LOG1810
6 - Dénombrement

Lévis Thériault, Aurel Randolph et Eric Demers

Merci à Chris Kauffman

Dernière mise à jour:
2023-10-25

Logistique

Lectures: Rosen

- Maintenant: 6.1 - 6.5, 8.5
- Suivant: 8.1 - 8.4, 8.6

Objectifs

- Dénombrement
- Calcul combinatoire

Compter des choses

Principes de dénombrement des combinaisons d'objets où

L'ensemble A a m éléments	$\lvert A\rvert = m$
L'ensemble B a n éléments	$\lvert B\rvert = n$

Règle du produit Choisir une paire d'éléments de A, B donne $n \cdot m$ possibilités.

Règle de la somme $A \cap B = \emptyset$ (pas d'éléments communs), choisir un seul élément dans l'ensemble A ou B donne $n + m$ possibilités.

Règle de la différence $A \cap B \neq \emptyset$ (quelques éléments communs) choisir un seul élément dans l'ensemble A ou B donne $n + m - \lvert A \cap B\rvert$ possibilités.

La plupart d'entre vous ont déjà une compréhension intuitive de cela, mais nous examinerons quelques exemples, puis nous l'exercerons.

Exercice: Dénombrer des numéros de téléphone

- Les anciens numéros locaux de téléphone avaient le format `XYZ-ABCD`
- Pour chaque chiffre $X, Y, \ldots, D$ il y a 10 choix : `0,1,2,...,9`
- Il y a 7 chiffres dans un numéro de téléphone local
- Nombres de numéros : $\underbrace{10 \times 10 \times \cdots \times 10}_{7 \text{ fois}} = 10^7$
- Selon le North American Telephone Numbering Plan (NATP) original: les chiffres `X et Y` sont limités à `2,3,...,9` et donc 8 choix
- Total de numéros locaux **valides** : $8^2 \cdot 10^5 = 6.400.000$
- Application de la **règle du produit**

Numéros interurbains

- # interurbains ont la forme `QRS-XYZ-ABCD`
- Sous NATP, `Q` est `2-9`, `R` est `0-1`, `S` est `0-9`
- Combien y a-t-il de # interurbains **valides** ?

Réponses: Dénombrer des numéros de téléphone

Numéros interurbains

- # interurbains ont la forme `QRS-XYZ-ABCD`
- Sous NATP, `Q` est `2-9`, `R` est `0-1`, `S` est `0-9`
- Combien y a-t-il de # interurbains **valide** ?
  - $8 \cdot 2 \cdot 10 \cdot (8^2 \cdot 10^5) = 1{,}024{,}000{,}000$

Exercice: Dénombrement de fonctions

- Une fonction de m éléments à n éléments associe chacun des m à l'un des n
- Donc m choix à faire avec n possibilités pour chacun des choix
- Nombre total de fonctions possibles : $\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{m \text{ fois}} = n^m$
- Si la fonction est **injective** (un-à-un), $m \leq n$ et une fois qu'un élément est choisi, impossible de le reprendre
- Mène à $\underbrace{(n) \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)}_{m \text{ fois}}$
- Applications de la **règle du produit**

Dénombrement de fonctions injectives

- Combien y a-t-il de fonctions injectives à partir de
  - 3 éléments à 7 éléments
  - 8 éléments à 12 éléments
- Dérivez une expression générale en utilisant la notation factorielle

Réponses: Dénombrement de fonctions

Dénombrement de fonctions injectives

- Combien y a-t-il de fonctions injectives à partir de
  - 3 éléments à 7 éléments: $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$
  - 8 éléments à 12 éléments: $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 19,958,400$
- Dérivez une expression générale en utilisant la notation factorielle

$$
\begin{aligned}
N &= \underbrace{(n) \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)}_{m \text{ fois}} \\
&= \frac{(n) \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) \cdot (n-m) \cdot (n-m-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(n-m) \cdot (n-m-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} \\
&= \frac{n!}{(n-m)!}
\end{aligned}
$$

Exercice: Choix des projets

- Un programme nécessite un seul projet final de l'une des trois catégories avec des listes de projets différentes

Sujet	Nombre
IA	23 projets
Robotique	15 projets
Vision	19 projets

- Aucun projet n'apparaît sur deux listes
- Possibilités totales : $23 + 15 + 19 = 57$
- Application de la **règle de la somme**

- Pour des crédits supplémentaires, l'étudiant peut réaliser 2 projets à partir de listes différentes
- Possibilités
  - IA/Robotique : $23 \cdot 15 = 345$
  - IA/Vision : $23 \cdot 19 = 437$
  - Robotique/Vision : $15 \cdot 19 = 285$
  - Total : $345 + 437 + 285 = 1067$

Plus de choix

Combien de possibilités si 2 projets différents

- peuvent venir de la même liste ?
- **doivent** venir de la même liste ?

Important: Choix des projets (A,B) considéré identique à (B,A) ?

Réponses: Choix du projet

Combien de possibilités si 2 projets différents

Sujet	Nombre
IA	23 projets
Robotique	15 projets
Vision	19 projets

Les deux peuvent venir de la même liste ?

- 57 projets au total
- 2 choix
  1. 57 possibilités
  2. 56 possibilités

  Deux ordres possibles
- $57 \cdot 56/2 = 3192/2 = 1596$

Les deux **doivent** venir de la même liste ?

Choisissez une catégorie, puis choisissez deux projets

IA	$23 \cdot 22/2 = 253$
Robotique	$15 \cdot 14/2 = 105$
Vision	$19 \cdot 18/2 = 171$
Total	$(506+210+342)\ /\ 2 = 529$

Exercice: Application de règle de la différence

- Une startup publie 2 offres d'emploi : développeur web et administrateur de base de données
- Reçoit les candidats pour les deux emplois avec une certaine redondance

Dév. Web.	220 Candidats
Admin. BD.	147 Candidats
Les deux	57 Candidats

- Le nombre total de candidats à évaluer :

$$220 + 147 - 57 = 310$$

Sujet	Nombre
IA	23 projets
Robotique	15 projets
Vision	19 projets
IA/Robotique	3 en commun
IA/Vision	8 en commun
Robotique/Vision	4 en commun
Tous les sujets	2 en commun

Combien de possibilités si :

- Choisissez 2 projets, le 2^e^ pas sur la première liste
- Choisissez 1 projet dans n'importe quelle liste
  Attention : Ne pas soustraire deux fois!

Réponses: Application de règle de la différence

Sujet	Nombre
IA	23 projets
Robotique	15 projets
Vision	19 projets
IA/Robotique	3 en commun
IA/Vision	8 en commun
Robotique/Vision	4 en commun
Tous les sujets	2 en commun

Combien de possibilités si :

- Choisissez 2 projets uniques, le 2e pas sur la première liste

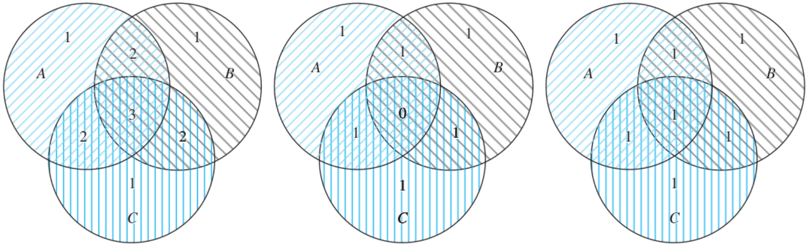
IA/Robotique	$23 \cdot (15 - 3)$	$= 276$
IA/Vision	$23 \cdot (19 - 8)$	$= 253$
Robotique/Vision	$15 \cdot (19 - 4)$	$= 225$
Total	$276{+}253{+}225$	$= 754$

- Choisissez 1 projet dans n'importe quelle liste
  Total : $(23 + 15 + 19) - (3 + 8 + 4) + \mathbf{2} = 44$
  Le dernier terme rajoute le chevauchement de tous.

Principe d'inclusion/exclusion (Rosen, section 8.5)

- L'identité suivante est valable pour les ensembles A, B dans le cadre de la règle de la différence : $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- Ce cas implique 2 ensembles A et B
  - L'intersection est ajoutée deux fois par $|A| + |B|$
  - La soustraction de cette intersection permet de corriger cela
- Plus d'ensembles nécessitent un examen plus attentif des chevauchements ajoutés plusieurs fois
- Exemple : La taille de l'union de 3 ensembles donne $|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

Calcul d'une triple intersection



(a) Count of elements by $|A|+|B|+|C|$

(b) Count of elements by $|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|$

(c) Count of elements by $|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$

FIGURE 3 **Finding a Formula for the Number of Elements in the Union of Three Sets.**

$$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

Exemples d'inclusion/exclusion

- Le cas le plus simple : 2 ensembles dont la taille d'intersection est connue
  - Combien d'entiers 1 à 1000 sont divisibles par 7 ou 11 ?
  - Appliquez $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
  - $\lfloor 1000/7 \rfloor + \lfloor 1000/11 \rfloor - \lfloor 1000/(7 \cdot 11) \rfloor$
- Les cas plus complexes à traiter avec soins :
  - Combien d'entiers 1 à 1000 sont divisibles par 7 ou 11 ou 13? Appliquez ...
  - $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

$$\begin{aligned}
&\lfloor 1000/7 \rfloor + \lfloor 1000/11 \rfloor + \lfloor 1000/13 \rfloor \\
&- (\lfloor 1000/(7 \cdot 11) \rfloor + \lfloor 1000/(7 \cdot 13) \rfloor + \lfloor 1000/(11 \cdot 13) \rfloor) \\
&+ \lfloor 1000/(7 \cdot 11 \cdot 13) \rfloor
\end{aligned}$$

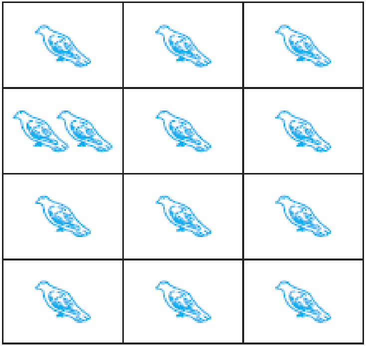
- Prédire : divisible par 7, 11, 13 ou 17 ? (intersection de 4 ensembles)

Le principe des tiroirs ou pigeonnier

Le principe des tiroirs

Première version: Si k est un entier positif et que $k+1$ ou plus d'objets sont placés dans k boîtes, il y a au moins une boîte contenant au moins deux des objets.

Généralisation : Si N objets sont placés dans k boîtes, il y a au moins une boîte contenant $\lceil N/k \rceil$ objets.



Exemples du principe des tiroirs

Exemple: Partage d'espace de laboratoire

Une salle de classe de laboratoire informatique compte 15 ordinateurs de bureau et 17 étudiants.

- Si le cours est complet, il y a au moins 1 ordinateur de bureau avec 2 étudiants qui le partagent.

Avez-vous déjà vue des cours complets?

Exemple : Mois de naissance

Dans un groupe de 100 personnes, quel est le nombre **minimum** qui partagent un mois de naissance ?

- Par le principe des tiroirs, 100 personnes et 12 tiroirs (mois), donc au moins $\lceil 100/12 \rceil = 9$ doivent avoir le même mois de naissance.

Amis-Ennemis: Un exemple plus délicat

Un groupe de 6 personnes A, B, C, D, E, F, chaque paire de personnes est soit un ami, soit un ennemi. **Prouvez** que le groupe doit avoir au moins

3 amis communs OU 3 ennemis communs

dans le groupe. Par exemple, tous les 6 pourraient être des amis ou tous les 6 pourraient être des ennemis. **Preuve :**

1. Considérez la relation de A avec les 5 personnes restantes, chacune appartenant à l'un des 2 groupes suivants : ami ou ennemi de A.
2. Par le principe des tiroirs, l'un de ces deux groupes doit avoir $\lceil 5/2 \rceil = 3$ personnes.
3. **Sans perte de généralité**, supposons que B, C, D sont des amis de A tandis que E, F sont des ennemis.
4. Si B, C sont amis, alors A, B, C sont 3 amis communs.
5. Si B, D sont amis, alors A, B, D sont 3 amis communs.
6. Si C, D sont amis, alors A, C, D sont 3 amis communs.
7. Si aucun de (4-6) n'est vrai, alors B, C, D sont 3 ennemis mutuels.
8. Par une combinaison de (4-7), nous avons montré qu'il doit y avoir 3 amis communs ou 3 ennemis communs. $\blacksquare$

Combinatoire : permutations et combinaisons

De nombreux problèmes impliquent la sélection et l'ordre des objets, par exemple:

> *J'ai 7 chemises et 4 pantalons. Combien d'agencement de tenues puis-je prévoir qui ne répètent pas la même tenue dans les 5 prochains jours ?*

Les problèmes de cette nature sont assez commun pour avoir une terminologie et des techniques associées

$P(n, r)$ Permutations Nombre **ordonné** de sélection d'objets r parmi une collection de n objets **sans répétition**

$C(n, r)$ Combinaisons Nombre **non ordonné** de sélection d'objets r parmi une collection de n objets **sans répétition**

Permutations

$$
\begin{aligned}
P(n,r) &= \underbrace{(n)\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)}_{r\text{ fois}} \\
&= \frac{(n)\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)\cdot(n-r)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{(n-r)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1} \\
&= \frac{n!}{(n-r)!}
\end{aligned}
$$

- Cela devrait vous sembler familier suite à la discussion précédente
- Ordres des objets r sélectionnés sans répétition à partir de n

Exemple

J'ai 8 chemises et 5 jours de travail. Combien d'arrangements différents de chemises puis-je porter pendant les 5 jours.

- 5 jours à choisir, 8 choix **initialement**
- 4 jours restants et 7 choix, 3 jours restants et 6 choix...
- $8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 = P(8,5) = (8!)/(3!) = 6720$ ordres

Combinaisons

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

- \# sous-ensembles de taille r à partir d'un ensemble de taille n
- L'ordre n'a pas d'importance

Exemple

J'ai 8 chemises et 5 jours de vacances. Combien de combinaisons différentes de chemises peuvent se retrouver dans ma valise.

- 5 jours au choix, 8 choix **initialement**
- 4 jours restants et 7 choix, 3 jours restants et 6 choix...
- $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = P(8,5) = (8!)/(3!) = 6720$ permutations
- $5! = 120$ permutations de 5 chemises
- $C(8,5) = P(8,5)/5! = 56$ combinaisons

Exercice: Permutations ou combinaisons?

Donnez les réponses sous forme de permutation/combinaison.

1. Combien de chaînes de 16 bits ont exactement 12 un?
2. Combien de chaînes de 5 lettres peuvent être formées à partir des lettres `A`, `B`, `C`, `D`, `E`, `F`, `G`, `H`?
3. Combien de chaînes de 16 bits ont un nombre impair de 1?
4. Combien y a-t-il de chaînes de 16 bits?

Réponses: Permutations ou combinaisons?

1. Combien de chaînes de 16 bits ont exactement 12 un ?
   - Choisissez 12 indices auxquels mettre les 1, ordre de sélection des indices n'a pas d'importance
   - $C(16, 12) = 1820$
2. Combien de chaînes de 5 lettres peuvent être formées à partir des lettres `A, B, C, D, E, F, G, H`?
   - L'ordre est important
   - $P(8, 5) = 6720$
3. Combien de chaînes de 16 bits ont un nombre impair de 1 ?
   - $C(16, 1) + C(16, 3) + C(16, 5) + \cdots + C(16, 15)$
4. Combien y a-t-il de chaînes de 16 bits de longueur ?
   - 0 ou 1 pour chaque chiffre : $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 2}_{\text{16 fois}} = 2^{16}$

Une identité importante sur les combinaisons

$$C(n, r) = C(n, n-r)$$

- Symétrie dans la sélection de combinaison
- Preuve par la définition en utilisant la factorielle

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad = \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} = C(n, n-r)$$

- Idée intuitive choisir quoi prendre OU quoi laisser
  - 7 tenues, 5 à mettre dans le bagage pour les vacances
  - Choisissez 5 tenues à PRENDRE avec: $C(7, 5) = 21$
    OU
  - Choisissez 2 tenues pour laisser à la maison $C(7, 2) = 21$
  - Même nombre de possibilités dans les deux cas

Coefficients binomiaux et théorème binomial

- Convention de notation:

$$C(n,r) \equiv \binom{n}{r}$$

- $\binom{n}{r}$ appelé les **coefficients binomiaux** car ils apparaissent sous forme de coefficients binomiaux pour différentes puissances des variables.

$$\begin{aligned}(x+y)^4 &= (x+y)(x+y)(x+y)(x+y)\\ &= 1x^4 + 4x^3y^1 + 6x^2y^2 + 4x^1y^3 + 1y^4\\ &= \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3y^1 + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}x^1y^3 + \binom{4}{4}y^4\end{aligned}$$

- De manière générale, le **théorème binomial** s'écrit

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j$$

- Parfois utile pour prouver les identités de dénombrement

Identité et Triangle de Pascal

Identité de Pascal :

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

- Un argument combinatoire ou la manipulation algébrique peuvent le prouver
- Permet une définition récursive des coefficients binomiaux
- Une visualisation des coefficients binomiaux est possible avec le triangle de Pascal

Diapositive suivante

- Notez la belle structure récursive du triangle de Pascal
- Cas de base de $\binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{n} = 1$
- La pointe du triangle est $\binom{0}{0} = 1$, un cas de base
- Chaque élément de ligne est défini en ajoutant deux éléments de la ligne précédente

Triangle de Pascal : (a) Coeff. binomiaux (b) Numérique

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$
$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$
$$\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6}$$
$$\binom{7}{0} \quad \binom{7}{1} \quad \binom{7}{2} \quad \binom{7}{3} \quad \binom{7}{4} \quad \binom{7}{5} \quad \binom{7}{6} \quad \binom{7}{7}$$
$$\binom{8}{0} \quad \binom{8}{1} \quad \binom{8}{2} \quad \binom{8}{3} \quad \binom{8}{4} \quad \binom{8}{5} \quad \binom{8}{6} \quad \binom{8}{7} \quad \binom{8}{8}$$

. . .

(a)

By Pascal's identity:

$$\binom{6}{4} + \binom{6}{5} = \binom{7}{5}$$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

. . .

(b)

Permutations et combinaisons avec répétition

- Combinaisons $C(n, r)$ et permutations $P(n, r)$ permet de compter **sans répétition**: impossible de sélectionner une tenue deux fois
- Plusieurs situations où ce n'est pas le cas

Exemple du magasin de biscuits

- Le magasin a $n = 4$ sortes de biscuits : A, B, C, D
- Le client veut un total de $r = 6$ biscuits
- Possible de dupliquer des biscuits comme AABBCD
- Combien y a-t-il de possibilités ?
  - Si l'ordre est important ?
  - Si l'ordre n'est pas important, par ex. AABBCD $\equiv$ ABBCDA ?

Formules pour permutation et combinaison avec répétition

Répétition ordonnée

- Permutations, n^r possibilités
- $n = 4$ sortes de biscuits, $r = 6$ choix
- $4^6 = 4096$ commandes possibles

TABLE 1 Combinations and Permutations With and Without Repetition.

Type	*Repetition Allowed?*	*Formula*
r-permutations	No	$\frac{n!}{(n-r)!}$
r-combinations	No	$\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$
r-permutations	Yes	n^r
r-combinations	Yes	$\frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}$

Répétition non ordonnée

- Combinaisons avec répétition, appliquez la formule suivante

$$C(n+r-1, r)$$

pour n éléments et r choix avec répétition

- Avec $n = 4$ et $r = 6$

$$C(4+6-1, 6) = 84$$