P20/17上机题（用C++编写）

1．编写计算 $S_N=\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{3^2-1}+...+\frac{1}{N^2-1}$ 从大到小的程序

程序代码：

```
#include<iostream>
using namespace std;
int main()
{
	float sn=0;
	float n;
	while(cin >> n)
	{for(float i=2;i<=n;i++)
	{
		sn=sn+1/(i*i-1);

	}
		cout << "当 N="<<n<<",从大到小的值为"<<sn<< endl;sn=0;}

		return 0;
}
```

2．编写计算 $S_N=\frac{1}{N^2-1}+\frac{1}{(N-1)^2-1}+...+\frac{1}{2^2-1}$ 从小到大的程序

程序代码：

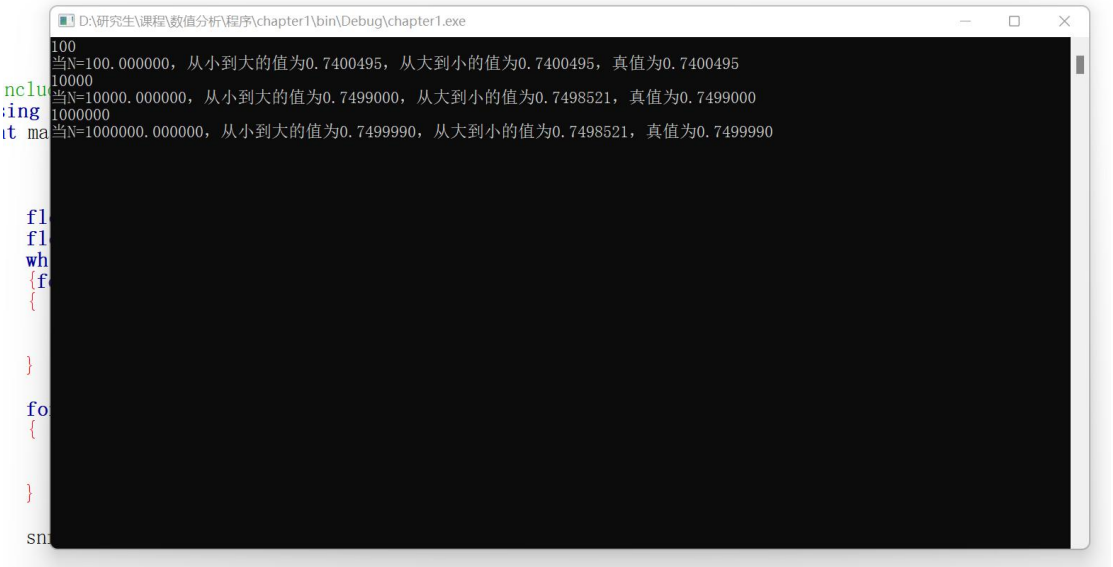
```
#include<iostream>
using namespace std;
int main()
{
	float sn=0;
	float n;
	while(cin >> n)
	{for(float i=n;i>=2;i--)
	{
		sn=sn+1/(i*i-1);
	}
		cout << "当 N="<<n<<",从小到大的值为"<<sn<< endl;sn=0;}
		return 0;
}
```

合并成总程序：

```
#include <cstdio>
```

```
using namespace std;
int main()
{

    float sn,snreal,sn1=0;
    float n;
    while(scanf("%f",&n)!=EOF)
    {for(float i=n;i>=2;i--)
    {
        sn+=1/(i*i-1);

    }

    for(float i=2;i<=n;i++)
    {
        sn1=sn1+1/(i*i-1);

    }
    snreal+=0.5*(1.5-(1/n)-1/(n+1));

        printf("当 N=%f，从小到大的值为%.7f，从大到小的值为%.7f，真值为%.7f",n,sn,sn1,snreal);
        sn=0;snreal=0;sn1=0;
    }
}
```

3．算 N=100,N=10000,N=1000000 时的值，指出有效位数。



从大到小：有效位数分别是 7、3、3。

从小到大：有效位数分别是 7、7、7。

注：C++中，采用单精度，**最大有效数字只能是 7**，虽然可以存储大于 7 位数的有效数字，但已经丧失精度。

4．
可见，采用从大到小的计算方式，随着 N 的增大，误差增大。（N 趋向于无穷会更明显）。这样的原因是由于“大数吃小数”的问题。由于存储是以单精度存储，也就意味着，如果一个大数加上一个小数时，很可能会忽略小数，而这种误差累计起来，将会很大！反过来，当先从小数加起，积累成一个较大的数，再与大数相加，就极有可能不损失任何的有效数了。

P56/20 上机题 牛顿迭代法（用 C++编写）

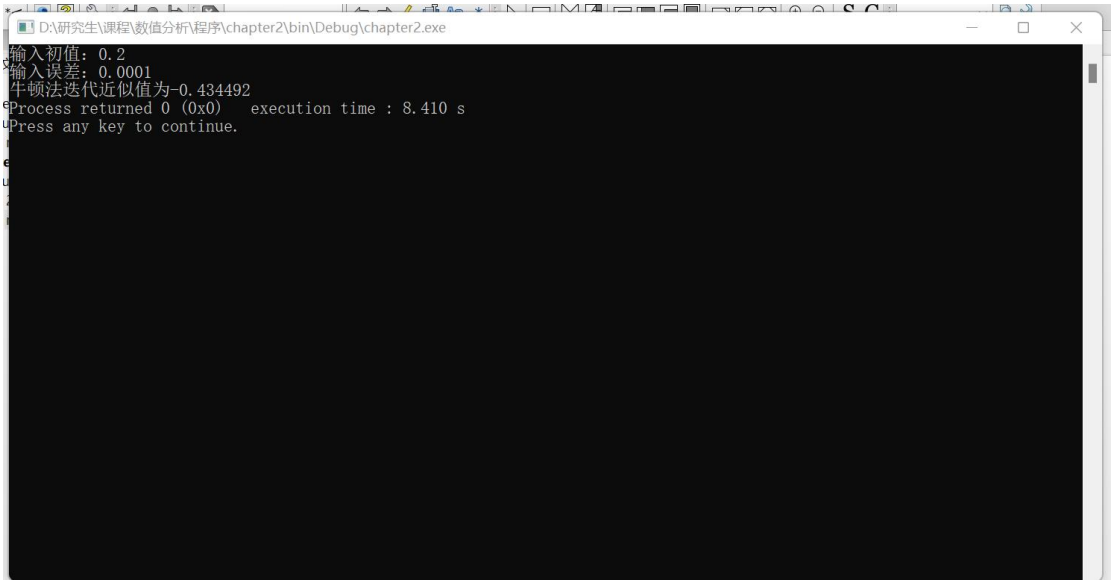
1、 编写 Newton 法通用根程序

程序代码：

```
#include <iostream>
#include <math.h>
using namespace std;
double f(double x)
    {
        double fx=pow(x,5)-2*x*x+6*x+3;
        return fx;
    }
double df(double x)
    {
        double df=5*pow(x,4)-4*x+6;
        return df;
    }
int main()
{
    double x,x0,error,gap;
    printf("输入初值：");
    scanf("%lf",&x);
    printf("输入误差：");
    scanf("%lf",&error);
    x0=x;
    gap=10;
    while(gap>=error)
    {
    x=x0-(f(x0)/df(x0));
    gap=abs(x-x0);
    x0=x;
    }
    printf("牛顿法迭代值为%lf",x);
```

```
    return 0;
}
```

以 $f(x)=x^5-2x^2+6x+3$ 为例，求得的 *Newton* 迭代值为-0.434492



2、确定尽可能大的δ，使得（$-\delta,\delta$）间的初值均收敛在$x=0$。

程序代码：

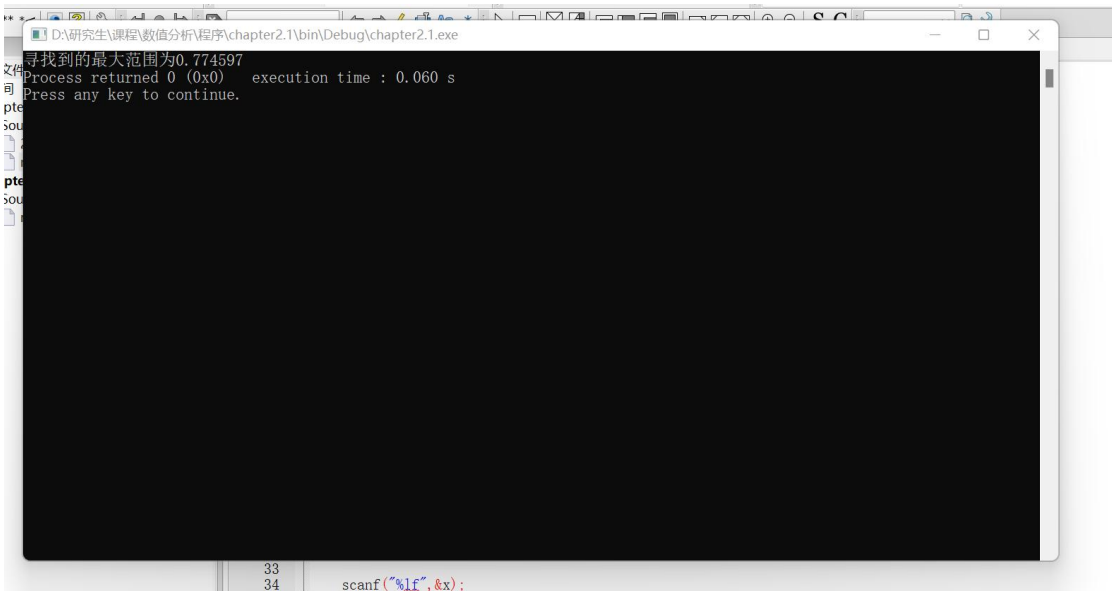
```
#include <iostream>
#include <math.h>
using namespace std;
double fx(double x)
    {
        double fx=pow(x,3)/3-x; //表达式
        return fx;
    }
double dfx(double x)
    {
        double df=x*x-1;
        return df;
    }

int main()
{
    double mm=1e-6;     //为了探测到最大值，每次增长的速度
    double x,x0;
    x0=0;
    x=0;                //初值
    int i=0;
```

```
    int p=0;
    for(i=0;;i++)
    {
    x0=i*mm;
    x=x0-(fx(x0)/dfx(x0));
    if(x0>=abs(x))
        {
            p=0;                //若趋近于 0，那么证明收敛，继续寻找！
        }
    else{p=1;break;}
    }
    printf("寻找到的最大范围为%lf",x0);
    return 0;
}
```

程序的思路是：由于原函数是奇函数，**不妨令 x_k 的选择满足以下条件：**

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \varepsilon \\ s.t.\ \ x_0 = 0, |x_k| \geq \left| x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} \right| \end{cases}$$

运行结果：



由于函数是奇函数，所以这个区间的最小值$-\delta$为-0.774597
故（$-\delta,\delta$）为（-0.774597，0.774597）。

3、判断函数初值选取在不同区间是否收敛以及收敛到哪个值

（1） x_0 在（$-\infty,-1$）上

收敛到-1.732

（2） x_0 在（$-1,-0.774597$）上

收敛到 1.732

（3） x_0 在（$-0.774597,0.774597$）上

收敛到 0

（4） x_0 在（$0.774597,1$）上

收敛到-1.732

（5） x_0 在（$1,+\infty$）上

收敛到 1.732

得出的结论：Newton 迭代法对于初值的选择需要慎重（必须加以对图像的理解，知道根的大概区间）。上面的函数为什么会出现初值和迭代值相差过大的情况，是因为初值的切线会与远端的线相交。

P125/40 上机题（用 MATLAB 编写）

1、 编写解 n 阶线性方程组 $Ax=b$ 的列主元 *Gauss* 消去法的通用程序。

程序如下：

```
%% 定义初始矩阵，值可以随意更换
A=[2,-4,6;4,-9,2;1,-1,3]
b=[3;5;4]
T=[A,b]
%% 开始列主元,每次选定 n-i 列最大值，进行行调换，并且消去该列其他非零值。
n=length(b);
i=n-1;
k=i;
while(i ~= 0)
    [maxnum,maxline]= max(T(:,n-i));
```

```
    T([n-i maxline],:) = T([maxline n-i],:);
    while(k ~= 0 )
           T(n-k+1,:)=T(n-k+1,:)-T(n-i,:).*( T(n-k+1,n-i) / T(n-i,n-i));
           k=k-1;
    end
    i=i-1;
    k=i;
    T
end
T
%% 开始回代
xi=n;
j=xi;
while(xi ~= 0)
    X(xi)=T(xi,n+1);
    j=xi;
    while((n-j) ~= 0)
        X(xi)=X(xi)-X(n-j+xi)*T(xi,n-j+xi);
        j=j+1;
    end
    X(xi)=X(xi)/T(xi,xi);
    xi=xi-1;
end
X
```

2、 用程序解 $RI=V$，打印出解向量，保留五位有效数字。

```
%% 定义初始矩阵
A=[31,-13, 0,0,0,-10,0,0,0;
    -13,35,-9,0,-11,0,0,0,0;
    0,-9,31,-10,0,0,0,0,0;
    0,0,-10,79,-30,0,0,0,-9;
    0,0,0,-30,57,-7,0,-5,0;
    0,0,0,0,-7,47,-30,0,0;
    0,0,0,0,0,-30,41,0,0;
    0,0,0,0,-5,0,0,27,-2;
    0,0,0,-9,0,0,0,-2,29
    ]
b=[-15;27;-23;0;-20;12;-7;7;10]
T=[A,b]

%% 开始列主元,每次选定 n-i 列最大值，进行行调换，并且消去该列其他非零值。
n=length(b);

i=n-1;
```

```
k=i;

while(i ~= 0)
    [maxnum,maxline]= max(T(:,n-i));
    T([n-i maxline],:) = T([maxline n-i],:);
    while(k ~= 0 )
           T(n-k+1,:)=T(n-k+1,:)-T(n-i,:).*( T(n-k+1,n-i) / T(n-i,n-i));
           k=k-1;
    end
    i=i-1;
    k=i;
    T
end
T

%% 开始回代
xi=n;
j=xi;
while(xi ~= 0)
    X(xi)=T(xi,n+1);
    j=xi;
    while((n-j) ~= 0)
        X(xi)=X(xi)-X(n-j+xi)*T(xi,n-j+xi);
        j=j+1;
    end
    X(xi)=X(xi)/T(xi,xi);
    xi=xi-1;
end
fprintf('X=\n')
fprintf('%.5f\r',X)
```

结果：

```
44      X(xi)=X(xi)/T(xi,xi);
45      xi=xi-1;
46  end
47  fprintf('X=\n')
```

命令行窗口

```
T =

   31.0000  -13.0000         0         0         0  -10.0000         0         0         0  -15.0000
         0   29.5484   -9.0000         0  -11.0000   -4.1935         0         0         0   20.7097
         0         0   28.2587  -10.0000   -3.3504   -1.2773         0         0         0  -16.6921
         0         0  -10.0000   79.0000  -30.0000         0         0         0   -9.0000         0
         0         0         0  -30.0000   57.0000   -7.0000         0   -5.0000         0  -20.0000
         0         0         0         0   -7.0000   47.0000  -30.0000         0         0   12.0000
         0         0         0         0         0  -30.0000   41.0000         0         0   -7.0000
         0         0         0         0   -5.0000         0         0   27.0000   -2.0000    7.0000
         0         0         0   -9.0000         0         0         0   -2.0000   29.0000   10.0000


X=
-0.04520
-0.10778
-0.35387
fx >>
```

$$X = \begin{bmatrix} -0.04520 \\ -0.10778 \\ -0.35387 \\ -0.15844 \\ -0.30911 \\ 0.11082 \\ -0.04153 \\ 0.14439 \\ 0.20844 \end{bmatrix}$$

3、 通过本次编程，我更加认识到了矩阵消去方法的强逻辑性，并且列主元方法可以适当减少不必要的误差。利用 Matlab，处理矩阵更加便捷。

P125/41 上机题（用 MATLAB 编写）

1、 编写 SOR 方法通用程序

程序如下：

```
A = [2,-1,1;2,-2,2;1,-1,3]
b = [3;5;4]
X = [9;9;2]   %初值
w = 1;        % 松弛因子
eps= 0.001;
error = 1;
U = triu(A,1)
L = tril(A,-1)
D = A-U-L

% 进行 SOR 迭代
while(error>eps)
    sw=(D+w*L)\( (1-w)*D - w*U );
        if (vrho(sw)>=1)   % 计算谱半径
            fprintf("SOR 无法收敛！ ")
            break
        end
    fw=w * (D+w*L)\b;
    xnew = sw*X+fw;
    error=max(abs(xnew-X));
    X=xnew;
end
    X
```

2、 计算上一题的线性方程组，取松弛因子$\omega_i = \frac{i}{50}, i = 1,2, \ldots, 99$.容许误差 $0.5 * 10^{-5}$,打印松弛因子、迭代次数、最佳松弛因子、解向量。

代码如下：

```
A=[31,-13, 0,0,0,-10,0,0,0;
    -13,35,-9,0,-11,0,0,0,0;
    0,-9,31,-10,0,0,0,0,0;
    0,0,-10,79,-30,0,0,0,-9;
    0,0,0,-30,57,-7,0,-5,0;
    0,0,0,0,-7,47,-30,0,0;
    0,0,0,0,0,-30,41,0,0;
    0,0,0,0,-5,0,0,27,-2;
    0,0,0,-9,0,0,0,-2,29
    ];
b=[-15;27;-23;0;-20;12;-7;7;10];
X = [0;0;0;0;0;0;0;0;0];   %初值
w = 1/50;        % 松弛因子
eps= 0.5e-5;
error = 1;
U = triu(A,1);
L = tril(A,-1);
D = A-U-L;
i=1;


% 进行 SOR 迭代
while(i<=99)
    diedainum=0;
    w=i/50;

    while(error>eps)
        sw=(D+w*L)\( (1-w)*D - w*U );
            if (vrho(sw)>=1)   % 计算谱半径
            fprintf("SOR 无法收敛！ ")
            break
            end
        fw=w * (D+w*L)\b;
        xnew = sw*X+fw;
        error=max(abs(xnew-X));
        X=xnew;
        diedainum=diedainum+1;
    end
answer(i,1)=w;
answer(i,2)=diedainum;
 i=i+1;
 error=1;
end
```

x

松弛因子ω	迭代次数 N
0.0200000000000000	2181
0.0400000000000000	1115
0.0600000000000000	663
0.0800000000000000	460
0.100000000000000	346
0.120000000000000	274
0.140000000000000	225
0.160000000000000	189
0.180000000000000	162
0.200000000000000	141
0.220000000000000	124
0.240000000000000	110
0.260000000000000	99
0.280000000000000	89
0.300000000000000	81
0.320000000000000	74
0.340000000000000	68
0.360000000000000	62
0.380000000000000	58
0.400000000000000	54
0.420000000000000	50
0.440000000000000	47
0.460000000000000	44
0.480000000000000	41
0.500000000000000	38
0.520000000000000	36
0.540000000000000	34
0.560000000000000	32
0.580000000000000	30
0.600000000000000	29
0.620000000000000	27
0.640000000000000	26
0.660000000000000	25
0.680000000000000	23
0.700000000000000	22
0.720000000000000	21
0.740000000000000	20
0.760000000000000	19
0.780000000000000	18
0.800000000000000	18

0.820000000000000	17
0.840000000000000	16
0.860000000000000	15
0.880000000000000	15
0.900000000000000	14
0.920000000000000	13
0.940000000000000	13
0.960000000000000	12
0.980000000000000	12
1	11
1.02000000000000	11
1.04000000000000	10
1.06000000000000	10
1.08000000000000	9
1.10000000000000	9
1.12000000000000	9
1.14000000000000	9
1.16000000000000	8
1.18000000000000	8
1.20000000000000	8
1.22000000000000	8
1.24000000000000	9
1.26000000000000	9
1.28000000000000	9
1.30000000000000	9
1.32000000000000	9
1.34000000000000	10
1.36000000000000	11
1.38000000000000	11
1.40000000000000	11
1.42000000000000	12
1.44000000000000	12
1.46000000000000	12
1.48000000000000	14
1.50000000000000	14
1.52000000000000	15
1.54000000000000	15
1.56000000000000	17
1.58000000000000	18
1.60000000000000	18
1.62000000000000	20
1.64000000000000	21
1.66000000000000	23

1.68000000000000	26
1.70000000000000	27
1.72000000000000	31
1.74000000000000	34
1.76000000000000	39
1.78000000000000	45
1.80000000000000	52
1.82000000000000	63
1.84000000000000	84
1.86000000000000	118
1.88000000000000	204
1.90000000000000	795
1.92000000000000	无法收敛!
1.94000000000000	
1.96000000000000	
1.98000000000000	

最佳的松弛因子ω^*在[1.16-1.22]间，当再降低误差允许范围时，可以发现是ω^* =1.18.

$$
\begin{matrix}
-0.2077 \\
0.2481 \\
-0.5119 \\
-0.1584
\end{matrix}
$$

解向量为：$X = [-0.3091]$

$$
\begin{matrix}
0.1108 \\
-0.0415 \\
0.1444 \\
0.2084
\end{matrix}
$$

P155/39 上机题（用 MATLAB 编写）

1、 求第一型三次样条插值函数的通用程序

程序如下:

```
x=[1,2,4,5];
lex=length(x);
y=[1,3,4,2];
h = [0];
miu = [0];
dy = [1,-1];  % 第一型条件，分别为区间两侧的一阶导数值
chashang2 = [0]; %1 阶差商
chashang3 = [0]; %2 阶差商

% 求参数 lamda,miu
for i=1:lex-1
    h(i)=x(i+1)-x(i);
end
```

```
for i=1:length(h)-1
    miu(i)=h(i)/(h(i)+h(i+1));
end

lamda = 1 -miu;

% 求 1 阶差商
for i=1:lex-1
    chashang2(i)=(y(i+1)-y(i))/(x(i+1)-x(i));
end

% 求 2 阶差商
chashang3(1)=(chashang2(1)-dy(1)) / (x(2)-x(1)) ;
chashang3(lex)=(dy(2)-chashang2(lex-1)) / (x(lex)-x(lex-1)) ;

for i=2:lex-1
    chashang3(i)=(chashang2(i)-chashang2(i-1)) / (x(i+1)-x(i-1));
end

d=6*chashang3; % D 矩阵求得!

% 定义 A 矩阵
A(1,1)=2;
A(1,2)=1;
A(lex,lex)=2;
A(lex,lex-1)=1;

for i=2:lex-1
    A(i,i-1)=miu(i-1);
    A(i,i)=2;
    A(i,i+1)=lamda(i-1);
end

% A 矩阵构建完毕 AM=d,求 M 即可!

M=A\(d');
k=input('请输入要求的点 x=: \n');

% 确定输入值的上下界
for i=1:lex
    if x(i)>k

        index1=i-1;
        break;
```

```
    end
end

sx=y(index1)+( chashang2(index1)- ( (1/3)*M(index1)+(1/6)*M(index1+1) )*
h(index1)  )*(k-x(index1));
sx=sx+(1/2)*(M(index1)*(k-x(index1)))^2;
sx=sx+(1/(6*h(index1))) *(M(index1+1)-M(index1))*(k-x(index1))^3;
sx
```

2、 求汽车门曲线型值点的三次样条插值函数，并打印出 $S(i+0.5), i=0,1,...,9$

程序如下：

```
x=[0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10];
lex=length(x);
y=[2.51,3.30,4.04,4.70,5.22,5.54,5.78,5.40,5.57,5.70,5.80];
h = [0];
miu = [0];
dy = [0.8,0.2];  % 第一型条件，分别为区间两侧的一阶导数值
chashang2 = [0]; %1 阶差商
chashang3 = [0]; %2 阶差商

% 求参数 lamda,miu
for i=1:lex-1
    h(i)=x(i+1)-x(i);
end

for i=1:length(h)-1
    miu(i)=h(i)/(h(i)+h(i+1));
end

lamda = 1 -miu;

% 求 1 阶差商
for i=1:lex-1
    chashang2(i)=(y(i+1)-y(i))/(x(i+1)-x(i));
end

% 求 2 阶差商
chashang3(1)=(chashang2(1)-dy(1)) / (x(2)-x(1)) ;
chashang3(lex)=(dy(2)-chashang2(lex-1)) / (x(lex)-x(lex-1)) ;

for i=2:lex-1
    chashang3(i)=(chashang2(i)-chashang2(i-1)) / (x(i+1)-x(i-1));
end
```

```
d=6*chashang3; % D 矩阵求得!

% 定义 A 矩阵
A(1,1)=2;
A(1,2)=1;
A(lex,lex)=2;
A(lex,lex-1)=1;

for i=2:lex-1
    A(i,i-1)=miu(i-1);
    A(i,i)=2;
    A(i,i+1)=lamda(i-1);
end

% A 矩阵构建完毕 AM=d,求 M 即可!

M=A\(d');



p=1;
% 确定输入值的上下界
for r=0.5:9.5
    for i=1:lex
        if x(i)>r

            index1=i-1;
            break;
        end
    end

sx=y(index1)+( chashang2(index1)- ( (1/3)*M(index1)+(1/6)*M(index1+1) )*
h(index1)  )*(r-x(index1));
sx=sx+(1/2)*(M(index1)*(r-x(index1)))^2;
sx=sx+(1/(6*h(index1))) *(M(index1+1)-M(index1))*(r-x(index1))^3;
sxall(p)=sx;
p=p+1;
end
sxall
```

汇总如下：

S(0.5)	*S(1.5)*	*S(2.5)*	*S(3.5)*	*S(4.5)*	*S(5.5)*	*S(6.5)*	*S(7.5)*	*S(8.5)*	*S(9.5)*
2.9089	3.6855	4.3923	5.0023	5.4419	5.6976	5.9749	5.4679	5.7215	5.7366

第五章上机题（用 MATLAB 编写）

用 *Romberg* 积分算法估计 $\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+100x^2}dx$， $\varepsilon \le 0.5\times 10^{-7}$

程序如下：

```
i=1;   %循环次数
n=1;   %等分区间 2^(i-1)=n
h=1-(-1);
eps=0.5e-7;
while i>0
    T(i)=( (h/2^(i-1))/2 ) * (fx(-1)+ fx(1));
    hh=2/2^(i-1);
    n=2^(i-1) ;

    for k=-1+hh:hh:1-hh
    T(i)=T(i)+ ( (h/2^(i-1))/2 ) * (2*fx(k));
    end

    if(i>1)
        S(i-1)=(4/3)*T(i)-(1/3)*T(i-1);
    end

    if(i>2)
        C(i-2)=(16/15)*S(i-1)-(1/15)*S(i-2);
    end
```

```
    if(i>3)
        R(i-3)=(64/63)*C(i-2)-(1/63)*C(i-3);
    end

    if(i>4)
        if abs( R(i-3)-R(i-4) )/255 <eps
            break;
        end
    end

    i=i+1;
end
fprintf('romberg 估计值为%6.7f\n',R(i-3))
```

得到如下结果：

n	*T(f)*	*S(f)*	*C(f)*	*R(f)*
1	0.01980198	1.33993399	0.32444782	0.27711803
2	1.0099009	0.387915714	0.27785756	0.28111937
4	0.54341203	0.284736200	0.28106840	0.29385002
8	0.349405158	0.281297643	0.29365031	0.29431613
16	0.298324521	0.292878268	0.29430573	0.29422487
32	0.294239831	0.294216516	0.29422613	0.29422552
64	0.294222344	0.294225534	0.29422553	
128	0.294224737	0.294225534		
256	0.294225335			

故 $\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+100x^2}dx = R_{32}(f) = 0.29422552$ 。

第六章上机题（用 MATLAB 编写）

程序如下：

函数：

```
function [output] = fx(x,y)
output=-x^2*y^2;
end
```

RK4：

```
% #RK4
xmin=0; %定义 x 的取值范围
xmax=1.5;
```

```
h=0.1;    %区间大小
y(1)=3;%给定 y 初值
yi=y(1);%设定 xi,yi 初值
xi=xmin;
i=0;
while(xi<=xmax)
    k1=fx(xi,yi);
    k2=fx(xi+0.5*h,yi+0.5*h*k1);
    k3=fx(xi+0.5*h,yi+0.5*h*k2);
    k4=fx(xi+h,yi+h*k3);
    y(i+1)=yi+(h/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);
    yi=y(i+1);
    i=i+1;

    xi=xi+h;

end
```

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
结果	2.9970028	2.9761900	2.9211287	2.8195472	2.6666634	2.4671002	2.2337991

0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
1.9841228	1.7351071	1.5000058	1.2870125	1.0997221	0.9383974 5	0.8013004 2	0.6857320 8

AB4(Adams 显式)

```
% #AB4
xmin=0; %定义 x 的取值范围
xmax=1.5;
h=0.1;    %区间大小
y(1)=3;%给定 y 初值
yi=y(1);%设定 xi,yi 初值
xi=xmin;
i=0;
while(i<=3)
    k1=fx(xi,yi);
    k2=fx(xi+0.5*h,yi+0.5*h*k1);
    k3=fx(xi+0.5*h,yi+0.5*h*k2);
    k4=fx(xi+h,yi+h*k3);
    y(i+1)=yi+(h/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);
    yi=y(i+1);
    i=i+1;
    xi=xi+h;
```

```
end
while(i>=4 && xi<=xmax)
    k1=fx(xi,y(i));
    k2=fx(xi-h,y(i-1));
    k3=fx(xi-2*h,y(i-2));
    k4=fx(xi-3*h,y(i-3));
    y(i+1)=yi+(h/24)*(55*k1-59*k2+37*k3+-9*k4);
    yi=y(i+1);
    i=i+1;
    xi=xi+h;
end
```

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
结果	2.9970028	2.9761900	2.9211287	2.8195472	2.6655910	2.4660975	2.2337496

0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
1.9855258	1.7374454	1.5025299	1.2889758	1.1009128	0.9388119	0.8012456	0.6853771

AB4-AM4(Adams 预测校正)

```
% #AB4-AM4
xmin=0; %定义 x 的取值范围
xmax=1.5;
h=0.1;    %区间大小
y(1)=3;%给定 y 初值
yi=y(1);%设定 xi,yi 初值
xi=xmin;
i=0;
while(i<=3)
    k1=fx(xi,yi);
    k2=fx(xi+0.5*h,yi+0.5*h*k1);
    k3=fx(xi+0.5*h,yi+0.5*h*k2);
    k4=fx(xi+h,yi+h*k3);
    y(i+1)=yi+(h/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);
    yi=y(i+1);
    i=i+1;
    xi=xi+h;
end
while(i>=4 && xi<=xmax)
    k1=fx(xi,y(i));
    k2=fx(xi-h,y(i-1));
    k3=fx(xi-2*h,y(i-2));
```

```
    k4=fx(xi-3*h,y(i-3));
    y(i+1)=yi+(h/24)*(55*k1-59*k2+37*k3+-9*k4);
    k5=fx(xi+h,y(i+1));
    y(i+1)=yi+(h/24)*(9*k5+19*k1-5*k2+k3);  %预测-校正
    yi=y(i+1);
    i=i+1;
    xi=xi+h;
end
```

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
结果	2.9970028	2.9761900	2.9211287	2.8195472	2.6667593	2.4671523	2.2336497

0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
1.9837222	1.7345581	1.4994791	1.2866300	1.0995133	0.9383208	0.8013183	0.6857889

改进 AB4-AM4(使用 Richardson 外推改进 Adams 预测校正)

```
% #AB4-AM4++
xmin=0; %定义 x 的取值范围
xmax=1.5;
h=0.1;    %区间大小
y(1)=3;%给定 y 初值
yi=y(1);%设定 xi,yi 初值
xi=xmin;
i=0;
while(i<=3)
    k1=fx(xi,yi);
    k2=fx(xi+0.5*h,yi+0.5*h*k1);
    k3=fx(xi+0.5*h,yi+0.5*h*k2);
    k4=fx(xi+h,yi+h*k3);
    y(i+1)=yi+(h/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);
    yi=y(i+1);
    i=i+1;
    xi=xi+h;
end
while(i>=4 && xi<=xmax)
    k1=fx(xi,y(i));
    k2=fx(xi-h,y(i-1));
    k3=fx(xi-2*h,y(i-2));
    k4=fx(xi-3*h,y(i-3));
    yp=yi+(h/24)*(55*k1-59*k2+37*k3+-9*k4);
    k5=fx(xi+h,yp);
```

```
    y(i+1)=yi+(h/24)*(9*k5+19*k1-5*k2+k3);
    y(i+1)=(251/270)*y(i+1)+(19/270)*yp;     %改进
    yi=y(i+1);
    i=i+1;
    xi=xi+h;
end
```

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
结果	2.9970028	2.9761900	2.9211287	2.8195472	2.6666771	2.4670663	2.2336573

0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
1.9838648	1.7347928	1.4997205	1.2868123	1.0996156	0.9383687	0.8013011	0.6857507

对比各方法：

各方法的局部截断误差如下：

真值	2.997002997	2.97619	2.92113	2.819549	2.666667	2.467105263	2.233805	1.984127	1.735107	1.5	1.287001	1.099707	0.93838	0.801282	0.685714
RK4	1.87138E-07	3.92E-07	7.58E-07	1.61E-06	3.18E-06	5.00551E-06	5.77E-06	4.13E-06	1.16E-07	5.81E-06	1.13E-05	1.54E-05	1.77E-05	1.84E-05	1.78E-05
AB4	1.87138E-07	3.92E-07	7.58E-07	1.61E-06	0.001076	0.001007749	5.53E-05	0.001399	0.002338	0.00253	0.001975	0.001206	0.000432	3.67E-05	0.000337
AB4-AM4	1.87138E-07	3.92E-07	7.58E-07	1.61E-06	9.27E-05	4.70742E-05	0.000155	0.000405	0.000549	0.000521	0.000371	0.000193	5.16E-05	3.48E-05	7.41E-05
AB4-AM4改进	1.87138E-07	3.92E-07	7.58E-07	1.61E-06	1.05E-05	3.88998E-05	0.000148	0.000262	0.000314	0.000279	0.000189	9.11E-05	1.69E-05	2.61E-05	4.38E-05

可见，对 AB4 进行改进后，误差得到了显著减少，AB4-AM4 结合了显式方法的方便性和隐式方法的精度更高的特点，而 Richardson 外推使得精度更高了一阶。RK4 方法的精度最高。