Ordinary differential equation

作者：Wang

时间：2023/9/9

目录

第一章 基本概念 **1**

1.1 常微分方程基本概念 1

第二章 一阶微分方程的初等解法 **4**

2.1 变量分离方程与变量变换 4

2.1.1 变量分离方程 4

2.1.2 变量变换 5

2.2 线性微分方程与常数变易法 7

2.3 恰当微分方程与积分因子 10

2.3.1 恰当微分方程 10

2.3.2 积分因子 12

2.4 一阶隐式微分方程与参数表示 13

2.4.1 可解出 y 或 x 14

2.4.2 不显含 y 或 x 16

第三章 一阶微分方程的解的存在定理 **18**

3.1 解的存在唯一性定理与逐步逼近法 18

3.1.1 存在唯一性定理 18

3.1.2 近似计算和误差估计 21

3.2 解的延拓 21

3.3 解对初值的连续性和可微性定理 23

3.3.1 解关于初值的对称性 23

3.3.2 解对初值的连续依赖性 23

3.3.3 解对初值的可微性 26

第四章 高阶微分方程 **28**

4.1 线性微分方程的一般理论 28

4.1.1 齐次线性微分方程的解的性质与结构 28

4.1.2 非齐次线性微分方程与常数变易法 31

4.2 常系数线性微分方程的解法 33

4.2.1 复值函数与复值解 33

4.2.2 常系数齐次线性微分方程 35

4.2.3 欧拉方程 38

4.2.4 比较系数法 39

4.3 高阶微分方程的降阶和幂级数解法 41

4.3.1 可降阶的方程 41

4.3.1.1 F 不显含 x 41

4.3.1.2 F 不显含 t 42

4.3.1.3 齐次线性微分方程 42

4.3.2 二阶线性微分方程的幂级数解法 43

第五章 线性微分方程组 **45**

5.1 存在唯一性定理 45

5.1.1 记号和定义 45
5.1.2 存在唯一性定理 48
5.2 线性微分方程组的一般理论 49
5.2.1 齐次线性微分方程组 49
5.2.2 非齐次线性微分方程组 53
5.3 常系数线性微分方程组 55
5.3.1 矩阵指数 55
5.3.2 基解矩阵 57

第六章 非线性微分方程 62
6.1 稳定性 62
6.1.1 常微分方程组的存在唯一性定理 62
6.1.2 李雅普诺夫稳定性 62
6.1.3 按线性近似决定稳定性 64
6.2 V 函数方法 66
6.2.1 李雅普诺夫定理 66
6.2.2 二次型 V 函数构造 68
6.3 奇点 68
6.3.1 奇点基础 68
6.3.2 奇点类型 69
6.4 极限环和平面图貌 75
6.4.1 极限环 75

第一章 基本概念

1.1 常微分方程基本概念

微分方程是联系着自变量、未知函数及其导数的关系式

定义 1.1

如果在微分方程中，自变量的个数只有一个，称这种微分方程为常微分方程；自变量的个数为两个或两个以上的微分方程为偏微分方程

例题 1.1 方程

$$\frac{d^2y}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}+cy=f(t)$$
$$(\frac{dy}{dt})^2+t\frac{dy}{dt}+y=0$$

都是常微分方程

例题 1.2 方程

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+0$$
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=4\frac{\partial T}{\partial t}$$

都是偏微分方程

定义 1.2 (阶数)

微分方程中出现的未知函数最高阶导数的阶数称为微分方程的阶数

笔记 一般的 n 阶常微分方程具有形式

$$F(x,y,\frac{dy}{dx},\cdots,\frac{d^ny}{dx^n})=0$$

这里 $F(x,y,\frac{dy}{dx},\cdots,\frac{d^ny}{dx^n})$ 是 $x,y,\frac{dy}{dx},\cdots,\frac{d^ny}{dx^n}$ 的已知函数，而且一定含有 $\frac{d^ny}{dx^n}$

例题 1.3 方程

$$\frac{d^2y}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}+cy=f(t)$$

是二阶常微分方程

方程

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+0$$
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=4\frac{\partial T}{\partial t}$$

是二阶偏微分方程

定义 1.3 (线性微分方程)

称形如

$$\frac{d^ny}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dy}{dx}+a_n(x)=f(x)$$

为 n 阶线性微分方程，这里 $a_1(x),a_2(x),\cdots,a_n(x),f(x)$ 是 x 的已知函数

例题 1.4 方程

$$\frac{d^2y}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}+cy=f(t)$$

是二阶线性微分方程

方程

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0$$

是二阶非线性微分方程

定义 1.4 (解和隐式解)

如果函数 $y=\varphi(x)$ 代入方程 $F(x,y,\frac{dy}{dx},\cdots,\frac{d^ny}{dx^n})=0$ 后，成为恒等式，则称函数 $y=\varphi(x)$ 是方程的解；如果关系式 $\Phi(x,y)=0$ 决定的函数 $y=\varphi(x)$ 是方程的解，则称 $\Phi(x,y)=0$ 是方程的隐式解。

例题 1.5 一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

有解 $y=\sqrt{1-x^2}$ 和 $y=-\sqrt{1-x^2}$

关系式

$$x^2+y^2=0$$

是方程的隐式解

定义 1.5 (通解)

把含有 n 个独立的任意常数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 的解

$$y=\varphi(x,c_1,c_2,\cdots,c_n)$$

称为 n 阶方程的通解

笔记 关于解对常数的独立性是指，若存在 $(x,c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 的一个邻域，使得

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial c_1} & \frac{\partial\varphi}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi}{\partial c_n}\\ \frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial c_1} & \frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial c_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial c_1} & \frac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial c_n}\end{vmatrix}\neq 0$$

则称 $y=\varphi(x,c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 含有 n 个独立常数

例题 1.6 验证 $y=c_1\cos x+c_2\sin x$ 是 $y''+y=0$ 的通解

证明

1. $y=c_1\cos x+c_2\sin x$ 是微分方程的解
2. $y=c_1\cos x+c_2\sin x$ 含有两个任意常数
3. 任意常数独立

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial c_1} & \frac{\partial y}{\partial c_2}\\ \frac{\partial y'}{\partial c_1} & \frac{\partial y'}{\partial c_2}\end{vmatrix}\neq 0$$

□

定义 1.6 (定解条件)

为了确定微分方程的一个特定的解，我们通常给出这个解所必需满足的条件，这就是定解条件，常见的定解条件是初值条件和边值条件。

定义 1.7 (初值条件)

n 阶微分方程 $F(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^n y}{dx^n}) = 0$ 的初值条件是指如下的 n 个条件:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, y''(x_0) = y_2, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

其中 $x_0, y_0, \cdots, y_{n-1}$ 是给定的 $n+1$ 个常数 ♣

笔记 方程 + 初值条件，称为初值问题，也称 Cauchy 问题

例题 1.7 验证函数 $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-4x}$ 是微分方程

$$y'' + 5y' + 4 = 0$$

的通解；$y = 3e^{-x} - e^{-4x}$ 是满足初值条件 $y(0) = 2, y'(0) = 1$ 的特解

定义 1.8 (积分曲线)

一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

的解 $y = \varphi(x)$ 表示 Oxy 平面上的一条曲线，称为微分方程的积分曲线，而通解 $y = \varphi(x, c)$ 表示平面上的一族曲线，特解 $\varphi(x_0) = y_0$ 则为过点 (x_0, y_0) 的一条积分曲线 ♣

定义 1.9 (方向场)

设 $f(x, y)$ 的定义域为 D，在 D 内每一点 (x, y) 处都画上一个以 $f(x, y)$ 的值为斜率，中心在 (x, y) 点的线段，称带有这种直线段的区域 D 为方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

所定义的方向场 ♣

第二章 一阶微分方程的初等解法

2.1 变量分离方程与变量变换

2.1.1 变量分离方程

命题 2.1 (变量分离方程)

求解形如

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y)$$

的方程，称为变量分离方程，这里 $f(x), \varphi(y)$ 分别是 x,y 的连续函数

解 如果 $\varphi(y) \neq 0$，可将方程改写为

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx$$

这样，变量就“分离”开来了，同时对两边积分，得到

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx + c$$

把上式理解为 y, x, c 的隐函数关系式 $\Phi(y, x, c) = 0$ 或 y 的 x,c 函数关系式 $y = y(x, c)$，因而可知上式为方程的通解

但上式不适合 $\varphi(y) = 0$ 的情形，如果存在 y_0 使得 $\varphi(y_0) = 0$，则直接验证知 $y = y_0$ 也是方程的解

综上，变量分离方程的解为

$$\begin{cases} \int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx + c, & \varphi(y) \neq 0 \\ y = y_0, & \varphi(y_0) = 0 \end{cases}$$

例题 2.1 求解方程

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

解

$$\begin{aligned} & ydy = -xdx \\ \Longrightarrow & \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c \\ \Longrightarrow & x^2 + y^2 = 2c \end{aligned}$$

这里 c 是任意正常数

例题 2.2 求解方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(-c + dx)}{x(a - by)}, x \geq 0, y \geq 0$$

解

$$\begin{aligned} & (\frac{c}{x} - d)dx = (b - \frac{a}{y})dy \\ \Longrightarrow & c\ln|x| - dx = -a\ln|y| + by + m \\ \Longrightarrow & x^c y^a e^{-dx} e^{-ay} = e^m \end{aligned}$$

同时，方程还有特解 $y = 0$

2.1.2 变量变换

下面介绍两种可以变换为变量分离方程的类型

命题 2.2

求解形如

$$\frac{dy}{dx}=g(\frac{y}{x})$$

的方程，称为齐次微分方程，这里 $g(u)$ 是 u 的连续函数

解 作变量变换

$$u=\frac{y}{x}$$

即 $y=ux$，于是

$$\frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u$$

代回原方程

$$x\frac{du}{dx}+u=g(u)$$

整理后得到

$$\frac{du}{dx}=\frac{g(u)-u}{x}$$

例题 2.3 求解方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$$

解 令 $y=ux$，则

$$\begin{aligned}
&u+x\frac{du}{dx}=u+\tan u\\
\Longrightarrow&\frac{du}{\tan u}=\frac{dx}{x}\\
\Longrightarrow&\ln|\sin u|=\ln|x|+c\\
\Longrightarrow&\sin u=\pm e^c x
\end{aligned}$$

同时，方程还有特解 $\tan u=0$，即 $\sin u=0$，包括在通解中

代回原变量

$$\sin\frac{y}{x}=\pm e^c x$$

例题 2.4 求解方程

$$\frac{dy}{dx}=2\sqrt{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}\quad(x<0)$$

解 令 $y=ux$，则

$$\begin{aligned}
&u+x\frac{du}{dx}=2\sqrt{u}+u\\
\Longrightarrow&\frac{du}{2\sqrt{u}}=\frac{dx}{x}\\
\Longrightarrow&\sqrt{u}=\ln|x|+c\\
\Longrightarrow&\sqrt{u}=\ln(-x)+c
\end{aligned}$$

当 $\ln(-x)+c>0$ 时，

$$u=[\ln(-x)+c]^2$$

同时，方程还有特解 $u=0$

代回原变量

$$y=\begin{cases}x\left[\ln(-x)+c\right]^2, & \ln(-x)+c>0\\ 0\end{cases}$$

命题 2.3

求解形如

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$$

的方程，这里 a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2 均为常数

解 我们分三种情形来讨论

1. $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=k$
   这时方程为

$$\frac{dy}{dx}=k$$
$$\Longrightarrow y=kx+c$$

2. $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=k\neq\frac{c_1}{c_2}$
   令 $u=a_2x+b_2y$，这时有

$$\frac{du}{dx}=a_2+b_2\frac{dy}{dx}=a_2+b_2\frac{ku+c_1}{u+c_2}$$

   是变量分离方程

3. $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$
   (a). c_1,c_2 不全为零，因此

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\ a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}$$

   代表 Oxy 平面上两条相交直线，设交点为 (α,β)，若令

$$\begin{cases}X=x-\alpha\\ Y=y-\beta\end{cases}$$

   则上式化为

$$\begin{cases}a_1X+b_1Y=0\\ a_2X+b_2Y=0\end{cases}$$

   从而原方程变为

$$\frac{dY}{dX}=\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}=g(\frac{Y}{X})$$

   是齐次微分方程

   (b). $c_1=c_2=0$，因此

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y}$$

   是齐次微分方程

从而此类方程可变换为变量分离方程

笔记 上述解题的方法步骤也适用于更一般的方程类型

$$\frac{dy}{dx}=f(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2})$$

例题 2.5 求解方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-y+1}{x+y-3}$$

解 解方程组

$$\begin{cases} x-y+1=0 \\ x+y-3=0 \end{cases}$$

得 $x=1, y=2$，令

$$\begin{cases} X=x-1 \\ Y=y-2 \end{cases}$$

代入原方程，则有

$$\frac{dY}{dX}=\frac{X-Y}{X+Y}$$

令 $Y=uX$

$$\begin{aligned} & u+x\frac{du}{dX}=\frac{1-u}{1+u} \\ \Longrightarrow & \frac{dX}{X}=\frac{1+u}{1-2u-u^2}du \\ \Longrightarrow & \ln|X|=-\frac{1}{2}\ln\left|u^2+2u-1\right|+c \\ \Longrightarrow & X^2(u^2+2u-1)=\pm e^c \end{aligned}$$

同时，方程有特解 $u^2+2u-1=0$

代回原变量

$$(y-2)^2+2(x-1)(y-2)-(x-1)^2=C$$

其中 C 为任意常数

2.2 线性微分方程与常数变易法

命题 2.4

求解形如

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)$$

称为一阶线性微分方程，其中 $P(x), Q(x)$ 在考虑的区间上是 x 的连续函数

解

1. 若 $Q(x)=0$，方程变为

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y$$

称为一阶齐次线性微分方程，也是变量分离方程，其通解为

$$y=ce^{\int P(x)dx}$$

这里 c 是任意常数

2. 若 $Q(x)\neq 0$，称为一阶非齐次线性微分方程

下面讨论非齐次线性微分方程通解的求法

设想，在 $y=ce^{\int P(x)dx}$ 中将常数 c 变易为 x 的待定函数 $c(x)$，令

$$y=c(x)e^{\int P(x)dx}$$

微分得到

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dc(x)}{dx}e^{\int P(x)dx}+c(x)P(x)e^{\int P(x)dx} \tag{2.1}$$

代回原方程

$$
\begin{aligned}
&\frac{dc(x)}{dx}e^{\int P(x)dx}+c(x)P(x)e^{\int P(x)dx}=P(x)c(x)e^{\int P(x)dx}+Q(x)\\
\Longrightarrow&\frac{dc(x)}{dx}=Q(x)e^{-\int P(x)dx}\\
\Longrightarrow&c(x)=\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx+c
\end{aligned}
$$

代回，得通解

$$y=e^{\int P(x)dx}(\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx+c)$$

笔记 这种将常数变易为待定函数的方法，通常称为常数变易法。常数变易法实际上也是一种变量变换的方法，通过变换 $y=c(x)e^{\int P(x)dx}$，将方程化为变量分离方程

例题 2.6 求解方程

$$(x+1)\frac{dy}{dx}-ny=e^x(x+1)^{n+1}$$

解 将方程改写为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{n}{x+1}y+e^x(x+1)^n$$

首先，求齐次线性微分方程

$$
\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx}=\frac{n}{x+1}y\\
\Longrightarrow&\frac{dy}{y}=\frac{n}{x+1}dx\\
\Longrightarrow&y=c(x+1)^n
\end{aligned}
$$

同时，方程有特解 $y=0$，包含于通解 $y=c(x+1)^n$ 中

其次，应用常数变易法求解，将 c 看成待定函数 $c(x)$，即

$$
\begin{aligned}
&y=c(x)(x+1)^n\\
\Longrightarrow&\frac{dy}{dx}=\frac{dc(x)}{dx}(x+1)^n+n(x+1)^{n-1}c(x)\\
\Longrightarrow&\frac{dc(x)}{dx}=e^x\\
\Longrightarrow&c(x)=e^x+c\\
\Longrightarrow&y=(e^x+c)(x+1)^n
\end{aligned}
$$

这里 c 是任意常数

例题 2.7 求解方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x-y^2}$$

解 原方程不是 y 的线性微分方程，但可将其改写为

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2x-y^2}{y}$$

把 x 看作未知函数，y 看作自变量，这样对于 x 而言，方程是一个线性微分方程

首先，求出齐次线性微分方程

$$
\begin{aligned}
&\frac{dx}{dy}=\frac{2x}{y}\\
\Longrightarrow&\frac{dx}{2x}=\frac{dy}{y}\\
\Longrightarrow&x=cy^2
\end{aligned}
$$

通解已经包含特解 $x=0$

其次，应用常数变易法求解，将 c 看成待定函数 $c(x)$，即

$$
\begin{aligned}
&x = c(y)y^2 \\
\Longrightarrow &\frac{dx}{dy} = \frac{dc(y)}{dy}y^2 + 2yc(y) \\
\Longrightarrow &\frac{dc(y)}{dy} = -\frac{1}{y} \\
\Longrightarrow &c(y) = -\ln|y| + c \\
\Longrightarrow &x = (-\ln|y| + c)y^2
\end{aligned}
$$

这里 c 是任意常数

下面介绍一种可以化为线性微分方程的类型

定义 2.1 (伯努利微分方程)

形如

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)y^n$$

的方程，称为伯努利微分方程，这里 $P(x), Q(x)$ 为 x 的连续函数，$n \neq 0, 1$ 是常数 ♣

解 利用变量变换可将伯努利微分方程化为线性微分方程，事实上，对于 $y \neq 0$，两边乘上 y^{-n}，得到

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} = y^{1-n}P(x) + Q(x)$$

引入变量变换

$$z = y^{1-n}$$

从而

$$
\begin{aligned}
&\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} \\
\Longrightarrow &\frac{dz}{dx} = (1-n)P(x)z + (1-n)Q(x)
\end{aligned}
$$

这是线性微分方程，可按上述解法求得通解，然后代回原变量，此外，当 $n > 0$ 时，方程还有特解 $y = 0$

例题 2.8 求解方程

$$\frac{dy}{dx} = 6\frac{y}{x} - xy^2$$

解 令

$$z = y^{-1}$$

从而

$$
\begin{aligned}
&\frac{dz}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx} \\
\Longrightarrow &\frac{dz}{dx} = -\frac{6z}{x} + x \\
\Longrightarrow &z = \frac{c}{x^6} + \frac{x^2}{8}
\end{aligned}
$$

代回原变量

$$\frac{1}{y} = \frac{c}{x^6} + \frac{x^2}{8}$$

此外，方程还有特解 $y = 0$

2.3 恰当微分方程与积分因子

2.3.1 恰当微分方程

定义 2.2 (恰当微分方程)

形如

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = du(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

其中，$u(x,y)$ 是二元可微函数，则称为恰当微分方程

解 容易验证，恰当方程的通解为

$$u(x,y) = c$$

其中 c 是任意常数

下面给出恰当微分方程的充分必要条件

定理 2.1

微分方程

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

是恰当微分方程，当且仅当

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

证明

1. 必要性

   已知

   $$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

   是恰当方程，则存在二元可微函数 $u(x,y)$，s.t.

   $$M(x,y)dx + N(x,y)dy = du(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

   $$\Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = M, \frac{\partial u}{\partial y} = N$$

   $$\Longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

   由 $\frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x}$ 的连续性，则有

   $$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

   $$\Longrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

2. 充分性

   已知

   $$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

   我们去构造符合条件的函数 $u(x,y)$，令

   $$u(x,y) = \int M(x,y)dx + \varphi(y)$$

这里 $\varphi(y)$ 是 y 的任意可微函数，令

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx+\frac{d\varphi(y)}{dy}=N(x,y)$$

由此

$$\begin{aligned}&\frac{d\varphi(y)}{dy}=N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\\ \Longrightarrow&\varphi(y)=\int[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx]dy\\ \Longrightarrow&u(x,y)=\int M(x,y)dx+\int[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx]dy\end{aligned}$$

到此，我们构造出了符合条件的 $u(x,y)$，故原方程是恰当微分方程

□

例题 2.9 求解方程

$$(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0$$

解

$$\frac{\partial M}{\partial y}=12xy,\frac{\partial N}{\partial x}=12xy$$

可知，该方程是恰当方程

现在求 $u(x,y)$，满足

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+6xy^2,\frac{\partial u}{\partial y}=6x^2y+4y^3\\ \Longrightarrow&u(x,y)=x^3+3x^2y^2+\varphi(y)\\ \Longrightarrow&\frac{\partial u}{\partial y}=6x^2y+\frac{d\varphi(y)}{dy}=6x^2y+4y^3\\ \Longrightarrow&\frac{d\varphi(y)}{dy}=4y^3\\ \Longrightarrow&\varphi(y)=y^4\\ \Longrightarrow&u(x,y)=x^3+3x^2y^2+y^4\end{aligned}$$

因此，方程通解为

$$x^3+3x^2y^2+y^4=c$$

这里 c 是任意常数

笔记 常见的分项组合的全微分

$$\begin{aligned}&ydx+xdy=d(xy)\\ &\frac{ydx-xdy}{y^2}=d(\frac{x}{y})\\ &\frac{-ydx+xdy}{x^2}=d(\frac{y}{x})\\ &\frac{ydx-xdy}{xy}=d(\ln\left|\frac{x}{y}\right|)\\ &\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=d(\arctan\frac{x}{y})\\ &\frac{ydx-xdy}{x^2-y^2}=\frac{1}{2}d(\ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right|)\end{aligned}$$

例题 2.10 用“分项组合”求解方程

$$(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0$$

解

$$
\begin{aligned}
&(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0\\
\Longrightarrow &3x^2dx+4y^3dy+6xy^2dx+6x^2ydy=0\\
\Longrightarrow &dx^3+dy^4+3y^2dx^2+3x^2dy^2=0\\
\Longrightarrow &d(x^3+y^4+3x^2y^2)=0
\end{aligned}
$$

因此，方程通解为

$$x^3+3x^2y^2+y^4=c$$

这里 c 是任意常数

例题 2.11 求解方程

$$(\cos x+\frac{1}{y})dx+(\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2})dy=0$$

解

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{1}{y^2},\frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{1}{y^2}$$

因此，方程是恰当方程

$$
\begin{aligned}
&d\sin x+d\ln|y|+(\frac{1}{y}dx-\frac{x}{y^2}dy)=0\\
\Longrightarrow &d(\sin x+\ln|y|+\frac{x}{y})=0
\end{aligned}
$$

因此，方程通解为

$$\sin x+\ln|y|+\frac{x}{y}=c$$

这里 c 是任意常数

2.3.2 积分因子

恰当微分方程可以通过积分求出通解，因此能否将一个非恰当微分方程化为恰当微分方程就有很大的意义。积分因子就是为了解决这个问题而引入的概念

定义 2.3 (积分因子)

称 $\mu(x,y)$ 是方程的积分因子，若满足 $\mu(x,y)\neq 0$ 连续可微，且

$$\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=0$$

为恰当微分方程，即存在函数 $v(x,y)$，s.t.

$$\mu Mdx+\mu Ndy=dv$$

♣

定理 2.2

微分方程

$$Mdx+Ndy=0$$

有只与 x 有关的积分因子，当且仅当

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\psi(x)$$

同理，方程有只与 y 有关的积分因子，当且仅当

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}=\varphi(y)$$

证明 由于 $\mu(x,y)$ 是积分因子的充要条件为

$$\begin{aligned}&\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}\\ \Longleftrightarrow &N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})\mu\end{aligned}$$

若 $\mu=\mu(x)$，则 $\frac{\partial\mu}{\partial y}=0$

$$\begin{aligned}&N\frac{\partial\mu}{\partial x}=(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})\mu\\ \Longleftrightarrow &\frac{d\mu}{\mu}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx\\ \Longleftrightarrow &\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx=\psi(x)\end{aligned}$$

同理得关于 y 的结论 □

例题 2.12 求解方程

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}+\sqrt{1+(\frac{x}{y})^2}(y>0)$$

解

$$\begin{aligned}&xdx+ydy=\sqrt{x^2+y^2}dx\\ \Longrightarrow&\frac{1}{2}d(x^2+y^2)=\sqrt{x^2+y^2}dx\\ \Longrightarrow&\frac{d(x^2+y^2)}{2\sqrt{x^2+y^2}}=dx\\ \Longrightarrow&\sqrt{x^2+y^2}=x+c\end{aligned}$$

这里 c 是任意常数

例题 2.13 求解方程

$$ydx+(y-x)dy=0$$

解

$$\begin{aligned}&ydx-xdy=-ydy\\ \Longrightarrow&\frac{ydx-xdy}{y^2}=-\frac{1}{y}dy\\ \Longrightarrow&\frac{x}{y}+\ln|y|=c\end{aligned}$$

这里 c 是任意常数

2.4 一阶隐式微分方程与参数表示

一阶隐式微分方程的一般形式可表示为

$$F(x,y,y')=0$$

如果能从此方程中解出 y'，其表达式为 $y'=f(x,y)$，则可依据 $f(x,y)$ 的具体形状选择合适的方法进行求解，但往往难以从方程中解出 y'，或即是解出 y'，其表达式也相当复杂，则宜采用引进参数的方式使之变为导数已解

出的方程类型，这正是本节所讨论的思想，下面讨论这四种类型

- $y = f(x, y')$
- $x = f(y, y')$
- $F(x, y') = 0$
- $F(y, y') = 0$

2.4.1 可解出 y 或 x

命题 2.5

求解形如

$$y = f(x, y')$$

的方程，这里假设 $f(x, y')$ 有连续的偏导数

解 引进参数 $\frac{dy}{dx} = p$，则变成

$$y = f(x, p)$$

两边对 x 进行求导，得

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}$$

这是关于 x, p 的一阶微分方程，且 p 对 x 的导数已解出，于是可按方程类型进行求解

设求得的通解形式为

$$\Phi(x, p, c) = 0$$

则得到的参数形式的通解为

$$\begin{cases} y = f(x, p) \\ \Phi(x, p, c) = 0 \end{cases}$$

其中 p 是参数，c 是任意常数

笔记 通解

$$\Phi(x, p, c) = 0$$

有以下两种特殊形式：

1. 若求得的通解形式为

$$p = \varphi(x, c)$$

代入得到通解

$$y = f(x, \varphi(x, c))$$

2. 若求得的通解形式为

$$x = \psi(p, c)$$

则得到的参数形式的通解为

$$\begin{cases} x = \psi(p, c) \\ y = f(\psi(p, c), p) \end{cases}$$

例题 2.14 求解方程

$$(\frac{dy}{dx})^3 + 2x\frac{dy}{dx} - y = 0$$

解 令 $\frac{dy}{dx}=p$，得到

$$y=p^3+2xp$$

两边对 x 求导得

$$\begin{aligned}&p=3p^2\frac{dp}{dx}+2x\frac{dp}{dx}+2p\\ \Longrightarrow&3p^2dp+2xdp+pdx=0\\ \Longrightarrow&3p^3dp+2xpdp+p^2dx=0\\ \Longrightarrow&\frac{3p^4}{4}+xp^2=c\end{aligned}$$

故通解为

$$\begin{cases}y=p^3+2xp\\ \frac{3p^4}{4}+xp^2=c\end{cases}$$

例题 2.15 求解方程

$$y=(\frac{dy}{dx})^2-x\frac{dy}{dx}+\frac{x^2}{2}$$

解 令 $\frac{dy}{dx}=p$，得到

$$y=p^2-xp+\frac{x^2}{2}$$

两边对 x 求导得

$$\begin{aligned}&p=2p\frac{dp}{dx}-x\frac{dp}{dx}-p+x\\ \Longrightarrow&(2p-x)(\frac{dp}{dx}-1)=0\\ \Longrightarrow&p=x+c\text{ 或 }p=\frac{x}{2}\end{aligned}$$

故通解为

$$y=\frac{x^2}{2}+cx+c^2\text{ 或 }y=\frac{x^2}{4}$$

命题 2.6

求解形如

$$x=f(y,y')$$

的方程，这里假设 $f(y,y')$ 有连续的偏导数

解 令 $\frac{dy}{dx}=p$，则有

$$x=f(y,p)$$

两边对 y 求导数得

$$\frac{1}{p}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy}$$

这是关于 y,p 的一阶微分方程，且 p 对 y 的导数已解出，于是可按方程类型进行求解

设求得的通解形式为

$$\Phi(y,p,c)=0$$

则得到的参数形式的通解为

$$\begin{cases}x=f(y,p)\\ \Phi(y,p,c)=0\end{cases}$$

其中 p 是参数，c 是任意常数

2.4.2 不显含 y 或 x

命题 2.7

求解形如

$$F(x, y') = 0$$

的方程

解 设 $p = y' = \frac{dy}{dx}$，从几何的观点看，$F(x, p) = 0$ 代表 Oxp 平面上的一条曲线

设这曲线的参数形式为

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ p = \psi(t) \end{cases}$$

这里 t 是参数

将参数形式代入得

$$dy = \psi(t)\varphi'(t)dt$$
$$\Longrightarrow y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + c$$

故方程的通解的参数形式为

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + c \end{cases}$$

c 为任意常数

例题 2.16 求解方程

$$x^3 + y'^3 - 3xy' = 0$$

解 令 $p = y'$，得

$$x^3 + p^3 - 3xp = 0$$

将曲线参数化，得

$$\begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^3} \\ p = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$$

于是

$$dy = \frac{9(1-2t^3)t^2}{(1+t^3)^3}dt$$
$$\Longrightarrow y = \int \frac{9(1-2t^3)t^2}{(1+t^3)^3}dt = \frac{3}{2}\frac{1+4t^3}{(1+t^3)^2} + c$$

故通解的参数形式为

$$\begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^3} \\ y = \frac{3}{2}\frac{1+4t^3}{(1+t^3)^2} + c \end{cases}$$

命题 2.8

求解形如

$$F(y, y') = 0$$

的方程

解 设 $p = y' = \frac{dy}{dx}$，设这曲线的参数形式为

$$\begin{cases} y = \varphi(t) \\ p = \psi(t) \end{cases}$$

这里 t 是参数

将参数形式代入得

$$dx = \frac{\varphi'(x)}{\psi(x)} dt$$
$$\Longrightarrow x = \int \frac{\varphi'(x)}{\psi(x)} dt + c$$

故方程的通解的参数形式为

$$\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(x)}{\psi(x)} dt + c \\ y = \varphi(t) \end{cases}$$

c 为任意常数

此外若 $y' = 0$ 时，有 $y = k$，则 $y = k$ 也是方程的解

例题 2.17 求解方程

$$y^2(1 - y') = (2 - y')^2$$

解 令 $2 - y' = yt$，则有

$$y^2(yt - 1) = y^2t^2$$

由此得

$$\begin{cases} y = t + \frac{1}{t} \\ y' = 1 - t^2 \end{cases}$$

于是

$$dx = -\frac{1}{t^2} dt$$
$$\Longrightarrow x = \frac{1}{t} + c$$

故通解的参数形式为

$$\begin{cases} x = \frac{1}{t} + c \\ y = \frac{1}{t} + t \end{cases}$$

其中 c 为任意常数

此外，当 $y' = 0$ 时，有 $y = \pm 2$ 也是方程的解

第三章 一阶微分方程的解的存在定理

在第二章里，我们介绍了能用初等解法的一阶微分方程的若干类型，但同时指出，大量的一阶微分方程一般是不能用初等解法求出它的通解的，而实际问题中所需要的往往是要求满足某种初值条件的解（包括数值形式的数值解）。因此，对初值问题（柯西问题）的研究被提到了重要的地位，那么，自然地，初值问题的解是否存在？如果存在是否唯一？

本章介绍的存在唯一性定理圆满地回答了上面的问题，明确地肯定了方程的解在一定条件下的存在性和唯一性。另一方面，由于能求出精确解的微分方程为数不多，微分方程的近似解法具有十分重要的实际意义，而解的存在和唯一是进行近似计算的前提

本章重点介绍和证明一阶微分方程的解的存在唯一性定理并叙述解的一些一般性质，如解的延拓、解对初值的连续性和可微性等

3.1 解的存在唯一性定理与逐步逼近法

3.1.1 存在唯一性定理

定义 3.1 (利普希兹条件)

函数 $f(x,y)$ 称为在 R 上关于 y 满足利普希兹条件，若果存在常数 $L>0$，满足

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leq L\,|y_1-y_2|\,,\quad \forall (x,y_1),(x,y_2)\in R$$

L 称为利普希兹常数

♣

定理 3.1 (存在唯一性定理)

若 $f(x,y)$ 在矩形域

$$R:\quad |x-x_0|\leq a,\ |y-y_0|\leq b$$

上连续且关于 y 满足利普希兹条件，则

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),\ y(x_0)=y_0$$

存在唯一的解 $y=\varphi(x)$，定义于区间 $I:|x-x_0|\leq h$，连续且满足初值条件 $\varphi(x_0)=y_0$，其中

$$h=\min(a,\frac{b}{M}),\quad M=\max_{(x,y)\in R}|f(x,y)|$$

♡

证明 为了突出证明思路，将证明分成以下四步

1. 初值问题等价于积分方程
$$y=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,y)dx$$
2. 用逐次迭代法构造皮卡序列
$$y_{n+1}(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,y_n(x))dx,\quad x\in I$$
3. 皮卡序列 $y=y_n(x)$ 一致收敛到积分方程 $y=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,y)dx$ 的解
4. 最后证明唯一性

下面开始证明

1. claim 1: 初值问题等价于积分方程
$$y=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,y)dx$$

事实上，设 $y = y(x)$ 是原方程的解，则有

$$y'(x) = f(x, y(x)),\ y(x_0) = y_0$$

进行积分利用初值条件得

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))dx$$

即 $y = y(x)$ 是积分方程的解；反之，设 $y = y(x)$ 是积分方程的解，逆转上述推导可知 $y = y(x)$ 是原方程的解

2. claim 2: 用逐次迭代法构造皮卡序列

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_n(x))dx, \quad x \in I$$

当 $n = 0$ 时，注意到 $f(x, y_0(x))$ 是连续函数，故

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0(x))dx, \quad x \in I$$

是 I 上连续可微，且满足

$$|y_1(x) - y_0| \le \left|\int_{x_0}^{x} |f(x, y_0(x))|\, dx\right| \le M|x - x_0| \le Mh \le b, \quad x \in I$$

同理，由于 $f(x, y_1(x))$ 在 I 上连续，故

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1(x))dx, \quad x \in I$$

在 I 上连续可微，且满足

$$|y_2(x) - y_0| \le \left|\int_{x_0}^{x} |f(x, y_1(x))|\, dx\right| \le M|x - x_0| \le Mh \le b, \quad x \in I$$

由数学归纳法知，构造出的皮卡序列

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_n(x))dx, \quad x \in I$$

在 I 上连续，且满足不等式

$$|y_n(x) - y_0| \le M|x - x_0|$$

3. claim 3: 皮卡序列 $y = y_n(x)$ 一致收敛到积分方程 $y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)dx$ 的解

注意到，序列 $y_n(x)$ 的收敛性等价于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} [y_{n+1}(x) - y_n(x)]$$

的收敛性，下面证明该级数在 I 上是一致收敛的，为此采用归纳法证明不等式

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \le \frac{M}{L}\frac{(L|x - x_0|^{n+1})}{(n+1)!}$$

当 $n = 0$ 时，

$$|y_1(x) - y_0| \le M|x - x_0|, \quad x \in I$$

假设 $n = k$ 时，不等式成立，则有

$$\begin{aligned}
|y_{k+2}(x) - y_{k+1}(x)| &= \left|\int_{x_0}^{x} [f(x, y_{k+1}(x)) - f(x, y_k(x))]dx\right| \\
&\le \left|\int_{x_0}^{x} L|y_{k+1}(x) - y_k(x)|\, dx\right| \\
&\le M\left|\int_{x_0}^{x} \frac{(L|x - x_0|^{k+1})}{(k+1)!}dx\right| \\
&= \frac{M}{L}\frac{L|x - x_0|^{k+2}}{(k+2)!}
\end{aligned}$$

由此可见，当 $n=k+1$ 时，不等式也成立，因此

$$|y_{n+1}(x)-y_n(x)| \le \frac{M}{L}\frac{(L|x-x_0|^{n+1})}{(n+1)!}$$

由于不等式成立，蕴含着级数在 I 上是一致收敛的，因此皮卡序列 $\{y_n\}$ 是一致收敛的，设极限函数

$$\varphi(x)=\lim_{n\to\infty} y_n(x), \quad x\in I$$

知 $\varphi(x)$ 在 I 上连续，同时，利用 $f(x,y)$ 的连续性以及皮卡序列的一致收敛性，令

$$y_{n+1}(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y_n(x))dx, \quad n\to\infty$$

得

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,\varphi(x))dx, \quad x\in I$$

因此，$\varphi(x)$ 是积分方程的一个解，也就是原方程的一个解

4. claim 4：证明唯一性

设积分方程有两个解 $y=u(x)$ 和 $y=v(x)$，令 $J=[x_0-d,x_0+d]$ 为共同存在区间，其中 $0<d\le h$，则有

$$\begin{aligned}u(x)-v(x)&=\int_{x_0}^{x}[f(x,u(x))-f(x,v(x))]dx\\ &\le L\left|\int_{x_0}^{x}|u(x)-v(x)|\,dx\right|\end{aligned}$$

注意到，在区间 J 上 $|u(x)-v(x)|$ 是连续有界的，因此可取一个上界 K，则有

$$u(x)-v(x)\le LK|x-x_0|$$

将其重新代入

$$|u(x)-v(x)|\le K\frac{(L|x-x_0|^2)}{2}$$

重复递归，由归纳法可得

$$|u(x)-v(x)|\le K\frac{(L|x-x_0|)^n}{n!}, \quad x\in J$$

令 $n\to\infty$，不等式右端趋于零，因此

$$u(x)=v(x)$$

唯一性得证

□

笔记 存在唯一性定理中数 h 的几何意义：（这里 $h=\frac{b}{M}$）

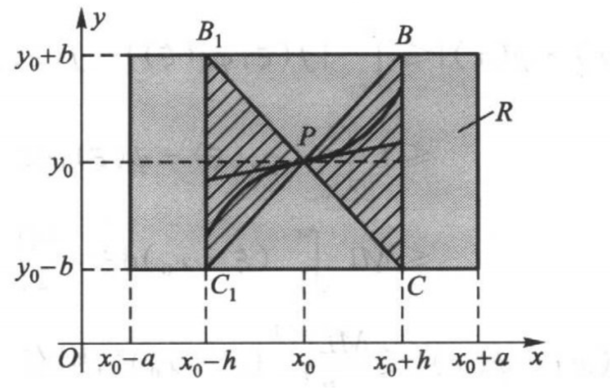


图 3.1: 参数 h 的几何意义

笔记 由于利普希兹条件比较难于检验，常用 $f(x,y)$ 在 R 上有对 y 的连续偏导数来代替，事实上，如果在 R

上 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 存在且连续，则 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 R 上有界，设在 R 上 $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le L$，这时

$$
\begin{aligned}
|f(x,y_1)-f(x,y_2)| &= \left|\frac{\partial f(x,y_2+\theta(y_1-y_2))}{\partial y}\right| |y_1-y_2| \\
&\le L\,|y_1-y_2|, \quad (x,y_1),(x,y_2)\in R,\ 0<\theta<1
\end{aligned}
$$

下面考虑一阶隐方程 $F(x,y,y')=0$，有如下定理

定理 3.2

如果在点 (x_0,y_0,y_0') 的某一邻域中

1. $F(x,y,y')$ 对所有变元 (x,y,y') 连续，且存在连续偏导数
2. $F(x_0,y_0,y_0')=0$
3. $\frac{\partial F(x_0,y_0,y_0')}{\partial y'}\neq 0$

则方程 $F(x,y,y')=0$ 存在唯一解

$$y=y(x),\ |x-x_0|\le h,\ y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0'$$

其中，h 为足够小的正数

3.1.2 近似计算和误差估计

存在唯一性定理不仅肯定了解的存在唯一性，并且在证明中所采用的逐步逼近法在实用上也是求方程近似解的一种方法，我们能得到第 n 次近似解 $\varphi_n(x)$ 和真正解 $\varphi(x)$ 在区间 $I:|x-x_0|\le h$ 内的误差估计式为

$$|\varphi_n(x)-\varphi(x)|\le\frac{ML^nh^{n+1}}{(n+1)!}$$

这样，我们这进行近似计算时，可以根据误差的要求，选取适当的逐步逼近函数 $\varphi_n(x)$

3.2 解的延拓

解的存在唯一性定理是局部性的，它只肯定了解至少在区间 $|x-x_0|\le h,\ h=\min(a,\frac{b}{M})$ 上存在。可能出现这样的情况，即随着 $f(x,y)$ 定义区域的增大，我们能肯定的解存在的区间反而缩小，这种局部性使我们感到非常不满意，而且实践上也要求解的存在区间能尽量扩大，解的延拓的概念自然就产生了，下面讨论解的延拓

首先先给出局部利普希兹条件

定义 3.2 (局部利普希兹条件)

设 $f(x,y)$ 在区域 G 内连续，称 $f(x,y)$ 关于 y 满足局部的利普希兹条件，即对于区域 G 内的每一点，有以其为中心的完全含于 G 内的闭矩形 R 存在，在 R 上 $f(x,y)$ 关于 y 满足利普希兹条件

设方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

的解 $y=\varphi(x)$ 已定义于区间 $|x-x_0|\le h$ 上，现在取 $x_1=x_0+h$，然后已 (x_1,y_1) 为中心，运用存在唯一性定理，知道存在 $h_1>0$，使得区间 $|x-x_1|\le h_1$ 上，方程有过 (x_1,y_1) 的解 $y=\psi(x)$，且在 $x=x_1$ 处有 $\psi(x_1)=\varphi(x_1)$

由于唯一性，在解 $y=\psi(x)$ 和解 $y=\varphi(x)$ 共同存在区间 $[x_1-h_1,x_1]$ 上，$\psi(x)=\varphi(x)$。但在区间 $[x_1,x_1+h_1]$ 上，解 $y=\psi(x)$ 仍有定义，我们把它看成是原来定义在区间 $|x-x_0|\le h$ 上的解 $y=\varphi(x)$ 向右方的延拓，这样，我们就在区间 $[x_0-h,x_0+h+h_1]$ 上确定方程的一个解

$$y=\begin{cases}\varphi(x), & x_0-h\le x\le x_0+h\\ \psi(x), & x_0+h<x\le x_0+h+h_1\end{cases}$$

用几何的语言来说，上述解的延拓，就是在原来的积分曲线 $y=\varphi(x)$ 左右两端各接上一个积分曲线段

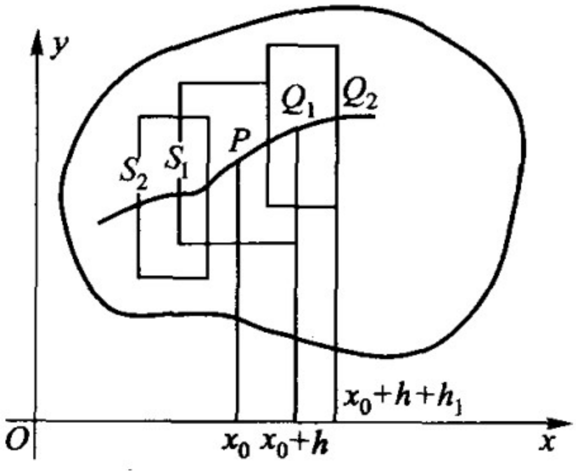


图 3.2: 解的延拓

上述延拓办法还可继续进行，最后我们将得到一个解 $y=\tilde{\varphi}(x)$，它已经再也不能向左右方继续延拓，这样的解称为饱和解

下面给出解的延拓定理

定理 3.3 (解的延拓定理)

设 $f(x,y)$ 在有界区域 G 中连续，且在 G 内关于 y 满足局部的利普希兹条件，则

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

的通过 G 内任一点 (x_0,y_0) 的解 $y=\varphi(x)$ 可以延拓，直到点 $(x,\varphi(x))$ 任意接近区域 G 的边界

推论 3.1

如果 G 是无界区域，在解的延拓定理条件下，方程 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ 的通过点 (x_0,y_0) 的解 $y=\varphi(x)$ 可以延拓，以向 x 增大的一方的延拓来说，有下面的两种情况：

1. 解 $y=\varphi(x)$ 可以延拓到区间 $[x_0,+\infty)$
2. 解 $y=\varphi(x)$ 只可以延拓到区间 $[x_0,d)$，其中 d 为有限数，则当 $x\to d$ 时，或者 $y=\varphi(x)$ 无界，或者点 $(x,\varphi(x))$ 趋于 G 的边界

例题 3.1 讨论方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-1}{2}$ 的分别通过点 $(0,0),(\ln 2,-3)$ 的解的存在区间

解 $f(x,y)=\frac{y^2-1}{2}$ 在整个 Oxy 平面上关于 y 偏导存在且连续，故满足解的存在唯一性定理及解的延拓定理，方程的通解为

$$y=\frac{1+ce^x}{1-ce^x}$$

故通过点 $(0,0)$ 的解为

$$y=\frac{1-e^x}{1+e^x}$$

存在区间为 $(-\infty,+\infty)$

通过点 $(\ln 2,-3)$ 的解为

$$y=\frac{1+e^x}{1-e^x}$$

存在区间为 $(0,+\infty)$

3.3 解对初值的连续性和可微性定理

在解的存在唯一性定理中，我们把初值 (x_0, y_0) 看作固定的，显然，假如 (x_0, y_0) 变动，则相应的初值问题的解也将随之变动，也就是说，初值问题的解不单依赖于自变量 x，同时也依赖于初值 (x_0, y_0)，因此，在考虑初值变动时，解可以看作三个变元的函数而记为

$$y = \varphi(x, x_0, y_0)$$

它满足 $y_0 = \varphi(x_0, x_0, y_0)$

下面我们讨论解关于初值的一些基本性质

3.3.1 解关于初值的对称性

定理 3.4 (解关于初值的对称性定理)

设方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

的满足初值条件 $y(x_0) = y_0$ 的解是唯一的，记为 $y = \varphi(x, x_0, y_0)$，则在此表达式中，(x, y) 与 (x_0, y_0) 可以调换其相对位置，即在解的存在范围内成立着关系式

$$y_0 = \varphi(x_0, x, y)$$

♡

证明 在上述解的存在区间内任取一值 x_1，且记 $y_1 = \varphi(x_1, x_0, y_0)$，则由解的唯一性知过点 (x_1, y_1) 的解与过点 (x_0, y_0) 的解是同一条积分曲线，即此解也可写成

$$y = \varphi(x, x_1, y_1)$$

并且，显然有 $y_0 = \varphi(x_0, x_1, y_1)$，注意到点 (x_1, y_1) 是积分曲线上任意一点，因此关系式 $y_0 = \varphi(x_0, x, y)$ 对该积分曲线上的任意点 (x, y) 均成立 □

3.3.2 解对初值的连续依赖性

引理 3.1

设 $f(x, y)$ 在域 D 内连续，且关于 y 满足利普希兹条件，则对初值方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

的任意两个解 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$，在他们公共存在的区间满足

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \le |\varphi(x_0) - \psi(x_0)|\, e^{L|x - x_0|}$$

其中 L 为利普希兹常数，x_0 为所考虑区间内的某一值

♡

证明 设 $\varphi(x), \psi(x)$ 于区间 $a \le x \le b$ 上均有定义，令

$$V(x) = [\varphi(x) - \psi(x)]^2, \quad a \le x \le b$$

则

$$V'(x) = 2[\varphi(x) - \psi(x)][f(x, \varphi) - f(x, \psi)] \le 2LV(x)$$

于是

$$\frac{d}{dx}(V(x)e^{-2Lx}) \le 0$$

因此，对 $x_0 \in [a, b]$，有

$$V(x) \le V(x_0)e^{2L(x - x_0)}, \quad x_0 \le x \le b$$

对于区间 $a \le x \le x_0$，令 $-x = t$，并记 $-x_0 = t_0$，则初值方程变为

$$\frac{dy}{dt} = -f(-t, y)$$

并已知它有解 $y = \varphi(-t)$ 和 $y = \psi(-t)$ 类似上述推导，令 $\sigma(t) = [\varphi(-t) + \psi(-t)]^2$，可得

$$\sigma(t) \le \sigma(t_0) e^{2L(x_0 - x)}, \quad t_0 \le t \le -a$$

注意到 $\sigma(t)\,|_{t=-x} = V(x)$ 及 $\sigma(t_0) = V(x_0)$，就有

$$V(x) \le V(x_0) e^{2L(x_0 - x)}, \quad a \le x \le x_0$$

因此

$$V(x) \le V(x_0) e^{2L|x - x_0|}, \quad a \le x, x_0 \le b$$

$$\Longrightarrow |\varphi(x) - \psi(x)| \le |\varphi(x_0) - \psi(x_0)|\, e^{L|x - x_0|}$$

□

定理 3.5 (解对初值的连续依赖定理)

设 $f(x, y)$ 在 G 内连续且关于 y 满足局部利普希兹条件，$(x_0, y_0) \in G$，$y = \varphi(x, x_0, y_0)$ 是方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

满足初值条件 $y(x_0) = y_0$ 的解，它在区间 $a \le x \le b$ 上有定义，那么，$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon, a, b)$, $s.t.$

$$(\overline{x}_0 - x_0)^2 + (\overline{y}_0 - y_0)^2 \le \delta^2$$

时，初值方程满足条件 $y(\overline{x}_0) = \overline{y}_0$ 的解 $y = \varphi(x, \overline{x}_0, \overline{y}_0)$ 在区间 $a \le x \le b$ 上也有定义，并且

$$\left|\varphi(x, \overline{x}_0, \overline{y}_0) - \varphi(x, x_0, y_0)\right| < \epsilon, \quad a \le x \le b$$

♡

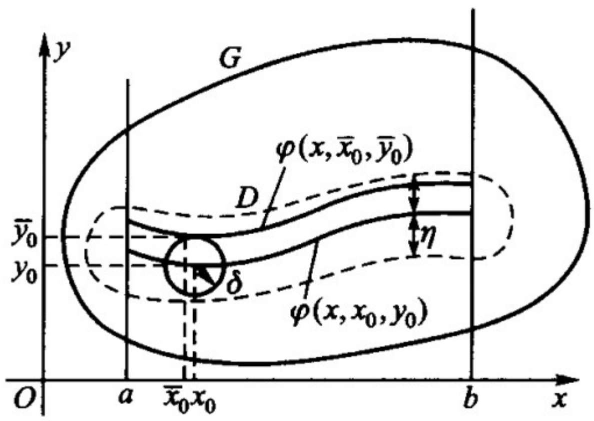


图 3.3: 解对初值的连续依赖

笔记 当把解 $\varphi(x, x_0, y_0)$ 视为自变量 x 和初值 (x_0, y_0) 的三元函数时，从上述定理可以推知它是三元连续函数，事实上，$\varphi(x, x_0, y_0)$ 对 x 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，因而对 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$, $s.t.$ $|\overline{x} - x| < \delta_1$ 时，有

$$|\varphi(\overline{x}, x_0, y_0) - \varphi(x, x_0, y_0)| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \overline{x}, x \in [a, b]$$

另一方面，由解对初值的连续依赖定理，总存在这样的 $\delta_2 > 0$, $s.t.$ $(\overline{x}_0 - x_0)^2 + (\overline{y}_0 - y_0)^2 \le \delta_2^2$ 时，有

$$\left|\varphi(x, x_0, y_0) - \varphi(x, \overline{x}_0, \overline{y}_0)\right| < \frac{\epsilon}{2}, \quad x \in [a, b]$$

取 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$，则只要 $(\overline{x}-x)^2+(\overline{x}_0-x_0)^2+(\overline{y}_0-y_0)^2\le\delta^2$，就有

$$\begin{aligned}&\left|\varphi(\overline{x},\overline{x}_0,\overline{y}_0)-\varphi(x,x_0,y_0)\right|\\ \le&\left|\varphi(\overline{x},\overline{x}_0,\overline{y}_0)-\varphi(\overline{x},x_0,y_0)\right|+\left|\varphi(\overline{x},x_0,y_0)-\varphi(x,x_0,y_0)\right|\\ <&\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon\end{aligned}$$

这就说明 $\varphi(x,x_0,y_0)$ 在 (x,x_0,y_0) 连续

也就是下面的定理

定理 3.6 (解对初值的连续性定理)

设 $f(x,y)$ 在区域 G 内连续，且关于 y 满足局部利普希兹条件，则方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

的解 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 作为 x,x_0,y_0 的函数在它的存在范围内是连续的

除此之外，还可以讨论含有参数 λ 的微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y,\lambda)$$

用 G_λ 表示域：

$$G_\lambda:(x,y)\in G,\quad \alpha<\lambda<\beta$$

设 $f(x,y,\lambda)$ 在 G_λ 内连续，且在 G_λ 内一致地关于 y 满足局部的利普希兹条件，也就是说，对 G_λ 内的每一点 (x,y,λ) 都存在以 $(x,ym\lambda)$ 为中心的球 $C\subset G_\lambda$，使得对任何 $(x,y_1,\lambda),(x,y_2,\lambda)\in C$，成立不等式

$$|f(x,y_1,\lambda)-f(x,y_2,\lambda)|\le L\,|y_1-y_2|$$

其中 L 是与 λ 无关的正数，由解的存在唯一性定理，对每一 $\lambda_0\in(\alpha,\beta)$，方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y,\lambda)$$

的通过点 $(x_0,y_0)\in G$ 的解唯一确定，把这个解记为 $y=\varphi(x,x_0,y_0,\lambda_0)$

类似的，由以下结果

定理 3.7 (解对初值和参数的连续依赖定理)

设 $f(x,y,\lambda)$ 在 G_λ 内连续，且在 G_λ 内关于 y 一致满足局部利普希兹条件，$(x_0,y_0,\lambda_0)\in G_\lambda, y=\varphi(x,x_0,y_0,\lambda_0)$ 是方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y,\lambda)$$

通过点 (x_0,y_0) 的解，在区间 $a\le x\le b$ 上有定义，则 $\forall\epsilon>0$, $\exists\delta=\delta(\epsilon,a,b)$, $s.t.$

$$(\overline{x}_0-x_0)^2+(\overline{y}_0-y_0)^2+(\lambda-\lambda_0)^2\le\delta^2$$

时，通过 $(\overline{x}_0,\overline{y}_0)$ 的解 $y=\varphi(x,\overline{x}_0,\overline{y}_0,\lambda)$ 在区间 $a\le x\le b$ 也有定义，并且

$$\left|\varphi(x,x_0,y_0,\lambda_0)-\varphi(x,\overline{x}_0,\overline{y}_0,\lambda)\right|<\epsilon,\quad a\le x\le b$$

定理 3.8 (解对初值和参数的连续性定理)

设 $f(x,y,\lambda)$ 在 G_λ 内连续，且在 G_λ 内关于 y 一致满足局部利普希兹条件，则方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y,\lambda)$$

的解 $y=\varphi(x,x_0,y_0,\lambda)$ 作为 x,x_0,y_0,λ 的函数在存在范围内是连续的

3.3.3 解对初值的可微性

进一步，我们讨论解对初值的可微性，即解 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 关于初值 (x_0,y_0) 的偏导数的存在性和连续性，我们有如下定理

定理 3.9 (解对初值的可微性定理)

设函数 $f(x,y)$ 以及 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 都在区域 G 内连续，则方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

的解 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 作为 x,x_0,y_0 的函数在它的存在范围内是连续可微的

证明 由 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在区域 G 内连续，可知 $f(x,y)$ 在 G 内关于 y 满足局部利普希兹条件，因此，解对初值的连续性定理成立，即 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 在存在范围内关于 x,x_0,y_0 是连续的

下面进一步证明对于函数 $\varphi(x,x_0,y_0)$ 的存在范围内任一点的偏导数 $\frac{\partial\varphi}{\partial x},\frac{\partial\varphi}{\partial x_0},\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}$ 存在且连续

1. 先证 $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ 存在且连续，设由初值 $(x_0,y_0),(x_0+\Delta x_0,y_0)$ 所确定的方程的解为

$$\varphi=\varphi(x,x_0,y_0),\quad \psi=\varphi(x,x_0+\Delta x_0,y_0)$$

即

$$\varphi=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,\varphi)dx,\quad \psi=y_0+\int_{x_0+\Delta X_0}^{x}f(x,\psi)dx$$

于是

$$\begin{aligned}\psi-\varphi&=\int_{x_0+\Delta X_0}^{x}f(x,\psi)dx-\int_{x_0}^{x}f(x,\varphi)dx\\&=-\int_{x_0}^{x_0+\Delta x_0}f(x,\psi)dx+\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(x,\varphi+\theta(\psi-\varphi))}{\partial y}(\psi-\varphi)dx\end{aligned}$$

注意到 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 及 φ,ψ 的连续性，则有

$$\frac{\partial f(x,\varphi+\theta(\psi-\varphi))}{\partial y}=\frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}+r_1$$

这里 r_1 满足

$$\Delta x_0\to 0\Longrightarrow r_1\to 0,\quad \Delta x_0=0\Longrightarrow r_1=0$$

类似的，有

$$-\frac{1}{\Delta x_0}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x_0}f(x,\psi)dx=-f(x_0,y_0)+r_2$$

因此，对 $\Delta x_0\neq 0$ 有

$$\frac{\psi-\varphi}{\Delta x_0}=[-f(x_0,y_0)+r_2]+\int_{x_0}^{x}[\frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}+r_1]\frac{\psi-\varphi}{\Delta x_0}dx$$

即

$$z=\frac{\psi-\varphi}{\Delta x_0}$$

是初值问题

$$\begin{cases}\frac{dz}{dx}=[\frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}+r_1]z\\ z(x_0)=-f(x_0,y_0)+r_2=z_0\end{cases}$$

的解

在这里 $\Delta x_0\neq 0$ 被看作参数，显然，当 $\Delta x_0=0$ 时，上述初值问题仍有解，根据解对初值和参数的连续性定理，知 $\frac{\psi-\varphi}{\Delta x_0}$ 是 $x,x_0,z_0,\Delta x_0$ 的连续函数，从而存在

$$\lim_{\Delta x_0\to 0}\frac{\psi-\varphi}{\Delta x_0}=\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}$$

而 $\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}$ 是初值问题

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = \frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y} z \\ z(x_0) = -f(x_0, y_0) \end{cases}$$

的解，容易得到

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_0} = -f(x_0, y_0) e^{\int_{x_0}^{x} \frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y} dx}$$

显然，它是 x, x_0, y_0 的连续函数

2. 同样可证 $\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}$ 存在且连续
3. 至于 $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ 的存在及连续性，只需注意到 $y = \varphi(x, x_0, y_0)$ 是方程的解，故

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = f(x, \varphi(x, x_0, y_0))$$

由 f 及 φ 的连续性，即可得到结论

□

第四章 高阶微分方程

在本章我们讨论二阶及二阶以上的微分方程，即高阶微分方程，对于高阶微分方程的基本理论和求解方法，本章主要讨论线性微分方程，在微分方程的理论中，线性微分方程是非常值得重视的一部分内容，这不仅因为线性微分方程的一般理论已被研究得十分清楚，而且线性微分方程是研究非线性微分方程的基础，它在物理、力学和工程技术、自然科学中也有着广泛的应用，本章重点讲述线性微分方程的基本理论和常系数方程的解法，也简单介绍某些高阶微分方程的降阶方法和二阶线性方程的幂级数解法

4.1 线性微分方程的一般理论

4.1.1 齐次线性微分方程的解的性质与结构

定义 4.1 (齐次线性微分方程)

形如

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=0$$

称为 n 阶齐次线性微分方程，简称齐次线性微分方程

我们先给出线性微分方程的解的唯一性定理

定理 4.1 (存在唯一性定理)

设 n 阶线性微分方程为

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=f(t)$$

其中 $a_i(t),f(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则对于 $\forall t_0\in[a,b],x_0,x_0^{(1)},\cdots,x_0^{(n-1)}$，方程存在唯一满足初值条件的解 $x=\varphi(t)(t\in[a,b])$

$$\varphi(t_0)=x_0,\frac{d^{(i)}\varphi(t_0)}{dt^{(i)}}=x_0^{(i)}(i=1,2\cdots,n-1)$$

容易得到以下定理

定理 4.2 (叠加原理)

如果 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_k(t)$ 是方程

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=0$$

的 k 个解，则它们的线性组合 $c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_kx_k(t)$ 也是方程的解，这里 $c_1,c_2,\cdots,c_k$ 是任意常数

为了讨论的需要，我们引进函数线性相关与线性无关及朗斯基行列式的概念

定义 4.2 (线性相关)

若存在不全为零的常数 $c_1,c_2,\cdots,c_k$，使得恒等式

$$c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_kx_k(x)\equiv 0$$

对于所有 $t\in[a,b]$ 都成立，称 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_k(t)$ 线性相关，否则就称这些函数线性无关

例题 4.1 函数 $\cos t$ 和 $\sin t$ 在任何区间上都是线性无关的；但 $\cos^2 t$ 和 $\sin^2 t-1$ 在任何区间都是线性相关

定义 4.3 (朗斯基行列式)

由定义在区间 $a \le t \le b$ 上的 k 个可微 $k-1$ 次函数 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)$ 所构成的行列式

$$W[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)] := W(t) := \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots x_k(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots x_k'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots \vdots \\ x_1^{(k-1)}(t) & x_2^{(k-1)}(t) & \cdots x_k^{(k-1)}(t) \end{vmatrix}$$

称为 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)$ 的朗斯基行列式 ♣

定理 4.3

若函数 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 在区间 $a \le t \le b$ 上线性相关，则在 $[a, b]$ 上它们的朗斯基行列式 $W(t) \equiv 0$ ♡

证明 由已知知，存在一组不全为零的常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 满足

$$c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_nx_n(t) \equiv 0, \quad a \le t \le b$$

依次对 t 微分此恒等式，得到

$$\begin{cases} c_1x_1'(t) + c_2x_2'(t) + \cdots + c_nx_n'(t) = 0 \\ c_1x_1''(t) + c_2x_2''(t) + \cdots + c_nx_n''(t) = 0 \\ \cdots\cdots \\ c_1x_1^{(n-1)}(t) + c_2x_2^{(n-1)}(t) + \cdots + c_nx_n^{(n-1)}(t) = 0 \end{cases}$$

即为

$$W(t)C = 0$$

由线性代数理论，要此方程组存在非零解，则系数行列式必须为 0，即 $W(t) \equiv 0(a \le t \le b)$ □

笔记 逆定理一般不成立，事实上，容易给出这样的函数组，例如

$$x_1(t) = \begin{cases} t^2, & -1 \le t \le 0 \\ 0, & 0 \le t \le 1 \end{cases}$$

和

$$x_2(t) = \begin{cases} 0, & -1 \le t \le 0 \\ t^2, & 0 \le t \le 1 \end{cases}$$

在区间 $[-1, 1]$ 上，有 $W(t) \equiv 0$，但 $x_1(t), x_2(t)$ 在此区间却是线性无关的

但，当 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 是齐次线性微分方程的解，那么有如下定理

定理 4.4

设齐次线性微分方程的解 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 在区间 $[a, b]$ 上线性无关，则 $W[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)]$ 在这个区间上的任何点都不等于零，即 $W(t) \ne 0(t \in [a, b])$ ♡

证明 反证法，设存在 $t_0 \in [a, b]$, $s.t.\ W(t_0) = 0$，考虑关于 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 的齐次线性微分方程组

$$\begin{cases} c_1x_1(t_0) + c_2x_2(t_0) + \cdots + c_nx_n(t_0) = 0 \\ c_1x_1'(t_0) + c_2x_2'(t_0) + \cdots + c_nx_n'(t_0) = 0 \\ \cdots\cdots \\ c_1x_1^{(n-1)}(t_0) + c_2x_2^{(n-1)}(t_0) + \cdots + c_nx_n^{(n-1)}(t_0) = 0 \end{cases}$$

其系数行列式 $W(t_0)=0$，则存在非零解 $c_1,c_2,\cdots,c_n$，现以这组常数构造函数

$$x(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t),\quad a\le t\le b$$

根据叠加原理，$x(t)$ 是齐次线性微分方程的解，且 $x(t)$ 满足初值条件

$$x(t_0)=x'(t_0)=x''(t_0)=\cdots=x^{(n-1)}(t_0)=0$$

但 $x=0$ 显然也是齐次线性微分方程的解，同时也满足上式，由解的唯一性，即知 $x(t)\equiv 0(a\le t\le b)$，即

$$c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)\equiv 0,\quad a\le t\le b$$

因为 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 不全为 0，这与 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$ 线性无关矛盾 □

笔记　根据以上两个定理得知，由 n 阶齐次线性微分方程的 n 个解构成的朗斯基行列式或者恒等于 0，或者在存在区间范围内恒不等于 0

定理 4.5

n 阶齐次线性微分方程一定存在 n 个线性无关的解

证明　由存在唯一性定理，知满足初值条件

$$\begin{cases}x_1(t_0)=1,x_1'(t_0)=0,\cdots,x_1^{(n-1)}(t_0)=0\\ x_2(t_0)=0,x_2'(t_0)=1,\cdots,x_2^{(n-1)}(t_0)=0\\ \cdots\cdots\\ x_n(t_0)=0,x_n'(t_0)=0,\cdots,x_n^{(n-1)}(t_0)=1\end{cases}$$

的解 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$ 一定存在，又因为

$$W[x_1(t_0),x_2(t_0),\cdots,x_n(t_0)]\ne 0$$

可知，$x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$ 线性无关 □

定理 4.6 (通解结构定理)

设 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$ 是 n 阶齐次线性微分方程的 n 个线性无关的解，则通解可表示为

$$x=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)$$

其中 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是任意常数

证明　只需证明

$$x=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)$$

包含了方程的所有解，由存在唯一性定理知，方程的解唯一地决定于初值条件，因此，只需证明，任给一初值条件

$$x(t_0)=x_0,x'(t_0)=x_0',\cdots,x^{(n-1)}(t_0)=x_0^{(n-1)}$$

能够确定 $c_1,c_2,\cdots,c_n$，满足

$$x=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)$$

现令

$$\begin{cases}c_1x_1(t_0)+c_2x_2(t_0)+\cdots+c_nx_n(t_0)=x_0\\ c_1x_1'(t_0)+c_2x_2'(t_0)+\cdots+c_nx_n'(t_0)=x_0'\\ \cdots\cdots\\ c_1x_1^{(n-1)}(t_0)+c_2x_2^{(n-1)}(t_0)+\cdots+c_nx_n^{(n-1)}(t_0)=x_0^{(n-1)}\end{cases}$$

它的系数行列式就是 $W(t_0)$，由 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$ 是 n 阶齐次线性微分方程的 n 个线性无关的解，知

$W(t_0)\neq 0$，由线性代数方程组的理论知，上述方程组有唯一解 $\widetilde{c}_1,\widetilde{c}_2,\cdots,\widetilde{c}_n$，因此，

$$x=\widetilde{c}_1x_1(t)+\widetilde{c}_2x_2(t)+\cdots+\widetilde{c}_nx_n(t)$$

满足假设的初值条件，定理得证 □

笔记 n 阶齐次线性微分方程的所有解构成一个 n 维线性空间

定义 4.4 (基本解组)

称 n 阶齐次线性微分方程的一组 n 个线性无关解为方程的一个基本解组，特别的，当 $W(t_0)=1$ 时，称其为标准基本解组 ♣

4.1.2 非齐次线性微分方程与常数变易法

知道了齐次线性微分方程通解的结构，以此为基础就不难解决非齐次线性微分方程通解的结构问题

定义 4.5 (非齐次线性微分方程)

形如

$$\frac{d^nx}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=f(t)$$

称为 n 阶非齐次线性微分方程，简称非齐次线性微分方程 ♣

首先容易直接验证如下两个简单性质：

性质

1. 如果 $\overline{x}(t)$ 是非齐次线性微分方程的解，而 $x(t)$ 是对应齐次线性微分方程的解，则 $\overline{x}(t)+x(t)$ 也是非齐次线性微分方程的解
2. 非齐次线性微分方程的任意两个解之差必为对应齐次线性微分方程的解

定理 4.7 (通解结构定理)

设 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$ 为对应齐次线性微分方程的基本解组，而 $\overline{x}(t)$ 是非齐次线性微分方程的某一解，则非齐次线性微分方程的通解可表示为

$$x=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)+\overline{x}(t)$$

♡

证明 只需证明非齐次线性微分方程的任一解 $\widetilde{x}(t)$ 可由上述结构表出

设 $\widetilde{x}(t)$ 是非齐次线性微分方程的任一解，则可知 $\widetilde{x}(t)-\overline{x}(t)$ 是对应齐次线性微分方程的解，由齐次线性微分方程的通解结构定理知，必有一组确定的常数 $\widetilde{c}_1,\widetilde{c}_2,\cdots,\widetilde{c}_n$，使得

$$\widetilde{x}(t)-\overline{x}(t)=\widetilde{c}_1x_1(t)+\widetilde{c}_2x_2(t)+\cdots+\widetilde{c}_nx_n(t)$$

即

$$\widetilde{x}(t)=\widetilde{c}_1x_1(t)+\widetilde{c}_2x_2(t)+\cdots+\widetilde{c}_nx_n(t)+\overline{x}(t)$$

这就是说，非齐次线性微分方程的任一解 $\widetilde{x}(t)$ 可由上述通解结构表出 □

定理告诉我们，要解非齐次线性微分方程，只需知道它的一个解和对应的齐次线性微分方程的基本解组，但进一步指出，只要知道对应的齐次线性微分方程的基本解组就可以利用常数变易法求得非齐次线性微分方程的解

解 设 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$ 为对应齐次线性微分方程的基本解组，因而

$$x=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)$$

为对应齐次线性微分方程的通解，把其中的任意常数 c_i 看作 t 的待定函数 $c_i(t)$，这时通解结构变为

$$x=c_1(t)x_1(t)+c_2(t)x_2(t)+\cdots+c_n(t)x_n(t)$$

将其代回非齐次线性微分方程，就得到 $c_1(t), c_2(t), \cdots, c_n(t)$ 必须满足的一个方程，但待定函数有 n 个，必须再找出 $n-1$ 个限制条件，在理论上，这些另加的条件可以任意给出，当然为了运算上简便，为此，将按下面的方法来给出这 $n-1$ 个条件

对上述等式进行微分得

$$x' = [c_1(t)x_1'(t) + c_2(t)x_2'(t) + \cdots + c_n(t)x_n'(t)] + [c_1'(t)x_1(t) + c_2'(t)x_2(t) + \cdots + c_n'(t)x_n(t)]$$

令

$$c_1'(t)x_1(t) + c_2'(t)x_2(t) + \cdots + c_n'(t)x_n(t) = 0$$

则有

$$x' = c_1(t)x_1'(t) + c_2(t)x_2'(t) + \cdots + c_n(t)x_n'(t)$$

对上述等式进行微分，重复类似操作，令含有函数 $c_i'(t)$ 的部分为 0，得

$$c_1'(t)x_1'(t) + c_2'(t)x_2'(t) + \cdots + c_n'(t)x_n'(t) = 0$$
$$x'' = c_1(t)x_1''(t) + c_2(t)x_2''(t) + \cdots + c_n(t)x_n''(t)$$

继续上面做法，在最后一次我们得到第 $n-1$ 个条件

$$c_1'(t)x_1^{(n-2)}(t) + c_2'(t)x_2^{(n-2)}(t) + \cdots + c_n'(t)x_n^{(n-2)}(t) = 0$$
$$x^{(n-1)} = c_1(t)x_1^{(n-1)}(t) + c_2(t)x_2^{(n-1)}(t) + \cdots + c_n(t)x_n^{(n-1)}(t)$$

最后再对上述等式进行微分得

$$x^{(n)} = [c_1(t)x_1^{(n)}(t) + c_2(t)x_2^{(n)}(t) + \cdots + c_n(t)x_n^{(n)}(t)] + [c_1'(t)x_1^{(n-1)}(t) + c_2'(t)x_2^{(n-1)}(t) + \cdots + c_n'(t)x_n^{(n-1)}(t)]$$

将 $x, x', x'', \cdots, x^{(n)}$ 的表达式代回非齐次线性微分方程，得到

$$c_1'(t)x_1^{(n-1)}(t) + c_2'(t)x_2^{(n-1)}(t) + \cdots + c_n'(t)x_n^{(n-1)}(t) = f(t)$$

这样，我们就得到了含 n 个未知函数 $c_i'(t)$ 的 n 个方程

$$\begin{cases} c_1'(t)x_1(t) + c_2'(t)x_2(t) + \cdots + c_n'(t)x_n(t) = 0 \\ c_1'(t)x_1'(t) + c_2'(t)x_2'(t) + \cdots + c_n'(t)x_n'(t) = 0 \\ \cdots\cdots \\ c_1'(t)x_1^{(n-1)}(t) + c_2'(t)x_2^{(n-1)}(t) + \cdots + c_n'(t)x_n^{(n-1)}(t) = f(t) \end{cases}$$

其系数行列式为 $W[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)] \neq 0$，因而方程组的解可以唯一确定，设求得

$$c_i'(t) = \varphi_i(t), \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

积分得

$$c_i(t) = \int \varphi_i(t)dt + \gamma_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

将所得表达式代回，即得非齐次线性微分方程的通解

$$x = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i x_i(t) + \sum_{i=1}^{n} \int \varphi_i(t)dt \cdot x_i(t)$$

例题 4.2 求方程

$$x'' + x = \frac{1}{\cos t}$$

的通解，已知它的对应齐次线性微分方程的基本解组为 $\cos t, \sin t$

解 应用常数变易法，设

$$x = c_1(t)\cos t + c_2(t)\sin t$$

得到方程组

$$\begin{cases} c_1'(t)\cos t + c_2'(t)\sin t = 0 \\ -c_1'(t)\sin t + c_2'(t)\cos t = \frac{1}{\cos t} \end{cases}$$

解得

$$c_1'(t) = -\frac{\sin t}{\cos t}, \quad c_2'(t) = 1$$

由此

$$c_1(t) = \ln|\cos t| + \gamma_1, \quad c_2(t) = t + \gamma_2$$

于是方程的通解为

$$x = \gamma_1 \cos t + \gamma_2 \sin t + \cos t \ln|\cos t| + t\sin t$$

例题 4.3 求方程

$$tx'' - x' = t^2$$

在域 $t \neq 0$ 上的通解

解 对应齐次线性微分方程为

$$tx'' - x' = 0$$

容易得到基本解组为 $1, t^2$，设

$$x = c_1(t) + c_2(t)t^2$$

代入得到方程组

$$\begin{cases} c_1'(t) + c_2'(t)t^2 = 0 \\ 2tc_2'(t) = t \end{cases}$$

解得

$$c_1(t) = -\frac{1}{6}t^3 + \gamma_1, \quad c_2(t) = \frac{1}{2}t + \gamma_2$$

故原方程通解为

$$x = \gamma_1 + \gamma_2 t^2 + \frac{1}{3}t^3$$

4.2 常系数线性微分方程的解法

关于线性微分方程的通解的结构问题，从理论上来说，可以认为已经解决，但是求方程通解的方法还没有具体给出，事实上，对于一般的线性微分方程是没有普遍的解法的，本节介绍求解问题能够彻底解决的一类方程，常系数线性微分方程及其可以化为这一类型的方程，我们将看到，为了求得常系数齐次线性微分方程的通解，只需解一个代数方程而不必通过积分运算，对于某些特殊的非齐次线性微分方程也可以通过代数运算和微分运算来求得通解

讨论常系数线性微分方程的解法时，需要涉及实变量的复值函数及复指数函数的问题，下面给出介绍

4.2.1 复值函数与复值解

定义 4.6 (复值函数)

如果对于区间 $t \in [a, b]$ 中的每一实数 t，有复数 $z(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$ 与它对应，其中 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 为定义在 $[a, b]$ 上的实函数，则称 $z(t)$ 为复值函数 ♣

定义 4.7 (极限)

设实函数 $\varphi(t),\psi(t)$ 当 t 趋于 t_0 时有极限，则称复值函数 $z(t)$ 当 t 趋于 t_0 时有极限，并且定义

$$\lim_{t\to t_0} z(t) = \lim_{t\to t_0} \varphi(t) + i\lim_{t\to t_0} \psi(t)$$

若 $\lim_{t\to t_0} z(t) = z(t_0)$，则称 $z(t)$ 在 t_0 连续

若 $\lim_{t\to t_0} \frac{z(t)-z(t_0)}{t-t_0}$ 存在，则称 $z(t)$ 在 t_0 可微

在讨论常系数线性微分方程时，函数 e^{Kt} 将起着重要的作用，下面给出它的定义，并且讨论它的简单性质

定义 4.8 (复指数函数)

设 $K=\alpha+i\beta$ 是任一复数，定义复指数函数为

$$e^{Kt} = e^{(\alpha+i\beta)t} := e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)$$

性质

1. $\cos\theta t = \frac{1}{2}(e^{i\theta t}+e^{-i\theta t})$， $\sin\theta t = \frac{1}{2i}(e^{i\theta t}-e^{-i\theta t})$
2. $e^{\overline{K}t} = \overline{e^{Kt}}$
3. $e^{(K_1+K_2)t} = e^{K_1 t}\cdot e^{K_2 t}$
4. $\frac{de^{Kt}}{dt} = Ke^{Kt}$
5. $\frac{d^n}{dt^n}(e^{Kt}) = K^n e^{Kt}$

现在我们引入线性微分方程的复值解的定义

定义 4.9 (复值解)

设 $x=z(t)$ 定义于 $[a,b]$ 上，称 $z(t)$ 为线性微分方程复值解，若满足

$$\frac{d^n z(t)}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}z(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\frac{dz(t)}{dt} + a_n(t)z(t) = f(t)$$

最后给出两个简单定理

定理 4.8

设齐次线性微分方程中所有系数 $a_i(t)$ 为实值函数，而 $z(t)=\varphi(t)+i\psi(t)$ 为方程的复值解，则 $z(t)$ 的实部 $\varphi(t)$、虚部 $\psi(t)$ 以及共轭复数函数 $\overline{z}(t)$ 都是齐次线性微分方程的解

定理 4.9

若方程

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt} + a_n(t)x = u(t)+iv(t)$$

有复值解 $z(t)=U(t)+iV(t)$，其中 $a_i(t)$ 为实值函数，则这个解的实部 $U(t)$ 和虚部 $V(t)$ 分别是方程

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt} + a_n(t)x = u(t)$$

和

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt} + a_n(t)x = v(t)$$

的解

4.2.2 常系数齐次线性微分方程

定义 4.10 (常系数齐次线性微分方程)

若齐次线性微分方程中所有系数都为常数，即

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_n x=0$$

称为常系数齐次线性微分方程

♣

定义 4.11 (特征方程)

定义常系数齐次线性微分方程

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_n x=0$$

的特征方程为

$$F(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$$

特征方程的根，称为特征根

♣

下面正式讨论常系数齐次线性微分方程的解法

解 [特征根法]　记

$$L[x]\equiv\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_n x$$

注意到

$$\begin{aligned}L[e^{\lambda t}]&=\frac{d^n e^{\lambda t}}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}e^{\lambda t}}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{de^{\lambda t}}{dt}+a_n e^{\lambda t}\\&=(\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n)e^{\lambda t}\equiv F(\lambda)e^{\lambda t}\end{aligned}$$

易知，$x=e^{\lambda t}$ 是方程的解的充要条件是 λ 是代数方程

$$F(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0$$

的根

根据特征根的不同情况分别进行讨论

1. 特征根是单根

   设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是特征方程的 n 个彼此不相等的根，则相应常系数齐次线性微分方程的有如下 n 个解

   $$e^{\lambda_1 t},e^{\lambda_2 t},\cdots,e^{\lambda_n t}$$

   我们指出这 n 个解彼此线性无关，从而组成方程的基本解组

   事实上，

   $$\begin{aligned}W(t)&=\begin{vmatrix}e^{\lambda_1 t}&e^{\lambda_2 t}&\cdots&e^{\lambda_n t}\\\lambda_1 e^{\lambda_1 t}&\lambda_2 e^{\lambda_2 t}&\cdots&\lambda_n e^{\lambda_n t}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\lambda_1^{n-1}e^{\lambda_1 t}&\lambda_2^{n-1}e^{\lambda_2 t}&\cdots&\lambda_n^{n-1}e^{\lambda_n t}\end{vmatrix}\\&=e^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)t}\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\\lambda_1&\lambda_2&\cdots&\lambda_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\lambda_1^{n-1}&\lambda_2^{n-1}&\cdots&\lambda_n^{n-1}\end{vmatrix}\\&=e^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)t}\prod_{1\le j<i\le n}(\lambda_i-\lambda_j)\neq 0\end{aligned}$$

   于是可知这 n 个解彼此线性无关，从而组成方程的基本解组

(a). 若 λ_i 均为实数，则

$$e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \cdots, e^{\lambda_n t}$$

是方程的 n 个线性无关的实值解，而通解可表示为

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n e^{\lambda_n t}$$

(b). 若特征方程存在复根，则因方程系数是实常数，复根将成对共轭出现，设 $\lambda_1 = \lambda + i\beta$ 是一特征根，则 $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ 也是特征根，从而微分方程有两个复值解

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)$$
$$e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t - i\sin\beta t)$$

从而可知，上述复值解的实部和虚部也是微分方程的解，这样一来，对应于这一对共轭特征根，我们可以求得实值解

$$e^{\alpha t}\cos\beta t, \quad e^{\alpha t}\sin\beta t$$

2. 特征根有重根

设特征方程有 k 重根 $\lambda = \lambda_1$，则如所周知

$$F(\lambda_1) = F'(\lambda_1) = \cdots = F^{(k-1)}(\lambda_1) = 0, \quad F^{(k)}(\lambda_1) \neq 0$$

(a). 先设 $\lambda_1 = 0$，即特征方程有因子 λ^k，于是特征方程的形状为

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-k}\lambda^k = 0$$

对应的微分方程为

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-k}\frac{d^k x}{dt} = 0$$

易见它有 k 个解 $1, t, \cdots, t^{k-1}$，且彼此线性无关，这样一来，特征方程的 k 重零根就对应于微分方程的 k 个线性无关解 $1, t, \cdots, t^{k-1}$

(b). 如果这个 k 重根 $\lambda_1 \neq 0$，作变量变换 $x = ye^{\lambda_1 t}$，注意到

$$\begin{aligned} x^{(m)} &= (ye^{\lambda_1 t})^{(m)} \\ &= e^{\lambda_1 t}[y^{(m)} + m\lambda_1 y^{(m-1)} + \cdots + \lambda_1^m y] \end{aligned}$$

可得

$$L[x] = L[ye^{\lambda_1 t}] = (\frac{d^n y}{dt^n} + b_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + b_{n-1}\frac{dy}{dt} + b_n y)e^{\lambda_1 t} = L_1[y]e^{\lambda_1 t}$$

于是微分方程化为

$$L_1[y] = \frac{d^n y}{dt^n} + b_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + b_{n-1}\frac{dy}{dt} + b_n y = 0$$

对应的特征方程为

$$G(\mu) = \mu^n + b_1\mu^{n-1} + \cdots + b_{n-1}\mu + b_n = 0$$

直接计算得到

$$F(\mu+\lambda_1)e^{(\mu+\lambda_1)t} = L[e^{(\mu+\lambda_1)t}] = L_1[e^{\mu t}]e^{\lambda_1 t} = G(\mu)e^{(\mu+\lambda_1)t}$$

因此

$$F(\mu+\lambda_1) = G(\mu)$$

从而

$$F^{(i)}(\mu+\lambda_1) = G^{(i)}(\mu), \quad i = 1, 2, \cdots, k$$

可见 $F(\lambda)$ 的根 $\lambda = \lambda_1$ 对应于 $G(\mu)$ 的根 $\mu = \mu_1 = 0$，而且重数相同，这样问题就化为前面已经讨论过的情形

此时，我们知道 $G(\mu)$ 的 k 重根 $\mu_1=0$ 对应于 $L_1[y]$ 的 k 个解 $y=1,t,\cdots,t^{k-1}$，因而对应于特征方程 $F(\lambda)$ 的 k 个解，微分方程 $L[x]$ 有 k 个解

$$e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \cdots, t^{k-1}e^{\lambda_1 t}$$

对于有复重根的情况，若 $\lambda=\alpha+i\beta$ 是 k 重特征根，则 $\overline{\lambda}=\alpha-i\beta$ 也是 k 重特征根，类似处理，我们将得到代替的 $2k$ 个实值解

$$e^{\alpha t}\cos\beta t,\ te^{\alpha t}\cos\beta t, \cdots,\ t^{k-1}e^{\alpha t}\cos\beta t$$
$$e^{\alpha t}\sin\beta t,\ te^{\alpha t}\sin\beta t, \cdots,\ t^{k-1}e^{\alpha t}\sin\beta t$$

例题 4.4 求方程

$$\frac{d^4x}{dt^4}-x=0$$

的通解

解 对应的特征方程为

$$\lambda^4-1=0$$

特征根为

$$\lambda_1=1, \lambda_2=-1, \lambda_3=i, \lambda_4=-i$$

均是单根

故方程的通解为

$$x=c_1e^t+c_2e^{-t}+c_3\cos t+c_4\sin t$$

例题 4.5 求解方程

$$\frac{d^3x}{dt^3}+x=0$$

解 对应的特征方程为

$$\lambda^3+1=0$$

特征根为

$$\lambda_1=-1, \lambda_2=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, \lambda_3=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

均是单根

故方程的通解为

$$x=c_1e^{-t}+e^{\frac{1}{2}t}(c_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t)$$

例题 4.6 求方程

$$\frac{d^3x}{dt^3}-3\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}-x=0$$

的通解

解 对应的特征方程为

$$\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=0$$

特征根为

$$\lambda_{1,2,3}=1$$

故方程的通解为

$$x=(c_1+c_2t+c_3t^2)e^t$$

4.2.3 欧拉方程

下面我们讨论能够通过变量变换为常系数齐次线性微分方程的欧拉方程

命题 4.1 (欧拉方程)

形如

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}x\frac{dy}{dx}+a_ny=0$$

的微分方程，称为欧拉方程

解 事实上，引进自变量的变换

$$x=e^t,\quad t=\ln x$$

直接计算得到

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=e^{-t}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=e^{-t}\frac{d}{dt}(e^{-t}\frac{dy}{dt})=e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt})$$

用归纳不难得到：

$$\frac{d^ky}{dx^k}=e^{-kt}(\frac{d^ky}{dt^k}+\beta_1\frac{d^{k-1}y}{dt^{k-1}}+\cdots+\beta_{k-1}\frac{dy}{dt})$$

将上述关系式代入原方程，就得到常系数齐次线性微分方程

$$\frac{d^ny}{dt^n}+b_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+b_{n-1}\frac{dy}{dt}+b_ny=0$$

因而可用特征根法求出该方程的通解，再代回原变量 $(t=\ln|x|)$ 就可求得原方程的通解

由特征根法的推导过程，我们知道变换后的常系数齐次线性微分方程有形如 $y=e^{\lambda t}$ 的解，从而原方程有形如 $y=x^{\lambda}$ 的解，因此可以直接求欧拉方程的形如 $y=x^K$ 的解

以 $y=x^K$ 代入欧拉方程，并约去因子 x^K，就得到确定 K 的代数方程

$$K(K-1)\cdots(K-n+1)+a_1K(K-1)\cdots(K-n+2)+\cdots+a_n=0$$

可以证明这正是变换后的微分方程的特征方程，因此方程的 m 重实根 $K=K_0$，对应于 m 个解

$$x^{K_0},x^{K_0}\ln|x|,\cdots,x^{K_0}\ln^{m-1}|x|$$

例题 4.7 求解方程

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y=0$$

解 特征方程为

$$K(K-1)-K+1=0\Longrightarrow K_1=K_2=1$$

因此，通解为

$$y=(c_1+c_2\ln|x|)x$$

例题 4.8 求解方程

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}+5y=0$$

解 特征方程为

$$K(K-1)+3K+5=0\Longrightarrow K_1=-1+2i,K_2=-1+2i$$

因此，通解为

$$y=\frac{1}{x}[c_1\cos(2\ln|x|)+c_2\sin(2\ln|x|)]$$

4.2.4 比较系数法

下面介绍当 $f(t)$ 具有某些特殊形状时所使用的方法，特点是不需要通过积分而用代数方法即可求得非齐次线性微分方程的特解，即将求解微分方程的问题转化为某一个代数问题来处理，因而比较简便

定理 4.10

设 $f(t)=(\sum_{i=0}^{m} b_i t^{m-i})e^{\lambda t}$，则常系数非齐次线性微分方程

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_n x=f(t)$$

有形如

$$\widetilde{x}=t^k(\sum_{i=0}^{m} B_i t^{m-i})e^{\lambda t}$$

的特解

其中 k 是特征方程 $F(\lambda)=0$ 的根 λ 的重数，$B_0,B_1,\cdots,B_m$ 可以通过待定系数来确定

证明

1. 若 $\lambda=0$，则此时

$$f(t)=b_0t^m+b_1t^{m-1}+\cdots+b_m$$

(a). $\lambda=0$ 不是特征根，即 $F(0)\neq 0$，因而 $a_n\neq 0$，这时取 $k=0$，将

$$\widetilde{x}=\sum_{i=0}^{m} B_i t^{m-i}$$

代回方程，并比较 t 的同次幂的系数，得到常数 $B_0,B_1,\cdots,B_m$ 需满足的方程

$$\begin{cases} B_0a_n=b_0 \\ B_1a_n+mB_0a_{n-1}=b_1 \\ B_2a_n+(m-1)B_1a_{n-1}+m(m-1)B_0a_{n-2}=b_2 \\ \cdots\cdots \\ B_ma_n+\cdots=b_m \end{cases}$$

从而可以将 $B_0,B_1,\cdots,B_m$ 逐一解出

(b). $\lambda=0$ 是 k 重特征根，即 $F(0)=F'(0)=\cdots=F^{(k-1)}(0)=0, F^{(k)}(0)\neq 0$，也就是 $a_n=a_{n-1}=\cdots=a_{n-k+1}=0, a_{n-k}\neq 0$，此时相应地，方程为

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-k}\frac{d^k x}{dt^k}=f(t)$$

令 $\frac{d^k x}{dt^k}=z$，则

$$\frac{d^{n-k}z}{dt^{n-k}}+a_1\frac{d^{n-k-1}z}{dt^{n-k-1}}+\cdots+a_{n-k}z=f(t)$$

对于上述方程，由于 $a_{n-k}\neq 0$，$\lambda=0$ 已不是它的特征根，因而可知它有形如

$$\widetilde{z}=\sum_{i=0}^{m}\widetilde{B}_i t^{m-i}$$

的特解，因而原方程有特解 $\widetilde{x}$ 满足

$$\frac{d^k\widetilde{x}}{dt^k}=\widetilde{z}=\sum_{i=0}^{m}\widetilde{B}_i t^{m-i}$$

这表明 $\widetilde{x}$ 是 t 的 $m+k$ 次多项式，其中 t 的幂次 $\leq k-1$ 的项带有任意常数，但因我们只需确定一个特解就够，特别的取这些任意常数均为 0，于是得到原方程的一个特解

$$\widetilde{x}=t^k(\gamma_0t^m+\gamma_1t^{m-1}+\cdots+\gamma_m)$$

2. 若 $\lambda \neq 0$，则此时可作变量变换 $x = ye^{\lambda t}$，将方程化为

$$\frac{d^n y}{dt^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + A_{n-1} \frac{dy}{dt} + A_n y = b_0 t^m + \cdots + b_m$$

此时原特征方程的根 λ 对应于变换后的特征方程的零根，并且重数也相同，因此利用上面的结果就有如下结论

(a). λ 不是特征根时，变化后的方程有特解

$$\widetilde{y} = B_0 t^m + B_1 t^{m-1} + \cdots + B_m$$

从而原方程有特解

$$\widetilde{x} = (B_0 t^m + B_1 t^{m-1} + \cdots + B_m) e^{\lambda t}$$

(b). λ 是 k 重特征根时，变换后的方程有特解

$$\widetilde{y} = t^k (B_0 t^m + B_1 t^{m-1} + \cdots + B_m)$$

从而原方程有特解

$$\widetilde{x} = t^k (B_0 t^m + B_1 t^{m-1} + \cdots + B_m) e^{\lambda t}$$

□

例题 4.9 求方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} - 3x = 3t + 1$$

的通解

解 先求对应齐次线性微分方程的通解为

$$x = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t}$$

再求非齐次线性微分方程的一个特解，这里 $f(t) = 3t + 1, \lambda = 0$，$\lambda = 0$ 不是特征根，故可取特解形如

$$\widetilde{x} = A + Bt$$

代入方程得到

$$-2B - 3A - 3Bt = 3t + 1$$

比较系数得到

$$A = \frac{1}{3}, B = -1$$

从而特解为

$$\widetilde{x} = \frac{1}{3} - t$$

由此，通解为

$$x = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} - t + \frac{1}{3}$$

定理 4.11

设 $f(t) = [A(t)\cos\beta t + B(t)\sin\beta t]e^{\alpha t}$，$A(t), B(t)$ 是实系数多项式，则常系数非齐次线性微分方程

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = f(t)$$

有形如

$$\widetilde{x} = t^k [P(t)\cos\beta t + Q(t)\sin\beta t] e^{\alpha t}$$

的特解

其中 k 是特征方程 $F(\lambda) = 0$ 的根 $\alpha + i\beta$ 的重数

例题 4.10 求方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}+4x=\cos 2t$$

的通解

解 先求对应齐次线性微分方程的通解

$$x=(c_1+c_2t)e^{-2t}$$

现求非齐次线性微分方程的一个特解，因 $\pm 2i$ 不是特征根，故特解形如

$$\widetilde{x}=A\cos 2t+B\sin 2t$$

代回方程

$$8B\cos 2t-8A\sin 2t=\cos 2t$$

比较系数得到

$$A=0, B=\frac{1}{8}$$

从而得到特解

$$\widetilde{x}=\frac{1}{8}\sin 2t$$

由此，通解为

$$x=(c_1+c_2t)e^{-2t}+\frac{1}{8}\sin 2t$$

4.3 高阶微分方程的降阶和幂级数解法

一般的高阶微分方程没有普遍的解法，处理问题的基本原则是降阶，利用变换把高阶微分方程的求解问题化为较低阶的方程来求解，因为一般来说，低阶微分方程的求解会比求解高阶微分方程方便些

4.3.1 可降阶的方程

n 阶微分方程一般地可写为

$$F(t,x,x',\cdots,x^{(n)})=0$$

下面讨论三类特殊方程的降阶问题

4.3.1.1 F 不显含 x

方程不显含 x，或更一般地，设方程不含 $x,x',\cdots,x^{(k-1)}$，即方程形如

$$F(t,x^{(k)},x^{(k+1)},\cdots,x^{(n)})=0 \quad (1\le k\le n)$$

若令 $x^{(k)}=y$，则方程降维关于 y 的 $n-k$ 阶方程

$$F(t,y,y',\cdots,y^{(n-k)})=0$$

如果能够求得上式的通解

$$y=\varphi(t,c_1,c_2,\cdots,c_{n-k})$$

即有

$$x^{(k)}=\varphi(t,c_1,c_2,\cdots,c_{n-k})$$

再经过 k 次积分得到

$$x=\psi(t,c_1,c_2,\cdots,c_n)$$

可以验证，这就是原方程的通解

例题 4.11 求方程

$$\frac{d^5x}{dt^5} - \frac{1}{t}\frac{d^4x}{dt^4} = 0$$

的解

解 令

$$\frac{d^4x}{dt^4} = y$$

则方程变为

$$\frac{dy}{dt} - \frac{1}{t}y = 0$$

这是一阶方程，积分后得到 $y = ct$，即

$$\frac{d^4x}{dt^4} = ct$$

于是通解为

$$x = c_1t^5 + c_2t^3 + c_3t^2 + c_4t + c_5$$

4.3.1.2 F 不显含 t

不显含自变量 t 的方程

$$F(x, x', \cdots, x^{(n)}) = 0$$

令 $x' = y$，并以 y 为新未知函数，以 x 为新自变量，则方程可以降低一阶

例题 4.12 求解方程

$$xx'' + (x')^2 = 0$$

解 令 $x' = y$，可得

$$x'' = y\frac{dy}{dx}$$

于是原方程可以化为

$$xy\frac{dy}{dx} + y^2 = 0$$

得到

$$y = 0 \quad or \quad x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

积分后得到

$$y = \frac{c}{x}$$

即

$$x' = \frac{c}{x}$$

所以

$$x^2 = c_1t + c_2$$

4.3.1.3 齐次线性微分方程

齐次线性微分方程

$$\frac{d^nx}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt} + a_n(t)x = 0$$

我们知道，齐次线性微分方程的求解问题归结于寻求方程的 n 个线性无关的特解，对于一般的齐次线性微分方程，没有普遍的方法可以解出特解，但可以指出，如果知道方程的一个非零特解，则利用变换，可将方程降低

一阶，使得新得到的方程也是齐次线性的

事实上，设 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 是方程的 k 个线性无关的解，令 $x=x_ky$，可得

$$\begin{cases} x'=x_ky'+x_k'y \\ x''=x_ky''+2x_k'y'+x_k''y \\ \cdots\cdots \\ x^{(n)}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x_k^{(i)}y^{(n-i)} \end{cases}$$

将这些关系式代回方程，得到

$$x_ky^{(n)}+[nx_k'+a_1(t)x_k]y^{(n-1)}+\cdots+[x_k^{(n)}+a_1x_k^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x_k]y=0$$

这是关于 y 的 n 阶方程，且各项系数都是 t 的已知函数，而 y 的系数恒等于 0

因此，若令 $z=y'$，并在 $x_k\neq 0$ 的区间上用 x_k 除方程的各项，可以得到

$$z^{(n-1)}+b_1(t)z^{(n-2)}+\cdots+b_{n-1}(t)z=0$$

的 $n-1$ 阶齐次线性微分方程

由以上变换知道，$x=x_k\int zdz$

由上面的讨论，可以看到，利用 k 个线性无关特解，可以把方程降低 k 阶，成为 $n-k$ 阶齐次线性微分方程

例题 4.13 已知 $x=x_1=\frac{\sin t}{t}$ 是方程

$$x''+\frac{2}{t}x'+x=0$$

的解，试求方程的通解

解 令

$$x=\frac{\sin t}{t}\int ydy$$

代入得

$$\frac{\sin t}{t}\frac{dy}{dt}+\frac{2\cos t}{t}y=0$$

解得

$$y=-c\cot t$$

因而通解为

$$x=\frac{\sin t}{t}(c_1-c\cot t)=\frac{1}{t}(c_1\sin t-c\cos t)$$

4.3.2 二阶线性微分方程的幂级数解法

由上面讨论知道，二阶变系数齐次线性微分方程的求解问题归结为寻求它的一个非零解，由于方程的系数是自变量的函数，故不能采用比较系数等的代数方式去求解，但是，从微积分学中知道，在满足某些条件下，可以用幂级数来表示一个函数，因此，自然想到采用幂级数来表示微分方程的解，下面就来讨论这一问题

定理 4.12

设二阶齐次线性微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0$$

若 $p(x),q(x)$ 都能展成 x 的幂级数，且收敛区间为 $|x|<R$，则方程有形如

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

的特解，也以 $|x|<R$ 为收敛区间

例题 4.14 求解方程

$$y'' - xy = 0$$

的特解

解 设 $y = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$ 为方程的解，微分两次，有

$$y'' = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + \cdots + n(n-1)a_n x^{n-2} + \cdots$$

将 y, y'' 的表达式代入方程，并比较系数，得到

$$\begin{cases} 2a_2 = 0 \\ 3 \cdot 2a_3 - a_0 = 0 \\ 4 \cdot 3a_4 - a_1 = 0 \\ \cdots\cdots \end{cases}$$

一般有

$$a_{3k} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (3k-1)3k},\ a_{3k+1} = \frac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot 3k \cdot (3k+1)},\ a_{3k+2} = 0$$

因而通解为

$$y = a_0[1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \cdots] + a_1[x + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^7}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots]$$

第五章 线性微分方程组

本章研究线性微分方程组的理论，在微分方程的理论中，线性微分方程组是非常值得重视的一部分内容，为了研究这些线性微分方程组，我们引进向量和矩阵的记号，并广泛利用线性代数的结果

5.1 存在唯一性定理

5.1.1 记号和定义

考察形如

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ x_2' = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ \cdots\cdots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{cases}$$

可将方程组用矩阵表示

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$$

其中

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

定义 5.1 (连续)

一个矩阵或一个向量在区间 $a \le t \le b$ 上称为连续的，如果它的每一个元都是区间 $a \le t \le b$ 上的连续函数

♣

定义 5.2 (可微)

n 阶方阵 $\mathbf{B}(t)$ 在区间 $a \le t \le b$ 上称为可微的，若它的每一个元都在区间 $a \le t \le b$ 上可微

♣

笔记 矩阵函数的导数由下给出

$$\mathbf{B}'(t) = \begin{bmatrix} b_{11}'(t) & b_{12}'(t) & \cdots & b_{1n}'(t) \\ b_{21}'(t) & b_{22}'(t) & \cdots & b_{2n}'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}'(t) & b_{n2}'(t) & \cdots & b_{nn}'(t) \end{bmatrix}$$

不难证明，方阵函数的导数有下列性质

性质

1. $[\mathbf{A}(t) + \mathbf{B}(t)]' = \mathbf{A}'(t) + \mathbf{B}'(t)$
2. $[\mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{B}(t)]' = \mathbf{A}'(t)\mathbf{B}(t) + \mathbf{A}(t)\mathbf{B}'(t)$

类似的，可以定义矩阵函数的可积

定义 5.3 (可积)

矩阵函数 $\mathbf{B}(t)$ 在区间 $a \le t \le b$ 上称为可积的，若它的每一个元都在区间 $a \le t \le b$ 上可积

♣

笔记 矩阵函数的积分由下式给出

$$\int_a^b \mathbf{B}(t)dt = \begin{bmatrix} \int_a^b b_{11}(t)dt & \int_a^b b_{12}(t)dt & \cdots & \int_a^b b_{1n}(t)dt \\ \int_a^b b_{21}(t)dt & \int_a^b b_{22}(t)dt & \cdots & \int_a^b b_{2n}(t)dt \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_a^b b_{n1}(t)dt & \int_a^b b_{n2}(t)dt & \cdots & \int_a^b b_{nn}(t)dt \end{bmatrix}$$

现在我们给出微分方程组解的定义

定义 5.4

设 $\mathbf{A}(t)$ 是区间 $a \le t \le b$ 上的连续 $n \times n$ 矩阵，$\mathbf{f}(t)$ 是同一区间 $a \le t \le b$ 上的连续 n 维向量，方程组

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$$

若向量 $\mathbf{u}(t)$ 在某一区间 $\alpha \le t \le \beta$ 满足方程组，即

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{f}(t), \quad \alpha \le t \le \beta$$

则称 $\mathbf{u}(t)$ 是方程组的解 ♣

考虑 n 阶线性微分方程的初值问题

$$\begin{cases} x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = f(t), \\ x(t_0) = \eta_1,\ x'(t_0) = \eta_2,\ \cdots,\ x^{(n-1)}(t_0) = \eta_n \end{cases}$$

其中 $a_1(t), a_2(t), \cdots, a_n(t), f(t)$ 是区间 $a \le t \le b$ 上的已知连续函数，$t_0 \in [a,b]$，可以指出，上述方程可以化为下列线性微分方程组的初值问题

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \cdots & -a_1(t) \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{\eta} \end{cases}$$

其中

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix}.$$

事实上，令

$$x_1 = x,\ x_2 = x',\ x_3 = x'',\ \cdots,\ x_n = x^{(n-1)}$$

这时

$$\begin{aligned} &x_1' = x' = x_2,\ x_2' = x'' = x_3,\ \cdots,\ x_{n-1}' = x^{(n-1)} = x_n, \\ &x_n' = x^{(n)} = -a_n(t)x_1 - a_{n-1}(t)x_2 - \cdots - a_1(t)x_n + f(t), \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} &x_1(t_0) = x(t_0) = \eta_1, \quad x_2(t_0) = x'(t_0) = \eta_2, \cdots, \\ &x_n(t_0) = x^{(n-1)}(t_0) = \eta_n. \end{aligned}$$

1. 设 $\psi(t)$ 是包含 t_0 的区间 $a \le t \le b$ 上的 n 阶线性微分方程的任一解，即

$$\begin{cases}\psi^{(n)} + a_1(t)\psi^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)\psi' + a_n(t)\psi = f(t)\\ \psi(t_0) = \eta_1,\ \psi'(t_0) = \eta_2,\ \cdots,\ \psi^{(n-1)}(t_0) = \eta_n\end{cases}$$

令

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \begin{bmatrix}\varphi_1(t)\\ \varphi_2(t)\\ \vdots\\ \varphi_n(t)\end{bmatrix}$$

其中 $\varphi_1(t) = \psi(t), \varphi_2(t) = \psi'(t), \cdots, \varphi_n(t) = \psi^{(n-1)}(t)\ (a \le t \le b)$，显然有 $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \boldsymbol{\eta}$
此外，还有

$$\boldsymbol{\varphi}'(t) = \begin{bmatrix}\varphi_1'(t)\\ \varphi_2'(t)\\ \vdots\\ \varphi_{n-1}'(t)\\ \varphi_n'(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\psi'(t)\\ \psi''(t)\\ \vdots\\ \psi^{(n-1)}(t)\\ \psi^{(n)}(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\varphi_2(t)\\ \varphi_3(t)\\ \vdots\\ \varphi_n(t)\\ -a_1(t)\phi^{(n-1)}(t) - \cdots - a_n(t)\psi(t) + f(t)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\varphi_2(t)\\ \varphi_3(t)\\ \vdots\\ \varphi_n(t)\\ -a_n(t)\varphi_1(t) - \cdots - a_1(t)\varphi_n(t) + f(t)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & \cdots & -a_2(t) & -a_1(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_1(t)\\ \varphi_2(t)\\ \vdots\\ \varphi_{n-1}(t)\\ \varphi_n(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ f(t)\end{bmatrix}$$

这表明 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是线性方程组的解

2. 反之，设 $\boldsymbol{u}(t)$ 是在包含 t_0 的区间 $a \le t \le b$ 上的线性方程组的解，令

$$\boldsymbol{u}(t) = \begin{bmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\\ \vdots\\ u_n(t)\end{bmatrix}$$

并令 $w(t) = u_1(t)$，可以得到

$$\begin{aligned}w^{(n)}(t) =& u_n'(t)\\ =& - a_n(t)u_1(t) - a_{n-1}(t)u_2(t) - \cdots - a_1(t)u_n(t) + f(t)\\ =& - a_1(t)w^{(n-1)}(t) - a_2(t)w^{(n-2)}(t) - \cdots - a_n(t)w(t) + f(t),\end{aligned}$$

由此得到

$$w^{(n)}(t) + a_1(t)w^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n(t)w(t) = f(t)$$

同时也有

$$w(t_0) = u_1(t_0) = \eta_1, \cdots, w^{(n-1)}(t_0) = u_n(t_0) = \eta_n$$

即表明 $w(t)$ 是 n 次线性微分方程的一个解

笔记　有上面的讨论，已经证明 n 阶线性微分方程初值问题是可以改写成 n 阶线性微分方程组，值得一提的是，反之不成立

例题 5.1　方程组

$$x' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

不能化为一个二阶微分方程

5.1.2 存在唯一性定理

对于 $n \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{n\times n}$ 和 n 维向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$，定义范数为

$$\| \boldsymbol{A} \| = \sum_{i,j=1}^{n} | a_{ij} |, \| \boldsymbol{x} \| = \sum_{i=1}^{n} | x_i |$$

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是 $n \times n$ 矩阵，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 是 n 维向量，容易证明有下列性质:

性质

1. $\| \boldsymbol{AB} \| \leqslant \| \boldsymbol{A} \| \cdot \| \boldsymbol{B} \|, \quad \| \boldsymbol{Ax} \| \leqslant \| \boldsymbol{A} \| \cdot \| \boldsymbol{x} \|$
2. $\| \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} \| \leqslant \| \boldsymbol{A} \| + \| \boldsymbol{B} \|, \quad \| \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \| \leqslant \| \boldsymbol{x} \| + \| \boldsymbol{y} \|$

定义 5.5 (收敛)

- 向量序列 $\{\boldsymbol{x}_k\}, \boldsymbol{x}_k = (x_{1k}, x_{2k}, \cdots, x_{nk})^T$ 称为收敛的，若满足对每一个 $i (i = 1, 2, \cdots, n)$，数列 $\{x_{ik}\}$ 收敛
- 向量函数序列 $\{\boldsymbol{x}_k(t)\}, \boldsymbol{x}_k(t) = (x_{1k}(t), x_{2k}(t), \cdots, x_{nk}(t))^T$ 称为在区间 $a \le t \le b$ 上收敛（或一致收敛），若满足对于每一个 $i (i = 1, 2, \cdots, n)$，函数序列 $\{x_{ik}(t)\}$ 在区间 $a \le t \le b$ 上是收敛（或一致收敛）
- 向量函数级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{x}_k(t)$ 称为在区间 $a \le t \le b$ 上是收敛（或一致收敛），若满足其部分和作成的向量函数序列在区间 $a \le t \le b$ 上是收敛（或一致收敛）
- $n \times n$ 矩阵序列 $\{\boldsymbol{A}_k\}, \boldsymbol{A}_k = [a_{ij}^{(k)}]_{n\times n}$ 称为收敛的，若满足对于一切 $i, j = 1, 2, \cdots, n$，数列 $\{a_{ij}^{(k)}\}$ 收敛
- 无穷矩阵级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{A}_k$ 称为收敛的，若满足它的部分和所成序列是收敛的

♣

下面讨论存在唯一性定理

定理 5.1 (存在唯一性定理)

若 $\boldsymbol{A}(t)$ 是 $n \times n$ 矩阵，$\boldsymbol{f}(t)$ 是 n 维列向量，且都在区间 $a \le t \le b$ 上连续，则对于区间 $a \le t \le b$ 上的任何数 t_0 及任一常数 n 维列向量 $\boldsymbol{\eta}$，方程组

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t)$$

存在唯一解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$，定义于整个区间 $a \le t \le b$ 上，且满足初值条件

$$\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \boldsymbol{\eta}$$

♡

笔记　证明在形式上与微分方程初值问题

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

的存在唯一性证明过程相同，即构造 picard 序列逼近

由 n 阶线性微分方程的初值问题与线性微分方程组的初值问题的等价性的讨论，立即有

推论 5.1

若 $a_1(t), a_2(t), \cdots, a_n(t), f(t)$ 是区间 $a \le t \le b$ 上的连续函数，则对于区间 $a \le t \le b$ 上的任一数 t_0 及任意的 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$，方程

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = f(t)$$

存在唯一解 $w(t)$，定义于整个区间 $a \le t \le b$ 上，且满足初值条件

$$w(t_0) = \eta_1,\ w'(t_0) = \eta_2,\ \cdots,\ w^{(n-1)}(t_0) = \eta_n$$

5.2 线性微分方程组的一般理论

现在讨论线性微分方程组

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t)$$

的一般理论，主要是研究其解的结构问题

定义 5.6

线性微分方程组

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t)$$

- 若 $\boldsymbol{f}(t) \neq 0$，则称为非齐次线性微分方程组
- 若 $\boldsymbol{f}(t) = 0$，则方程形式为

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$$

  称为齐次线性微分方程组

5.2.1 齐次线性微分方程组

定理 5.2 (叠加原理)

若 $\boldsymbol{u}(t)$ 和 $\boldsymbol{v}(t)$ 是

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$$

的解，则 $\alpha\boldsymbol{u}(t) + \beta\boldsymbol{v}(t)$ 也是解

笔记 此定理说明齐次线性微分方程组的所有解的集合构成一个线性空间

定义 5.7

称定义在区间 $a \le t \le b$ 上的向量函数 $\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_m(t)$ 是线性相关的，若存在不全为零的常数 $c_1, c_2, \cdots, c_m$，使得

$$c_1\boldsymbol{x}_1(t) + c_2\boldsymbol{x}_2(t) + \cdots + c_m\boldsymbol{x}_m(t) = 0, \quad a \leqslant t \leqslant b$$

否则，称 $\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_m(t)$ 线性无关

例题 5.2 对于任一整数 $k>0$，下面 $k+1$ 个向量函数在任何区间上都是线性无关

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}t\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}t^2\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}t^k\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

例题 5.3 向量函数 $(\cos^2 t,0,\cdots,0)^T$ 和 $(\sin^2 t-1,0,\cdots,0)^T$ 在任何区间上都线性相关

定义 5.8 (朗斯基行列式)

设有 n 个定义在区间 $a\le t\le b$ 上的向量函数

$$\mathbf{x}_1(t)=\begin{bmatrix}x_{11}(t)\\x_{21}(t)\\\vdots\\x_{n1}(t)\end{bmatrix},\mathbf{x}_2(t)=\begin{bmatrix}x_{12}(t)\\x_{22}(t)\\\vdots\\x_{n2}(t)\end{bmatrix},\cdots,\mathbf{x}_n(t)=\begin{bmatrix}x_{1n}(t)\\x_{2n}(t)\\\vdots\\x_{nn}(t)\end{bmatrix}$$

由这 n 个向量函数构成的行列式

$$\mathbf{W}[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)]=\mathbf{W}(t):=\begin{vmatrix}x_{11}(t)&x_{12}(t)&\cdots&x_{1n}(t)\\x_{21}(t)&x_{22}(t)&\cdots&x_{2n}(t)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_{n1}(t)&x_{n2}(t)&\cdots&x_{nn}(t)\end{vmatrix}$$

称为这些向量函数的朗斯基行列式

♣

定理 5.3

若向量函数 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$ 在区间 $a\le t\le b$ 上线性相关，则它们的朗斯基行列式 $\mathbf{W}(t)=0(a\le t\le b)$

♡

证明 存在不全为零的常数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 使得

$$c_1\boldsymbol{x}_1(t)+c_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+c_n\boldsymbol{x}_n(t)=\mathbf{0},\quad a\leqslant t\leqslant b$$

即

$$\begin{bmatrix}x_{11}(t)&x_{12}(t)&\cdots&x_{1n}(t)\\x_{21}(t)&x_{22}(t)&\cdots&x_{2n}(t)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_{n1}(t)&x_{n2}(t)&\cdots&x_{nn}(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

存在非零解，故系数矩阵行列式为零，即 $\mathbf{W}(t)\equiv0(a\le t\le b)$ □

定理 5.4

若齐次线性微分方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$$

的解 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$ 线性无关，则它们的朗斯基行列式 $\mathbf{W}(t)\neq0(a\le t\le b)$

♡

证明 反证法，设有一个 $t_0(a\le t_0\le b)$，使得 $\mathbf{W}(t_0)=0$，考虑下面的齐次线性代数方程组：

$$c_1\boldsymbol{x}_1(t_0)+c_2\boldsymbol{x}_2(t_0)+\cdots+c_n\boldsymbol{x}_n(t_0)=\mathbf{0}$$

它的系数行列式就是 $\mathbf{W}(t_0)=0$，所以上述代数方程组存在非零解 $\tilde{c}_1,\tilde{c}_2,\cdots,\tilde{c}_n$

以这组非零解 $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \cdots, \tilde{c}_n$ 构造向量函数

$$\boldsymbol{x}(t) = \tilde{c}_1 \boldsymbol{x}_1(t) + \tilde{c}_2 \boldsymbol{x}_2(t) + \cdots + \tilde{c}_n \boldsymbol{x}_n(t)$$

易知，$\boldsymbol{x}(t)$ 也是齐次线性微分方程组的解，同时满足初值条件 $\boldsymbol{x}(t_0) = 0$，但在 $a \leq t \leq b$ 上恒等于零的向量函数 $\mathbf{0}$ 也是满足该初值条件的解

由解的唯一性，有 $\boldsymbol{x}(t) = \mathbf{0}$，即

$$\tilde{c}_1 \boldsymbol{x}_1(t) + \tilde{c}_2 \boldsymbol{x}_2(t) + \cdots + \tilde{c}_n \boldsymbol{x}_n(t) = \mathbf{0}$$

由于 $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \cdots, \tilde{c}_n$ 不全为零，与 $\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n(t)$ 线性无关矛盾！ □

笔记 齐次线性微分方程组

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$$

的 n 个解 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 所组成的朗斯基行列式 $\mathbf{W}(t)$ 或者恒等于零，或者恒不等于零

定理 5.5

齐次线性微分方程组 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 一定存在 n 个线性无关的解 $\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n(t)$

证明 任取 $t_0 \in [a, b]$，有解的存在唯一性定理，齐次线性微分方程组分别满足初值条件

$$x_1(t_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, x_2(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, x_n(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

的解 $\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n(t)$ 一定存在，又由于这 n 个解 $\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n(t)$ 的朗斯基行列式 $\mathbf{W}(t_0) = 1 \neq 0$

故 $\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n(t)$ 是线性无关的 □

定理 5.6

若 $\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n(t)$ 是齐次线性微分方程组

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$$

的 n 个线性无关的解，则方程的任一解 $\boldsymbol{x}(t)$ 均可表示为

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1 \boldsymbol{x}_1(t) + c_2 \boldsymbol{x}_2(t) + \cdots + c_n \boldsymbol{x}_n(t)$$

证明 任取 $t_0 \in [a, b]$，令

$$\boldsymbol{x}(t_0) = c_1 \boldsymbol{x}_1(t_0) + c_2 \boldsymbol{x}_2(t_0) + \cdots + c_n \boldsymbol{x}_n(t_0)$$

即

$$\begin{bmatrix} x_{11}(t_0) & x_{12}(t_0) & \cdots & x_{1n}(t_0) \\ x_{21}(t_0) & x_{22}(t_0) & \cdots & x_{2n}(t_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t_0) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{x}(t_0)$$

系数行列式是 $\mathbf{W}(t_0)$，由于 $\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n(t)$ 是线性无关，则可知 $\mathbf{W}(t) \neq 0$，故存在唯一解 $c_1, c_2, \cdots, c_n$

以这组 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 构成向量函数 $c_1 \boldsymbol{x}_1 + c_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_n \boldsymbol{x}_n$，由叠加原理，知它是方程的解

再注意到，方程的两个解 $\boldsymbol{x}(t)$ 及 $c_1 \boldsymbol{x}_1 + c_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_n \boldsymbol{x}_n$ 具有相同的初值条件，由解的唯一性，得到

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1 \boldsymbol{x}_1(t) + c_2 \boldsymbol{x}_2(t) + \cdots + c_n \boldsymbol{x}_n(t)$$

□

推论 5.2

齐次线性微分方程组 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 的线性无关解的最大个数等于 n

定义 5.9 (基本解组)

称齐次线性微分方程组的 n 个线性无关的解 $\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n(t)$ 为一个基本解组

笔记 齐次线性微分方程组 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 所有解的集合构成一个 n 维线性空间

笔记 由于 n 阶线性微分方程的初值问题可以转化为线性微分方程组的初值问题，以上所有定理都可以平行的推论到 n 阶线性微分方程上

定义 5.10 (解矩阵)

- 若一个 $n \times n$ 矩阵的每一列都是齐次线性微分方程组 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 的解，称这个矩阵为方程的解矩阵
- 若解矩阵的每一列在 $a \le t \le b$ 上是线性无关的，称为在 $a \le t \le b$ 上方程的基解矩阵
- 若基解矩阵为单位阵时，称其为标准基解矩阵

采用解矩阵的记法，可将定理5.5与定理5.6统一表示为

定理 5.7

齐次线性微分方程组 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 一定存在一个基解矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$，若 $\boldsymbol{\Psi}(t)$ 是方程的任一解，则有

$$\boldsymbol{\Psi}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}$$

下面这个定理回答了如何验证接矩阵是否为基解矩阵的问题

定理 5.8

齐次线性微分方程组 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 的一个解矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是基解矩阵的充要条件是 $\det\boldsymbol{\Phi}(t) \neq 0 (a \le t \le b)$，即若对某一个 $t_0 \in [a, b], \boldsymbol{\Phi}(t_0) \neq 0$，则 $\det\boldsymbol{\Phi}(t) \neq 0 (a \le t \le b)$

笔记 注意必须是解矩阵，否则对于一般地行列式恒等于零的矩阵的列向量未必是线性相关的

例题 5.4 验证

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^t & t\mathrm{e}^t \\ 0 & \mathrm{e}^t \end{bmatrix}$$

是方程组

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

的基解矩阵

证明 首先，验证 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是解矩阵

$$\boldsymbol{\varphi}_1'(t) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{e}^t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{\varphi}_1(t)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_2'(t) = \begin{bmatrix} (t+1)\mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t\mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{\varphi}_2(t)$$

因此，$\boldsymbol{\Phi}(t) = [\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2]$ 是解矩阵

其次，$\det\boldsymbol{\Phi}(t) = e^{2t} \neq 0$，所以 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是基解矩阵 □

推论 5.3

若 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是齐次线性微分方程组 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 在区间 $a \le t \le b$ 上的基解矩阵，$\boldsymbol{C}$ 是非奇异 $n \times n$ 常数矩阵，则 $\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C}$ 也是在区间 $a \le t \le b$ 上的基解矩阵

证明 首先，根据解矩阵的定义，方程任一解矩阵 $\boldsymbol{X}(t)$ 满足

$$\boldsymbol{X}'(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X}(t), \quad a \leqslant t \leqslant b$$

反之亦然，令

$$\boldsymbol{\Psi}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C}, \quad a \le t \le b$$

微分得到

$$\boldsymbol{\Psi}'(t) = \boldsymbol{\Phi}'(t)C = A(t)\boldsymbol{\Phi}(t)C = A(t)\boldsymbol{\Psi}(t)$$

即 $\boldsymbol{\Psi}(t)$ 是解矩阵，又由 C 的非奇异性，则有

$$\det \boldsymbol{\Psi}(t) = \det \boldsymbol{\Phi} \cdot \det \boldsymbol{C} \ne 0, \quad a \le t \le b$$

因此，$\boldsymbol{\Psi}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C}$ 是基解矩阵 □

推论 5.4

若 $\boldsymbol{\Phi}(t), \boldsymbol{\Psi}(t)$ 在区间 $a \le t \le b$ 上是 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 的两个基解矩阵，则存在一个非奇异 $n \times n$ 常数矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得在区间 $a \le t \le b$ 上 $\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{C}$

证明 由于 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是基解矩阵，故其逆矩阵 $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)$ 一定存在，令

$$\boldsymbol{\Psi}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{X}(t), \quad a \le t \le b$$

易知 $\boldsymbol{X}(t)$ 是 $n \times n$ 可微矩阵，且 $\det \boldsymbol{X}(t) \ne 0 (a \le t \le b)$，于是

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Psi}(t) = \boldsymbol{\Psi}'(t) &= \boldsymbol{\Phi}'(t)X(t) + \boldsymbol{\Phi}(t)X'(t) \\ &= \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{X}'(t) \\ &= \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Psi}(t) + \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{X}'(t), \quad a \leqslant t \leqslant b \end{aligned}$$

由此推得

$$\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{X}'(t) = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{X}'(t) = 0 (a \le t \le b)$$

即 $\boldsymbol{X}(t)$ 为常数矩阵，记为 $\boldsymbol{C}$，因此

$$\boldsymbol{\Psi}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C}, \quad a \le t \le b$$

且有 $\det \boldsymbol{C} \ne 0$ □

5.2.2 非齐次线性微分方程组

下面讨论非齐次线性微分方程组

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t)$$

的解的结构问题

容易验证下面两个性质

性质

1. 若 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是非齐次线性微分方程组的解，$\boldsymbol{\psi}(t)$ 是对应齐次线性微分方程组的解，则 $\boldsymbol{\varphi}(t) + \boldsymbol{\psi}(t)$ 是非齐次线性微分方程组的解
2. 若 $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)$ 和 $\overline{\boldsymbol{\varphi}}(t)$ 是非齐次线性微分方程组的两个解，则 $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t) - \overline{\boldsymbol{\varphi}}(t)$ 是对应齐次线性微分方程组的解

下面定理给出非齐次线性微分方程组的解的结构

定理 5.9

设 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是对应齐次线性微分方程组的基解矩阵，$\overline{\boldsymbol{\varphi}}(t)$ 是非齐次线性微分方程组的某一解，则非齐次线性微分方程组的任一解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 可表示为

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}+\overline{\boldsymbol{\varphi}}(t)$$

证明 由题意可知，$\boldsymbol{\varphi}(t)-\overline{\boldsymbol{\varphi}}(t)$ 是对应齐次线性微分方程组的解，由齐次线性微分方程组的解的结构有

$$\boldsymbol{\varphi}(t)-\overline{\boldsymbol{\varphi}}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}$$

由此即得

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}+\overline{\boldsymbol{\varphi}}(t)$$

□

笔记 这个定理表明，为了寻求非齐次线性微分方程组的任一解，只需要知道一个特解和对应齐次线性微分方程组的基解矩阵

事实上，在已知对应齐次线性微分方程组的基解矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 的情况下，可以通过常数变易法，求得特解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$，即试图寻找，形如

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}(t)$$

的解，代回原方程得到

$$\boldsymbol{\Phi}'(t)\boldsymbol{c}(t)+\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}'(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}(t)+\boldsymbol{f}(t).$$

由于 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是基解矩阵，所以有 $\boldsymbol{\Phi}'(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)$，从而得到

$$\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}'(t)=\boldsymbol{f}(t)$$

即

$$\boldsymbol{c}(t)=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s,\quad t_0,t\in[\,a,b\,],$$

其中 $\boldsymbol{c}(t_0)=\mathbf{0}$，这样就有

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s,\quad t_0,t\in[a,b].$$

这就是一个特解，即以下定理

定理 5.10

设 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是对应齐次线性微分方程组的基解矩阵，则向量函数

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds$$

是非齐次线性微分方程组的解，且满足初值条件 $\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\mathbf{0}$

例题 5.5 试求初值问题

$$\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-t}\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

的解

解 对应齐次线性微分方程组的基解矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}e^t&te^t\\0&e^t\end{bmatrix}$$

取矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 的逆，有

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)=\frac{\begin{bmatrix}e^s & -se^s\\ 0 & e^s\end{bmatrix}}{e^{2s}}=\begin{bmatrix}1 & -s\\ 0 & 1\end{bmatrix}e^{-s}$$

这样，满足初值条件 $\boldsymbol{\psi}(0)=\mathbf{0}$ 的解为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\psi}(t)&=\begin{bmatrix}e^t & te^t\\ 0 & e^t\end{bmatrix}\int_0^t e^{-s}\begin{bmatrix}1 & -s\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-s}\\ 0\end{bmatrix}\mathbf{d}s\\ &=\begin{bmatrix}e^t & te^t\\ 0 & e^t\end{bmatrix}\int_0^t\begin{bmatrix}e^{-2s}\\ 0\end{bmatrix}\mathrm{d}s\\ &=\begin{bmatrix}e^t & te^t\\ 0 & e^t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(1-e^{-2t})\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})\\ 0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{\Phi}(0)=\boldsymbol{E}$，对应齐次线性微分方程组满足初值条件 $\boldsymbol{\varphi}_h(0)=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$ 的解就是

$$\boldsymbol{\varphi}_h(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(t-1)e^t\\ e^t\end{bmatrix}$$

故所求解为

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\varphi}_h(t)+\boldsymbol{\psi}(t)=\begin{bmatrix}te^t-\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})\\ e^t\end{bmatrix}$$

5.3 常系数线性微分方程组

本节研究常系数线性微分方程组的问题，主要讨论齐次线性微分方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

的基解矩阵的结构，这里 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 常数矩阵

5.3.1 矩阵指数

为求得方程组 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的一个基解矩阵，需要定义矩阵指数 $\exp\boldsymbol{A}$

定义 5.11 (矩阵指数)

若 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $n\times n$ 常数矩阵，定义矩阵指数 $\exp\boldsymbol{A}$ 为下面的矩阵级数和

$$\exp\boldsymbol{A}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{A}^k}{k\,!}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\frac{\boldsymbol{A}^2}{2\,!}+\cdots+\frac{\boldsymbol{A}^m}{m\,!}+\cdots,$$

♣

笔记　这个级数对所有的 $\boldsymbol{A}$ 都是收敛的，事实上，对一切正整数 k，有

$$\left\|\frac{\boldsymbol{A}^k}{k!}\right\|\leq\frac{\|\boldsymbol{A}\|^k}{k!}$$

从而对于任一矩阵 $\boldsymbol{A}$，数值级数

$$\|E\|+\|A\|+\frac{\|A\|^2}{2!}+\cdots+\frac{\|A\|^m}{m!}+\cdots\to n-1+e^{\|A\|}$$

因此，对于任何常数矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\exp\boldsymbol{A}$ 绝对收敛

矩阵指数 $\exp\boldsymbol{A}$ 有如下性质

性质

1. 若矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是可交换的，即 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则

$$\exp(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\exp\boldsymbol{A}\exp\boldsymbol{B}$$

2. 对于任何矩阵 $\boldsymbol{A}$，$(\exp\boldsymbol{A})^{-1}$ 存在，且

$$(\exp\boldsymbol{A})^{-1}=\exp(-\boldsymbol{A})$$

3. 若 $\boldsymbol{T}$ 是非奇异矩阵，则

$$\exp(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT})=\boldsymbol{T}^{-1}(\exp\boldsymbol{A})\boldsymbol{T}$$

下面来回答有关常系数齐次线性微分方程组 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{Ax}$ 的基本问题

定理 5.11

矩阵

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\exp\boldsymbol{A}t$$

是 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{Ax}$ 的基解矩阵，且 $\boldsymbol{\Phi}(0)=\boldsymbol{E}$

证明 由定义易知 $\boldsymbol{\Phi}(0)=\boldsymbol{E}$，同时

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}'(t)&=(\exp\boldsymbol{A}t)'\\&=\boldsymbol{A}+\frac{\boldsymbol{A}^2t}{1!}+\frac{\boldsymbol{A}^3t^2}{2!}+\cdots+\frac{\boldsymbol{A}^kt^{k-1}}{(k-1)!}+\cdots\\&=\boldsymbol{A}\exp\boldsymbol{A}t=\boldsymbol{A\Phi}(t)\end{aligned}$$

这就表明，$\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是方程的解矩阵，又因为

$$\det\boldsymbol{\Phi}(0)=\det\boldsymbol{E}=1\neq 0$$

因此，$\boldsymbol{\Phi}(t)=\exp\boldsymbol{A}t$ 是方程的基解矩阵 □

例题 5.6 若 $\boldsymbol{A}$ 是一个对角矩阵，

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_1&&&\\&a_2&&\\&&\ddots&\\&&&a_n\end{bmatrix}$$

试求出 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{Ax}$ 的基解矩阵

解

$$\begin{aligned}\exp\boldsymbol{A}t=&\boldsymbol{E}+\begin{bmatrix}a_1&&&\\&a_2&&\\&&\ddots&\\&&&a_n\end{bmatrix}\frac{t}{1!}+\begin{bmatrix}a_1^2&&&\\&a_2^2&&\\&&\ddots&\\&&&a_n^2\end{bmatrix}\frac{t^2}{2!}+\cdots+\begin{bmatrix}a_1^k&&&\\&a_2^k&&\\&&\ddots&\\&&&a_n^k\end{bmatrix}\frac{t^k}{k!}+\cdots\\=&\begin{bmatrix}e^{a_1t}&&&\\&e^{a_2t}&&\\&&\ddots&\\&&&e^{a_nt}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

例题 5.7 试求 $\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$ 的基解矩阵

解 因为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$，且后两矩阵可交换，从而有

$$\begin{aligned}\exp \boldsymbol{A}t &= \exp \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} t \cdot \exp \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t \\ &= \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \left(\boldsymbol{E} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 \frac{t^2}{2!} + \cdots \right)\end{aligned}$$

因此，基解矩阵为

$$\exp \boldsymbol{A}t = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5.3.2 基解矩阵

试求寻求

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

的形如

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = e^{\lambda t}\boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$$

的解，其中 λ 和向量 $\boldsymbol{c}$ 是待定的，为此，代入方程得到

$$\lambda e^{\lambda t}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{A}e^{\lambda t}\boldsymbol{c}$$

即

$$(\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$$

这就表示，$e^{\lambda t}\boldsymbol{c}$ 是解的充要条件就是常数 λ 和向量 $\boldsymbol{c}$ 满足方程

$$(\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$$

即以下定理

定理 5.12

方程 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 有解

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = e^{\lambda t}\boldsymbol{c}$$

当且仅当 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，$\boldsymbol{c}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ 的特征向量

例题 5.8 试求矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

的特征值和对应的特征向量

解 $\boldsymbol{A}$ 的特征值就是特征方程

$$\det(\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -5 \\ 5 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 34 = 0$$

的根，解得 $\lambda_{1,2} = 3 \pm 5i$

对应于特征值 $\lambda_1 = 3 + 5i$ 的特征向量 $\boldsymbol{u} = [u_1, u_2]^T$ 需满足

$$(\lambda_1 \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 5i & -5 \\ 5 & 5i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

解得 $\boldsymbol{u} = \alpha[1, i]^T$

类似的，对应于 $\lambda_2 = 3 - 5i$ 的特征向量为 $\boldsymbol{v} = \beta[i, 1]^T$

可以证明下面这个定理

定理 5.13

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 具有 n 个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n$，它们对应的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则矩阵

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=[e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{v}_1,e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{v}_2,\cdots,e^{\lambda_n t}\boldsymbol{v}_n]$$

是常系数线性微分方程组 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的一个基解矩阵

证明 易知矩阵

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=[e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{v}_1,e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{v}_2,\cdots,e^{\lambda_n t}\boldsymbol{v}_n]$$

是方程 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的一个解矩阵

由于 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n$ 线性无关，所以

$$\det\boldsymbol{\Phi}(0)=\det[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n]\neq 0$$

从而有 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是方程 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的一个基解矩阵 □

笔记 一般来说，由特征值与特征向量确定出的基解矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 不一定就是 $\exp\boldsymbol{A}t$，但我们可以确定它们之间的关系，因为 $\exp\boldsymbol{A}t$ 和 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 都是基解矩阵，所以存在一个非奇异的常数矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得

$$\exp\boldsymbol{A}t=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C}$$

令 $t=0$，可以得到 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)$，因此

$$\exp\boldsymbol{A}t=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)$$

例题 5.9 试求方程组 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&5\\-5&3\end{bmatrix}$ 的一个基解矩阵

解 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_{1,2}=3\pm 5i$，而

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}i\\1\end{bmatrix}$$

是对应于 λ_1,λ_2 的两个线性无关的特征向量，故可知

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}e^{(3+5i)t}&ie^{(3-5i)t}\\ie^{(3+5i)t}&e^{(3-5i)t}\end{bmatrix}$$

是一个基解矩阵

下面讨论当 $\boldsymbol{A}$ 是任意 $n\times n$ 矩阵时，$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的基解矩阵的计算方法，先给出一个高等代数的结论

定理 5.14

设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $n\times n$ 矩阵,$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 是不同的特征值,它们的重数分别为 $n_1,n_2,\cdots,n_k$,这里 $n_1+n_2+\cdots n_k=n$，那么对于每一个 n_j 重特征值 λ_j，方程组

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E})^{n_j}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$$

的解的全体构成 n 维欧几里得空间的一个 n_j 维子空间 $U_j(j=1,2,\cdots,k)$，并且 n 维欧几里得空间可表示为 $U_1,U_2,\cdots,U_k$ 的直接和

现寻求任一满足初值条件 $\boldsymbol{\varphi}(0)=\boldsymbol{\eta}$ 的解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$，我们可知，有

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=(\exp\boldsymbol{A}t)\boldsymbol{\eta}$$

设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 分别是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $n_1,n_2,\cdots,n_k$ 重不同特征值，此时，则有

$$\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2+\cdots+\boldsymbol{v}_k,\quad \boldsymbol{v}_j\in U_j(j=1,2,\cdot,k)$$

由于子空间 U_j 是由方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E})^{n_j}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ 产生的，从而有 $\boldsymbol{v}_j$ 满足 $(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E})^{n_j}\boldsymbol{v}_j=\boldsymbol{0}$，由此即得

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E})^{l}\boldsymbol{v}_j=\boldsymbol{0},\quad l\geq n_j,j=1,2,\cdots,k$$

注意到

$$e^{\lambda_j t}\exp(-\lambda_j \boldsymbol{E}t) = e^{\lambda_j t}\begin{bmatrix} e^{-\lambda_j t} & & & \\ & e^{-\lambda_j t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{-\lambda_j t}\end{bmatrix} = \boldsymbol{E}$$

由此，即有

$$\begin{aligned}(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{v}_j &= (\exp \boldsymbol{A}t)e^{\lambda_j t}[\exp(-\lambda_j \boldsymbol{E}t)]\boldsymbol{v}_j \\ &= e^{\lambda_j t}[\exp(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E})t]\boldsymbol{v}_j \\ &= e^{\lambda_j t}\left[\boldsymbol{E} + t(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E}) + \frac{t^2}{2!}(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E})^2 + \cdots + \frac{t^{n_j-1}}{(n_j-1)!}(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E})^{n_j-1}\right]\boldsymbol{v}_j\end{aligned}$$

从而知 $\boldsymbol{\varphi}(t) = (\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{\eta}$ 可表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}(t) =&(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{\eta} = (\exp \boldsymbol{A}t)\sum_{j=1}^{k}\boldsymbol{v}_j = \sum_{j=1}^{k}(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{v}_j \\ =&\sum_{j=1}^{k} e^{\lambda_j t}\left[\boldsymbol{E} + t(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E}) + \frac{t^2}{2!}(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E})^2 + \cdots + \frac{t^{n_j-1}}{(n_j-1)!}(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E})^{n_j-1}\right]\boldsymbol{v}_j \\ =&\sum_{j=1}^{k} e^{\lambda_j t}\left[\sum_{i=1}^{n_j-1}\frac{t^i}{i!}(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E})\right]\boldsymbol{v}_j\end{aligned}$$

为了得到 $\exp \boldsymbol{A}t$，只需要注意到

$$\exp \boldsymbol{A}t = (\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{E} = \left[(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{e}_1, (\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{e}_2, \cdots, (\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{e}_n\right]$$

其中

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad \cdots,\quad \boldsymbol{e}_n = \begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$

这就是说，依次令 $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{e}_n$，求得 n 个解，以这 n 个解作为列即可得到 $\exp \boldsymbol{A}t$

例题 5.10 试求 $\exp \boldsymbol{A}t$，其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

解 可知 $\lambda = -4$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 5 重特征值，直接计算有 $(\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E})^3 = \boldsymbol{0}$

由于只有一个特征值，故

$$\begin{aligned}\exp \boldsymbol{A}t &= e^{-4t}[\exp(\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E})t] \\ &= e^{-4t}[\boldsymbol{E} + t(\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E}) + \frac{t^2}{2!}(\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E})^2] \\ &= e^{-4t}\begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

例题 5.11 考虑方程组

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 - x_2 + x_3 \\ x_2' = 2x_1 + x_3 \\ x_3' = x_1 - x_2 + 2x_3 \end{cases}$$

试求满足初值条件 $\boldsymbol{\varphi}(0) = \boldsymbol{\eta}$ 的解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$，并求 $\exp \boldsymbol{A}t$

解 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$\det(\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$$

解得 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$，下面确定三维欧几里得空间的子空间 U_1, U_2，考虑下列方程组

$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}, \quad (\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$$

1. 对于 $\lambda_1 = 1$，

$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$$

的解为 $\boldsymbol{u}_1 = (0, \alpha, \alpha)^T$，子空间 U_1 由 $\boldsymbol{u}_1$ 张成

2. 对于 $\lambda_2 = 2$，

$$(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$$

的解为 $\boldsymbol{u}_2 = (\beta, \beta, \gamma)^T$，子空间 U_2 由 $\boldsymbol{u}_2$ 张成

现在将 $\boldsymbol{\eta}$ 表示为 U_1, U_2 的元素直接和，即

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2, \quad \boldsymbol{v}_i \in U_i (i = 1, 2)$$

从而有

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha + \beta \\ \alpha + \gamma \end{bmatrix}$$

解得

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \eta_2 - \eta_1 \\ \eta_2 - \eta_1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_1 \\ \eta_3 - \eta_2 + \eta_1 \end{bmatrix}$$

从而得到满足初值条件 $\boldsymbol{\varphi}(0) = \boldsymbol{\eta}$ 的解为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}(t) &= e^t \boldsymbol{E}\boldsymbol{v}_1 + e^{2t}(\boldsymbol{E} + t(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E}))\boldsymbol{v}_2 \\ &= e^t \begin{bmatrix} 0 \\ \eta_2 - \eta_1 \\ \eta_2 - \eta_1 \end{bmatrix} + e^{2t} \begin{bmatrix} \eta_1 + t(\eta_3 - \eta_2 + \eta_1) \\ \eta_1 + t(\eta_3 - \eta_2 + \eta_1) \\ \eta_3 - \eta_2 + \eta_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

为了得到 $\exp \boldsymbol{A}t$，依次令 $\boldsymbol{\eta}$ 等于 $(1, 0, 0)^T, (0, 1, 0)^T, (0, 0, 1)^T$ 代入上式，得到三个线性无关的解，利用这三个解作为列，即得

$$\exp \boldsymbol{A}t = \begin{bmatrix} (1 + t)e^{2t} & -te^{2t} & te^{2t} \\ -e^t + (1 + t)e^{2t} & e^t - te^{2t} & te^{2t} \\ -e^t + e^{2t} & e^t - e^{2t} & e^{2t} \end{bmatrix}$$

定理 5.15

给定常系数线性微分方程组 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，则有

1. 若 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的实部都是负的，则方程的任一解当 $t \to +\infty$ 时都趋于零
2. 若 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的实部都是非正的，且实部为零的特征值都是简单特征值，则方程的任一解当 $t \to +\infty$ 时都保持有界
3. 若 $\boldsymbol{A}$ 的特征值至少有一个具有正实部，则方程至少有一个解当 $t \to +\infty$ 时趋于无穷

♡

证明 由于公式

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^{k} e^{\lambda_j t}\left[\sum_{i=1}^{n_j-1} \frac{t^i}{i!}(\boldsymbol{A} - \lambda_j \boldsymbol{E})\right]\boldsymbol{v}_j$$

可知，方程组 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的任一解都可以表示为 t 的指数函数与 t 的幂函数乘积的线性组合

1. 若 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的实部都是负的，此时显然，当 $t \to +\infty$ 时，$\varphi(t) \to 0$
2. 若 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的实部都是非正的，且实部为零的特征值都是简单特征值，此时也显然有，当 $t \to +\infty$ 时，$\varphi(t)$ 有界
3. 若 $\boldsymbol{A}$ 的特征值至少有一个具有正实部，设 $\lambda = \alpha + i\beta, \alpha, \beta \in R, \alpha > 0$，取 $\boldsymbol{\eta}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ 的特征向量，则向量函数

   $$\boldsymbol{\varphi}(t) = e^{\lambda t}\boldsymbol{\eta}$$

   是方程组 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的一个解，于是当 $t \to +\infty$，有

   $$||\boldsymbol{\varphi}(t)|| = e^{\alpha t}||\boldsymbol{\eta}|| \to +\infty$$

□

第六章 非线性微分方程

在这一章，我们将讨论非线性常微分方程，非线性模型往往更能反映运动过程的本质，而非线性常微分方程大多数都不能直接求解

6.1 稳定性

6.1.1 常微分方程组的存在唯一性定理

本章讨论非线性常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{g}\,(t;\boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$$

的解的性态，在讨论解的性态之前，首先要保证解的存在、唯一等性质，即要讨论方程组 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{g}\,(t;\boldsymbol{y})$ 的解的存在唯一性以及解的延拓和解对初值的连续性、可微性等，这可概括为下面的定理，证明方法同一阶方程的情形类似

定理 6.1 (存在唯一性定理)

若向量函数 $\boldsymbol{g}\,(t;\boldsymbol{y})$ 在域 R 上连续且关于 $\boldsymbol{y}$ 满足李普希兹条件，则方程组 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{g}\,(t;\boldsymbol{y})$ 存在唯一解 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\varphi}(t;t_0,\boldsymbol{y}_0)$，在区间 $|t-t_0| \le h$ 上连续，且

$$\boldsymbol{\varphi}(t_0;t_0,\boldsymbol{y}_0) = \boldsymbol{y}_0$$

这里

$$h = \min(a, \frac{b}{M}), M = \max_{(t,y)\in R} ||g(t;\boldsymbol{y})||$$

定理 6.2 (解的延拓与连续性定理)

若向量函数 $g(t;y)$ 在区域 G 内连续，且关于 y 满足局部李普希兹条件，则方程组 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{g}\,(t;\boldsymbol{y})$ 的满足初值条件 $y(t_0) = y_0$ 的解 $y = \varphi(t;t_0,y_0)$ 可以延拓，且解 $\varphi(t;t_0,y_0)$ 作为 t,t_0,y_0 的函数在它的存在范围内是连续的

定理 6.3 (可微性定理)

若向量函数 $g(t;y)$ 及 $\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(i,j = 1,2,\cdots,n)$ 在区域 G 内连续，则方程组 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{g}\,(t;\boldsymbol{y})$ 的满足初值条件 $y(t_0) = y_0$ 的解 $\varphi(t;t_0,y_0)$ 作为 t,t_0,y_0 的函数在它的存在范围内是连续可微的

6.1.2 李雅普诺夫稳定性

先从一个简单的例子谈起，考虑一阶非线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = Ay - By^2$$

其中 A,B 为常数，且 $A\cdot B > 0$，初值条件 $y(0) = y_0$

解 方程有通解

$$y = \frac{A}{B + c\mathrm{e}^{-At}}$$

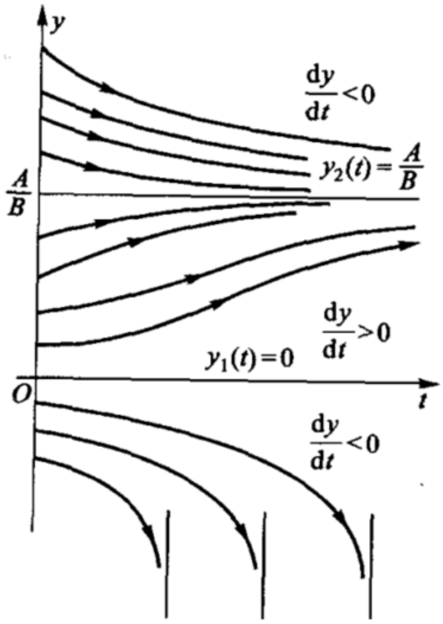
和两特解

$$y_1 = 0 \quad y_2 = \frac{A}{B}$$

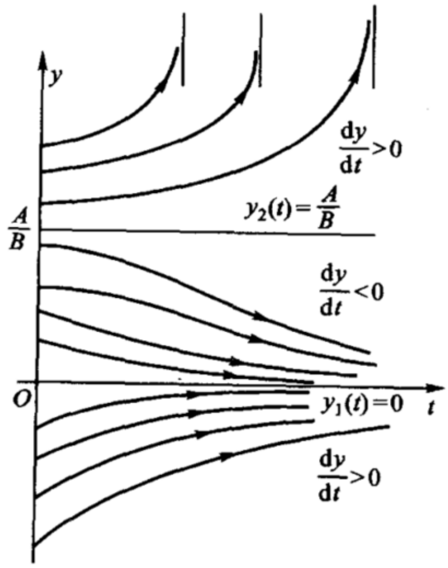
考虑初值条件，得到方程满足初值条件的解为

$$y=\frac{A}{B+\left(\frac{A}{y_0}-B\right)\mathrm{e}^{-At}}$$

可以得到下图



(a) $A>0,B>0$



(b) $A<0,B<0$

由图可知

1. 当 $A>0,B>0$ 时，解 $y_2(t)=\frac{A}{B}$ 称为是稳定的，$y_1(t)=0$ 称为是不稳定的
2. 当 $A<0,B<0$ 时，解 $y_2(t)=\frac{A}{B}$ 称为是不稳定的，$y_1(t)=0$ 称为是稳定的

笔记 稳定性的物理意义是明显的，因为用微分方程描述的物质运动 (例如某一质点运动) 的特解密切依赖于初值，而初值的计算或测定实际上不可避免地出现误差和干扰如果描述这运动的微分方程的特解是不稳定的，则初值的微小误差或干扰将招致“差之毫里,谬以千里”的严重后果，因此，这样不稳定的特解将不宜作为设计的依据；反之，稳定的特解才是我们最感兴趣的这说明解的稳定性的研究是一个十分重要的问题，可是大多数非线性微分方程是不可能或很难求出其解的具体表达式来的。因此，必须要求在不具体解出方程的情况下判断方程的解的稳定性态

当研究方程组 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{g}(t;\boldsymbol{y})$ 的解的性态时，往往与具有某些特殊性质的特接联系在一起，为研究方程组 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{g}(t;\boldsymbol{y})$ 的特解 $y=\varphi(t)$ 邻近的解的性态，通常先利用变换

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\varphi}(t)$$

将方程组化为

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{f}(t;\boldsymbol{x})$$

其中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}(t;x)&=\boldsymbol{g}(t;\boldsymbol{y})-\frac{d\boldsymbol{\varphi}(t)}{dt}\\&=g(t;\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\varphi}(t))-\boldsymbol{g}(t;\boldsymbol{\varphi}(t))\end{aligned}$$

此时显然有

$$f(t;\mathbf{0})=\mathbf{0}$$

这就把方程组 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{g}(t;\boldsymbol{y})$ 的特解 $y=\varphi(t)$ 变为方程组 $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{f}(t;\boldsymbol{x})$ 的零解 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，于是，问题就化为讨论方程组 $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{f}(t;\boldsymbol{x})$ 的零解 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 邻近的解的性态

下面给出方程组

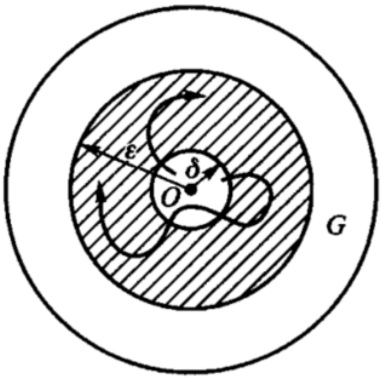
$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{f}(t;\boldsymbol{x})$$

的零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的稳定性的定义，通常也称为李雅普诺夫意义下的稳定性的定义

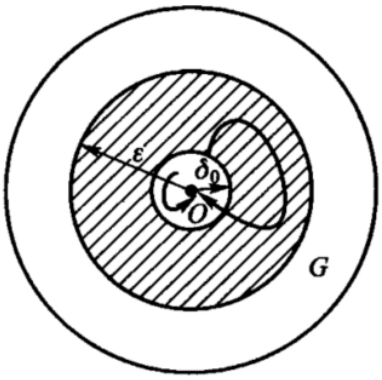
定义 6.1 (李雅普诺夫稳定性)

- 若对任意给定的 $\epsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当任一 $\boldsymbol{x}_0$ 满足 $\|\boldsymbol{x}_0\|\leq\delta$ 时，方程组 $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{f}(t;\boldsymbol{x})$ 的由初值条件 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$ 确定的解 $\boldsymbol{x}(t)$，对一切 $t\geq t_0$ 均有
$$\|\boldsymbol{x}(t)\|<\epsilon$$
则称方程组的零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是稳定的
- 若方程组 $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{f}(t;\boldsymbol{x})$ 的零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 稳定，且存在 $\delta_0>0$ 使得当 $\|\boldsymbol{x}_0\|<\delta_0$ 时，满足初值条件 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$ 的解 $\boldsymbol{x}(t)$ 均有
$$\lim_{t\to+\infty}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{0}$$
则称零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是渐进稳定的
- 若 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 渐进稳定，且存在域 D_0，当且仅当 $\boldsymbol{x}_0\in D_0$ 时满足初值条件 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$ 的解 $\boldsymbol{x}(t)$ 均有 $\lim\limits_{t\to+\infty}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{0}$，则称域 D_0 为稳定域，若稳定域为全空间，则称零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是全局稳定的

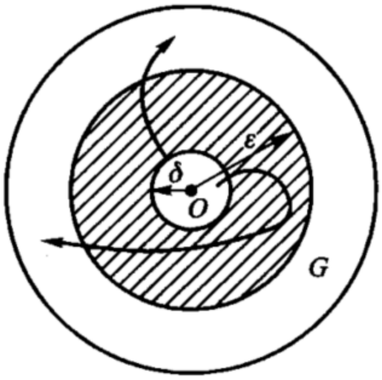
二维情形零解的稳定性态，在平面上的示意图如下



(c) 稳定



(d) 渐进稳定



(e) 不稳定

6.1.3 按线性近似决定稳定性

有了稳定性的概念，现在考虑最简单的一阶常系数线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

它的任一解可以表为形如

$$\sum_{m=0}^{l_i}c_{im}t^m\,\mathrm{e}^{\lambda_i t},\quad 1\leqslant i\leqslant n$$

的线性组合，这里 λ_i 是系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征根，我们可以得到如下的结论

定理 6.4

- 若特征方程的根均具有负实部，则方程组 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的零解是渐进稳定
- 若特征方程具有正实部的根，则方程组 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的零解是不稳定的
- 若特征方程没有正实部的根，但有零根或具有零实部的根，则方程组 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的零解不确定稳定性

下面考虑非线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})$$

其中 $\boldsymbol{R}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$，且满足

$$\frac{\| \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}) \|}{\| \boldsymbol{x} \|} \longrightarrow 0(\text{当} \| \boldsymbol{x} \| \to 0\text{时})$$

显然 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 是方程组的解，亦是方程组的奇点

对于非线性微分方程组的稳定性态，我们研究，在什么条件下，非线性微分方程组的零解的稳定性可以由对应的线性微分方程组的零解的稳定性来决定，即按线性近似决定稳定性

定理 6.5

若特征方程没有零根或零实部的根，则非线性微分方程组的零解的稳定性态与其线性近似的方程组的零解的稳定性态一致，即

- 当特征方程的根均具有负实部，则非线性微分方程组的零解是渐进稳定的
- 当特征方程具有正实部的根，则非线性微分方程组的零解是不稳定的

笔记 当特征方程除有负实部的根外还有零根或具有零实部的根的情形，非线性微分方程组的零解的稳定性态并不能由线性近似方程组来决定

上述定理说明，非线性微分方程组零解是否渐进稳定取决于其相应的特征方程的全部的根是否具有负实部，但当 n 相当大时，其特征方程的根是不容易甚至不能具体地由公式表达出来的，不过我们并不要求找出特征方程的全部根，而只要求判断所有根的实部是否均为负，下面介绍赫尔维茨判别代数方程的根是否均为负的法则

定理 6.6

设给定常系数的 n 次代数方程

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

其中 $a_0 > 0$，作行列式

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \cdots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_n\Delta_{n-1}$$

其中 $a_i = 0(i > n)$

那么，方程的一切根均有负实部的充分必要条件为下列不等式同时成立：

$$a_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 > 0, \quad \cdots, \quad \Delta_{n-1} > 0, \quad a_n > 0$$

例题 6.1 考虑一阶非线性微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -2x + y - z + x^2\mathrm{e}^x, \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x - y + x^3y + z^2, \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = x + y - z - \mathrm{e}^x\left(y^2 + x^2\right), \end{cases}$$

解 特征方程为

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 3 = 0$$

由此得赫尔维茨行列式为

$$a_0 = 1, a_1 = 4, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 17, a_3 = 3$$

从而可知，特征方程所有根均有负实部，因而零解 $x = y = z = 0$ 是渐进稳定的

6.2 V 函数方法

6.2.1 李雅普诺夫定理

本节讨论如何应用李雅普诺夫函数 V 函数来确定非线性微分方程组解的稳定性态问题，为简单起见，下面只考虑非线性驻定微分方程组

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

设 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$，且 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在区域 $G : ||\boldsymbol{x}|| \leq A$ 内有连续的偏导数，因而方程组由初值条件 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ 所确定的解在域 G 内存在且唯一，显然 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 是特解

定义 6.2

设 $V(\boldsymbol{x})$ 为在域 $||\boldsymbol{x}|| \leq H$ 内定义的一个实连续函数，$V(\boldsymbol{0}) = 0$

- 若在此区域内恒有 $V(\boldsymbol{x}) \geq 0$，则称函数 V 为常正的
- 若对于一切 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ 都有 $V(\boldsymbol{x}) > 0$，则称函数 V 是定正的
- 若函数 $-V$ 是定正 (或常正) 的，则称 V 为定负 (或常负) 的

♣

例题 6.2

1. 函数 $V(x, y) = (x + y)^2$ 是常正的
2. 函数 $V(x, y) = (x + y)^2 + y^4$ 是定正的
3. 函数 $V(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ 在域 $x^2 + y^2 < \pi$ 上定正

定理 6.7

设微分方程组 $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 可以找到函数 $V(\boldsymbol{x})$，其通过 $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 的全导数为 $\frac{dV}{dt}$

- 若函数 $V(\boldsymbol{x})$ 定正，全导数 $\frac{dV}{dt}$ 常负，则方程组的零解是稳定的
- 若函数 $V(\boldsymbol{x})$ 定正，全导数 $\frac{dV}{dt}$ 定负，则方程组的零解是渐进稳定的
- 若存在函数 $V(\boldsymbol{x})$ 和非负常数 μ，其通过 $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 的全导数 $\frac{dV}{dt}$ 可以表示为

  $$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \mu V + W(\boldsymbol{x})$$

  且满足
  1. 当 $\mu = 0$ 时，W 为定正函数
  2. 当 $\mu \neq 0$ 时，W 为常正函数或恒等于零
  3. 在 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的任意小邻域内都至少存在某个 $\tilde{\boldsymbol{x}}$，使得 $V(\tilde{\boldsymbol{x}}) > 0$

  则方程组的零解是不稳定的

♡

笔记 几何解释

对于微分方程

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

将 $\boldsymbol{x}$ 取值的空间 R^n 称为相空间，二维相空间又称为相平面，微分方程的解在相空间中的轨迹称为轨线，轨线亦可定义为积分曲线在相空间中的投影

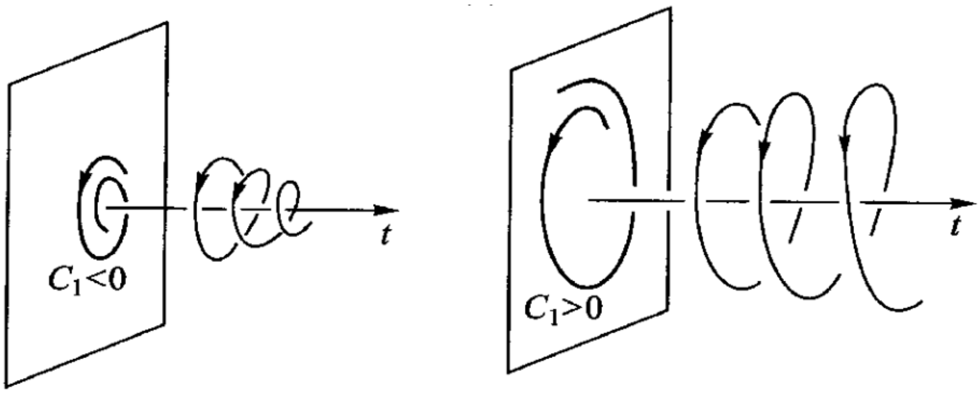


图 6.1: 轨线示例

例题 6.3 考察方程

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -y + x(x^2 + y^2 - 1), \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x + y(x^2 + y^2 - 1). \end{cases}$$

的零解的稳定性

解 考察函数 $V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$，显然 V 满足下述两个条件

1. 当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时，$V(x, y) > 0$，且 $V(0, 0) = 0$
2. 当 $0 < x^2 + y^2 < 1$ 时，全导数

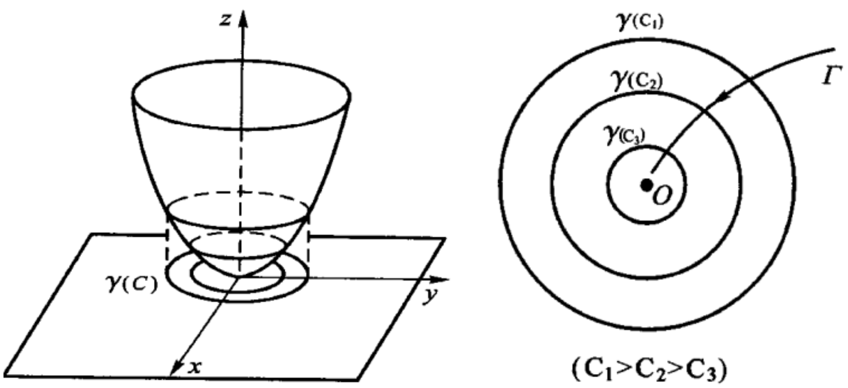
$$\frac{dV}{dt} = (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1) < 0$$

事实上，条件一表明，对于任意常数 $C > 0$，$V(x, y) = C$ 在相平面上的图形是一个环绕原点的闭曲线 $\gamma(C)$，并且当 $C_1 \neq C_2$ 时，$\gamma(C_1)$ 与 $\gamma(C_2)$ 不相交；而当 $C \to 0$ 时，$\gamma(C)$ 收缩到 $(0, 0)$ 点

条件二表明在 $(0, 0)$ 点附近表示轨线 Γ 与 $\gamma(C)$ 之间的关系：沿着轨线 Γ 的正向，函数 $V(x(t), y(t))$ 的值严格递减，而且

$$V(x(t), y(t)) \to 0 \quad \text{as} \quad \mathrm{t} \to +\infty$$

这就说明零点 $(0, 0)$ 时渐进稳定的



(a) 条件一 (b) 条件二

例题 6.4 考虑平面微分方程组

$$\frac{dx}{dt} = -y + ax^3, \quad \frac{dy}{dt} = x + ay^3$$

解 取定正函数 $V(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$，这时

$$\frac{dV}{dt} = a(x^4 + y^4)$$

1. 若 $a < 0$，则 $\frac{dV}{dt}$ 定负，零解渐进稳定
2. 若 $a = 0$，则 $\frac{dV}{dt} \equiv 0$，零解稳定
3. 若 $a > 0$，则 $\frac{dV}{dt}$ 定正，零解不稳定

6.2.2 二次型 V 函数构造

应用李雅普诺夫第二方法判断微分方程组零解的稳定性的关键是找到合适的 V 函数，这里考虑常系数线性微分方程组构造二次 V 函数的问题

定理 6.8

若一阶线性微分方程组

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

的特征根 λ_i 均不满足关系 $\lambda_i + \lambda_j = 0 (i,j = 1,2,\cdots,n)$，则对任何负定 (或正定) 的对称矩阵 $\boldsymbol{C}$，均有唯一的二次型

6.3 奇点

6.3.1 奇点基础

下面转入介绍平面定性理论，先介绍奇点的概念

定义 6.3 (奇点)

若方程

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

有定常解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$，此时称 $\boldsymbol{x}_0$ 为方程的一个平衡点，也称为奇点

考虑二维一阶驻定微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = X(x,y) \\ \frac{dy}{dt} = Y(x,y) \end{cases}$$

设 X, Y 对 x, y 有连续偏导数且 $X^2 + Y^2$ 不恒为零，可将方程组改写为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x,y)}{X(x,y)} \quad (X(x,y) \neq 0)$$

由于 $\frac{Y}{X}$ 与 X, Y 同样有连续偏导数，因而满足解的存在唯一性定理的条件

方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x,y)}{X(x,y)} \quad (X(x,y) \neq 0)$$

在 Oxy 平面的积分曲线可看成是方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = X(x,y) \\ \frac{dy}{dt} = Y(x,y) \end{cases}$$

在 Oxy 相平面上的轨线，因此在此相平面上，轨线不能相交

同时满足 $X(x,y)=0, Y(x,y)=0$ 的点 (x^*,y^*) 是微分方程组的奇点，$x=x^*, y=y^*$ 是方程组的解，可从通过坐标平移将奇点移到原点 $(0,0)$，此时 $X(0,0)=Y(0,0)=0$

6.3.2 奇点类型

下面我们考虑驻定微分方程组是线性的情形下其轨线在相平面上的性态，并根据奇点邻域内轨线分布的不同形态来区分奇点的不同类型

此时方程为

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax+by, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = cx+dy. \end{cases}$$

显然，坐标原点 $(0,0)$ 是奇点，若方程组的系数满足条件

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

则此奇点唯一，下面讨论奇点唯一成立：

可以通过非奇异的实线性变换

$$\begin{cases} \xi = k_{11}x + k_{12}y \\ \eta = k_{21}x + k_{22}y \end{cases}$$

把线性方程组化为标准形式，其系数矩阵为下列四种形式之一：

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

其中 λ,μ,α,β 为实数，这些标准形式是根据方程组的特征方程

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

即

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$$

的根的性质来确定的

1. **同号相异实根——结点**

此时方程的标准形式为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}}{\mathrm{d}t}=\lambda_1\boldsymbol{\xi},\quad \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}=\lambda_2\boldsymbol{\eta}$$

其解为

$$\xi(t)=A\mathrm{e}^{\lambda_1 t},\quad \eta(t)=B\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$$

其中 λ_1,λ_2 为是特征根，而 A,B 是任意实常数

(a). 若 λ_1,λ_2 同为负实数，此时易见，零解是渐进稳定的，称对应的奇点为**稳定结点**

I. 当 $B=0$ 时，ξ 轴的左右半轴为轨线

II. 当 $A=0$ 时，η 轴的上下半轴为轨线

III. 当 $A\cdot B\neq 0$ 时

A. 若 $\lambda_1>\lambda_2$，则在轨线上 t 时刻的切线斜率 k 满足

$$k=\frac{\eta(t)}{\xi(t)}=\frac{B}{A}\mathrm{e}^{(\lambda_2-\lambda_1)t}\to 0\quad \text{as } t\to+\infty$$

故轨线切 ξ 轴于原点

B. 若 $\lambda_2>\lambda_1$，则有

$$\frac{1}{k}=\frac{\xi(t)}{\eta(t)}=\frac{A}{B}\mathrm{e}^{(\lambda_1-\lambda_2)t}\to 0\quad \text{as } t\to+\infty$$

故轨线切 η 轴于原点

(b). 若 λ_1,λ_2 同为正实数，此时易见，零解是不稳定的，同时上述讨论仍然有效，只需将 $t\to+\infty$ 改为 $t\to-\infty$，即轨线的走向改为相反的方向，对应的奇点称为**不稳定结点**

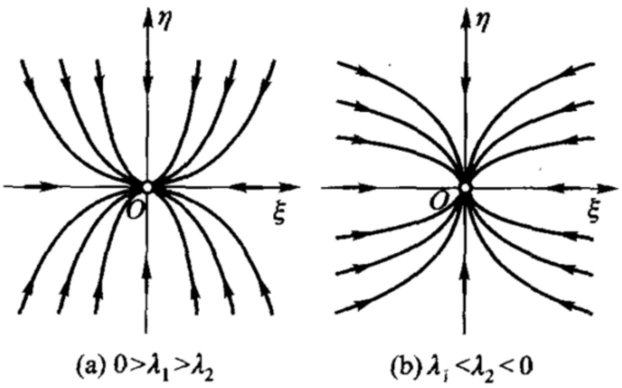


图 6.2: 稳定结点

笔记 结点：所有轨线趋于奇点，且除个别轨线外，它们在奇点处有公切线

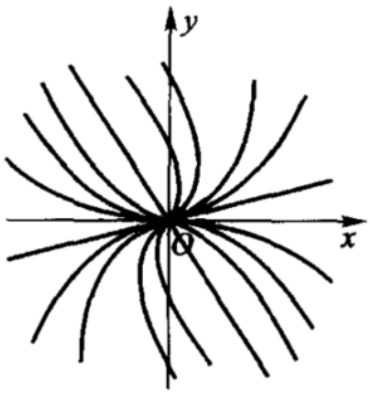


图 6.3: 结点

2. **异号实根——鞍点**

此时方程的标准形式及其解的表达式仍为

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}=\lambda_1\xi,\quad \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}=\lambda_2\eta$$
$$\xi(t)=Ae^{\lambda_1 t},\quad \eta(t)=Be^{\lambda_2 t}$$

其中 λ_1,λ_2 符号相异，对应的奇点称为**鞍点**

(a). 当 $B=0$ 或 $A=0$ 时，轨线分别为 ξ 轴的左右半轴，或 η 轴的上下半轴，其中一轴趋于原点，另一轴远离原点

(b). 当 $A\cdot B\neq 0$ 时

I. 若 $\lambda_2>0>\lambda_1$，则可知，当 $t\to+\infty$ 时，$\xi(t)\to 0,\eta(t)\to+\infty$

II. 若 $\lambda_1>0>\lambda_2$，则可知，当 $t\to+\infty$ 时，$\eta(t)\to 0,\xi(t)\to+\infty$

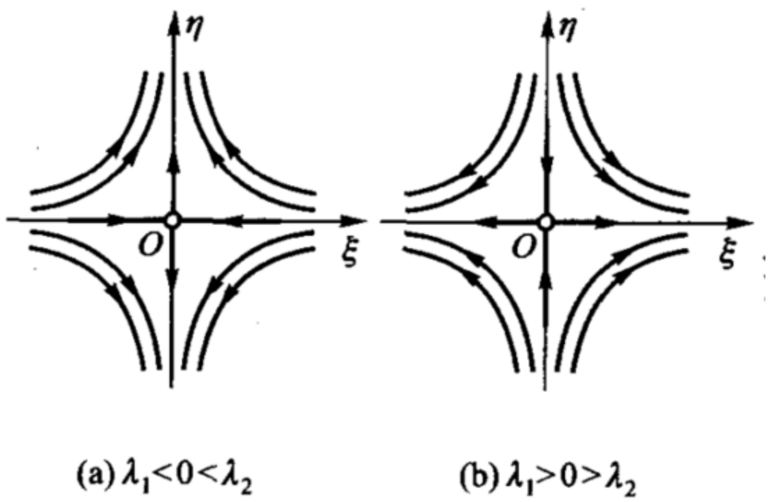


图 6.4: 鞍点

笔记　鞍点：方程轨线图貌如鞍形

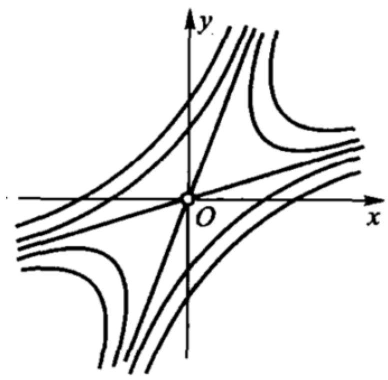


图 6.5: 鞍点

3. **重根**

(a). $b \neq 0 \; or \; c \neq 0$——**退化结点**

此时方程可化为如下标准形式

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = \lambda\xi + \eta, \quad \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} = \lambda\eta$$

其解为

$$\xi(t) = (At + B)\mathrm{e}^{\lambda t}, \quad \eta(t) = A\mathrm{e}^{\lambda t}$$

其中 λ 为实特征根，A, B 为任意实常数

I. 当 $\lambda < 0$ 时，显然有，当 $t \to +\infty$ 时，$\xi(t) \to 0, \eta(t) \to 0$，因而方程的零解是渐进稳定的，此时奇点为**退化结点**

A. 当 $A = 0$ 时，ξ 轴左右半轴即为轨线

B. 当 $A \neq 0$ 时，由于

$$\frac{\eta(t)}{\xi(t)} = \frac{A}{At + B} \to 0 \quad (\text{当} t \to \infty)$$

且当 $t = -\frac{A}{B}$ 时，$\xi(t) = 0$，可知轨线越过 η 轴而切 ξ 轴于原点

这种性态的奇点称为**稳定退化结点**

II. 当 $\lambda > 0$ 时，只要将 $t \to +\infty$ 改为 $t \to -\infty$，则上述讨论仍有有效，此时奇点为**不稳定退化结点**

(b). $b = c = 0$——**奇结点**

此时方程组的标准形式为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \lambda x, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \lambda y, \quad \lambda = a = d$$

其解为

$$x(t) = A\mathrm{e}^{\lambda t}, \quad y(t) = B\mathrm{e}^{\lambda t}$$

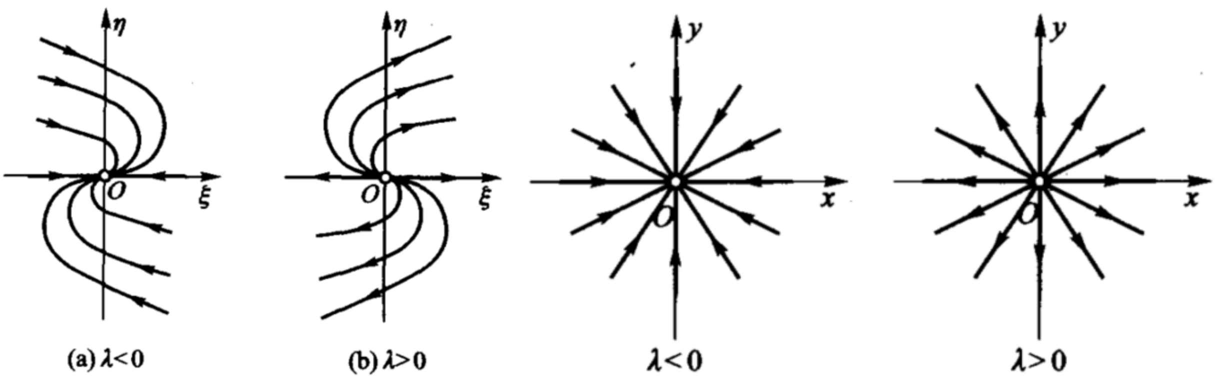
于是

$$y = \frac{B}{A}x$$

此时，轨线是趋向 (或远离) 奇点的半射线

I. 当 $\lambda < 0$ 时，奇点称为**稳定奇结点**

II. 当 $\lambda > 0$ 时，奇点称为**不稳定奇结点**



(a) 退化结点 (b) 奇结点

4. **非零实部复根——焦点**

此时方程的标准形式为

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}=\alpha\xi+\beta\eta,\quad \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}=-\beta\xi+\alpha\eta$$

其中 α,β 分别为特征根的实部和虚部，引入极坐标，令

$$\xi=r\cos\theta,\quad \eta=r\sin\theta$$

可得

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\alpha r,\quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-\dot{\beta}$$

由此得到方程的解的极坐标形式

$$r=A\mathrm{e}^{at},\quad \theta=-\beta t+B$$

其中 $A>0$ 和 B 为任意常数

(a). 当 $\alpha<0$ 时，奇点为**稳定焦点**

(b). 当 $\alpha>0$ 时，奇点为**不稳定焦点**

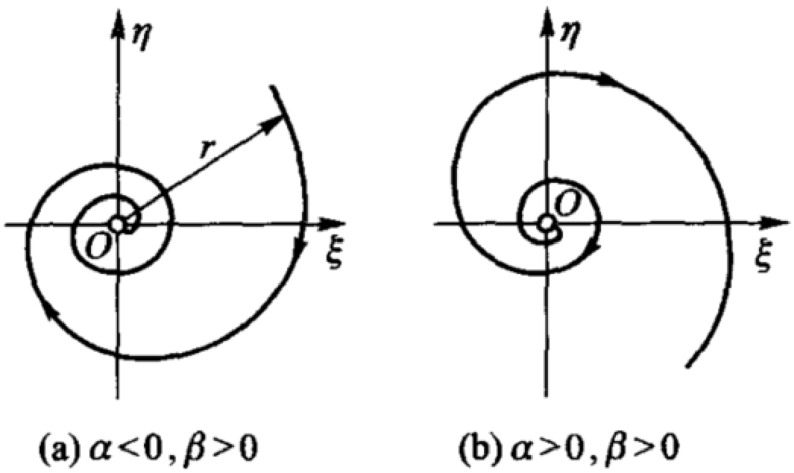


图 6.6: 焦点

5. **纯虚根——中心**

易见此时轨线为以原点为中心的一族圆，此时奇点称为**中心**，显然，在这种情形下，零解稳定但非渐进稳定

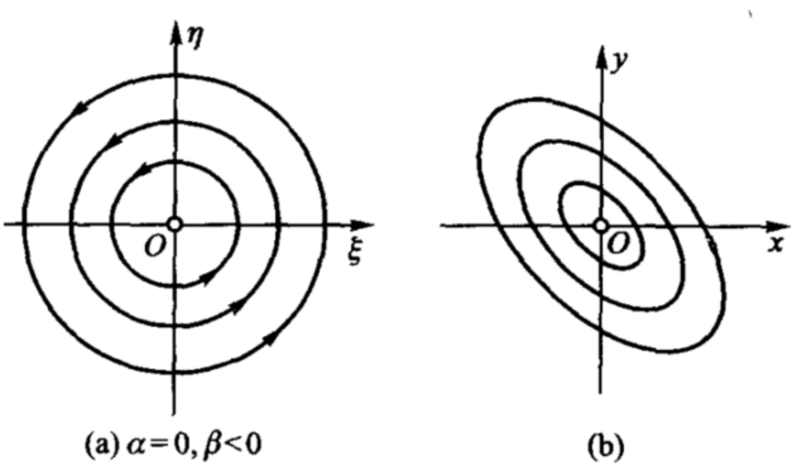


图 6.7: 中心

定理 6.9

若平面线性驻定方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax + by, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = cx + dy. \end{cases}$$

满足

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

则方程的奇点将依特征方程的根的性质而分别具有如下的特性:

1. 若特征方程的根 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 为实根，则
   (a). $\lambda_1\lambda_2 > 0$ 时，奇点为结点
      I. 当 $\lambda_1 < 0$ 时，零解渐进稳定
      II. 当 $\lambda_1 > 0$ 时，零解不稳定
   (b). $\lambda_1\lambda_2 < 0$ 时，奇点为鞍点，零解均不稳定
2. 若特征方程具有重根 λ，则
   (a). 当 $b \neq 0$ *or* $c \neq 0$ 时，奇点为退化结点
      I. 当 $\lambda < 0$ 时，零解渐进稳定
      II. 当 $\lambda > 0$ 时，零解不稳定
   (b). 当 $b = c = 0$ 时，奇点为奇结点
      I. 当 $\lambda < 0$ 时，零解渐进稳定
      II. 当 $\lambda > 0$ 时，零解不稳定
3. 若特征方程的根为共轭复根，则
   (a). 当 $Re\ \lambda_1 \neq 0$ 时，奇点为焦点
      I. 当 $Re\ \lambda_1 < 0$ 时，零解渐进稳定
      II. 当 $Re\ \lambda_1 > 0$ 时，零解不稳定
   (b). 当 $Re\ \lambda_1 = 0$ 时，奇点为中心，零解稳定但非渐进稳定

♡

笔记 上述奇点的类型和特征方程的根之间的关系可以用图来表出，令

$$p = -(a + d), \quad q = ad - bc \Longrightarrow \lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

从而

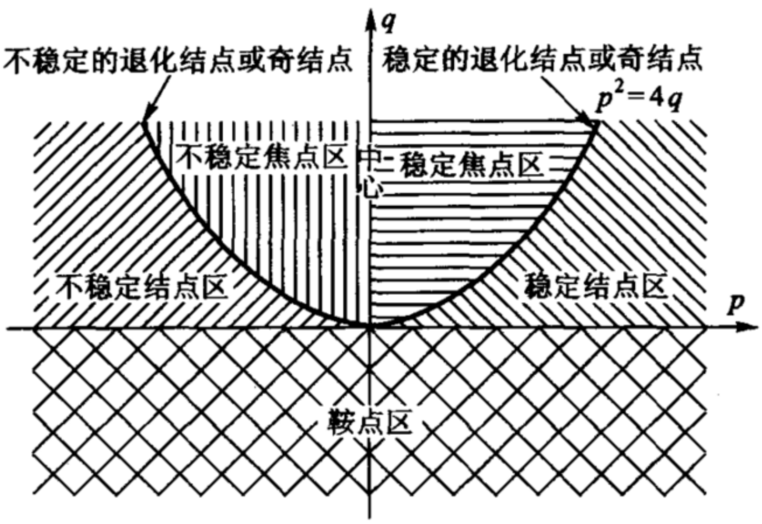


图 6.8: 奇点类型与零解稳定性

6.4 极限环和平面图貌

6.4.1 极限环

定义 6.4 (极限环)

对于平面上的动力系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = X(x, y), \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = Y(x, y)$$

若该动力系统在闭轨 Γ 的环形邻域内不再有别的闭轨，即 Γ 为独立闭轨，则称 Γ 为极限环

1. 当极限环附近的轨线均正向趋近于它，则称此极限环为稳定的
2. 当极限环附近的轨线均负向趋近于它，则称此极限环为不稳定的
3. 当极限环的一侧轨线正向趋近于它，另一侧轨线负向趋近于它，则称此极限环为半稳定的

♣

笔记

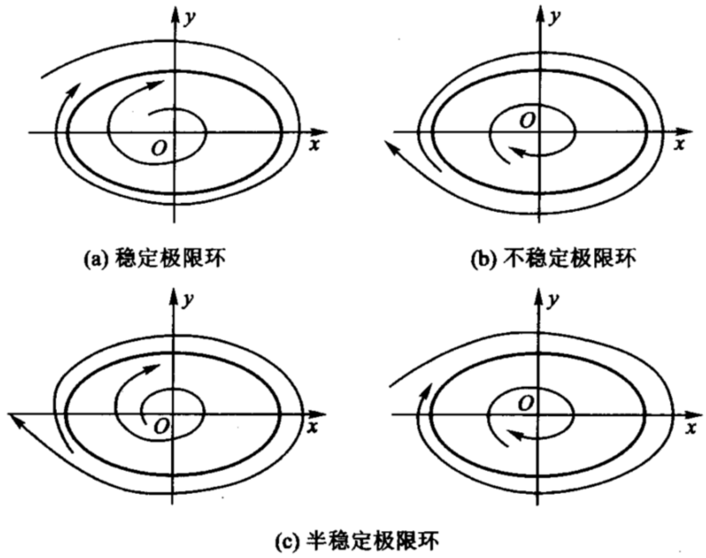


图 6.9: 极限环图示

实际上，可以不必先求出特解，而仅仅由构造出的环域 D 便可证明在此环域内必存在极限环，这种构造特殊环域来寻求极限环的方法称为本迪克松方法

定理 6.10

设动力系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = X(x, y), \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = Y(x, y)$$

其中 X, Y 在相平面内的域 G 内有一阶连续偏导数

若 G 内存在有界的环形闭域 D，在 D 内不含有方程的奇点，而动力系统的经过域 D 上的点的解 $x = x(t), y = y(t)$ 当 $t \geq t_0$(或 $t \leq t_0$) 时不离开该域，则其本身是一个闭轨线，或者该解按正向 (或负向) 趋近于 D 内的某一闭轨线

♡

笔记 因此，只要能构造一个有界的环形闭域 D，在 D 上没有奇点，且在其边界上的轨线均进入或均离开该域，则可以肯定在域 D 内必存在闭轨线，若这闭轨线是孤立的，则就是极限环

下面给出一个判别准则

定理 6.11

设动力系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=X(x,y),\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=Y(x,y)$$

其中 X,Y 在相平面内的域 G 内有一阶连续偏导数

若与 G 内存在单连通域 D，在 D 内函数 $\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}$ 不变号且在 D 内的任何子域上不恒等于零，则动力系统在域 D 内不存在任何闭轨线，更不存在任何极限环

证明 反证法

设 D 内存在某周期为 T 的闭轨线周期解

$$\Gamma: x=x(t),\quad y=y(t),\quad 0\leqslant t\leqslant T$$

则对于由 Γ 所围成的域 D_Γ 有

$$\begin{aligned}&\iint_{D_\Gamma}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_\Gamma(X\mathrm{d}y-Y\mathrm{d}x)\\ =&\int_0^T\left(X\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-Y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t=\int_0^T(XY-YX)\,\mathrm{d}t=0\end{aligned}$$

矛盾！ □