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} icM \\ \vec{p} \end{array} \right\}; \qquad |P|^2 = \sum_{\mu=0}^{3} P_\mu^2 \tag{10}$$

домножив на c^2, получим знакомое выражение:

$$|Pc|^2 = p^2c^2 - M^2c^4 = (pc)^2 - W^2 \tag{11}$$

А это, как мы знаем, должно с точностью до знака равняться массе покоя mc^2. Кстати, знак – дело соглашения, у разных авторов он определен по-разному. Таким образом, 4-мерный импульс содержит в себе сразу и наш обычный (нормальный) импульс $\vec{p}$, и полную энергию объекта W

$$\vec{P} = \left\{ \begin{array}{c} iW/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} iW/c \\ \vec{p} \end{array} \right\}$$

При рассмотрении релятивистских ситуаций это очень удобно, поскольку позволяет "сэкономить"на законах сохранения – вместо сохранения энергии и сохранения импульса можно учитывать только сохранение 4-импульса (отдельно по каждой составляющей). При переходе к другой системе координат отдельные компоненты 4-импульса будут меняться, но модуль останеся равным $-mc^2$. То есть, масса покоя – Лоренц-инвариантна.

Основные формулы механики релятивистских частиц

- Энергия массы покоя (в системе, где частица покоится): $\boxed{mc^2}$, где m – масса покоя (часто обозначается как m_0). Поскольку $\forall$ частицы mc^2 так же постоянна, как и просто m, то удобнее массу частиц приводить не в граммах или килограммах, а в специфических единицах энергии. Если электрон прошел разность потенциалов 1 Вольт, то его энергия изменилась на 1 эВ (электрон-Вольт).

  Примеры массы покоя некоторых частиц:

  – электрон: $m_e = 0.510998910_{13}$ МэВ$/c^2 \simeq 511$ кэВ$/c^2$
  – мюон: $m_\mu = 105.658369_9$ МэВ$/c^2 \simeq 105$ МэВ$/c^2$
  – протон: $m_p = 938.272013_{23}$ МэВ$/c^2 \simeq 938$ МэВ$/c^2$
  – нейтрон: $m_n = 939.565530_{38}$ МэВ$/c^2 \simeq 940$ МэВ$/c^2$
  – фотон: $m_\gamma \equiv 0$
  – нейтрино: $m_\nu \leq 2$ эВ$/c^2$ ($\stackrel{?}{\equiv} 0$ – работаем над этим...)

- Скорость частицы $\vec{v}$ в долях от скорости света: $\boxed{\beta = v/c}$
- Лоренц-фактор: $\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \left(1-\beta^2\right)^{-1/2}}$
- Релятивистская масса частицы: $\boxed{M = \gamma m}$
- Полная энергия частицы: $\boxed{W = Mc^2}$
- Релятивистский импульс частицы: $\boxed{\vec{p} = \gamma m\vec{v} = M\vec{v} = \frac{W}{c^2}\vec{v}}$

  Для безмассовой частицы: массы нет, но импульс есть: $\boxed{\vec{p} = \frac{W}{c^2}\vec{c}}$ (Световое давление)

- Связь между полной энергией и импульсом: $\boxed{W^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2}$
- Связь между полной W и кинетической E энергией: $\boxed{W = E + mc^2}$
- В замкнутой системе из n частиц: $\boxed{\sum_{i=1}^n W = \text{const.}}$ и $\boxed{\sum_{i=1}^n \vec{p} = \text{const.}}$

  Или в терминах 4-импульса: $\boxed{\sum_{i=1}^n \vec{P} = \text{const.}}$