Equations Of Mathematical Physics

作者：Wang

组织：ElegantLaTeX Program

时间：2023/9/9

自定义：信息

目录

第一章 广义函数

1.1 基本空间

1.1.1 基本定义

我们考虑基本函数空间 C_0^∞，下面给出支集的定义

定义 1.1 (支集)

支集为 $f(x)$ 不为零的点的集合的闭包，记为 $supp(f) = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$

笔记 紧支集即支集为紧集；R^n 上的紧集即有界闭集

定义 1.2 ($C_0^\infty(R^n)$)

$C_0^\infty(R^n)$ 是具有紧支集的光滑函数的集合

对于这些线性泛函需要保证具有连续性，为此我们需要在 $C_0^\infty(R^n)$ 中定义一种收敛性，即定义一个序列 $\{\varphi_n(x)\} \subset C_0^\infty(R^n)$ 中趋于 0 的意义，于是我们给出

定义 1.3 ($C_0^\infty(R^n)$ 收敛性)

函数序列 $\{\varphi_n(x)\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ 在 $C_0^\infty(\Omega)$ 中趋于 0 即指：

1. 存在一个紧集 $K \subset \Omega$ 使对一切 $\varphi_n(x)$
$$supp\varphi_n \subset K$$
2. 在 K 上，对于任意固定 $\alpha \in N^n$，满足
$$\partial_x^\alpha \varphi_n(x) \Longrightarrow 0$$

例题 1.1 最常见的一个 $C^\infty(\Omega)$ 函数

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

由数学分析相关知识，知 $f(t)$ 在 R 上具有任意阶连续微商，且 $f^{(k)}(0) = 0(\forall k \in N)$

例题 1.2

$$\varphi(x) = f(1 - |x|^2) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

是 $C_0^\infty(R^n)$ 函数，其支集是球心在原点的闭单位球体

定义 1.4 ($\mathcal{D}(\Omega)$ 空间)

$C_0^\infty(\Omega)$ 赋以上述收敛性之后，称为 $\mathcal{D}(\Omega)$ 空间，上述的趋于 0 称为在 $\mathcal{D}$ 中趋于 0

笔记 $\mathcal{D}(\Omega)$ 是最常见的基本空间，它的元素常称为试验函数

1.1.2 函数的磨光化

C_0^∞ 函数不仅是广义函数论的基础，其本身在数学分析中也是极其重要的

为此，我们先引进一些常见的记号

- 记 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 代表 R^n 中一点
- 记 $\partial_x = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \cdots, \partial_{x_n})$
- 记 $D_x = \frac{1}{i}\partial_x$
- 记 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n), \alpha \in Z_+$ 为一个 n 维重指标
- 记 $\alpha! = \alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!$
- 记 $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$
- 记 $\partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1}\partial_{x_2}^{\alpha_2}\cdots\partial_{x_n}^{\alpha_n}$

下面我们给出如何构造 C_0^∞ 函数来逼近任意连续函数

解 现在取 $g(x) \in C_0^\infty(R^n)$，并设 $supp(g) \subset B_1(0)$ 而且

$$c = \int g(x)dx \neq 0$$

于是作 $\varphi_\epsilon(x) = \frac{1}{c\epsilon^n}g(\frac{x}{\epsilon})$，我们有

$$\begin{aligned}\int_{R^n}\varphi_\epsilon(x)dx &= \frac{1}{c\epsilon^n}\int_{R^n}g(\frac{x}{\epsilon})dx\\ &= \frac{1}{c}\int_{R^n}g(x)dx\\ &= 1\end{aligned}$$

以 $\varphi_\epsilon(x)$ 为磨光核与连续函数 $f(x)$ 进行卷积

$$f_\epsilon(x) = \int_{R^n}f(y)\varphi_\epsilon(x-y)dy$$

$f_\epsilon(x)$ 称为 $f(x)$ 的磨光化

下面描述 $f_\epsilon(x) = \int_{R^n}f(y)\varphi_\epsilon(x-y)dy$ 的性质

性质

1. 光滑性（无穷可微性）

$$\partial_x^\alpha f_\epsilon(x) = \int_{R^n}f(y)\partial_x^\alpha\varphi_\epsilon(x-y)dy$$

2. 支集

$$supp(f_\epsilon) \subset \{x \in R^n : dist(x, supp(f)) \leq \epsilon\}$$

3. $f_\epsilon(x) \to f(x)$

定理 1.1

若 $f \in C^k(R^n)$，则在任一紧集 K 上一致有

$$\lim_{\epsilon\to 0}\partial^\alpha f_\epsilon(x) = \partial^\alpha f(x), \quad |\alpha| \leq k$$

♡

证明 当 $f \in C(R^n)$，在紧集 K 上，取 $0 < \epsilon < \epsilon_0$

令 $K_{\epsilon_0} = \{x : dist(x, K) \leq \epsilon_0\}$，

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in K_{\epsilon_0}\\ 0, & x \notin K_{\epsilon_0}\end{cases}$$

$$\widetilde{f}_\epsilon(x) = \int_{R^n}\widetilde{f}(y)\varphi_\epsilon(x-y)dy$$

我们有 $supp(\widetilde{f_\epsilon}) \subset K_{\epsilon_0+\epsilon} \subset K_{2\epsilon_0}$，当 $x \in K$ 时

$$\begin{aligned} \left|\widetilde{f_\epsilon}(x) - f(x)\right| &= \left|\int (\widetilde{f}(y) - f(x))\varphi_\epsilon(x-y)dy\right| \\ &= \left|\int (f(y) - f(x))\varphi_\epsilon(x-y)dy\right| \\ &\le \max_{|x-y|\le\epsilon} |f(y)-f(x)| \int |\varphi_\epsilon(x-y)|\, dy \to 0 \end{aligned}$$

当 $f \in C^k(R^n)$ 时

$$\begin{aligned} \left|\partial_x^\alpha \widetilde{f_\epsilon}(x) - \partial_x^\alpha f(x)\right| &= \left|\partial_x^\alpha \int \widetilde{f}(y)\varphi_\epsilon(x-y)dy - \partial_x^\alpha f(x)\right| \\ &= \left|\int \widetilde{f}(y)\partial_x^\alpha\varphi_\epsilon(x-y)dy - \int \partial_x^\alpha f(x)\varphi_\epsilon(x-y)dy\right| \\ &= \left|(-1)^{|\alpha|}\int \widetilde{f}(y)\partial_y^\alpha\varphi_\epsilon(x-y)dy - \int \partial_x^\alpha f(x)\varphi_\epsilon(x-y)dy\right| \\ &= \left|\int [\partial_y^\alpha \widetilde{f}(y) - \partial_x^\alpha f(x)]\varphi_\epsilon(x-y)dy\right| \\ &\le \sup_{|x-y|<\epsilon} \left|\partial_y^\alpha \widetilde{f}(y) - \partial_x^\alpha f(x)\right| \int |\varphi_\epsilon(x-y)|\, dy \\ &= \sup_{|x-y|<\epsilon} \left|\partial_y^\alpha \widetilde{f}(y) - \partial_x^\alpha f(x)\right| \int |\varphi_\epsilon(y)|\, dy \to 0 \end{aligned}$$

□

下面给出函数磨光化的相关应用

定义 1.5 (截断函数)

设 $f(x) \in C_0^\infty(\Omega)$，$K_1 \subset\subset K_2$，满足

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in K_1 \\ 0, & x \notin K_2 \end{cases}$$

$f(x)$ 称为一个截断函数

♣

定理 1.2

若 $K_1 \subset\subset K_2$，则存在 $C_0^\infty(R^n)$ 函数 $f(x) \ge 0$，使得

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in K_1 \\ 0, & x \notin K_2 \end{cases}$$

♡

证明 构造特征函数

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in (K_1)_{\epsilon_0} \\ 0, & x \notin (K_1)_{\epsilon_0} \end{cases}$$

令 $f(x) = \int \chi(y)\varphi_\epsilon(x-y)dy$，$\forall 0 < \epsilon < \epsilon_0$

1. 当 $x \in K_1, |x-y| < \epsilon$ 时，则有 $y \in (K_1)_\epsilon \subset (K_1)_{\epsilon_0} \Rightarrow \chi(y) = 1 \Rightarrow f(x) = 1$
2. 当 $x \notin K_2 = (K_1)_{2\epsilon}$ 时
   (a). $y \in (K_1)_{\epsilon_0} \Rightarrow |x-y| > \epsilon_0 > \epsilon \Rightarrow \varphi_\epsilon(x-y) = 0$
   (b). $y \notin (K_1)_{\epsilon_0} \Rightarrow \chi(y) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

□

笔记 $K_1 \subset\subset K_2$：$K_1 \subset K_2$，且 $\overline{K_1}$ 是紧集，且 $\overline{K_1} \subset K_2^\circ$

例题 1.3 截断函数 $f(x)$，对 $\partial_x^\alpha f(x)$ 作估计

解

$$\begin{aligned}
\partial_x^\alpha f(x) &= \partial_x^\alpha(\int \chi(y)\varphi_\epsilon(x-y)dy) \\
&= \partial_x^\alpha(\int \chi(y)\frac{1}{c_1\epsilon^n}\varphi_1(\frac{x-y}{\epsilon})dy) \\
&= \frac{1}{c_1\epsilon^n}\int \chi(y)\partial_x^\alpha\varphi_1(\frac{x-y}{\epsilon})dy \\
&= \frac{1}{c_1\epsilon^n}\epsilon^{-|\alpha|}\int \chi(y)\varphi_1^{|\alpha|}(\frac{x-y}{\epsilon})dy \\
&\leq \frac{1}{c_1\epsilon^n}\epsilon^{-|\alpha|}\int \left|\varphi_1^{|\alpha|}(\frac{x-y}{\epsilon})\right|dy \\
&= \frac{1}{c_1}\epsilon^{-|\alpha|}\int \left|\varphi_1^{|\alpha|}(x)\right|dx \\
&\leq M\epsilon^{-|\alpha|}
\end{aligned}$$

1.1.3 单位分解

定理 1.3 (单位分解)

设 $A \subset R^n$，对于 A 的任意开覆盖 $O = \{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$，必存在一组 $C_0^\infty(R)$ 函数族 $\Phi = \{\varphi_\alpha(x)\}$，使得

1. $0 \leq \varphi_\alpha(x) \leq 1$
2. 任一点 $x \in A$ 均有一个邻域 V 使得只有有限多个 $\varphi_\alpha(x)$ 在 V 上不为 0
3. $\sum_\alpha \varphi_\alpha(x) = 1$
4. 对任意 $\alpha \in I, \varphi_\alpha(x)$ 的支集必位于 U_α 中

证明

1. 若 A 是紧集，故由有限覆盖定理可以选出有限多个开集 $U_1, U_2, \cdots, U_N$，满足 $A \subset \bigcup_{i=1}^N U_i$，可知 $A \setminus \bigcup_{i=2}^N U_i \subset U_1$，且 $A \setminus \bigcup_{i=2}^N U_i$ 是有界闭集，即为紧集
   记 $A_1 := A \setminus \bigcup_{i=2}^N U_i, d := dist(A_1, \partial U_1)$，由此得
   $$A_1 \subset U_1' := \{x : x \in U_1, dist(x, \partial U_1) > d/2\}$$
   从而有 $A \subset (\bigcup_{i=2}^N U_i) \bigcup U_1'$
   类似构造 $U_2', U_3', \cdots, U_N'$，使得 $U_i' \subset\subset U_i, A \subset \bigcup_{i=1}^N U_i'$，这样存在 $\psi_i \in C_0^\infty(U_i), \psi_i(x) = 1, \forall x \in \overline{U_i'}$
   令
   $$\begin{aligned}
   &\varphi_1(x) := \psi_1(x) \\
   &\varphi_2(x) := \psi_2(x)(1-\psi_1(x)) \\
   &\cdots\cdots \\
   &\varphi_N(x) := \psi_N(x)(1-\psi_1(x))\cdots(1-\psi_{N-1}(x))
   \end{aligned}$$
   从而对任意的 $x \in A$，有
   $$1 - \sum_{i=1}^N = \prod_{i=1}^N (1-\psi_i(x))$$
   故对任意的 $x \in A$，都存在 i，使得 $\psi_i(x) = 1$，从而有
   $$\sum_{i=1}^N \varphi_i(x) = 1$$

2. 若 A 不为紧集，令

$$A_i = \{x : x \in A, |x| \le i, dist(x, \partial A) \ge 1/i\}$$

可知 A_i 皆为紧集，且满足 $A_i^\circ \subset A_{i+1}^\circ$ 及 $A = \bigcup_k A_k$
令

$$O_i = \{U_\alpha \bigcap (A_{i+1}^\circ \setminus A_{i-2}), \alpha \in I\}$$

于是 O_i 是紧集 $B_i := A_i \setminus A_{i-1}^\circ$ 的开覆盖，作 B_i 从属于 O_i 的单位分解 $\Phi_i = \{\varphi_\alpha^{(i)}\}_{\alpha\in I}$
对于任意 $x \in A$，必有一个 i 使得 $x \in B_i$ 且 $x \notin B_j, j \ge i+2$，故对于 Φ_j 中的 $\varphi_\alpha^{(j)}$，有 $\varphi_\alpha^{(j)}(x) = 0$
从而

$$\sigma(x) = \sum_i \sum_\alpha \varphi_\alpha^{(i)}(x)$$

在任一点 x 附近都是有限和，从而 $\sigma(x)$ 有意义，令

$$\varphi_\alpha(x) = \sum_i \varphi_\alpha^{(i)} / \sigma(x)$$

$\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 即为所求的单位分解

□

1.2 广义函数

1.2.1 基本定义

广义函数即为 $\mathcal{D}(\Omega)$ 上的连续线性泛函，下面给出广义函数的完整定义

定义 1.6 (广义函数)

设 $\Omega \subset R^n$ 是一个开集，称 $l(\varphi)$ 为 $\mathcal{D}(\Omega)$ 上的广义函数，若满足 $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

1. 对实数或复数 c_1, c_2 有

$$l(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1 l(\varphi_1) + c_2 l(\varphi_2)$$

2. 若 $\varphi_j \to 0$，则 $l(\varphi_j) \to 0$(连续性)

若 l 是一个广义函数，则记作 $l \in \mathcal{D}'(\Omega), l(\varphi) = \langle l, \varphi\rangle$

♣

其中连续性可以等价表示：

定理 1.4

对任一紧集 $K \subset \Omega$ 必存在常数 c 与非负整数 k 使得

$$|l(\varphi)| \le c \sum_{|\alpha|\le k} \sup |\partial^\alpha \varphi|, \quad \varphi \in C_0^\infty(K)$$

♡

证明

1. 充分性：取一列 $\varphi_j \in \mathcal{D}(\Omega)$，在 $\mathcal{D}(\Omega)$ 中收敛于 0,，要证 $\langle l, \varphi_j\rangle \to 0,\ j \to \infty$
事实上，由 $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega)$，则存在紧集 $K \subset \Omega$，使得 $supp\varphi_j \subset K$，且 $\partial_x^\alpha \varphi_j \to 0,\ j \to \infty$
故对于 $\varphi_j \in C_0^\infty(K)$

$$\left|\langle l, \varphi_j\rangle\right| \le c \sum_{|\alpha|\le k} \sup \left|\partial_x^\alpha \varphi_j\right| \to 0$$

故 $\left|\langle l, \varphi_j\rangle\right| \to 0$

2. 必要性

假设不成立，即有某个紧集 K，使对任意常数 c 与 k 皆有一个函数 $\varphi \in C_0^\infty(K)$，使得

$$|\langle l, \varphi\rangle| > c \sum_{|\alpha|\le k} \sup\left|\partial_x^\alpha \varphi\right|$$

取 $c = k = j$，即有

$$\left|\langle l, \varphi_j\rangle\right| > j \sum_{|\alpha|\le j} \left|\partial_x^\alpha \varphi_j\right|, \quad \varphi_j \in C_0^\infty(K)$$

用 $\frac{\varphi_j}{|\langle l,\varphi_j\rangle|}$ 代替 φ_j 有

$$1 > j \sum_{|\alpha|\le j} \sup\left|\partial_x^\alpha \varphi_j\right|, \quad \varphi_j \in C_0^\infty(K)$$

即

$$\sum_{|\alpha|\le j} \sup\left|\partial_x^\alpha \varphi_j\right| < \frac{1}{j} \to 0, \quad j \to \infty$$

从而有 $\{\varphi_j\} \subset C_0^\infty(K)$ 且 $\varphi_j \to 0$ 在 $C_0^\infty(K)$ 中，由连续性，知

$$\langle l, \varphi_j\rangle \to 0, \quad j \to \infty$$

但 $\langle l, \varphi_j\rangle = 1$ 不趋于 0，矛盾！

□

例题 1.4 局部可积函数都是广义函数

设 $f(x)$ 是 Ω 上的局部可积函数（即在 Ω 的任意紧子集上可积，记为 $L_{loc}(\Omega)$），则对任一 $\varphi \in C_0^\infty$，按以下意义：

$$\widetilde{f}: C_0^\infty(\Omega) \to R$$
$$\varphi \longmapsto \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx$$

显然有 $\widetilde{f} \in \mathcal{D}'(\Omega)$，所以当 f 是局部可积函数，我们总是可以将 f 与 $\widetilde{f}$ 视作等同，同时也将这种广义函数称为正则广义函数

例题 1.5 δ 函数定义为对任意 $\varphi \in C_0^\infty(R^n)$，

$$\delta(\varphi) = \varphi(0)$$

可证明它是一个广义函数，且 k=0

对于广义函数而言，谈不上广义函数 $f(x)$ 在一点的值，更谈不上 $f(x)$ 在某一点为 0，但 $f(x)$ 在某一开集 U 中为 0 是有意义的

定义 1.7

若对一切 $\varphi \in C_0^\infty(U)$ 皆有 $\langle u, \varphi\rangle = 0$，则称广义函数 u 在 U 上为 0 ♣

定义 1.8 (广义相等)

两个广义函数 u_1, u_2 之差 $u_1 - u_2$ 若在 U 上为 0，则称 u_1 与 u_2 在 U 上广义相等 ♣

定义 1.9

广义函数 u 的支集 $supp(u)$ 是 u 在其上为 0 的最大开子集的余集，即

$$supp(u) = \{x; \text{存在开集 } U \subset \Omega \text{ 使得 } x \in U \text{ 且 u 在 U 上为 } 0\}\text{的余集}$$

♣

广义函数 u 虽谈不上在某一点的值，但确有局部性质，若 $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$，而 U 是 Ω 的任一开子集，则因为 $\mathcal{D}(U) \subset \mathcal{D}(\Omega)$，所以 u 自然地可以作用在 $\mathcal{D}(U)$ 之元上而成为其上的连续线性泛函，也就是称为 $\mathcal{D}'(U)$ 的广义函数，但仍记为 u，从而 $u \in \mathcal{D}'(U)$，这个广义函数称为 u 在 U 上的限制，记作 $u\,|_U$，我们有如下定理

定理 1.5 (局部化原理)

若 u 在 Ω 上为 0，则它在 Ω 之任一开子集上的限制为 0；反之，若 Ω 有一个开覆盖 $\{U_\alpha\}$，而 $u\,|_{U_\alpha}=0$（对一切 α），则 $u=0$

证明

1. 必要性

   要证 $\forall\varphi\in C_0^\infty(U)$，有 $\langle u,\varphi\rangle=0$，已知 $u\,|_\Omega=0$，即 $\forall\phi\in C_0^\infty(\Omega)$，有 $\langle u,\phi\rangle=0$
   事实上，$\forall\varphi\in C_0^\infty(U),\varphi\,|_{\partial U}=0, supp\varphi\subset\subset U$，进行零延拓，令

   $$\phi=\begin{cases}\varphi, & x\in U;\\ 0, & x\notin U\end{cases}$$

   $supp(\phi)=supp(\varphi)$，从而

   $$\langle u,\varphi\rangle=\langle u,\phi\rangle=0$$

2. 充分性

   要证 $\forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$，有 $\langle u,\varphi\rangle=0$，已知 $u\,|_{U_\alpha}=0$，即 $\forall\varphi_\alpha\in C_0^\infty(U_\alpha)$，有 $\langle u,\varphi_\alpha\rangle=0$
   事实上，构造 Ω 上的从属 $\{U_\alpha\}$ 的单位分解 $\{\phi\}$ 满足

   $$\phi_\alpha\in C_0^\infty(\Omega),\quad supp\phi_\alpha\subset U_\alpha,\quad 0\le\phi_\alpha\le 1$$

   $\{supp(\phi_\alpha)\}$ 局部有限，$\sum_\alpha\phi_\alpha(x)=1$
   对于 $\forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$，则

   $$\varphi=\varphi\cdot(\sum_\alpha\phi_\alpha)=\sum_\alpha(\varphi\phi_\alpha)$$

   其中 $\varphi\phi_\alpha\in C_0^\infty(U_\alpha), supp(\varphi\phi_\alpha)\subset supp(\phi_\alpha)$
   故

   $$\langle u,\varphi\rangle=\langle u,\sum_\alpha\varphi\phi_\alpha\rangle=\sum_\alpha\langle u,\varphi\phi_\alpha\rangle=0$$

□

1.2.2 线性运算与微分运算

广义函数作为线性泛函，其线性运算如加法和数乘的定义是自明的

定义 1.10 (线性运算)

对于任意常数 c_1,c_2，设 $f_1,f_2\in\mathcal{D}'(R^n)$，则

$$c_1f_1+c_2f_2\in\mathcal{D}'(R^n)$$

且 $\forall\varphi\in C_0^\infty(R^n)$

$$\langle c_1f_1+c_2f_2,\varphi\rangle=c_1\langle f_1,\varphi\rangle+c_2\langle f_2,\varphi\rangle$$

从古典的光滑函数 $f(x)$ 出发，$f(x)$ 在 R 上局部可积，作为广义函数，此时 $f'(x)$ 仍是广义函数，且由分部积分公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f'(x)\varphi(x)dx=-\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\varphi'(x)dx,\quad\forall\varphi\in C_0^\infty(R)$$

仿照这个例子，我们给出

定义 1.11 (微分运算)

设 $f \in \mathcal{D}'(R^n), \forall \varphi(x) \in C_0^\infty(R^n)$，则 $f(x)$ 的微商 $\frac{\partial f}{\partial x_j}, j = 1, 2, \cdots, n$ 仍是广义函数，且满足

$$\langle \frac{\partial f(x)}{\partial x_j}, \varphi(x) \rangle = (-1)\langle f(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \rangle$$

♣

笔记 若 $f \in C^1(R^n) \subset L_{loc}(R^n), \forall \varphi \in C_0^\infty(R^n)$

$$\int_{R^n} \frac{\partial f(x)}{\partial x}\varphi(x)dx = f(x)\varphi(x) \mid_\infty - \int_{R^n} f(x)\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x}dx = -\int_{R^n} f(x)\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x}dx$$

定理 1.6

任何广义函数 $f(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ 皆可微分任意多次，而且

$$\langle \partial_x^\alpha f(x), \varphi(x) \rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle f(x), \partial_x^\alpha \varphi \rangle$$

♡

例题 1.6 赫维赛德函数

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

这是一个局部可积函数。这种函数在某一点上的值可以任意改变而无本质影响，所以没有规定 $H(0)$ 的值，按定义，对于 $\varphi \in C_0^\infty(R)$ 有

$$\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x)dx = \varphi(0)$$

所以有

$$H'(x) = \delta(x)$$

两个广义函数一般地不能相乘，但局部可积函数 $a(x) \in C^\infty(R^n)$ 作为一个广义函数可以乘任一广义函数 $u(x) \in \mathcal{D}'(R^n)$，其定义为

定义 1.12 (乘子运算)

称局部可积函数 $a(x) \in C^\infty$ 为一个 $\mathcal{D}'(R^n)$ 乘子，若对 $\forall u(x) \in \mathcal{D}'(R^n)$ 定义乘子运算

$$a(x)\cdot : u(x) \longmapsto a(x)u(x) \in \mathcal{D}'(R^n)$$

$$\langle au, \varphi \rangle = \langle u, a\varphi \rangle, \quad \varphi \in C_0^\infty(R^n)$$

♣

1.2.3 线性变换

下面我们讨论当“自变量”变换时广义函数如何变化，我们已经可看到，广义函数其实是积分的一种推广，其运算也可从有关积分的各种运算得到定义，仿照积分的变量变换公式，有

定义 1.13 (线性变换)

对于广义函数 $u(x) \in \mathcal{D}'(R^n)$，以及非奇异变换 $A : R^n \to R^n$，定义 $u(Ax) \in \mathcal{D}'(R^n)$ 满足

$$\langle u(Ax), \varphi(x) \rangle = \langle u(y), \left|\det \frac{\partial (A^{-1}y)}{\partial y}\right| \varphi(A^{-1}y) \rangle$$

♣

下面是一些常用的线性变换

定义 1.14 (平移运算)

设 $f \in \mathcal{D}'(R^n), a \in R^n$，定义 $f(x-a)$，$\forall \varphi \in C_0^\infty(R^n)$

$$\langle f(x-a), \varphi \rangle = \langle f(x), \varphi(x+a) \rangle$$

♣

笔记 当 $f \in L_{loc}(R^n)$ 是正则广义函数，则有

$$\int_{R^n} f(x-a)\varphi(x)dx = \int_{R^n} f(x)\varphi(x+a)dx$$

定义 1.15 (相似变换)

设 $x \longmapsto cx, c \neq 0$，则有

$$\langle f(cx), \varphi(x) \rangle = \langle f(x), \frac{1}{|c|^n}\varphi(\frac{x}{c}) \rangle$$

♣

笔记

1. 若 $f \in L_{loc}(R^n), \forall \varphi \in C_0^\infty(R^n)$
$$\int_{R^n} f(cx)\varphi(x)dx = \frac{1}{|c|^n}\int_{R^n} f(x)\varphi(\frac{x}{c})dx$$
2. 若 $c > 0$，$f(cx) = c^\lambda f(x)$（广义相等），则称 $f \in \mathcal{D}'(R^n)$ 为 λ 阶齐次广义函数
3. 记 $\widetilde{f}(x) := f(-x), \forall \varphi(x) \in C_0^\infty(R^n)$
$$\langle \widetilde{f}(x), \varphi(x) \rangle = \langle f(-x), \varphi(x) \rangle = \langle f(x), \varphi(-x) \rangle = \langle f(x), \widetilde{\varphi}(x) \rangle$$

1.2.4 极限运算

定义 1.16 (极限运算)

设有一个 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 广义函数序列 $f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$，称 $f_n \to f$(于 $\mathcal{D}'$ 中) 即 $f_n \in \mathcal{D}'$ 在 $\mathcal{D}'$ 意义下收敛于 $f \in \mathcal{D}'$，是指对任意 $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ 均有

$$\lim_{n\to\infty} \langle f_n, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$$

称这种收敛性为“弱 * 收敛”

♣

笔记 一个广义函数级数收敛于一个广义函数 $\sum_{j=1}^n f_j = f$ 即指对任意 $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ 有

$$\lim_{n\to\infty} \langle \sum_{j=1}^n f_j, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$$

定理 1.7

设 $f_n \in \mathcal{D}'(\Omega)$ 且 $f_n \to f$(于 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 中)，则对于任意固定的 α 有

$$\partial^\alpha f_n \to \partial^\alpha f, \quad \text{于 } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ 中}$$

♡

证明 任取 $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$，则由微商的定义

$$\langle \partial^\alpha f_n, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle f_n, \partial^\alpha \varphi \rangle$$

由假设 $f_n \to f$，而 $\partial^\alpha \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$，故

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^{|\alpha|}\langle f_n, \partial^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle f, \partial^\alpha \varphi \rangle = \langle \partial^\alpha f, \varphi \rangle$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} \langle \partial^\alpha f_n, \varphi \rangle = \langle \partial^\alpha f, \varphi \rangle$$

□

笔记 与古典的数学分析相比，在数学分析中，微商运算可能把一个序列的收敛性破坏殆尽：$\{f_n\}$ 收敛而 $\{\partial^\alpha f_n\}$ 不一定收敛，但在广义函数理论中，微商运算却一定保持收敛性，这个性质也称为广义函数中微商运算的连续性

事实上，我们可以证明任一个广义函数都是一串 $C^\infty(\Omega)$ 函数作为广义函数的极限（每一个 C^∞ 函数都在 Ω 中局部可积，但不一定可积），下面用一串 $C^\infty(R^n)$ 函数来逼近 $\delta(x)$

定理 1.8

设有 $C^\infty(R)$ 函数序列 $\{f_n(x)\}$ 满足

1. 对任意 $M>0$，当 $|a|<M,|b|<M$ 时
$$\left|\int_a^b f_n(x)dx\right| \le c$$
c 只与 M 有关
2. 固定 a 和 b 有
$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{若 a,b 同号} \\ 1, & \text{若 } a<0<b \end{cases}$$

则必有
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \delta(x)$$

♡

证明 令
$$F_n(x) = \int_{-1}^x f_n(\xi)d\xi$$
由条件一，在任一有界区间内 $F_n(x)$ 对 n 一致有界，而且
$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$$
由勒贝格控制收敛定理有
$$\lim_{n\to\infty}\langle F_n,\varphi\rangle = \lim_{n\to\infty}\int F_n(x)\varphi(x)dx$$
$$= \int H(x)\varphi(x)dx = \langle H,\varphi\rangle, \quad \varphi\in\mathcal{D}(R)$$
故
$$\langle f_n,\varphi\rangle = \langle F_n',\varphi\rangle = -\langle F_n,\varphi'\rangle \to -\langle H,\varphi'\rangle = \langle H',\varphi\rangle = \langle\delta,\varphi\rangle$$

□

下面还要介绍广义函数的奇支集 $sing\ supp(u)$ 的概念，由于广义函数在一个开集中的限制是有意义的，且广义函数是古典的函数概念的推广，因此说广义函数 u 在 Ω 的某一个开子集 Ω_1 上是 C^∞ 的，即指 u 在 Ω_1 上等于一个 C^∞ 函数 φ_1，即是 $u\mid_{\Omega_1} = \varphi \in C^\infty$，这意味着 u 在 Ω_1 上没有奇异性，取这样的 Ω_1 中最大的，则 u 的奇异性全在其外，所以我们有

定义 1.17 (奇支集)

称广义函数 u 的奇支集，若为使 $u\in\mathcal{D}'(\Omega)$ 等于一个 C^∞ 函数的最大开集 Ω_1 的余集，记作 $sing\ supp(u)$

♣

笔记

1. $sing\ supp(u)$ 是闭集
2. $sing\ supp(u) \subset supp(u)$

1.3 紧支集广义函数

定义 1.18 ($\mathscr{E}$ 空间)

空间 $\mathscr{E}(\Omega)$ 是对 $C^\infty(\Omega)$ 空间赋以下面规定的收敛性所形成的空间：

$$\varphi_j(x) \to 0(\text{在 } \mathscr{E}(\Omega) \text{ 中})$$

即在任一紧集 $K \subset \Omega$ 中，对任一选定的重指标 α，满足

$$\partial^\alpha \varphi_j(x) \rightrightarrows 0$$

♣

定义 1.19

$\mathscr{E}(\Omega)$ 上的线性连续泛函之集记作 $\mathscr{E}'(\Omega)$，其元素称为 $\mathscr{E}'(\Omega)$ 广义函数 ♣

下面说明 $\mathscr{E}'$ 广义函数就是具有紧支集的广义函数

定理 1.9

$$\mathscr{E}'(\Omega) = \{u : u \in \mathcal{D}'(\Omega), supp\ u \subset\subset \Omega\}$$

♡

证明 设 $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$，且 $supp\ u$ 为紧集，则可取 $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$，且 $\chi(x) = 1$ 于 $supp\ u$ 的某个邻域上，记 $K = supp\ \chi$，对任意 $\varphi \in \mathscr{E}(\Omega)$，有

$$\begin{aligned}|\langle u, \varphi\rangle| = |\langle u, \chi\varphi\rangle| &\le C \sum_{|\alpha|\le k} \sup|\partial^\alpha(\chi\varphi)| \\ &\le C' \sum_{|\alpha|\le k} \sup|\partial^\alpha\varphi|\end{aligned}$$

因此 $u \in \mathscr{E}'(\Omega)$

反之，若 $u \in \mathscr{E}'(\Omega)$，因此自然地有 $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$，下证 $supp\ u$ 是紧集

反证法，设 $supp\ u$ 非紧，因而无界，故一定有 $\varphi_j(x) \in \mathscr{E}(\Omega)$，而 $supp\ \varphi_j \subset supp\ u \cap \{x : |x| > j\}$，使得 $\langle u, \varphi_j\rangle \ne 0$

同时，不妨设 $\langle u, \varphi_j\rangle = 1$，但若取任一紧集 $K \subset \Omega$，必有正整数 N 使得 $K \subset \{x : |x| \le N\}$，所以凡 $j > N$ 必有 $\varphi_j \equiv 0$ 于 K 中，即知 $\varphi_j \to 0$ 于 $\mathscr{E}(\Omega)$ 中，而应有 $\langle u, \varphi_j\rangle \to 0$，这与 $\langle u, \varphi_j\rangle = 1$ 矛盾！ □

第二章 卷积

2.1 函数与函数的卷积

首先先给出函数与函数的卷积的定义

定义 2.1 (函数卷积)

设 $f(x), g(x)$ 是 R^n 中的连续函数，设其中至少一个具有紧支集，则称

$$(f * g)(x) = \int_{R^n} f(y)g(x-y)dy$$

为卷积

笔记 $(f * g)(x)$ 实际上是 $g(x)$ 在平移 y 后，按其平移量 y 加权 $(f(y)dy)$ 求和 (积分)，因此，应该保有 $g(x)$ 的许多性质，同理，$f * g$ 也应保有 $f(x)$ 的许多性质

性质

1. 交换律：$f * g = g * f$
2. 结合律：$(f * g) * h = f * (g * h)$
3. 微分：$\partial^\alpha(f * g) = f * (\partial^\alpha g) = (\partial^\alpha f) * g$
4. 支集：$supp(f * g) \subset supp(f) + supp(g) := \{x + y : x \in supp(f), y \in supp(g)\}$

2.2 函数与广义函数的卷积

2.2.1 函数与广义函数的卷积

定义 2.2 (函数与广义函数的卷积)

设 $f \in \mathcal{D}'(R^n), g \in C_0^\infty$，则称 f 和 g 的卷积为

$$(f * g)(x) = \langle f(y), g(x-y) \rangle$$

笔记 无交换性质，广义函数与函数之间卷积本质为泛函作用在基本函数上

例题 2.1 对任意的 $f \in C^\infty(R^n)$，有

$$(\delta * f)(x) = f(x)$$

引理 2.1

设 $\omega \subset R^n$ 为开集，$\varphi(x, y) \in C^\infty(\Omega \times \omega)$，且有紧集 $K \subset \Omega$ 满足当 $x \notin K$ 时有 $\varphi(x, y) = 0$ 对任意 $y \in \omega$ 成立，对于 $\forall f(y) \in \mathcal{D}'(\omega)$，则函数 $F(x) = \langle f(y), \varphi(x, y) \rangle \in C^\infty$ 且

$$\partial_x^\alpha F(x) = \partial_x^\alpha \langle f(y), \varphi(x, y) \rangle = \langle f(y), \partial_x^\alpha \varphi(x, y) \rangle$$

定理 2.1

若 $f \in \mathcal{D}'(R^n), \varphi \in C_0^\infty(R^n)$，则

1. $f * \varphi \in C^\infty(R^n)$
2. $supp(f * \varphi) \subset supp(f) + supp(\varphi)$
3. $\partial^\alpha(f * \varphi) = f * \partial^\alpha \varphi = (\partial^\alpha f) * \varphi$

证明

1. 由上述引理直接推得
2. 设 $x \notin supp\ f + supp\ \varphi$，即不存在 ξ，使得同时有 $\xi \in supp\ f, x-\xi \in supp\ \varphi$，但

$$x-\xi \in supp\ \varphi \Longleftrightarrow \xi \in supp\ \varphi(x-\cdot)$$

所以 $supp\ f \cap supp\ \varphi(x-\cdot) = \emptyset$，而由广义函数的支集的定义知，当 $supp\ f \cap supp\ \varphi = \emptyset, f \in \mathcal{D}'(R^n), \varphi \in C_0^\infty(R^n)$，有

$$\langle f, \varphi \rangle = 0$$

于是有

$$(f*\varphi)(x) = \langle f, \varphi(x-\cdot) \rangle = 0$$

即 $x \notin supp\ (f*g)$

3. 因 $(f*\varphi)(x) = \langle f, \varphi(x-\cdot) \rangle$，故由上述引理及广义函数的微商定义可得

$$\begin{aligned}\partial^\alpha(f*g)(x) &= \langle f, \partial^\alpha\varphi(x-\cdot) \rangle = (f*(\partial^\alpha\varphi))(x) \\ &= \langle \partial^\alpha f, \varphi(x-\cdot) \rangle = ((\partial^\alpha f)*\varphi)(x)\end{aligned}$$

□

为了证明卷积运算的可结合性，我们需要一个引理

引理 2.2

设 $\Omega \subset R^n$, $\omega \subset R^n$ 为开集，$\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ 且 $supp(\varphi) \subset K_1 \times K_2$，这里 $K_1 \subset \Omega$, $K_2 \subset \omega$ 为紧集，如果 $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$，则

$$\int \langle u(x), \varphi(x,y) \rangle dy = \langle u, \int \varphi(x,y)dy \rangle$$

证明 可知 $\langle u(x), \varphi(x,y) \rangle$ 是光滑函数，且其支集含于 K_2，故可积，为简便，将 K_2 扩展为 n 维正方体 $\widetilde{K}_2$，则积分可取在 $\widetilde{K}_2$ 上，等分 $\widetilde{K}_2$ 为边长为 h 的小正方体，作黎曼和

$$\sum_{k\in Z^n} \langle u(x), \varphi(x,kh) \rangle h^n = \langle u(x), \sum_{k\in Z^n} \varphi(x,kh)h^n \rangle$$

令 $h \to 0$，一方面

$$\sum_{k\in Z^n} \langle u(x), \varphi(x,kh) \rangle h^n \to \int \langle u(x), \varphi(x,y) \rangle dy$$

另一方面

$$\psi_h(x) = \sum_{k\in Z^n} \varphi(x,kh)h^n \to \int \varphi(x,y)dy$$

且这种收敛性是 $\mathcal{D}(\Omega)$ 中的收敛性，这是因为，首先 $supp\ \psi_h(x) \in K_1, \forall h>0$，此外，对于任意重指标 α，有

$$\partial^\alpha \psi_h(x) \rightrightarrows \int \partial_x^\alpha \varphi(x,y)dy$$

故

$$\sum_{k\in Z^n} \langle u(x), \varphi(x,kh) \rangle h^n = \langle u(x), \sum_{k\in Z^n} \varphi(x,kh)h^n \rangle$$

□

定理 2.2

若 $\varphi, \psi \in C_0^\infty(R^n)$，且 $f \in \mathcal{D}'(R^n)$，则

$$(f*\psi)*\varphi = f*(\psi*\varphi)$$

证明

$$\begin{aligned}((f*\psi)*\varphi)(x) &= \int \langle f(y), \psi(z-y)\rangle \varphi(x-z)dz \\ &= \langle f(y), \int \psi(z-y)\varphi(x-z)dz\rangle \\ &= \langle f(y), \int \psi(x-u-y)\varphi(u)du\rangle \\ &= \langle f(y), (\psi*\varphi)(x-y)\rangle \\ &= (f*(\psi*\varphi))(x)\end{aligned}$$

□

2.2.2 广义函数的正则化

广义函数并不是经典函数概念的漫无边际的推广，因为每一个广义函数局部地都是某连续函数的有限阶微商，现在可以进一步证明每一个广义函数都可以用光滑函数去逼近，其方法就是之前讨论过的磨光技巧，即用磨光核进行卷积运算，下面给出这个逼近定理

定理 2.3

任一广义函数皆可用 $C^\infty(R^n)$ 函数在 $\mathcal{D}'$ 意义下逼近

证明 任取磨光核 $\varphi_\epsilon(x)$，则对 $S \in \mathcal{D}'(R^n)$，知

$$(S*\varphi_\epsilon)(x) = \langle S, \varphi_\epsilon(x-\cdot)\rangle \in C^\infty(R)$$

下证：$S*\varphi_\epsilon \to S$(于 $\mathcal{D}'$ 中)

任取 $\psi \in \mathcal{D}(R)$，注意到对于任意广义函数 $T \in \mathcal{D}'(R^n)$

$$(T*\psi)(0) = \langle T(\cdot), \psi(0-\cdot)\rangle = \langle T, \check{\psi}\rangle$$

于是有

$$\langle S*\varphi_\epsilon, \psi\rangle = ((S*\varphi_\epsilon)*\check{\psi})(0) = (S*(\varphi_\epsilon*\check{\psi}))(0) = \langle S, \check{\varphi_\epsilon}*\psi\rangle$$

由于 $\check{\varphi_\epsilon}$ 也是磨光核，所以可知

$$\check{\varphi_\epsilon}*\psi \to \psi(\text{于 } \mathcal{D}(R^n) \text{ 中})$$

从而

$$\lim_{\epsilon\to 0}\langle S*\varphi_\epsilon, \psi\rangle = \lim_{\epsilon\to 0}\langle S, \check{\varphi_\epsilon}*\psi\rangle = \langle S, \psi\rangle$$

即

$$S*\varphi_\epsilon \to S$$

□

这一个定理可以进一步改善为：每一个广义函数都可用 $\mathcal{D}(\Omega)$ 函数去逼近

定理 2.4

若 $S \in \mathcal{D}'(R^n)$，则必可用一串 $S_j \in \mathcal{D}(\Omega)(j=1,2,\cdots)$，使得

$$S_j \to S(\text{于 } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ 中})$$

2.3 广义函数的卷积

广义函数作为 $\mathcal{D}(R^n)$ 上的泛函，即 $u \in \mathcal{D}'(R^n)$，则对任意 $\varphi \in C_0^\infty(R^n)$，$\langle u, \varphi\rangle$ 为一确定的数，且若 $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(R^n), \forall \varphi \in C_0^\infty(R^n)$，使得 $\langle u_1, \varphi\rangle = \langle u_2, \varphi\rangle$，则有 $u_1 = u_2$，但我们还可以用卷积给出 $u_1 = u_2$ 的另一种条件

由于 $\langle u, \varphi\rangle = (u * \check{\varphi})(0)$，故若 $\forall \varphi \in C_0^\infty(R^n)$，使得 $u_1 * \varphi = u_2 * \varphi$，则有 $u_1 = u_2$

定义 2.3 (广义函数的卷积)

设 $f \in \mathcal{D}', g \in \epsilon'$，则定义 f 和 g 之间的卷积 $f * g \in \mathcal{D}'$ 为

$$\langle f * g, \varphi\rangle = \langle f(x), \langle g(y), \varphi(x+y)\rangle\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(R^n)$$

♣

笔记 我们来叙述上述定义的合理性，即证明上式右方确实定义了 $\varphi \in \mathcal{D}$ 的一个连续线性泛函

证明 首先知

$$\psi(x) = \langle g(y), \varphi(x+y)\rangle = (g * \check{\varphi})(-x) \in C_0^\infty(R^n)$$

因此式子有意义，且显然 $\langle f * g, \varphi\rangle$ 关于 $\varphi \in C_0^\infty(R^n)$ 是线性的

若 $\varphi_j \to 0$ 在 $\mathcal{D}(R^n)$ 中，即 $supp\ \varphi_j \subset K$，且 φ_j 在 K 上一致收敛于 0

记 $\psi_j(x) = (g * \widetilde{\psi_j})(-x)$，则有 $supp\ \psi_j \subset K + supp\ g$，故 $\psi_j \in C_0^\infty(R^n)$，同时容易得到对一切重指标 α，有

$$\partial^\alpha \psi_j(x) \rightrightarrows 0$$

从而有

$$\psi_j(x) \to 0(\text{在 } \mathcal{D}(R^n) \text{ 中})$$

因此

$$\langle f(x), \varphi_j(x)\rangle \to 0$$

即有

$$\langle f * g, \varphi_j\rangle = \langle f(x), \langle g(y), \varphi_j(x+y)\rangle\rangle \to 0$$

这就证明了 $f * g$ 是 $\mathcal{D}(R^n)$ 上的连续线性泛函，即 $f * g \in \mathcal{D}'(R^n)$ □

笔记 注意 f 和 g 中至少有一个具有紧支集，对两个一般的 $f, g \in \mathcal{D}'(R^n)$ 不能一般地定义其卷积

2.3.1 广义函数卷积的性质

定理 2.5

设 $f, g, h \in \mathcal{D}'(R^n)$，且其中至少有两个具有紧支集，则

1. $(f * g) * h = f * (g * h)$
2. $f * g = g * f$
3. $supp\ (f * g) \subset supp\ f + supp\ g$
4. $f * \delta = \delta * f = f$
5. $\partial^\alpha (f * g) = (\partial^{\alpha_1} f) * (\partial^{\alpha_2} g), \quad \forall \alpha = \alpha_1 + \alpha_2$
6. 卷积运算关于每个因子是线性的

♡

证明

1. 对于任意 $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$，有

$$\begin{aligned}\langle f*(g*h),\varphi\rangle &= \langle f(x),\langle (g*h)(y),\varphi(x+y)\rangle\rangle \\ &= \langle f(x),\langle g(y),\langle h(z),\varphi(x+y+z)\rangle\rangle\rangle \\ &= \langle (f*g)(x),\langle h(z),\varphi(x+z)\rangle\rangle \\ &= \langle (f*g)*h,\varphi\rangle\end{aligned}$$

2. 对于任意 $\varphi,\psi \in \mathcal{D}(R^n)$，有

$$\begin{aligned}((f*g)*\varphi)*\psi &= (f*g)*(\varphi*\psi) = (f*g)*(\psi*\varphi) \\ &= ((f*g)*\psi)*\varphi = (f*(g*\psi))*\varphi \\ &= f*((g*\psi)*\varphi) = f*(\varphi*(g*\psi)) \\ &= (f*\varphi)*(g*\psi) = (g*\psi)*(f*\varphi) \\ &= g*(\psi*(f*\varphi)) = g*((f*\varphi)*\psi) \\ &= (g*f)*(\varphi*\psi) = ((g*f)*\varphi)*\psi\end{aligned}$$

于是有 $(f*g)*\varphi = (g*f)*\varphi$
所以 $f*g = g*f$

3. 对任意其支集包含在 $supp\ f + supp\ g$ 的余集中的 $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$，它满足 $supp\ \varphi \cap (supp\ f + supp\ g) = \emptyset$，于是有 $\langle f*g,\varphi\rangle = \langle f(x),\langle g(y),\varphi(x+y)\rangle\rangle = 0$
因此，$f*g$ 在 $supp\ f + supp\ g$ 的余集上为零，所以 $supp\ f*g \subset supp\ f + supp\ g$

4. 对于任意 $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$，有

$$\langle f*\delta,\varphi\rangle = \langle f(x),\langle \delta(y),\varphi(x+y)\rangle\rangle = \langle f,\varphi\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(R^n)$$

即 $f*\delta = f$，再由广义函数卷积的对称性，得 $\delta*f = f*\delta = f$

5. 对于任意 $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$，应用广义函数微商的定义可得

$$\begin{aligned}\langle \partial^\alpha(f*g),\varphi\rangle &= (-1)^{|\alpha|}\langle f*g,\partial^\alpha\varphi\rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|}\langle f(x),\langle g(y),\partial^\alpha\varphi(x+y)\rangle\rangle \\ &= (-1)^{|\alpha_1|}\langle f(x),(-1)^{|\alpha_2|}\langle g(y),\partial_x^{\alpha_1}\partial_y^{\alpha_2}\varphi(x+y)\rangle\rangle \\ &= (-1)^{|\alpha_1|}\langle f(x),\langle \partial^{\alpha_2}g(y),\partial_x^{\alpha_1}\varphi(x+y)\rangle\rangle \\ &= (-1)^{|\alpha_1|}\langle f(x),\partial_x^{\alpha_1}\langle \partial^{\alpha_2}g(y),\varphi(x+y)\rangle\rangle \\ &= \langle \partial^{\alpha_1}f(x),\langle \partial^{\alpha_2}g(y),\varphi(x+y)\rangle\rangle \\ &= \langle (\partial^{\alpha_1}f)*(\partial^{\alpha_2}g),\varphi\rangle\end{aligned}$$

□

笔记　上述卷积运算 $*$ 的结合律、交换律及 δ 使得广义函数在卷积运算下成为一个有单位元的代数，其单位元为 δ 函数，称其为卷积代数

有了上述卷积运算 $*$ 的结合律及交换律，则可定义任意 k 个广义函数 $u_1,\cdots,u_k$ 的卷积，只要它们中至少有 $k-1$ 个是紧支集的即可，即

$$u = u_1*\cdots*u_k = u_1*(\cdots(u_{k-1}*u_k)\cdots)$$

关于广义函数卷积的奇异性，有以下定理

定理 2.6

设 $u_1,u_2 \in \mathcal{D}'(R^n)$，且至少一个具有紧支集，则

$$sing\ supp\ (u_1*u_2) \subset sing\ supp\ u_1 + sing\ supp\ u_2$$

第三章 傅里叶变换

3.1 急减函数空间与缓增广义函数

3.1.1 广义函数与傅里叶变换

定义 3.1 (傅里叶变换)

设 $f(x)$ 在 R^n 上可积，$f(x)$ 的傅里叶变换定义为

$$\hat{f}(\xi) = \int_{R^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx$$

♣

3.1.2 急减函数空间及其上的傅里叶变换

定义 3.2 (急减函数空间 $\mathscr{S}$)

$\mathscr{S}$ 空间定义为

$$\mathscr{S} = \{\varphi \in C^\infty(R^n) : \sup_{R^n} \left|x^\alpha D^\beta \varphi(x)\right| < +\infty, \forall \alpha, \beta \in P^n\}$$

$f_j(x)$ 在 $\mathscr{S}$ 中趋于 0 即指对任意固定的 α, β

$$\sup_{R^n} \left|x^\alpha D^\beta f_j(x)\right| \to 0$$

♣

笔记 由定义可知，$\mathscr{S}$ 中的元素连同其各阶微商在 ∞ 处皆以高于任意次多项式倒数的阶趋于 0，所以，$\mathscr{S}$ 空间也称为急减函数空间

定义 3.3 (傅里叶变换)

设 $\varphi \in \mathscr{S}$，定义傅里叶变换为

$$\hat{\varphi}(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi} \varphi(x)dx$$

♣

由于 $\varphi(x)$ 在 ∞ 处急减，上述积分必然收敛而且可以进行十分灵活的分析运算

定理 3.1

设 $\varphi \in \mathscr{S}$，记其傅里叶变换为 $F : \varphi \longmapsto \hat{\varphi}$，则 $\hat{\varphi} \in \mathscr{S}$，而且

$$F(D^\alpha \varphi)(\xi) = \xi^\alpha \hat{\varphi}(\xi)$$

$$F(x^\alpha \varphi)(\xi) = (-D_\xi)^\alpha \hat{\varphi}(\xi)$$

♡

证明 由于 $\varphi(x)$ 急减，我们可以在积分号下求微商，也可以做分部积分而且积分号外之项为 0，所以

$$\begin{aligned}\int e^{-ix\cdot\xi} D^\alpha \varphi(x)dx &= \int [(-D_x)^\alpha e^{-ix\cdot\xi}]\varphi(x)dx \\ &= \int [(-\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x})^\alpha e^{-ix\cdot\xi}]\varphi(x)dx \\ &= \xi^\alpha \hat{\varphi}(\xi)\end{aligned}$$

又因为 $x_j e^{-ix\cdot\xi} = -D_{\xi_j} e^{-ix\cdot\xi}$，所以

$$\int e^{-ix\cdot\xi} x^\alpha \varphi(x)dx = \int (-D_\xi)^\alpha e^{-ix\cdot\xi} \varphi(x)dx = (-D_\xi)^\alpha \hat{\varphi}(\xi)$$

最后

$$\begin{aligned}\left|\xi^{\alpha}D_{\xi}^{\beta}\hat{\varphi}(\xi)\right| &= \left|\int e^{-ix\cdot\xi}D_x^{\alpha}[(-x)^{\beta}\varphi(x)]dx\right| \\ &\le \int\left|(1+|x|^2)^{-(n+1)/2}(1+|x|^2)^{(n+1)/2}D_x^{\alpha}[(-x)^{\beta}\varphi(x)]\right|dx<\infty \\ &\le C\sup_{R^n}\left|(1+|x|^2)^{(n+1)/2}D_x^{\alpha}[(-x)^{\beta}\varphi(x)]\right|<\infty\end{aligned}$$

所以 F 将 $\mathscr{S}$ 映到 $\mathscr{S}$ 中，而且由 $\mathscr{S}$ 中趋于 0 的定义，$F:\mathscr{S}\to\mathscr{S}$ 是连续的 □

现在已经知道 $F:\mathscr{S}\to\mathscr{S}$ 是连续线性映射，但实际上，它还是一个线性同构，即，逆映射 F^{-1} 也存在而且也连续，求 F^{-1} 就是反演公式问题，为此，需要先讨论一个重要函数————高斯函数的傅里叶变换，这个函数 $g(x)=e^{-|x|^2/2}$ 的特点是，它的傅里叶变换即自身 (相差常数倍数)

引理 3.1

$$\int e^{-ix\cdot\xi}e^{-|x|^2/2}dx=(2\pi)^{n/2}e^{-|\xi|^2/2}$$

♡

证明 因为

$$-ix\cdot\xi-|x|^2/2=-\frac{1}{2}(\sum_{j=1}^{n}x_j^2+2\sum_{j=1}^{n}x_j(i\xi_j)+\sum_{j=1}^{n}(i\xi_j)^2)-\frac{1}{2}|\xi|^2$$

所以

$$\int e^{-ix\cdot\xi}e^{-|x|^2/2}dx=e^{-|\xi|^2/2}\prod_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x_j+i\xi_j)^2/2}dx_j$$

对积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x_j+i\xi_j)^2/2}dx_j$，应用柯西定理来改变积分路径，即有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x_j+i\xi_j)^2/2}dx_j=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x_j^2/2}dx_j=\sqrt{2\pi}$$

于是

$$\int e^{-ix\cdot\xi}e^{-|x|^2/2}dx=(2\pi)^{n/2}e^{-|\xi|^2/2}$$

□

定理 3.2 (逆变换公式)

$F:\mathscr{S}\to\mathscr{S}$ 有连续的逆映射 $F^{-1}:\hat{\varphi}\longmapsto\varphi$，且

$$\varphi(x)=F^{-1}(\hat{\varphi}(\xi))(x)=(2\pi)^{-n}\int e^{ix\xi}\hat{\varphi}(\xi)d\xi$$

♡

证明 取上述高斯函数 $g(\xi)=e^{-|\xi|^2/2}$，有

$$\begin{aligned}\int\hat{\varphi}(\xi)g(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi &= \int g(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi\int\varphi(y)e^{-iy\cdot\xi}dy \\ &= \iint e^{i\xi\cdot(x-y)}g(\xi)\varphi(y)dyd\xi \\ &= \int\varphi(y)dy\int g(\xi)e^{-i(y-x)\cdot\xi}d\xi \\ &= \int\varphi(y)\hat{g}(y-x)dy \\ &= \int\hat{g}(y)\varphi(x+y)dy\end{aligned}$$

用 $g(\epsilon\xi)(\epsilon>0)$ 代替 $g(\xi)$，则 $\hat{g}(y)$ 应改为 $\epsilon^{-n}\hat{g}(\frac{y}{\epsilon})$，令 $y=\epsilon y_1$ 代入上式有

$$\int\hat{\varphi}(\xi)g(\epsilon\xi)e^{i\xi\cdot x}d\xi=\int\hat{g}(y_1)\varphi(x+\epsilon y_1)dy_1$$

令 $\epsilon \to 0$，即得

$$g(0)\int \hat{\varphi}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi = \varphi(x)\int \hat{g}(y_1)dy_1 = (2\pi)^n\varphi(x)$$

又 $g(0)=1$，故

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-n}\int e^{ix\xi}\hat{\varphi}(\xi)d\xi$$

□

下面讨论傅里叶变换的性质

性质

1. 傅里叶变换与反射：

$$F:\check{\varphi}\longmapsto F(\check{\varphi})(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi}\varphi(-x)dx = (2\pi)^n F^{-1}(\varphi)$$

2. 傅里叶变换与平移

$$F:\tau_h\varphi\longmapsto F(\tau_h\varphi)(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x-h)dx = e^{-ih\cdot\xi}F(\varphi)(\xi)$$

3. 傅里叶变换与相似变换

$$F:\varphi(cx)\longmapsto F(\varphi(c\cdot))(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi}\varphi(cx)dx = |c|^{-n}F(\varphi)(\frac{\xi}{c})$$

其中 $F(\varphi(c\cdot))(\xi)$ 表示先将 φ 之自变量乘以 c 再作傅里叶变换，即

$$F(\varphi(c\cdot))(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi}\varphi(cx)dx$$

4. 傅里叶变换与线性变换

$$\begin{aligned}
F:\varphi(Ax)\longmapsto F(\varphi(A\cdot))(\xi) &= \int e^{-ix\cdot\xi}\varphi(Ax)dx \\
&= \int e^{-i(A^{-1}y)\cdot\xi}\varphi(y)dx \\
&= |\det A|^{-1}\int e^{-iA^{-1}y\xi}\varphi(y)dy \\
&= F(\varphi)(A^{-1}\xi)\cdot|\det A|^{-1}
\end{aligned}$$

5. 傅里叶变换与微分运算

$$F(D^\alpha f)(\xi) = \xi^\alpha\hat{f}(\xi)$$
$$F(x^\alpha f(x))(\xi) = (-D_\xi)^\alpha\hat{f}(\xi)$$

6. 傅里叶变换与卷积

$$(f*g)(x) = \int f(y)g(x-y)dy$$
$$\partial^\alpha(f*g)(x) = (\partial^\alpha f)*g = f*(\partial^\alpha g)$$

定理 3.3

若 $f,g\in\mathscr{S}$，则 $f*g\in\mathscr{S}$，且

$$F(f*g)(\xi) = \hat{f}(\xi)\cdot\hat{g}(\xi)$$

♡

证明

$$F(f*g)(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi}dx\int f(y)g(x-y)dy$$

由 $f,g\in\mathscr{S}$，所以另一个逐次积分 $\int f(y)dy\int g(x-y)e^{-ix\cdot\xi}dx$ 是存在的，故

$$\begin{aligned}F(f*g)(\xi)&=\int f(y)dy\int g(x-y)e^{-ix\cdot\xi}dx\\&=\int f(y)dy\int g(x-y)e^{-i(x-y)\cdot\xi}e^{-iy\cdot\xi}dx\\&=\int e^{-iy\cdot\xi}f(y)\int g(t)e^{-it\cdot\xi}dt\\&=\hat{f}(\xi)\cdot\hat{g}(\xi)\end{aligned}$$

因两个 $\mathscr{S}$ 函数之积仍为 $\mathscr{S}$ 函数，所以 $F(f*g)\in\mathscr{S}$，又因为 $F:\mathscr{S}\to\mathscr{S}$，因此 $f*g\in\mathscr{S}$ □

下面我们证明重要的帕塞瓦尔（Parseval）等式，这是一个对偶性的关系式，它是定义广义函数的傅里叶变换的基础

定理 3.4 (Parseval)

若 $f,g\in\mathscr{S}$，则

$$\langle\hat{f},g\rangle=\langle f,\hat{g}\rangle$$
$$(f,g)=(2\pi)^{-n}(\hat{f},\hat{g})$$

♡

证明 将绝对收敛的二重积分化为逐次积分有

$$\begin{aligned}\iint f(\xi)g(x)e^{-ix\cdot\xi}dxd\xi&=\int g(x)dx\int e^{-ix\cdot\xi}f(\xi)d\xi=\langle\hat{f},g\rangle\\&=\int f(\xi)d\xi\int g(x)e^{-ix\cdot\xi}dx=\langle f,\hat{g}\rangle\end{aligned}$$

同样

$$\begin{aligned}(2\pi)^{-n}(\hat{f},\hat{g})&=(2\pi)^{-n}\iint f(x)\overline{\hat{g}(\xi)}e^{-ix\cdot\xi}dxd\xi\\&=\int f(x)dx\cdot(2\pi)^{-n}\int\overline{\hat{g}(\xi)}e^{-ix\cdot\xi}d\xi\\&=\int f(x)dx\cdot\overline{(2\pi)^{-n}\int\hat{g}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi}=(f,g)\end{aligned}$$

□

3.1.3 缓增广义函数及其傅里叶变换

定义 3.4 (缓增广义函数)

$\mathscr{S}$ 空间上的连续线性泛函称为缓增广义函数，其集记为 $\mathscr{S}'$

♣

笔记 $u\in\mathscr{S}'$ 的连续性可以理解为：若 $\varphi_j\to0$(于 $\mathscr{S}$ 中)，则 $u(\varphi_j)\to0$，充分必要条件为：存在非负整数 k,m 以及常数 $c_{k,m}\geq0$ 使对一切 $\varphi\in\mathscr{S}$ 有

$$|u(x)|\leq c_{k,m}\sum_{|\alpha|\leq k,|\beta|\leq m}\sup_{R^n}\left|x^\alpha\partial_x^\beta\varphi\right|$$

引理 3.2

$\mathcal{D},\mathscr{S},\mathscr{E}$ 满足关系

$$\mathcal{D}\hookrightarrow\mathscr{S}\hookrightarrow\mathscr{E}$$

♡

证明 作为函数集合，显然有

$$\mathcal{D}\subset\mathscr{S}\subset\mathscr{E}$$

设 $\varphi_j \to 0$（于 $\mathcal{D}$ 中），则一切 φ_j 具有共同的紧支集，在其外一切 $\varphi_j \equiv 0$，且对任意 β，有

$$\partial_x^\beta \varphi_j \rightrightarrows 0 \tag{3.1}$$

再给任意 α，则有

$$x^\alpha \partial_x^\beta \varphi_j \rightrightarrows 0$$

这表明 $\varphi_j \to 0$（于 $\mathcal{S}$ 中）

即给出了一个连续的嵌入算子 $l: l\varphi_j = \varphi_j$，左边的 φ_j 视作 $\mathcal{D}$ 中的元素，右边的 φ_j 视作 $\mathcal{S}$ 中的元素

即嵌入算子 $l: \mathcal{D} \to \mathcal{S}$ 是连续的

同理可证嵌入算子 $l: \mathcal{S} \to \mathcal{E}$ 也是连续的，故将包含关系与嵌入算子的连续性记作

$$\mathcal{D} \subset_{\to} \mathcal{S} \subset_{\to} \mathcal{E}$$

□

定理 3.5

$\mathcal{D}', \mathcal{S}', \mathcal{E}'$ 满足嵌入关系

$$\mathcal{E}' \subset_{\to} \mathcal{S}' \subset_{\to} \mathcal{D}'$$

♡

证明 设 $u \in \mathcal{S}', \varphi_j \in \mathcal{D}$，则因 $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$，有 $\varphi_j \in \mathcal{S}$，则 $u(\varphi_j)$ 有意义且是线性泛函

事实上，若 $\varphi_j \to 0$（于 $\mathcal{D}$ 中），则可知 $\varphi_j \to 0$（于 $\mathcal{S}$ 中），从而 $u(\varphi_j) \to 0$

这说明，u 作为 $\mathcal{D}$ 上的线性泛函也是连续的，所以 $u \in \mathcal{D}'$

故

$$\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$$

同理可得

$$\mathcal{E}' \subset \mathcal{D}'$$

此外，若 $u_j \in \mathcal{S}'$，且 $u_j \to 0$（于 $\mathcal{S}'$ 中），则对任意 $\varphi \in \mathcal{S}$, $u_j(\varphi) \to 0$

但因 $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$，所以对任意 $\varphi \in \mathcal{D}$，也有 $u_j(\varphi) \to 0$，即是 $u_j \to 0$（于 $\mathcal{D}'$ 中）

这表明，嵌入映射 $l: \mathcal{S}' \to \mathcal{D}'$ 也是连续的 □

现在来讨论 $\mathcal{S}'$ 的傅里叶变换，它的基础是帕塞瓦尔等式：对 $f, \varphi_j \in \mathcal{S}$，必有

$$\langle \hat{f}, \varphi_j \rangle = \langle f, \hat{\varphi}_j \rangle$$

定义 3.5 ($\mathcal{S}'$ 上的傅里叶变换)

若 $f \in \mathcal{S}'$，则对任意 $\varphi \in \mathcal{S}$，$\langle f, \hat{\varphi} \rangle$ 定义了一个 $\mathcal{S}'$ 的元素，记作 $\hat{f}$，并称为 f 的傅里叶变换，即

$$\langle \hat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \hat{\varphi} \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

♣

定理 3.6

若 $g \in \mathcal{E}' \subset \mathcal{S}'$，则

$$\hat{g}(\xi) = \langle g(x), e^{-ix\cdot\xi} \rangle$$

♡

证明 因 $g \in \mathcal{E}'$，取磨光核 φ_ϵ，则有 $g * \varphi_\epsilon \in C_0^\infty(R^n)$ 且 $g * \varphi_\epsilon \to g$(于 $\mathcal{E}'$ 中)

由 $\mathcal{E}' \subset_{\to} \mathcal{S}'$，知 $g * \varphi_\epsilon \to g$(于 $\mathcal{S}'$ 中)，于是 $F(g * \varphi_\epsilon) \to F(g)$(于 $\mathcal{S}'$ 中)，从而

$$F(g * \varphi_\epsilon)(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi} (g * \varphi_\epsilon)(x) dx$$

且 $supp(g*\varphi_\epsilon)\subset supp(g)+supp(\varphi_\epsilon)\subset supp(g)+B_1$，则有

$$\begin{aligned}F(g*\varphi_\epsilon)(\xi)&=\int\langle g(y),\varphi_\epsilon(x-y)\rangle e^{-ix\cdot\xi}dx\\&=\langle g(y),\int\varphi_\epsilon(x-y)e^{-ix\cdot\xi}dx\rangle\end{aligned}$$

当 ξ 在任意一紧集 K 上时，由 $\int\varphi_\epsilon(x-y)e^{-ix\cdot\xi}dx\to e^{-iy\cdot\xi}$，于是，当 $\epsilon\to0$ 时

$$F(g*\varphi_\epsilon)(\xi)\to\langle g(y),e^{-iy\cdot\xi}\rangle$$

关于 $\xi\in K$ 一致成立，于是

$$F(g)(\xi)=\langle g(y),e^{-iy\cdot\xi}\rangle$$

□

例题 3.1 $\delta\in\mathscr{E}'$，故

$$\hat{\delta}(\xi)=\langle\delta(x),e^{-ix\cdot\xi}\rangle=1$$

也因此，$F^{-1}(1)=\delta(x)$

例题 3.2 $1\in\mathscr{S}'$，故

$$\begin{aligned}\langle\hat{1},\varphi\rangle=\langle1,\hat{\varphi}\rangle&=\int\hat{\varphi}(\xi)d\xi=(2\pi)^n(2\pi)^{-n}\int e^{i0\cdot\xi}\hat{\varphi}(\xi)d\xi\\&=(2\pi)^n\varphi(0)=(2\pi)^n\langle\delta,\varphi\rangle,\quad\forall\varphi\in\mathscr{S}\end{aligned}$$

因此，$\hat{1}=(2\pi)^n\delta(x)$

关于 $\mathscr{S}'$ 上的广义函数之间的卷积，我们有如下定义

定义 3.6 ($\mathscr{S}'$ 广义函数卷积)

设 $f\in\mathscr{S}',g\in\mathscr{S}$，则定义 $f*g$ 如下

$$\langle f*g,\varphi\rangle=\langle f(x),\langle g(y),\varphi(x+y)\rangle\rangle,\quad\forall\varphi\in\mathscr{S}$$

♣

关于 $\mathscr{S}'$ 上的广义函数的卷积，我们有如下定理

定理 3.7

设 $f\in\mathscr{S}',g\in\mathscr{S}$，则 $f*g\in\mathscr{S}'$，其傅里叶变换有

$$F(f*g)=F(f)\cdot F(g)$$

♡

证明 设 $f\in\mathscr{S}',g\in\mathscr{S}$，则对任意 $\psi\in\mathscr{S}$

$$\begin{aligned}\langle F(f*g),\psi\rangle&=\langle f*g,F(\psi)\rangle\\&=\langle f(x),\langle g(y),F(\psi)(x+y)\rangle\rangle\\&=\langle f,(g*(F\psi)^{\check{}})^{\check{}}\rangle\\&=\langle F^{-1}F(f),(g*(F\psi)^{\check{}})^{\check{}}\rangle\end{aligned}$$

注意到，$F^{-1}(\check{u})=(2\pi)^{-n}F(u)$，则

$$\begin{aligned}\langle F(f*g),\psi\rangle&=\langle F(f),(2\pi)^{-n}F(g*(F\psi)^{\check{}})\rangle\\&=\langle F(f),F(g)(2\pi)^{-n}F((F\psi)^{\check{}})\rangle\\&=\langle F(g)\cdot F(f),\psi\rangle\end{aligned}$$

所以

$$F(f*g)=F(f)\cdot F(g)$$

□

定理 3.8

设 $f, g \in \mathscr{S}'$，至少有一个有紧支集，则 $f * g \in \mathscr{S}'$，且其傅里叶变换有

$$F(f * g) = F(f) \cdot F(g)$$

证明 假设 $g \in \mathscr{E}'$，对任意 $\psi \in \mathscr{S}$，由上述定理知，

$$F(g * \psi) = F(g) \cdot F(\psi)$$

又由于 $F(g) \in C^\infty$ 是一缓增函数，因而是 $\mathscr{S}'$ 乘子，由 $F(\psi) \in \mathscr{S}$，则 $F(g * \psi) \in \mathscr{S}$，因而 $g * \psi \in \mathscr{S}$，于是可进行与上述定理类似的证明 □

例题 3.3 $L^p(R^n), 1 \leq p \leq \infty$，函数都可嵌入在 $\mathscr{S}'$ 空间中

证明 设 $f \in L^p(R^n)$，任取 $\varphi \in \mathscr{S}$

1. 当 $1 < p < \infty$，用赫尔德不等式有

$$\left|\int f(x)\varphi(x)dx\right| \leq (\int |f(x)|^p \, dx)^{1/p} (\int |\varphi|^q \, dx)^{1/q}$$

从而左边的积分存在，现证它是 $\mathscr{S}$ 上的连续泛函 (线性自明)，这是因为

$$\begin{aligned}\left(\int |\varphi(x)|^q dx\right)^{1/q} &= \left(\int \frac{1}{(1+|x|^2)^{nq}}\left|(1+|x|^2)^n \varphi(x)\right|^q dx\right)^{1/q} \\ &\leq \sup_{\mathbf{R}^n}\left|(1+|x|^2)^n \varphi(x)\right| \left(\int \frac{dx}{(1+|x|^2)^{nq}}\right)^{1/q} \\ &= c \sup_{\mathbf{R}^n}\left|(1+|x|^2)^n \varphi(x)\right|\end{aligned}$$

从而

$$|\langle f, \varphi\rangle| = \left|\int f(x)\varphi(x)dx\right| \leqslant c\|f\|_{L^p} \sup_{\mathbf{R}^n}\left|(1+|x|^2)^n \varphi(x)\right|$$

2. 当 $p = \infty$ 时，则有

$$\begin{aligned}|\langle f, \varphi(x)\rangle| = \left|\int f(x)\varphi(x)dx\right| &\leqslant \text{ess sup}|f| \int |\varphi(x)|dx \\ &\leqslant \text{ess sup}|f| \sup_{\mathbf{R}^n} |(1+|x|^2)^n \varphi(x)| \int \frac{dx}{(1+|x|^2)^n}\end{aligned}$$

3. 当 $p = 1$ 时，利用勒贝格控制收敛定理，即可得 $L^1 \subset \mathscr{S}'$

□

第四章 偏微分方程一般理论

4.1 基本概念

偏微分方程式是关于未知函数 $u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的一个含有 u 的偏微商的恒等式

定义 4.1 (偏微分方程)

形如

$$F(\mathcal{D}^k u(x),\mathcal{D}^{k-1}u(x),\cdots,\mathcal{D}u(x),u(x),x)=0 \quad x\in U$$

称为 k 阶偏微分方程，同时函数

$$F:R^{n^k}\times R^{n^{k-1}}\times\cdots\times R^n\times R\times U\to R$$

给定，函数 $u:U\to R$ 未知

♣

定义 4.2 (解)

若一个函数满足在其自变量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的变化范围内连续，并且具有方程中出现的一切连续偏微商，将它代入方程后使其称为恒等式，则称该函数是方程的解或古典解

♣

定义 4.3 (基本解)

设算子 $P=\sum_{|\alpha|\le M}a_\alpha\partial^\alpha$，若 $E\in\mathcal{D}'(R^n)$，满足 $PE=\delta$，则称 E 为 P 的基本解

♣

笔记 对于偏微分方程 $Pu=f$，若已知 E 为 P 的基本解，则 $u=E*f$ 是一个弱解 (广义函数解)，由于

$$P(E*f)=(PE)*f=\delta*f=f$$

例题 4.1 求解算子 $P(D)=\frac{d}{dx}$ 的基本解

解

$$E=H(x)+c$$

定义 4.4

1. 偏微分方程被称为是线性的，若满足方程形式为

$$\sum_{|\alpha|\le k}a_\alpha(x)\mathcal{D}^\alpha u=f(x)$$

2. 偏微分方程被称为是半线性的，若满足方程形式为

$$\sum_{|\alpha|=k}a_\alpha(x)\mathcal{D}^\alpha u+a_0(\mathcal{D}^{k-1}u,\cdots,\mathcal{D}u,u,x)=0$$

3. 偏微分方程被称为是拟线性的，若满足方程形式为

$$\sum_{|\alpha|=k}a_\alpha(\mathcal{D}^{k-1}u,\cdots,\mathcal{D}u,u,x)\mathcal{D}^\alpha u+a_0(\mathcal{D}^{k-1}u,\cdots,\mathcal{D}u,u,x)=0$$

♣

例题 4.2

1. 线性方程
   (a). Laplace 方程

$$\Delta u=\sum_{i=1}^n u_{x_ix_i}=0$$

(b). Helmholtz 方程

$$-\triangle u = \lambda u$$

2. 拟线性方程
   (a). Korteweg-de Vriesfangc

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$$

3. 半线性方程
   (a). 非线性波方程

$$u_{tt} - \Delta u + f(u) = 0$$

4.2 二阶线性偏微分方程的分类

设有二阶线性方程

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{m} b_i(x)u_{x_i} + c(x)u(x) = f(x)$$

其中 $a_{jk}(x) = a_{kj}(x)$，以 A 表示矩阵 $(a_{ij})_{m\times m}$

为了傅里叶变换的需要，采用记号 $D_j = -\partial x_j$，考虑算子

$$P(x, \mathcal{D}) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x)\mathcal{D}_i\mathcal{D}_j + \sum_{i=1}^{m} b_i\mathcal{D}_i + c(x)$$

定义 4.5 (全象征)

定义

$$P(x,\xi) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j + \sum_{i=1}^{m} b_i\xi_i + c(x)$$

为 $P(x, \mathcal{D})$ 的全象征 ♣

定义 4.6 (主象征)

$P(x, \mathcal{D})$ 的全象征的二次齐性主部

$$P_2(x,\xi) = \sum_{i,j=1} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j$$

称为 $P(x, \mathcal{D})$ 的主象征 ♣

我们将看到主象征的零点集起着重要的作用，确切地说，我们有

定义 4.7 (特征集)

定义 $P(x, \mathcal{D})$ 的特征集为

$$Char\ P = \{(x,\xi) : \xi \in R^n \setminus 0, P_2(x,\xi) = 0\}$$ ♣

设 $x_0 \in R^m$，$A(x_0)$ 表示系数矩阵 A 在点 x_0 的值，由于系数矩阵 $A(x_0)$ 是对称矩阵，可知总是可以对角化，基于此，我们对一般二阶线性偏微分方程进行分类

定义 4.8

1. 若 $A(x_0)$ 的 m 个特征值都是负数，则称方程在点 x_0 属于椭圆型
2. 若 $A(x_0)$ 的 m 个特征值除了一个特征值为 0 外，其他 $m-1$ 个都是负数，则称方程在点 x_0 属于抛物

型

3. 若 $A(x_0)$ 的 m 个特征值除了一个特征值为正数外，其他 $m-1$ 个都是负数，则称方程在点 x_0 属于双曲型

♣

4.3 柯西-科瓦列夫斯卡娅定理

定理 4.1 (柯西-科瓦列夫斯卡娅定理)

♡

4.4 局部可解性

第五章 位势方程

本章讨论位势方程 (Poisson 方程)

$$-\triangle u = f(x)$$

其中 $u = u(x), x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Omega \subset R^n$，$f(x)$ 是一个已知函数

当非齐次项 $f \equiv 0$ 时，Poisson 方程简化为 Laplace 方程

$$\triangle u = 0$$

5.1 调和函数

定义 5.1 (调和函数)

如果函数 $u : \Omega \to R$ 具有二阶连续偏导数且满足 Laplace 方程

$$\triangle u = 0$$

称之为调和函数，如果一个多项式满足 Laplace 方程，称之为调和多项式

例题 5.1 可以注意到：

$$1, x_1, x_2, \cdots, x_n, x_i^2 - x_j^2 (i, j = 1, 2, \cdots, n), (3x_i^2 - x_j^2)x_j (i, j = 1, 2, \cdots, n; i \neq j)$$

都是 Laplace 方程的解

另外，可以注意到

定理 5.1

设 $u(x)$ 是 R^n 上的调和函数，则

1. $u(\lambda x)$ 是一个调和函数，其中 λ 是任一实数
2. $u(x + x_0)$ 是一个调和函数，其中 $x_0 \in R^n$ 固定
3. $u(Ox)$ 是一个调和函数，其中 $O : R^n \to R^n$ 是一个正交变换

笔记 此定理说明在伸缩变换、平移变换和正交变换下调和函数仍变为调和函数

5.1.1 平均值公式

现在设 Ω 是 R^n 中的一个开集，且 u 是 Ω 上的一个调和函数，下面将推导一个极为重要的平均值公式，这个公式说明函数 u 在点 $x \in \Omega$ 上的取值 $u(x)$ 等于 u 在球面 $\partial B(x, r)$ 上的平均值，也等于它在球 $B(x, r)$ 上的平均值

定理 5.2 (平均值公式)

设 $u \in C^2(\Omega)$ 是 Ω 上的调和函数，则对于任意的球 $B(x, r) \subset \Omega$，有

$$u(x) = \frac{1}{S_n^{(r)}} \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y) = \frac{1}{V_n^{(r)}} \int_{B(x,r)} u(y) dy$$

其中

$$V_n^{(r)} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma(\frac{n}{2})} r^n, \quad S_n^{(r)} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}} n}{n\Gamma(\frac{n}{2})} r^{n-1}$$

证明

1. 令

$$\phi(r) = \frac{1}{S_n^{(r)}} \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y)$$

作平移和伸缩变换，则

$$\phi(r) = \frac{1}{S_n^{(1)}} \int_{\partial B(0,1)} u(x+rz) dS(z)$$

对 z 求微商，由 Gauss-Green 公式可得

$$\begin{aligned}\phi'(r) &= \frac{1}{S_n^{(1)}} \int_{\partial B(0,1)} \mathcal{D}u(x+rz) z dS(z) \\ &= \frac{1}{S_n^{(r)}} \int_{\partial B(x,r)} \mathcal{D}u(y) \frac{y-x}{r} dS(y) \\ &= \frac{1}{S_n^{(r)}} \int_{\partial B(x,r)} \frac{\partial u(y)}{\partial n} dS(y) \\ &= \frac{r}{n} \frac{1}{S_n^{(r)}} \int_{B(x,r)} \triangle u(y) dy = 0\end{aligned}$$

于是 $\phi(r)$ 是一个常数，由 $u(x)$ 的连续性，从而

$$u(x) = \lim_{r \to 0^+} \phi(r) = \phi(0) = \phi(r)$$

即

$$u(x) = \frac{1}{S_n^{(r)}} \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y)$$

2. 注意到

$$\int_{B(x,r)} u(y) dy = \int_0^r \int_{\partial B(x,t)} u(y) dS(y) dt$$

再利用上式，则

$$\begin{aligned}\int_{B(x,r)} u(y) dy &= u(x) \int_0^r S_n^{(t)} dt \\ &= V_n^{(r)} u(x)\end{aligned}$$

即

$$u(x) = \frac{1}{V_n^{(r)}} \int_{B(x,r)} u(y) dy$$

□

关于平均值公式的逆命题也成立

定理 5.3

设 $u \in C^2(\Omega)$ 满足，对任意 $B(x,r) \subset \Omega$，有

$$u(x) = \frac{1}{S_n^{(r)}} \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y)$$

则 u 是调和函数

♡

证明 对于固定的 $x \in \Omega$，任意球 $B(x,r) \subset \Omega$，令

$$\phi(r) = \frac{1}{S_n^{(r)}} \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y)$$

由假设可知，$\phi(r)$ 是一个常数，因此

$$\phi'(r) = 0$$

即

$$\frac{r}{n}\frac{1}{S_n^{(r)}}\int_{B(x,r)}\triangle u(y)dy=0$$

于是

$$\frac{1}{S_n^{(r)}}\int_{B(x,r)}\triangle u(y)dy=0$$

令 $r\to 0$，由 $\triangle u(x)$ 的连续性，则

$$\triangle u(x)=0$$

□

定理 5.4 (极值原理)

设 Ω 是 R^n 上的有界开集，$u\in C^2(\Omega)\bigcap C(\overline{\Omega})$ 是 Ω 上的调和函数，则

1. $u(x)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上的最大 (小) 值一定在边界 $\partial\Omega$ 上取到，即

$$\max_{\overline{\Omega}} u=\max_{\partial\Omega} u$$

2. 若 Ω 连通，且存在 $x_0\in\Omega$ 使得调和函数 $u(x)$ 在 x_0 点达到 $u(x)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上的最大 (小) 值，则 u 在 $\overline{\Omega}$ 上是常数

证明 仅就最大值的情形证明

1. 令 $w=u+\epsilon e^{x_1}$，容易验证
   (a). $w>u\Longrightarrow \max_{\overline{\Omega}} u\le\max_{\overline{\Omega}} w$
   (b). $\Delta w=\epsilon e^{x_1}>0$，因而 w 的最大值只能在边界上取到，故 $\max_{\overline{\Omega}} w=\max_{\partial\Omega} w$
   (c). $\max_{\partial\Omega} w\le\max_{\partial\Omega} u+\max_{\partial\Omega}\epsilon e^{x_1}$ 故可得

$$\max_{\overline{\Omega}} u\le\max_{\partial\Omega} u+\epsilon\max_{\partial\Omega} e^{x_1}$$

   令 $\epsilon\to 0$，则有

$$\max_{\overline{\Omega}} u=\max_{\partial\Omega} u$$

2. 假设 $\exists x_0\in U$，满足

$$u(x_0)=M:=\max_{\overline{\Omega}} u$$

   因此，存在 $0<r<dist(x_0,\partial\Omega)$，运用平均值公式有

$$M=u(x_0)=\frac{1}{V_n^{(r)}}\int_{B(x,r)}u(y)dy\le M$$

   由此，可以得到对于 $\forall y\in B(x_0,r)$，有 $u(y)=M$，因此，集合 $\{x\in\Omega:u(x)=M\}$ 在 Ω 中既开又闭
   由 Ω 是连通的，故 $\{x\in\Omega:u(x)=M\}=\Omega$，即 u 在 Ω 上是常数

□

从以上极值原理可以直接得出

推论 5.1

设 U 是连通集，$u\in C^2(U)\bigcap C(\overline{U})$，满足

$$\begin{cases}\triangle u=0 & in\ U\\ u=g\ge 0 & on\ \partial U\end{cases}$$

则在 U 上 $u\ge 0$

极值原理的一个重要运用就是证明 Dirichlet 问题的唯一性

定理 5.5

设 $g \in C(\partial U), f \in C(U)$，则最多存在一个解 $u \in C^2(U) \bigcap C(\overline{U})$ 满足

$$\begin{cases} -\triangle u = f, & x \in U \\ u = g, & x \in \partial U \end{cases}$$

证明 设存在两个解 $u, \widetilde{u}$，并令 $w := u_1 - u_2$，故 w 满足

$$\begin{cases} -\triangle w = 0, & x \in U \\ w = 0, & x \in \partial U \end{cases}$$

由极值原理知，对于 $x \in \Omega, w(x) \leq 0$，注意到 $-w$ 也满足相同的方程，故对于 $x \in \Omega, w(x) \geq 0$

因此，$w \equiv 0$，唯一性得证 □

下面我们证明若 $u \in C^2$ 是调和函数，则 $u \in C^\infty$，即调和函数是无穷可微函数

定理 5.6

若 $u \in C(U)$ 对于任意球 $B(x,r) \subset U$，满足平均值公式，则有

$$u \in C^\infty(U)$$

笔记 u 在 ∂U 上不一定要求是光滑，甚至是连续的

证明 设 η 为标准磨光核，令 $u^\epsilon := \eta_\epsilon * u \in U_\epsilon := \{x \in U : dist(x, \partial U) > \epsilon\}$，可知 $u^\epsilon \in C^\infty(U_\epsilon)$

我们将要证明 u 是光滑的，通过在 U_ϵ 有 $u \equiv u^\epsilon$

事实上，对于 $x \in U_\epsilon$

$$\begin{aligned} u^\epsilon(x) &= \int_U \eta_\epsilon(x-y) u(y) dy \\ &= \frac{1}{\epsilon^n} \int_{B(x,\epsilon)} \eta\Big(\frac{|x-y|}{\epsilon}\Big) u(y) dy \\ &= \frac{1}{\epsilon^n} \int_0^\epsilon \eta\Big(\frac{r}{\epsilon}\Big)\Big(\int_{\partial B(x,r)} u dS\Big) dr \\ &= \frac{1}{\epsilon^n} u(x) \int_0^\epsilon \eta\Big(\frac{r}{\epsilon}\Big) S_n^{(r)} dr \\ &= u(x) \int_{B(0,\epsilon)} \eta_\epsilon dy = u(x) \end{aligned}$$

因此，$u^\epsilon \equiv u \ in \ U_\epsilon$

故 $u \in C^\infty(U_\epsilon), \forall \epsilon > 0$，即 $u \in C^\infty(U)$ □

下面我们利用平均值公式来推导出关于调和函数所有偏导数的估计

定理 5.7

设 u 是 Ω 上的调和函数，则对于任意球 $B(x,r) \subset \Omega$，任意阶数为 k 的重指标 α，有

$$|D^\alpha u(x)| \leq \frac{C_k}{r^{n+k}} \int_{B(x,r)} |u(y)| \, dy$$

其中

$$C_0 = \frac{1}{V_n^{(1)}}, \quad C_k = \frac{(2^{n+1} nk)^k}{V_n^{(1)}}$$

证明 我们对 k 采用数学归纳法来证明

1. 当 $k = 0$ 时，由平均值公式直接可得
2. 当 $k = 1$ 时，注意到 $u_{x_i} (i = 1, 2, \cdots, n)$ 也是调和函数，于是在球 $B(x,s) (0 \leq s \leq r)$ 上利用平均值公式和高

斯-格林公式得

$$\begin{aligned}|u_{x_i}(x)| &= \frac{1}{V_n^{(s)}}\left|\int_{B(x,s)} u_{x_i}(y)dy\right| \\ &= \frac{1}{V_n^{(s)}}\left|\int_{\partial B(x,s)} u(y)\mathbf{n}_i y dS(y)\right|\end{aligned}$$

从而有

$$V_n^{(s)}\left|u_{x_i}(x)\right| \le \int_{\partial B(x,s)} |u(y)|\, dS(y)$$

对两端在 $(0,r)$ 上积分得到

$$\begin{aligned}|u_{x_i}(x)|\int_0^r V_n^{(1)} s^n \mathrm{d}s &\le \int_0^r \mathrm{d}s \int_{\partial B(x,s)} |u(y)|\mathrm{d}S(y) \\ &= \int_{B(x,s)} |u(y)|\mathrm{d}y\end{aligned}$$

因而

$$|u_{x_i}(x)| \le \frac{n+1}{V_n^{(1)} r^{n+1}} \int_{B(x,r)} |u(y)|\mathrm{d}y.$$

□

作为推论，我们可以证明 Liouville 定理

定理 5.8 (Liouville 定理)

若 u 是 R^n 上的有界调和函数，则 u 是常数

证明 设 $|u| \le M$，固定 $x \in R^n$，对任意 $r > 0$，在球 $B(x,r)$ 上，有

$$|\mathcal{D}u(x)| \le \frac{nC_1}{r^{n+1}} \int_{B(x,r)} |u(y)|\, dy \le \frac{nC_1 V_n^{(1)}}{r} M$$

令 $r \to \infty$，有

$$\mathcal{D}u(x) \equiv 0, \quad x \in R^n$$

因此 u 是常数 □

定理 5.9 (Harnack 定理)

设 $\{u_n\} \subset C^2(\Omega)\bigcap C(\overline{\Omega})$ 是 Ω 上的调和函数列，若 $\{u_n\}$ 在 $\partial\Omega$ 上一致收敛，则 $\{u_n\}$ 在 $\overline{\Omega}$ 上一致收敛，且收敛于一个调和函数

证明 由极值原理知

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} |u_n - u_m| \le \max_{x\in\partial\Omega} |u_n - u_m|$$

由于 $\{u_n\}$ 在 $\partial\Omega$ 上一致收敛，可知 $\{u_n\}$ 在 $\overline{\Omega}$ 上一致收敛，记 $\{u_n\}$ 一致收敛到函数 u

再由于 u_n 满足平均值公式，即

$$u_n(x) = \frac{1}{S_n^{(r)}} \int_{\partial B(x,r)} u_n(y) dS(y)$$

取极限，则有

$$u(x) = \frac{1}{S_n^{(r)}} \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y)$$

从而 $u(x)$ 满足平均值公式，故 $u(x)$ 是调和函数 □

定理 5.10 (可去奇点定理)

设 $a \in U$ 是调和函数 u 的孤立有界奇点，则 u 可以延拓为整个 U 上的调和函数

证明 只需考察单位化后对 $B = B(0,1)$，若 u 在 $B\setminus\{0\}$ 有界调和，∂B 连续，则能延拓到整个单位球

我们只需证明 u 和作为 Dirichlet 问题的解 $\overline{u}$ 在 $B\setminus\{0\}$ 上相符即可，其中 $\overline{u}$ 满足

$$\begin{cases} \Delta\overline{u} = 0, & \text{in } B(0,1) \\ \overline{u} = u, & \text{on } \partial B(0,1) \end{cases}$$

先设 $n > 2$，对 $\epsilon > 0$，定义

$$v_\epsilon(x) = u - \overline{u} + \epsilon(|x|^{2-n} - 1)$$

显然有 $\Delta v_\epsilon(x) = 0$ 且 $|x| \to 1$ 时，$v_\epsilon(x) \to 0$，同时 $|x| \to 0$ 时，$v_\epsilon(x) \to +\infty$

于是对环状区域 $\{x : \epsilon' < |x| < 1 - \epsilon'\}$ 使用极值原理，令 $\epsilon' \to 0^+$，可知 $v_\epsilon \geq 0$ 在 $B\setminus\{0\}$ 上恒成立，于是令 $\epsilon \to 0^+$，可知 $u \geq \overline{u}$，用 $-u$ 同理可得 $-u \geq -\overline{u}$，从而有在 $B\setminus\{0\}$ 上

$$u = \overline{u}$$

即 $\overline{u}$ 为 u 在 B 上的延拓 □

5.2 基本解和 Green 函数

5.2.1 Laplace 基本解

计算 Laplace 方程基本解

$$\triangle E(r) = \delta(r)$$

注意基本解 $E(r)$ 只与 $r = |x|$ 有关，因此

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{x_i}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}) &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + x_i\frac{\partial}{\partial r}\cdot\frac{x_i}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\frac{1}{r}) + (\frac{x_i}{r})^2\frac{\partial^2}{\partial r^2} \\ &= (\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3})\frac{\partial}{\partial r} + \frac{x_i^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\end{aligned}$$

从而

$$\triangle E = \frac{n-1}{r}\frac{\partial E}{\partial r} + \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} = \delta(r)$$

令 $\frac{\partial E}{\partial r} = w(r)$，可得

$$w' + \frac{n-1}{r}w = \delta(r)$$

两边乘上 r^{n-1} 得到

$$\frac{d(r^{n-1}w)}{dr} = r^{n-1}\delta(r)$$

由 δ 的广义函数性质，从而有

$$\frac{d(r^{n-1}w)}{dr} = 0 \Longrightarrow r^{n-1}w = c$$

即

$$E'(r) = w = \frac{c}{r^{n-1}}$$

解得

$$\begin{cases} E = c\ln r, & n = 2 \\ E = c\,r^{2-n}, & n \geq 3 \end{cases}$$

定义 5.2 (Laplace 基本解)

对 $x \in R^n, x \neq 0$，称函数

$$\Gamma(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln|x|, & n = 2 \\ \frac{1}{n(n-2)V_n^{(1)}} \frac{1}{|x|^{n-2}}, & n \geq 3 \end{cases}$$

为 Laplace 方程的基本解

笔记　基本解 $\Gamma(x) \in L^1_{loc}(R^n)$ 且在广义函数下满足方程

$$-\Delta\Gamma(x) = \delta(x)$$

即对于任意 $f \in C_0^\infty(R^n)$，有

$$\int_{R^n} \Gamma(x)[-\Delta f(x)]dx = f(0)$$

5.2.2 格林函数

在这一节中，我们旨在解决 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & in\ \Omega \\ u = g, & on\ \partial\Omega \end{cases}$$

为此我们利用基本解来构造格林函数，并以此来获得解的表达式

设 $\Omega \subset R^n$ 是有界开集且 $\partial\Omega$ 光滑，$u \in C^2(\Omega) \bigcap C^1(\overline{\Omega})$ 是 Dirichlet 问题的解

固定 $x \in \Omega$，取充分小 $\epsilon > 0$，使得 $B(x, \epsilon) \subset \Omega$，在区域 $V_\epsilon := \Omega \setminus B(x, \epsilon)$ 上对 $u(y)$ 和基本解 $\Gamma(y - x)$ 应用格林公式，则有

$$\begin{aligned} &\int_{V_\epsilon} u(y)\Delta\Gamma(y - x) - \Gamma(y - x)\Delta u(y)dy \\ = &\int_{\partial V_\epsilon} u(y)\frac{\partial}{\partial\nu}\Gamma(y - x) - \Gamma(y - x)\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)dS(y) \end{aligned}$$

其中 ν 表示 ∂V_ϵ 上的单位外法向量

注意到，当 $x \neq y$ 时，$\Delta\Gamma(x - y) = 0$，且 $\epsilon \to 0$ 时，有

$$\left|\int_{\partial B(x,\epsilon)} \Gamma(y - x)\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)dS(y)\right| \leq C\epsilon^{n-1} \max_{\partial B(0,\epsilon)} |\Gamma| = o(1)$$

进一步还有

$$\int_{\partial B(x,\epsilon)} u(y)\frac{\partial}{\partial\nu}\Gamma(y - x)dS(y) = \frac{1}{S_n^{(\epsilon)}} \int_{\partial B(x,\epsilon)} u(y)dS(y) \to u(x)$$

从而得到

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \Gamma(y - x)\frac{\partial}{\partial\nu}u(y) - u(y)\frac{\partial}{\partial\nu}\Gamma(y - x)dS(y) - \int_\Omega \Gamma(y - x)\Delta u(y)dy$$

但是，对于 Dirichlet 问题来说，$\frac{\partial}{\partial\nu}u(y)$ 仍然未知，下面将通过引进一个调和函数 ϕ^x 来消掉这一项

设对给定 $x \in \Omega$，函数 $\phi^x = \phi^x(y)$ 满足方程

$$\begin{cases} \Delta\phi^x(y) = 0, & y \in \Omega \\ \phi^x = \Gamma(y - x), & y \in \partial\Omega \end{cases}$$

再次运用格林公式

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \phi^x(y)\Delta u(y)dy &= \int_{\partial\Omega} u(y)\frac{\partial\phi^x}{\partial\nu}(y) - \phi^x(y)\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)dS(y) \\ &= \int_{\partial\Omega} u(y)\frac{\partial\phi^x}{\partial\nu}(y) - \Gamma(y - x)\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)dS(y) \end{aligned}$$

定义 5.3 (格林函数)

对于任意 $x, y \in \Omega, x \neq y$，函数

$$G(x, y) = \Gamma(y - x) - \phi^x(y)$$

称为 Ω 上的格林函数

笔记 显然，当 $x \in \Omega, y \in \partial\Omega$ 时，$G(x, y) = 0$，实际上，格林函数就是基本解减去一个以基本解为边值的调和函数

由此，我们能得到

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} u(y)\frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y)dS(y) - \int_{\Omega} G(x, y)\Delta u(y)dy, \quad (x \in \Omega)$$

于是对于一般泊松问题的 Dirichlet 问题有以下结论

定理 5.11

设 Ω 是 R^n 上的一个有界区域，$u(x) \in C^2(\Omega) \bigcap C^1(\overline{\Omega})$ 是 Dirichlet 问题的解，即满足

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & in\ \Omega \\ u = g, & on\ \partial\Omega \end{cases}$$

则

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} g(y)\frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y)dS(y) + \int_{\Omega} f(y)G(x, y)dy, \quad (x \in \Omega)$$

笔记 引入格林函数 $G(x, y)$ 的重要意义在于把求解具有任意非齐次项与任意边界的定解问题，归结为求解一个特定的边值问题，在一般情形，虽然不可能给出格林函数的表达式，但格林函数只依赖于区域，而与边值和非齐次项无关，这对理论研究和求解问题都带来很大的便利

下面给出格林函数的一个性质

定理 5.12 (格林函数的对称性)

对任意 $x, y \in \Omega, x \neq y$，有

$$G(y, x) = G(x, y)$$

证明 固定 $x, y \in \Omega, x \neq y$，令

$$v(z) := G(x, z), w(z) := G(y, z) \quad (z \in \Omega).$$

则有 $\Delta v(z) = 0\ (z \neq x), \Delta w(z) = 0\ (z \neq y)$ 以及 $w = v = 0\ (z \in \partial\Omega)$

取充分小 $\epsilon > 0$，在区间 $V := \Omega - [B(x, \epsilon) \bigcup B(y, \epsilon)]$ 有

$$\int_{\partial B(x,\varepsilon)} \frac{\partial v}{\partial \nu}w - \frac{\partial w}{\partial \nu}v dS(z) = \int_{\partial B(y,\varepsilon)} \frac{\partial w}{\partial \nu}v - \frac{\partial v}{\partial \nu}w dS(z)$$

由 w 在 x 附近光滑，故

$$\left|\int_{\partial B(x,\varepsilon)} \frac{\partial w}{\partial \nu}v dS\right| \leq C\varepsilon^{n-1} \sup_{\partial B(x,\varepsilon)} |v| = o(1) \quad \text{as } \varepsilon \to 0.$$

另一方面，$v(z) = \Gamma(z - x) - \phi^x(z)$，$\phi^x(z)$ 在 Ω 内光滑，故

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B(x,\varepsilon)} \frac{\partial v}{\partial \nu}w dS = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B(x,\varepsilon)} \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(z - x)w(z)dS = w(x),$$

因此，当 $\epsilon \to 0$ 时，

$$\int_{\partial B(x,\varepsilon)} \frac{\partial v}{\partial \nu} w - \frac{\partial w}{\partial \nu} v dS(z) \to w(x)$$
$$\int_{\partial B(y,\varepsilon)} \frac{\partial w}{\partial \nu} v - \frac{\partial v}{\partial \nu} w dS(z) \to v(y)$$

于是 $w(x) = v(y)$，即

$$G(x,y) = G(y,x)$$

□

对于求解格林函数，我们需要求解 $\phi^x(y)$，即初值问题

$$\begin{cases} \Delta\phi^x(y) = 0, & y \in \Omega \\ \phi^x = \Gamma(y-x), & y \in \partial\Omega \end{cases}$$

对于一些具有对称性的特殊区域，可以利用区域的对称性来求解

例题 5.2 半空间 $R_+^n = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n | x_n > 0\}$ 上的格林函数

解 对于 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R_+^n$，记 x 关于边界 $\partial R_+^n = R^{n-1}$ 的反射点为 $\widetilde{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, -x_n)$，取

$$\phi^x(y) = \Gamma(y-\widetilde{x}), \quad (x, y \in R_+^n)$$

注意到，当 $y \in \partial R_+^n$ 时，$\phi^x(y) = \Gamma(y-\widetilde{x}) = \Gamma(|y-\widetilde{x}|) = \Gamma(y-x)$，于是 $\phi^x(y)$ 满足初值问题

$$\begin{cases} \Delta\phi^x(y) = 0, & y \in \Omega \\ \phi^x = \Gamma(y-x), & y \in \partial\Omega \end{cases}$$

因此，R_+^n 上的格林函数为

$$G(x,y) = \Gamma(y-x) - \Gamma(y-\widetilde{x})$$

我们分别考虑下列两种情形：

1. 当 $n \geq 3$ 时，由于

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_n} G(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y_n}\Gamma(y-x) - \frac{\partial}{\partial y_n}\Gamma(y-\widetilde{x}) \\ &= -\frac{1}{nV_n^{(1)}}\left(\frac{y_n - x_n}{|y-x|^n} - \frac{y_n + x_n}{|y-\widetilde{x}|^n}\right) \end{aligned}$$

   因此，当 $x \in R_+^n, y \in \partial R_+^n$ 时，有

$$\frac{\partial}{\partial \nu} G(x,y) = -\frac{\partial}{\partial y_n} G(x,y) = -\frac{2x_n}{nV_n^{(1)}\,|y-x|^n}$$

2. 当 $n = 2$ 时，由于

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_2} G(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y_2}\Gamma(y-x) - \frac{\partial}{\partial y_2}\Gamma(y-\widetilde{x}) \\ &= -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{y_2 - x_2}{|y-x|^2} - \frac{y_2 + x_2}{|x-\widetilde{x}|^2}\right) \end{aligned}$$

   因此，当 $x \in R_+^2, y \in \partial R_+^2$ 时，有

$$\frac{\partial}{\partial \nu} G(x,y) = -\frac{\partial}{\partial y_2} G(x,y) = -\frac{2x_2}{2\pi\,|y-x|^2}$$

   由于 $V_2^{(1)} = \pi$，有

$$\frac{\partial}{\partial \nu} G(x,y) = -\frac{\partial}{\partial y_n} G(x,y) = -\frac{2x_n}{nV_n^{(1)}\,|y-x|^n}, \quad (n \geq 2)$$

假设 $u \in C^2(R_+^n) \bigcap C(\overline{R_+^n})$ 是方程

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, \quad x \in R_+^n \\ u = g, \quad x \in \partial R_+^n \end{cases}$$

的有界解，我们期望

$$u(x) = \frac{2x_n}{nV_n^{(1)}} \int_{\partial R_+^n} \frac{g(y)}{|y-x|^n} dy$$

是方程的解，但上述解实际上只给出边值问题的形式解，因为此时区域 R_+^n 是无界的，为此需要验证上述形式解的确是解

第六章 热方程

本章讨论热方程

$$u_t - \Delta u = f,$$

其中 $u = u(x,t), x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Omega \subset R^n, t > 0$

6.1 基本解

6.1.1 傅里叶变换推导基本解

对方程 $u_t - \Delta u = \delta(x,t)$ 进行傅里叶变换，可以得到关于 $\hat{u}(\xi,t)$ 的常微分方程问题

$$\frac{\partial \hat{u}(\xi,t)}{\partial t} + |\xi|^2 \hat{u}(\xi,t) = \delta(t)$$

易得其解为

$$\hat{u}(\xi,t) = H(t) e^{-|\xi|^2 t}$$

对它作傅里叶逆变换

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= F^{-1}[\hat{u}(\xi,t)] \\
&= F^{-1}[H(t)e^{-|\xi|^2 t}] \\
&= (2\pi)^{-n} H(t) \int_{R^n} e^{ix\cdot\xi} e^{\frac{-|\sqrt{2t}\xi|^2}{2}} d\xi \\
&= (2\pi)^{-n} H(t) \int_{R^n} \frac{1}{\sqrt{2t}} e^{-i\frac{x}{\sqrt{2t}}\cdot\eta} e^{-|\eta|^2/2} d\eta \\
&= \frac{H(t)}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)
\end{aligned}$$

定义 6.1 (热方程基本解)

函数

$$\Phi(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} H(t) \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right), \quad (x \in R^n, t \in R)$$

称为热方程的基本解

♣

引理 6.1 (基本解的积分)

$\forall t > 0$，则

$$\int_{R^n} \Phi(x,t) dx = 1$$

♡

证明

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,t) dx &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx \\
&= \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2} dz \\
&= \frac{1}{\pi^{n/2}} \prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z_i^2} dz_i = 1.
\end{aligned}$$

□

6.2 初值问题

6.2.1 齐次初值问题

命题 6.1 (齐次初值问题)

现在使用基本解来解决齐次初值问题

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = g & \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

类似于基本解的推导，对方程和初值进行傅里叶变换

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}(\xi,t)}{\partial t} + |\xi|^2 \hat{u}(\xi, t) = 0 \\ \hat{u}(\xi, 0) = \hat{g}(\xi) \end{cases}$$

易得解为 $\hat{u}(\xi, t) = \hat{g}(\xi) e^{-|\xi|^2 t}$，对它作傅里叶逆变换，可得

$$\begin{aligned} u(x,t) &= F^{-1}[\hat{u}(\xi,t)] \\ &= F^{-1}[\hat{g}(\xi)] * F^{-1}[e^{-|\xi|^2 t}] \\ &= (4\pi t)^{-n/2} \int_{R^n} g(y) e^{\frac{-|x-y|^2}{4t}} dy \end{aligned}$$

6.2.2 非齐次初值问题

定理 6.1 (齐次化原理)

若 $U(x,t,\tau)$ 满足

$$\begin{cases} U_t - \Delta U = 0 \\ U_{t=\tau} = f(x,t) \end{cases}$$

令 $u(x,t) = \int_0^\tau U(x,t,\tau) d\tau$，则 $u(x,t)$ 为柯西问题

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(x,t) \\ u_{t=0} = 0 \end{cases}$$

的解

命题 6.2 (非齐次初值问题)

现在我们来讨论非齐次初值问题

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = \varphi & \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

解

1. 从基本解入手，对于无初值条件

$$u_t - \Delta u = f$$

存在弱解 $u = E(x,t) * f(x,t)$，为了类似的结果，构造辅助函数

$$\tilde{u}(x,t) = H(t) u(x,t)$$

$$F(x,t) = \delta(t)\varphi(x) + H(t) f(x,t)$$

此时，$\tilde{u}(x,t) = u(x,t), (t > 0)$，且 $\tilde{u}$ 满足

$$\tilde{u}_t - \Delta\tilde{u} = F(x,t)$$

此时，由基本解的性质可得

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x,t) &= E(x,t) * F(x,t)\\ &= E(x,t) * \varphi(x) + E(x,t) * f(x,t)\end{aligned}$$

因此，原方程的解 $u(x,t) = \tilde{u}(x,t)(t > 0)$，只需验证初值条件即可

2. 从叠加原理、傅里叶变换、齐次化原理入手
   (a). 叠加原理，可将原非齐次方程化为

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, (t > 0) \\ u|_{t=0} = \varphi \end{cases}, \quad \begin{cases} u_t - \Delta u = f(x,t), (t > 0) \\ u|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

   此时，方程的解 $u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$，$u_1, u_2$ 分别满足上述两个方程
   (b). 由傅里叶变换可解得 $u_1(x,t)$

$$u_1(x,t) = E(x,t) * \varphi(x) = (4\pi t)^{-n/2} \int_{R^n} \varphi(y) e^{\frac{-|x-y|^2}{4t}} dy$$

   (c). 再由齐次化原理来求解 $u_2(x,t)$

$$\begin{aligned}u_2(x,t) &= \int_0^t E(x,t-s) * f(x,s) ds\\ &= \int_0^t \int_{R^n} E(x-y,t-s) \cdot f(y,s) dy ds\\ &= E(x,t) * f(x,t)\end{aligned}$$

   (d). 代回原式，得到

$$\begin{aligned}u(x,t) &= u_1(x,t) + u_2(x,t)\\ &= E(x,t) * \varphi(x) + E(x,t) * f(x,t)\end{aligned}$$

6.3 初边值问题

在这一节，我们考虑如下问题

命题 6.3

求解初边值问题

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(x,t), & (x,t) \in (0,l) \times (0,T] \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in [0,l] \\ u(0,t) = g_1(t), u(l,t) = g_2(t), & t \in [0,T] \end{cases}$$

解 我们将利用分离变量法来求解此问题，不妨假设

$$g_1(t) \equiv 0, \quad g_2(t) \equiv 0$$

否则作函数替换

$$u(x,t) = v(x,t) + \frac{x}{l} g_2(t) + \frac{l-x}{l} g_1(t)$$

则可得到一个关于 $v(x,t)$ 的齐次边值问题

下面分别讨论初边值问题中非齐次项恒为零和不恒为零的情况

1. $f(x,t) \equiv 0$

考虑分离变量形式的非零解

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

将它代入齐次方程得到

$$T'(t)X(x) = X''(x)T(t), \quad (x,t) \in (0,l) \times (0,T]$$

即

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

在上式中，左端是 t 的函数，右端是 x 的函数，因而只能是常数，记为 $-\lambda$，从而

$$T' + \lambda T = 0, \quad t \in (0,T],$$

$$X'' + \lambda X = 0, \quad x \in (0,l).$$

将 $u(x,t)$ 代入齐次边值条件，从而有

$$X(0) = X(l) = 0$$

于是得到

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & x \in (0,l) \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

此方程问题的所有非平凡特征值为

$$\lambda_n = (\frac{n\pi}{l})^2, \quad n = 1, 2, \cdots$$

与特征值对应的解为

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{l}x, \quad n = 1, 2, \cdots$$

而与 $X_n(x)$ 对应的 $T_n(t)$ 为

$$T_n(t) = T_n(0)e^{-(\frac{n\pi}{l})^2 t}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

从形式上看，每一个 $u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$ 都满足方程和边值条件，但一般来讲他们都不满足初始条件，为求一个既满足方程和边值条件，又满足初始条件的解，将 $u_n(x,t)$ 叠加，形式上，

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)e^{-(\frac{n\pi}{l})^2 t} \sin\frac{n\pi}{l}x \end{aligned}$$

满足方程，为使 $u(x,t)$ 满足初始条件，我们需要

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin\frac{n\pi}{l}x$$

由于 $\{\sin\frac{n\pi}{l}x\}$ 的完备性，可以得到

$$T_n(0) = \varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x$$

于是初边值问题的形式解为

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \mathrm{e}^{-(\frac{n\pi}{l})^2 t} \sin\frac{n\pi}{l}x$$

2. $f(x,t) \neq 0$
此时仍可以利用分离变量法来求解，具体来说，把解 $u(x,t)$，非齐次项 $f(x,t)$ 和初值 $\varphi(x)$ 都按特征函数

系 $\{\sin\frac{n\pi}{l}x\}$ 展开，即

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x,\\
f(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x,\\
\varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n\sin\frac{n\pi}{l}x.
\end{aligned}
$$

由特征函数系 $\{\sin\frac{n\pi}{l}x\}$ 的正交性和完备性得到

$$
\begin{aligned}
f_n(t) &= \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,t)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi,\\
\varphi_n &= \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}
$$

为求出未知函数 $T_n(t)$，把上述表达式代入初边值条件中，由完备性，从而得到 $T_n(t)$ 满足一下常微分方程的初值问题

$$
\begin{cases}
T_n(t)' + (\frac{n\pi}{l})^2 T_n(t) = f_n(t), \quad t\in(0,T]\\
T_n(0) = \varphi_n
\end{cases}
$$

求解此问题得到

$$
T_n(t) = \varphi_n \mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} + \int_0^t f_n(\tau)\mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2(t-\tau)}\mathrm{d}\tau, \quad n=1,2,\cdots
$$

代回 $u(x,t)$ 的表达式，得到

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = &\int_0^l \varphi(\xi)\left[\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{l}\xi\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}\right]\mathrm{d}\xi\\
&+\int_0^t \mathrm{d}\tau\int_0^l f(\xi,\tau)\left[\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{l}\xi\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2(t-r)}\right]\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}
$$

6.4 极值原理

首先先给出一些有用的记号，设 U 是 R^n 中的有界开集，固定时间 $T > 0$

定义 6.2

1. 定义抛物线圆柱体

$$U_T := U \times (0, T]$$

2. 定义 U_T 抛物线边界

$$\Gamma_T := \overline{U}_T - U_T$$

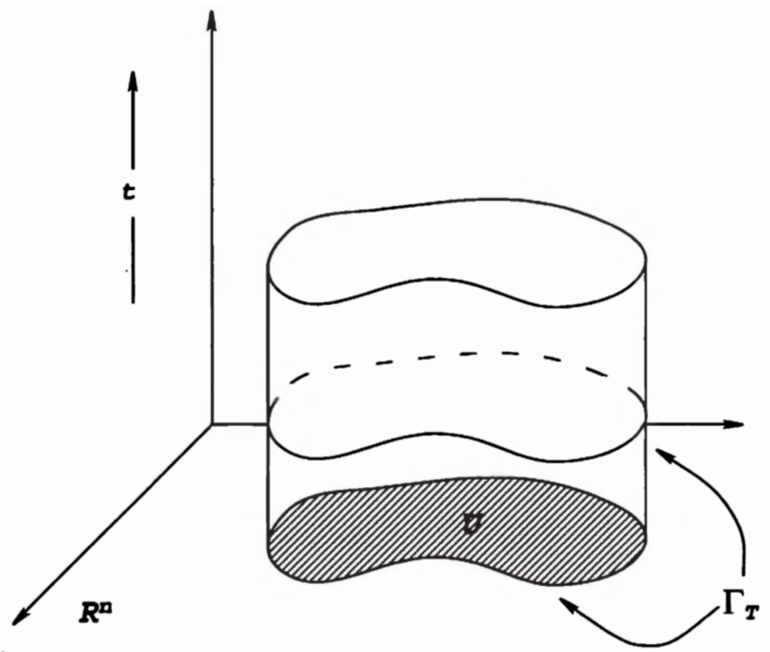


图 6.1: 抛物线圆柱体

6.4.1 极值原理

定理 6.2 (强极值原理)

设 $U_T = U \times (0, T], u \in C_1^2(U_T) \bigcap C(\overline{U}_T)$ 是热方程的解，则

1. $\max_{\bar{U}_T} u = \max_{\Gamma_T} u$
2. 若 U 是连通的且存在 $(x_0, t_0) \in U_T$ 使得

$$u(x_0, t_0) = \max_{\bar{U}_T} u$$

则 $u \equiv Const\ in\ \overline{U}_{t_0}$

笔记 若 u 在内点达到极值，那么 u 在更早的时刻都是恒定的

证明 由于 $\Gamma_T \subset \overline{U}_T$，因此不等式成立

$$\max_{\bar{U}_T} u \geq \max_{\Gamma_T} u$$

只需要证明

$$\max_{\bar{U}_T} u \le \max_{\Gamma_T} u$$

为此构造辅助函数

$$v(x,t) = u(x,t) - \epsilon t, \quad \forall \epsilon > 0$$

此时有

$$v_t - \Delta v = u_t - \epsilon - \Delta u = -\epsilon < 0$$

下面说明，v 在 $\bar{U}_T$ 上的最大值不能在 U_T 内达到，否则，存在一点 $(x_0,t_0) \in U_T$ 使得

$$v(x_0,t_0) = \max_{\bar{U}_T} u(x,t)$$

由微积分的定理可知

$$v_x(x_0,t_0) = 0, \quad v_{xx}(x_0,t_0) \le 0$$

且

$$v_t(x_0,t_0) = 0, \quad t_0 < T, \quad v_t(x_0,t_0) \ge 0, \quad t_0 = T$$

因此

$$v_t(x_0,t_0) - v_{xx}(x_0,t_0) > 0$$

矛盾！从而 v 不可能在 U_T 内达到 $\bar{U}_T$ 的最大值，因此

$$\max_{\bar{U}_T} v(x,t) = \max_{\Gamma_T} v(x,t)$$

于是

$$\begin{aligned}
\max_{\bar{U}_T} u(x,t) &\le \max_{\bar{U}_T} v(x,t) + \epsilon T \\
&\le \max_{\Gamma_T} v(x,t) + \epsilon T \\
&\le \max_{\Gamma_T} u(x,t) + \epsilon T
\end{aligned}$$

令 $\epsilon \to 0$，则得所需证明的不等式 □

推论 6.1

设 $U_T = U \times (0,T], u \in C_1^2(U_T) \bigcap C(\overline{U}_T)$ 是热方程的解，则 $u(x,t)$ 在 $\bar{U}_T$ 上的最小值必在抛物边界 Γ_T 上达到

极值原理的一个重要应用如下

定理 6.3

设 $g \in C(\Gamma_T), f \in C(U_T)$，则存在至多一个解 $u \in C_1^2(U_T) \bigcap C(\overline{U}_T)$ 关于初边值问题

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & in\ U_T \\ u = g & on\ \Gamma_T. \end{cases}$$

证明 若 $u, \widetilde{u}$ 是方程的两个解，令 $\omega := u - \widetilde{u}$，则可知 ω 满足

$$\begin{cases} \omega_t - \Delta \omega = 0 & in\ U_T \\ \omega = 0 & on\ \Gamma_T. \end{cases}$$

由极值原理知，$\omega \equiv 0$ □

6.5 初边值问题的唯一性和稳定性

定理 6.4 (初边值问题的唯一性和稳定性) 热传导方程

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(x,t) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u(\alpha,t) = M_1(t) \\ u(\beta,t) = M_2(t) \end{cases}$$

在 R_T 上解唯一，且连续依赖于 Γ_T 上的条件

证明

1. 唯一性

   设 u_1, u_2 为热方程初边值问题的两解，令 $u = u_1 - u_2$，则 u 满足齐次方程零初值零边值，由极值原理，知 $u \equiv 0$，于是 $u_1 = u_2$

2. 稳定性

   若初值问题 u_1, u_2 在 Γ_T 上满足

   $$|u_1 - u_2| \le \varepsilon$$

   令 $u = u_1 - u_2$ 为某热方程初边值问题的解，且在 Γ_T 上

   $$|u| \le \varepsilon$$

   由极值原理，知 $|u_1 - u_2| \le \varepsilon$，稳定性成立

□

6.6 柯西问题的稳定性和唯一性

定理 6.5 (柯西问题的稳定性和唯一性) 热传导方程

$$\begin{cases} u_t - a^2\Delta u = f(x,t) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

在有界函数类中解唯一，且连续依赖于初值条件

证明

1. 唯一性

   设两个有界解 u_1, u_2，令 $u = u_1 - u_2$，则有

   $$\begin{cases} u_t - a^2\Delta u = 0 \\ u|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

   对 (x_0, t_0)，$t_0 > 0$，考虑区域 $R_0 : 0 < t < t_0, |x - x_0| \le L$

   构造

   $$v(x,t) = \frac{4C_0}{L^2}\left(\frac{(x-x_0)^2}{2} + a^2 t\right)$$

   在 R_0 上连续

   (a). 内部：$v(x,t)$ 在 R_0 内部满足齐次方程

(b). 底边：$v(x,t)|_{t=0} \geq 0 = u(x,0)$
(c). 侧边：$v(x_0 \pm L, t) \geq 2C_0 \geq u(x_0 \pm L, t)$
于是有

$$\begin{cases} v_t - a^2 \Delta v = 0 \\ v|_{\Gamma_T} \geq u|_{\Gamma_T} \end{cases}$$

由极值原理，知 $u(x,t) \leq v(x,t)$
即 $u(x,t) \leq \frac{4C_0}{L^2}\left(\frac{(x-x_0)^2}{2} + a^2 t\right)$
同理可证

$$u(x,t) \geq -\frac{4C_0}{L^2}\left(\frac{(x-x_0)^2}{2} + a^2 t\right)$$

取 (x_0, t_0)，有

$$|u(x_0,t_0)| \leq \frac{4C_0}{L^2} a^2 t_0$$

令 $L \to +\infty$，有

$$u(x_0,t_0) = 0$$

由 (x_0, t_0) 的任意性，知 $u \equiv 0$

2. 稳定性
要证 $|\varphi(x)| \leq \eta$ 时，有 $|u(x)| \leq \eta$，令

$$v(x,t) = \frac{4C_0}{L^2}\left(\frac{(x-x_0)^2}{2} + a^2 t\right) + \eta$$

同理可证，任取 (x_0, t_0) 有

$$|u(x_0,t_0)| \leq \frac{4C_0}{L^2} a^2 t_0 + \eta$$

令 $L \to +\infty$，有

$$|u(x_0,t_0)| \leq \eta$$

由 (x_0, t_0) 的任意性，知 $|u(x,t)| \leq \eta$

□

第七章 波动方程

在本章我们讨论波动方程

$$u_{tt}-\Delta u=0$$

以及非齐次波动方程

$$u_{tt}-\Delta u=f$$

未知函数 $u:\overline{U}\times[0,\infty)\to R, u=u(x,t)$，其中 Laplace 算子 Δ 作用于空间变量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

一个普遍的缩写为

$$\Box u:=u_{tt}-\Delta u$$

我们将发现波动方程的解与拉普拉斯方程或热方程的解有很大的不同

7.1 基本解

7.1.1 基本解推导

命题 7.1

求解波动方程基本解

$$\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial t^2}-\Delta E(x,t)=\delta(x,t)$$

解 关于 x 方向作傅里叶变换

$$\frac{\partial^2 \hat{E}(\xi,t)}{\partial t^2}+|\xi|^2\hat{E}(\xi,t)=\delta(t)$$

对应齐次微分方程的基础解组为

$$\hat{E}_1=\sin(|\xi|t),\quad \hat{E}_2=\cos(|\xi|t)$$

由常数变易法，有

$$\begin{bmatrix}\sin(|\xi|t) & \cos(|\xi|t)\\ |\xi|\cos(|\xi|t) & -|\xi|\sin(|\xi|t)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}C_1'(\xi,t)\\ C_2'(\xi,t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \delta(t)\end{bmatrix}$$

解得

$$C_1'(\xi,t)=\frac{1}{|\xi|}\delta(t),\quad C_2'(\xi,t)=0$$

于是有

$$C_1(\xi,t)=\begin{cases}\frac{H(t)}{|\xi|} & t>0\\ \\ \frac{-H(-t)}{|\xi|}, & t<0\end{cases},\quad C_2(\xi,t)=0$$

从而有

$$\hat{E}(\xi,t)=\begin{cases}\frac{H(t)}{|\xi|}\sin(|\xi|t), & t>0\\ \\ \frac{-H(-t)}{|\xi|}\sin(|\xi|t), & t<0\end{cases}$$

通过傅里叶逆变换

$$\begin{aligned}E_+(x,t) &= F^{-1}(\hat{E}(\xi,t)) \\ &= (2\pi)^{-3}\int_{R^3}\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}e^{i\xi x}d\xi\end{aligned}$$

令 ξ 轴经过 x，同时对 ξ 进行球坐标变换

$$\begin{aligned}E_+(x,t) &= (2\pi)^{-3}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\eta t)}{\eta}\eta^2 d\eta\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}e^{i|x|\eta\cos\theta}\sin\theta d\theta \\ &= (2\pi)^{-2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\eta t)}{|x|}d\eta\int_{-1}^{1}\cos(|x|\eta y)+i\sin(|x|\eta y)d(|x|\eta y) \\ &= \frac{2}{4\pi^2|x|}\int_0^{+\infty}\sin(\eta t)\sin(|x|\eta)d\eta \\ &= \frac{2}{4\pi^2|x|}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\cos((|x|-t)\eta)-\cos((|x|+t)\eta)d\eta \\ &= \frac{1}{4\pi^2|x|}\lim_{A\to+\infty}\int_0^{A}\cos((|x|-t)\eta)-\cos((|x|+t)\eta)d\eta \\ &= \frac{1}{4\pi|x|}\lim_{A\to\infty}\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin A(|x|-t)}{|x|-t}-\frac{\sin A(|x|+t)}{|x|+t}\right] \\ &= \frac{1}{4\pi|x|}(\delta(|x|-t)-\delta(|x|+t)) \\ &= \frac{H(t)}{4\pi|x|}\delta(|x|-t)\end{aligned}$$

于是

$$E_+(x,t) = \frac{H(t)}{4\pi t}\delta(|x|-t)$$

同理，可得

$$E_-(x,t) = \frac{(-1)H(-t)}{4\pi t}\delta(|x|+t)$$

7.2 齐次化原理

定理 7.1 (齐次化原理)

设 $w(x,t,\tau)$ 是柯西问题

$$\begin{cases}\Box_4 w = 0, t > \tau \\ w(x,\tau,\tau) = 0 \\ w_t(x,\tau,\tau) = f(x,\tau)\end{cases}$$

的解，则有 $u(x,t) = \int_0^t w(x,t,\tau)d\tau$ 是柯西问题

$$\begin{cases}\Box_4 u = f(x,t), t > 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = 0\end{cases}$$

的解

7.3 柯西问题

7.3.1 一维柯西问题

命题 7.2

考虑一维的柯西问题，即弦振动方程

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = f(x,t) \\ u = \varphi(x), u_t = \psi(x)(t=0) \end{cases}$$

解 由叠加原理，可将上述方程分解为

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \\ u = \varphi, u_t = \psi(t=0) \end{cases}, \quad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = f(x,t) \\ u = 0, u_t = 0(t=0) \end{cases}$$

1. 先看第一个方程，令

$$\xi = x - t, \eta = x + t$$

于是

$$\begin{cases} u_x = u_\xi \cdot \xi_x + u_\eta \cdot \eta_x = u_\xi + u_\eta \\ u_{xx} = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 2u_{\xi\eta} \\ u_t = u_\eta - u_\xi \\ u_{tt} = u_{\eta\eta} - 2u_{\xi\eta} + u_{\xi\xi} \end{cases}$$

代入方程，得到

$$4u_{\xi\eta} = 0 \Longrightarrow u_{\xi\eta} = 0$$

即

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right) = 0 \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial\xi} = \tilde{F}(\xi)$$

于是

$$\begin{aligned} & u_1(\xi,\eta) = F(\xi) + G(\eta) \\ \Longrightarrow \quad & u_1(x,t) = F(x-t) + G(x+t) \end{aligned}$$

由初值条件得到

$$\begin{cases} F(x) + G(x) = \varphi(x) \\ G'(x) - F'(x) = \psi(x) \end{cases}$$

从而解得

$$\begin{cases} F(x) = \frac{1}{2}\Big(\varphi(x) - \int_{x_0}^{x}\psi(x)dx\Big) - \frac{C}{2} \\ G(x) = \frac{1}{2}\Big(\varphi(x) + \int_{x_0}^{x}\psi(x)dx\Big) + \frac{C}{2} \end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned} u_1(x,t) &= F(x-t) + G(x+t) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\varphi(x-t) + \varphi(x+t)\Big) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\psi(y)dy \end{aligned}$$

2. 再看第二个方程

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=f(x,t) \\ u=0,u_t=0(t=0) \end{cases}$$

由齐次化原理，方程的解 $u_2(x,t)=\int_0^t w(x,t,\tau)d\tau$，其中 $w(x,t,\tau)$ 满足

$$\begin{cases} w_{tt}-w_{xx}=0(t>\tau) \\ w(x,\tau,\tau)=0 \\ w_t(x,\tau,\tau)=f(x,\tau) \end{cases}$$

由此，可以解得 $w(x,t,\tau)=\frac{1}{2}\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(y,\tau)dy$ 于是有

$$u_2(x,t)=\frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(y,\tau)dyd\tau$$

3. 于是原方程的解为

$$u(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t)$$

7.3.2 三维柯西问题

命题 7.3

下面来考虑三维柯西问题

$$\begin{cases} u_{tt}-\Delta u=f(x,t) \\ u(x,0)=g_0(x) \\ u_t(x,0)=g_1(x) \end{cases}$$

♠

解 令 $\hat{u}(x,t)=H(t)u(x,t)$

目的是将方程组化为 $(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta)\hat{u}(x,t)=F(x,t)$ 形式，然后应用基本解的性质，进行卷积求解

$$\begin{aligned} &(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta)H(t)u(x,t) \\ =&\frac{\partial}{\partial t}(\delta(t)u+H(t)u_t)-H(t)\Delta u \\ =&\delta'(t)u+\delta(t)u_t+H(t)u_{tt}+\delta(t)u_t-H(t)\Delta u \\ =&\delta'(t)u+2\delta(t)u_t+H(t)f(x,t) \\ =&H(t)f(x,t)+\partial_t(\delta(t)u)+\delta(t)u_t \end{aligned}$$

由于 $\forall\varphi(x,t)\in C_0^\infty(R^3\times R)$，有

$$\begin{aligned} \langle\partial_t(\delta(t)u),\varphi(x,t)\rangle =&(-1)\langle\delta(t)u,\partial_t\varphi(x,t)\rangle \\ =&(-1)\langle\delta(t),u(x,t)\partial_t\varphi(x,t)\rangle \\ =&g_0(x)(-1)\partial_t\varphi(x,0) \\ =&g_0(x)(-1)\langle\delta(t),\partial_t\varphi(x,t)\rangle \\ =&(-1)\langle\delta(t)g_0(x),\partial_t\varphi(x,t))\rangle \\ =&\langle\partial_t\delta(t)g_0(x),\varphi(x,t)\rangle \end{aligned}$$

即 $\partial_t(\delta(t)u)=\partial_t\delta(t)g_0(x)$

同时

$$\begin{aligned}\langle\delta(t)u_t,\varphi(x,t)\rangle =&\langle\delta(t),u_t\varphi(x,t)\rangle\\ =&u_t(x,0)\varphi(x,0)\\ =&g_1(x)\varphi(x,0)\\ =&g_1(x)\langle\delta(t),\varphi(x,t)\rangle\\ =&\langle\delta(t)g_1(x),\varphi(x,t)\rangle\end{aligned}$$

即 $\delta(t)u_t=\delta(t)g_1(x)$

于是

$$\begin{aligned}(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta)H(t)u(x,t)&=H(t)f(x,t)+\partial_t(\delta(t)g_0(x))+\delta(t)g_1(x)\\ &=:F(x,t)\end{aligned}$$

由基本解的性质，可得

$$\begin{aligned}\hat{u}(x,t)&=E_+(x,t)*F(x,t)\\ &=E_+(x,t)*(H(t)f(x,t))+E_+(x,t)*(\partial_t(\delta(t)g_0(x)))+E_+*(\delta(t)g_1(x))\end{aligned}$$

对于 $\forall\varphi(x,t)\in C_0^\infty(R^3\times R)$，由

$$\begin{aligned}\langle E_+(x,t)*(\partial_t(\delta(t)g_0(x))),\varphi(x,t)\rangle&=\langle\partial_tE_+(x,t),\langle\delta(\tau)g_0(y),\varphi(x+y,t+\tau)\rangle\rangle\\ &=\langle\partial_tE_+(x,t)\langle g_0(y),\varphi(x+y,t)\rangle\rangle\\ &=\langle\partial_tE_+(x,t)*g_0(x),\varphi(x,t)\rangle\end{aligned}$$

从而有

$$E_+(x,t)*(\partial_t(\delta(t)g_0(x)))=\partial_tE_+(x,t)*g_0(x)$$

同理，有

$$E_+(x,t)*(\delta(t)g_1(x))=E_+(x,t)*g_1(x)$$

从而有

$$\tilde{u}(x,t)=E_+(x,t)*(H(t)f(x,t))+\partial_tE_+(x,t)*g_0(x)+E_+(x,t)*g_1(x)$$

由于 $E_+(x,t)=\frac{H(t)}{4\pi t}\delta(|x|-t)$，于是

$$\begin{aligned}E_+(x,t)*(H(t)f(x,t))&=\int_{R^3}\int_R H(\tau)f(y,\tau)\frac{H(t-\tau)}{4\pi(t-\tau)}\delta(|x-y|-(t-\tau))dyd\tau\\ &=\frac{1}{4\pi}\int_0^t d\tau\int_{|x-y|=t-\tau}\frac{f(y,\tau)}{|x-y|}dS_y\\ &=\frac{1}{4\pi}\int_{|x-y|\le t}\frac{f(y,t-|x-y|)}{|x-y|}dy\end{aligned}$$

同时

$$\begin{aligned}E_+(x,t)*g_1(x)&=H(t)\int_{R^3}g_1(y)\frac{1}{4\pi t}\delta(|x-y|-t)dy\\ &=\frac{H(t)}{4\pi t}\int_{|x-y|=t}g_1(y)dS_y\\ &=H(t)\frac{t}{4\pi t^2}\int_{|x-y|=t}g_1(y)dS_y\\ &=tM(g_1)(t>0)\end{aligned}$$

其中 $M(g_1)$ 表示 g_1 在 $\{|x-y|=t\}$ 球面上的平均值

同理得

$$\begin{aligned}\partial_t E_+(x,t) * g_0(x) &= \partial_t (E_+(x,t) * g_0(x)) \\ &= \partial_t (tM(g_0))\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}u(x,t) =&\tilde{u}(x,t) \\ =&\frac{1}{4\pi}\int_0^t d\tau \int_{|x-y|=t-\tau} \frac{f(y,\tau)}{|x-y|} dS_y + tM(g_1) + \partial_t(tM(g_0)) \quad (t>0)\end{aligned}$$

下面验证条件

1. 首先验证满足方程

$$\begin{aligned}(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta)u(x,t) =&(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta)\tilde{u}(x,t) \\ =&F(x,t) = H(t)f(x,t) + \partial_t(\delta(t)g_0(x)) + \delta(t)g_1(x) \\ =&f(x,t) \quad (t>0)\end{aligned}$$

2. 验证满足初值条件

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi}\int_0^t d\tau \int_{|x-y|=t-\tau} \frac{f(y,\tau)}{|x-y|} dS_y + tM(g_1) + \partial_t(tM(g_0)) \quad (t>0)$$

即需满足

$$\begin{cases}\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{1}{4\pi}\int_0^t d\tau \int_{|x-y|=t-\tau} \frac{f(y,\tau)}{|x-y|} dS_y = 0 \\ \lim\limits_{t\to 0^+} tM(g_1) = 0 \\ \lim\limits_{t\to 0^+} \partial_t(tM(g_0)) = g_0\end{cases}$$

以及

$$\begin{cases}\lim\limits_{t\to 0^+} \partial_t\left(\int_0^t d\tau \int_{|x-y|=t-\tau} \frac{f(y,\tau)}{|x-y|} dS_y\right) = 0 \\ \lim\limits_{t\to 0^+} \partial_t^2(tM(g_0)) = 0 \\ \lim\limits_{t\to 0^+} \partial_t(tM(g_1)) = g_1\end{cases}$$

7.3.3 二维柯西问题

命题 7.4

下面通过降维法来处理二维柯西问题

$$\begin{cases}u_{tt} - \Delta u = 0 \\ u(x,0) = g_0(x_1,x_2) \\ u_t(x,0) = g_1(x_1,x_2)\end{cases}$$

解 当 $n=3$ 时，三维柯西问题的齐次解为

$$u(x,t) = \partial_t(tM(g_0)) + tM(g_1)$$

将上球面投影到二维平面上

$$tM(g_1(x_1,x_2)) = t\frac{1}{4\pi t^2}\int_{|x-y|\le t} g_1(y_1,y_2)\frac{t\,dy_1dy_2}{\sqrt{(t)^2-(x_1-y_1)^2-(x_2-y_2)^2}}$$

于是

$$tM(g_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{|x-y|\le t}\frac{g_1(y_1,y_2)}{\sqrt{(t)^2-(x_1-y_1)^2-(x_2-y_2)^2}}dy_1dy_2$$

同理

$$\partial_t(tM(g_0)) = \partial_t(\frac{1}{2\pi}\int_{|x-y|\le t}\frac{g_0(y_1,y_2)}{\sqrt{(t)^2-(x_1-y_1)^2-(x_2-y_2)^2}}dy_1dy_2)$$

于是

$$u(x,t) = \partial_t(tM(g_0)) + tM(g_1)$$

7.4 一维初边值问题

命题 7.5

下面来解决弦振动方程的初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = f(x,t) \\ u = \varphi, u_t = \psi(t=0) \\ u(0,t) = \mu_1, u(l,t) = \mu_2 \end{cases}$$

解

1. 先处理零边值问题，即 $\mu_1 = \mu_2 = 0$
   (a). $f(x,t) \equiv 0$
   采用分离变量法来处理
   令 $u(x,t) = X(x)T(t)$，代入得

$$X(x)T''(t) - X''(x)T(t) = 0$$

于是

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = -\mu$$

得到

$$\begin{cases} X''(x) + \mu X(x) = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

此方程问题的所有非平凡特征值为

$$\mu_n = (\frac{n\pi}{l})^2, \quad n = 1, 2, \cdots$$

与特征值对应的解为

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{l}x, \quad n = 1, 2, \cdots$$

于是有 $T''(t) + \mu_n T(t) = 0$，即

$$T_n(t) = A_n\cos\frac{n\pi}{l}t + B_n\sin\frac{n\pi}{l}t$$

从而

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi}{l}t + B_n\sin\frac{n\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x \end{aligned}$$

利用初值条件来求解 A_n, B_n，有

$$\begin{cases} u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin\frac{n\pi}{l}x = \varphi(x) \\ u_t = \sum_{n=1}^{\infty}\left(B_n\frac{n\pi}{l}\right)\sin\frac{n\pi}{l}x = \psi(x) \end{cases}$$

于是

$$\begin{cases} A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx \\ B_n = \frac{l}{n\pi}\cdot\frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx \end{cases}$$

由此得到 $u(x,t)$ 的表达式

(b). $f(x,t)\neq 0$

由叠加原理，可将方程分解为

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0 \\ u=\varphi, u_t=\psi(t=0) \\ u(0,t)=u(l,t)=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=f(x,t) \\ u=0, u_t=0(t=0) \\ u(0,t)=u(l,t)=0 \end{cases}$$

由上述可知，采用分离变量法可以解得 u_1，再由齐次化原理，知方程二的解为

$$u_2(x,t)=\int_0^t w(x,t,\tau)d\tau$$

其中 $w(x,t,\tau)$ 满足

$$\begin{cases} w_{tt}-w_{xx}=0 \quad (t>\tau) \\ w(x,\tau,\tau)=0 \\ w_t(x,\tau,\tau)=f(x,\tau) \\ w(0,t)=w(l,t)=0 \end{cases}$$

由此，同样采用分离变量法，可以解得 $w(x,t,\tau)$，从而得到 $u_2(x,t)$

至此，$u(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t)$ 完成求解

2. 再处理非零边值问题

构造辅助函数，化为零边值问题，令

$$\phi(x,t)=\mu_1(t)+\frac{x}{l}(\mu_2(t)-\mu_1(t))$$

从而 $v(x,t)=u(x,t)-\Phi(x,t)$ 满足零边值问题，即

$$\begin{cases} v_{tt}-v_{xx}=\tilde{f}(x,t) \\ v(x,0)=\phi(x)-\Phi(x,0) \\ v_t(x,0)=\psi(x)-\Phi_t|_{t=0} \\ v(0,t)=v(l,t)=0 \end{cases}$$

7.5 能量积分法

下面讨论二维波动方程定解问题的唯一性和稳定性，采用能量法来处理

对于二维的薄膜振动，有 $(x,y)\in\Omega\subset R^2$

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2(u_{xx}+u_{yy})=f(x,y) \\ u(x,y,0)=\varphi(x,y) \\ u_t(x,y,0)=\psi(x,y) \\ u|_{\partial\Omega}=\mu(x,y,t) \end{cases}$$

动能为

$$U=\frac{1}{2}\int_\Omega \rho u_t^2dxdy$$

位能

$$V = \frac{1}{2}\int_\Omega T(u_x^2 + u_y^2)dxdy$$

于是，总能量为

$$E(t) = \int_\Omega u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2)dxdy, \quad a^2 = \frac{T}{\rho}$$

由物理学知道，当薄膜系统不受外力时，即 $f = 0, u|_{\partial\Omega} = 0$，系统的总能量守恒，即 $E(t) = Const$，下面从数学上推导这个等式，即 $\frac{dE}{dt} = 0$

7.5.1 能量等式

定理 7.2 (能量等式)

当 $f = 0, u|_{\partial\Omega} = 0$，系统的总能量守恒，即 $E(t) = Const$

证明

$$\begin{aligned}\frac{dE(t)}{dt} &= \frac{d}{dt}\int_\Omega u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2)dxdy \\ &= \int_\Omega 2u_tu_{tt} + a^2(2u_xu_{xt} + 2u_yu_{yt})dxdy\end{aligned}$$

其中

$$\begin{cases} u_xu_{xt} = \partial_x(u_xu_t) - u_{xx}u_t \\ u_yu_{yt} = \partial_y(u_yu_t) - u_{yy}u_t \end{cases}$$

代入有

$$\begin{aligned}\frac{dE(t)}{dt} &= 2\int_\Omega u_tu_{tt} + a^2(\partial_x(u_xu_t) + \partial_y(u_yu_t)) - a^2u_t(u_{xx} + u_{yy})dxdy \\ &= 2a^2\int_\Omega \partial_x(u_xu_t) + \partial_y(u_yu_t)dxdy \\ &= 2a^2\int_{\partial\Omega} u_xu_t\cos(n,x) + u_yu_t\cos(n,y)dS\end{aligned}$$

由于 $u|_{\partial\Omega} = 0$，可得 $u_t = 0$，于是

$$\frac{dE(t)}{dt} = 0$$

□

7.5.2 二维波动方程初边值问题的唯一性

定理 7.3 (二维波动方程初边值问题的唯一性)

维波动方程的初边值问题的解是唯一的，即方程

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = f(x,y,t) \\ u(x,y,0) = \varphi(x,y) \\ u_t(x,y,0) = \psi(x,y) \\ u|_{\partial\Omega} = \mu(x,y,t) \end{cases}$$

的解是唯一的

证明 u_1, u_2 都是方程的解，令 $u = u_1 - u_2$，由叠加原理知道，u 满足

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0 \\ u(x, y, 0) = 0 \\ u_t(x, y, 0) = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

于是得到

$$\frac{dE}{dt} = 0 \Longrightarrow E(t) = E(0)$$

即

$$E(t) = E(0) = \int_\Omega u_t^2|_{t=0} + a^2(u_x^2 + u_y^2)|_{t=0} dxdy = 0$$

从而有

$$u_t = u_x = u_y = 0 \Longrightarrow u = Const$$

又由于 $u|_{\partial\Omega} = 0$，则有 $u \equiv 0$，即

$$u_1 \equiv u_2$$

唯一性得证 □

7.5.3 能量不等式

命题 7.6

当外力 $f \neq 0$ 时，对 $E(t)$ 估计，讨论

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = f(x, y, t) \\ u(x, y, 0) = \varphi(x, y) \\ u_t(x, y, 0) = \psi(x, y) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

♠

解

1. 计算

$$\begin{aligned}
\frac{dE(t)}{dt} &= \frac{d}{dt}\int_\Omega u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2)dxdy \\
=&2\int_\Omega u_t u_{tt} + a^2(u_x u_{xt} + u_y u_{yt})dxdy \\
=&2\int_\Omega u_t u_{tt} + a^2(\partial_x(u_x u_t) + \partial_y(u_y u_t)) - a^2 u_t(u_{xx} + u_{yy})dxdy \\
=&2\int_\Omega u_t f dxdy + 2a^2\int_\Omega \partial_x(u_x u_t) + \partial_y(u_y u_t)dxdy \\
=&2\int_\Omega u_t f\ dxdy + 2a^2\int_{\partial\Omega} u_x u_t\cos(x, n) + u_y u_t\cos(y, n)ds \\
=&2\int_\Omega u_t f\ dxdy
\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}\frac{dE(t)}{dt} =&2\int_{\Omega} u_t f \ dxdy \\ \leq& \int_{\Omega} u_t^2 + f^2 \ dxdy \\ \leq& \int_{\Omega} u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2)dxdy + \int_{\Omega} f^2 \ dxdy \\ =&E(t) + \int_{\Omega} f^2 \ dxdy\end{aligned}$$

即有

$$\frac{dE(t)}{dt} \leq E(t) + \int_{\Omega} f^2 \ dxdy$$

两边乘以 e^{-t}，得到

$$e^{-t}\frac{dE(t)}{dt} - e^{-t}E(t) \leq e^{-t}\int_{\Omega} f^2 \ dxdy$$

于是

$$\frac{d}{dt}(e^{-t}E(t)) \leq e^{-t}\int_{\Omega} f^2 \ dxdy$$

得到

$$e^{-t}E(t) - E(0) \leq \int_0^t e^{-\tau}\int_{\Omega} f^2(x,y,\tau)dxdyd\tau$$

对于 $0 \leq t \leq T$，有

$$\begin{aligned}E(t) \leq& e^t\left(E(0) + \int_0^t e^{-\tau}\int_{\Omega} f^2(x,y,\tau)dxdyd\tau\right) \\ \leq& C(E(0) + \int_0^T\int_{\Omega} f^2(x,y,t)dxdydt)\end{aligned}$$

2. 令

$$E_0(t) = \int_{\Omega} u^2(x,y,t)dxdy$$

计算

$$\begin{aligned}\frac{dE_0(t)}{dt} =&\frac{d}{dt}\int_{\Omega} u^2(x,y,t)dxdy \\ =&2\int_{\Omega} uu_t \ dxdy \\ \leq& \int_{\Omega} u^2 dxdy + \int_{\Omega} u_t^2 dxdy\end{aligned}$$

从而有

$$\frac{dE_0(t)}{dt} \leq E_0(t) + E(t)$$

两边乘以 e^{-t}，得到

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-t}E_0(t)\right) \leq e^{-t}E(t)$$

于是

$$e^{-t}E_0(t) - E_0(0) \leq \int_0^{\tau} e^{-\tau}E(\tau)d\tau$$

即

$$E_0(t) \leq e^t\left(E_0(0) + \int_0^{\tau} e^{-\tau}E(\tau)d\tau\right)$$

对于 $0 \leq t \leq T$，则有

$$E_0(t) \leq C\left(E_0(0) + E(0) + \int_0^T\int_{\Omega} f^2(x,y,t)dxdydt\right)$$

7.5.4 二维波动方程初边值问题的稳定性

定理 7.4 (二维波动方程初边值问题的稳定性)
二维波动方程初边值问题的解关于初值具有稳定性

证明 设解 u_1 对应 $(\varphi_1, \psi_1), f_1$，解 u_2 对应于 $(\varphi_2, \psi_2), f_2$，令 $u = u_1 - u_2$ 满足

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = f_1 - f_2 \\ u(x, y, 0) = \varphi_1 - \varphi_2 \\ u_t(x, y, 0) = \psi_1 - \psi_2 \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

由于

$$\begin{aligned} ||u_1 - u_2||_2^2 &= \int_\Omega u^2 dxdy = E_0(t) \\ &\le C(E_0(0) + E(0) + \int_0^T \int_\Omega (f_1 - f_2)^2 dxdydt) \\ &= C\Big(\int_\Omega u^2(x, y, t)|_{t=0} dxdy + \int_\Omega u_t^2|_{t=0} + a^2(u_x^2|_{t=0} + u_y^2|_{t=0}) dxdy + \int_0^T \int_\Omega (f_1 - f_2)^2 dxdydt\Big) \\ &= C\Big(\int_\Omega (\varphi_1 - \varphi_2)^2 dxdy + \int_\Omega (\psi_1 - \psi_2)^2 dxdy \\ &\quad + a^2 \int_\Omega ((\varphi_{1x} - \varphi_{2x})^2 + (\varphi_{1y} - \varphi_{2y})^2) dxdy + \int_0^T \int_\Omega (f_1 - f_2)^2 dxdydt\Big) \\ &= C\Big(||\varphi_1 - \varphi_2||_2^2 + ||\psi_1 - \psi_2||_2^2 + a^2(||\varphi_{1x} - \varphi_{2x}||_2^2 + ||\varphi_{1y} - \varphi_{2y}||_2^2) + ||f_1 - f_2||_2^2\Big) \end{aligned}$$

即有

$$||u_1 - u_2||_2^2 \le C\eta$$

于是，对 $\forall \varepsilon > 0$，当 η 充分小时，$\eta < \frac{\varepsilon}{C}$，有

$$||u_1 - u_2||_2^2 < \varepsilon$$

对 $||u_{1x} - u_{2x}||_2^2, ||u_{1y} - u_{2y}||_2^2, ||u_{1t} - u_{2t}||_2^2$ 同理可证 □

7.5.5 二维波动方程柯西问题的唯一性与稳定性

定理 7.5
当外力 $f = 0$ 时，有 $E(\Omega_t) \le E(\Omega_0)$，其中

$$\Omega_0 : \{(x, y) | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \le a^2 t_0^2\}$$
$$\Omega_t : \{(x, y) | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \le a^2 (t - t_0)^2\}$$

以及

$$E(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2) dxdy$$

证明 即证 $\frac{dE(\Omega_t)}{dt} \le 0, \quad 0 \le t \le t_0$

由于

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(\Omega_t) &= \frac{d}{dt}\int_{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le a^2(t-t_0)^2} u_t^2+a^2(u_x^2+u_y^2)dxdy \\
&= \frac{d}{dt}\int_0^{a(t_0-t)} dr\int_0^{2\pi r} u_t^2+a^2(u_x^2+u_y^2)dxdy \\
&= 2\int_0^{a(t_0-t)}\int_0^{2\pi r} u_tu_{tt}+a^2(u_xu_{xt}+u_yu_{yt})dsdr - a\int_0^{2\pi a(t_0-t)} u_t^2+a^2(u_x^2+u_y^2)ds \\
&= 2\int_{\Omega_t} u_t(u_{tt}-a^2(u_{xx}+u_{yy}))dxdy + 2a^2\int_{\Omega_t}\partial_x(u_xu_t)+\partial_y(u_yu_t)dxdy \\
&\quad - a\int_{\partial\Omega_t} u_t^2+a^2(u_x^2+u_y^2)ds \\
&= 2a^2\int_{\partial\Omega_t} u_xu_t\cos(x,n)+u_yu_t\cos(y,n)ds - a\int_{\partial\Omega_t} u_t^2+a^2(u_x^2+u_y^2)ds \\
&= \int_{\partial\Omega_t} -a(u_t^2+a^2(u_x^2+u_y^2)) + 2a^2(u_xu_t\cos(x,n)+u_yu_t\cos(y,n))ds
\end{aligned}
$$

由于 $\cos^2(x,n)+\cos^2(y,n)=1$，因此 $u_t^2 = u_t^2\cos^2(x,n)+u_t^2\cos^2(y,n)$ 于是有

$$
\frac{dE(\Omega_t)}{dt} = (-a)\int_{\partial\Omega_t}\Big(u_t\cos(x,n)-au_x\Big)^2 + \Big(u_t\cos(y,n)-au_y\Big)^2 ds \le 0
$$

□

定理 7.6 (二维波动方程柯西问题的唯一性)

二维波动方程柯西问题的解具有唯一性

证明 令 u_1,u_2 均满足问题，令 $u=u_1-u_2$，则有

$$
\begin{cases}
u_{tt}-a^2(u_{xx}+u_{yy})=0 \\
u(x,y,0)=0 \\
u_t(x,y,0)=0
\end{cases}
$$

因此，有 $E(\Omega_t)\le E(\Omega_0)$

$$
E(\Omega_0) = \int_{\Omega_0} u_t^2+a^2(u_x^2+u_y^2)dxdy\Big|_{t=0} = 0
$$

于是

$$
0 \le E(\Omega_t) \le E(\Omega_0) = 0
$$

因此

$$
E(\Omega_t) = 0 = \int_{\Omega_t} u_t^2+a^2(u_x^2+u_y^2)dxdy
$$

从而 $u_t=u_x=u_y=0$，即 $u\equiv Const$

又由于 $u|_{t=0}=0$，因此，$u\equiv 0$，即 $u_1=u_2$ □

定理 7.7 (二维波动方程柯西问题的稳定性)

二维波动方程柯西问题的解具有稳定性

证明 由于

$$
\begin{aligned}
\frac{dE_0(\Omega_t)}{dt} &= 2\int_{\Omega_t} uu_tdxdy - a\int_{\partial\Omega_t} u^2ds \\
&\le 2\int_{\Omega_t} uu_tdxdy \\
&\le \int_{\Omega_t} u^2dxdy + \int_{\Omega_t} u_t^2dxdy
\end{aligned}
$$

于是有

$$\frac{dE_0(\Omega_t)}{dt} \leq E_0(\Omega_t) + E(\Omega_t)$$

两边同乘 e^{-t} 得

$$\begin{aligned} E_0(\Omega_t) - e^t E_0(\Omega_t) &\leq \int_0^t e^{t-\tau} E(\Omega_t) d\tau \\ \Longrightarrow E_0(\Omega_t) &\leq e^t E_0(\Omega_t) + \int_0^t e^{t-\tau} E(\Omega_t) d\tau \end{aligned}$$

由于

$$E(\Omega_t) \leq E(\Omega_0)$$

于是，当 $0 \leq t \leq t_0$ 时

$$E_0(\Omega_t) \leq C(E_0(\Omega_0) + E(\Omega_0))$$

于是，$||u_1 - u_2||_2^2 = E_0(\Omega_t) \leq \varepsilon$，因此稳定性成立 □

第八章 高斯-格林公式

8.1 梯度

对于一般曲面，若想要在 (x_0, y_0) 附近做线性的近似，则需要求解对应的切方面方程，即

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

通过切平面方程可以得到，x 方向上的微小变化引起的变化加上 y 方向的微小变化引起的变化，就是总的变化，此时就自然引出梯度的概念

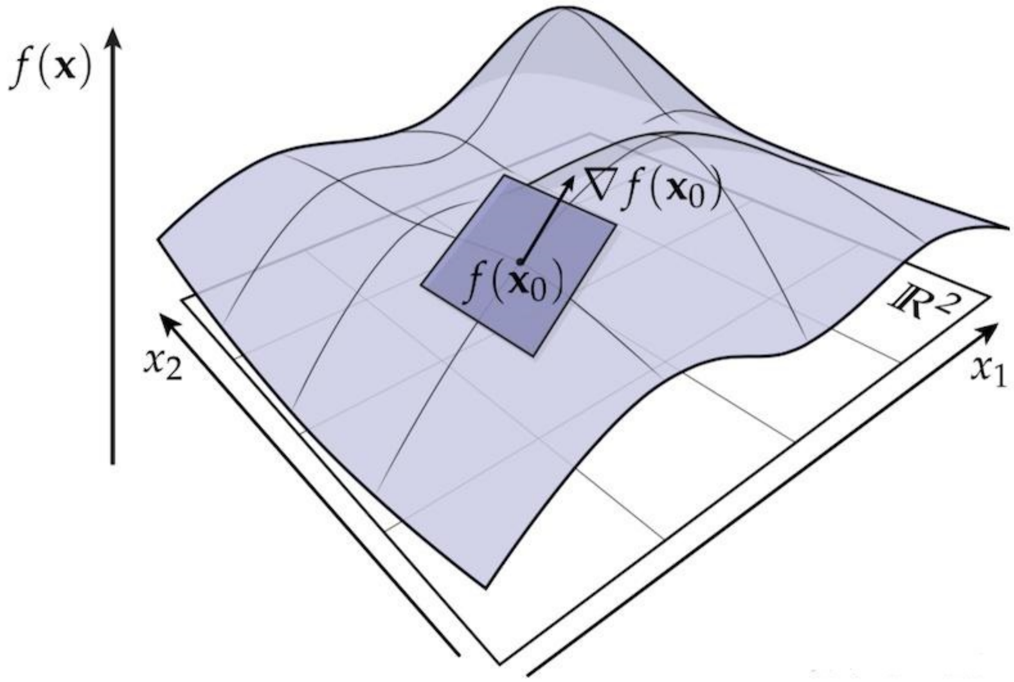


图 8.1: 梯度

线性近似写成向量形式：

$$L(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x_0}) + \nabla f(\mathbf{x_0}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x_0})$$

梯度定义为：

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$$

Nabla 算子：

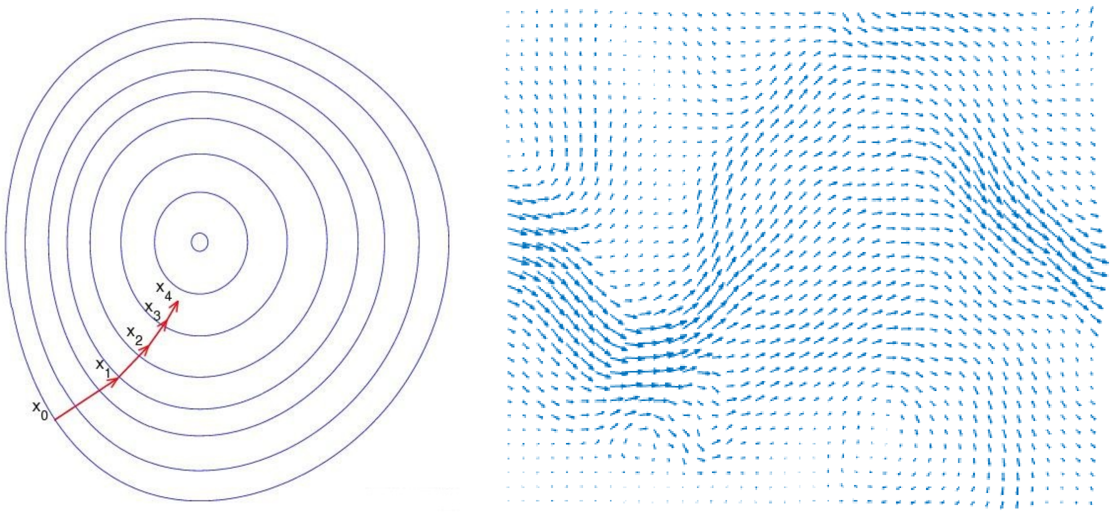
$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}$$

以上线性近似也表明，若从 $\mathbf{x_0}$ 出发

1. 沿着梯度方向走，函数值增大
2. 沿着相反于梯度的方向走，函数值减小
3. 垂直于梯度方向，函数值不变

这也呼应于“梯度下降算法”，因为朝着相反梯度的方向，就是函数值下降的最大方向

多元函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的梯度表现方式是向量场，这个场表明空间中的每个点的多元函数变化的大小和方向



(a) 梯度下降　　(b) 梯度向量场

8.2 散度

对于向量场的研究很容易得出散度和旋度的概念，下面我们先考虑散度

散度表示的是一个闭合曲面内单位体积的通量，从流体的角度来考虑，散度就是用来表明空间中的这个点是否产生液体，也就是在此点处向内的箭头比较多还是向外的箭头比较多，下面来推导散度的表达式

设空间中有向量场 $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$

$$\mathbf{divF} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

散度是从一个向量场得到一个标量，代表的是一点是否有‘逸出’

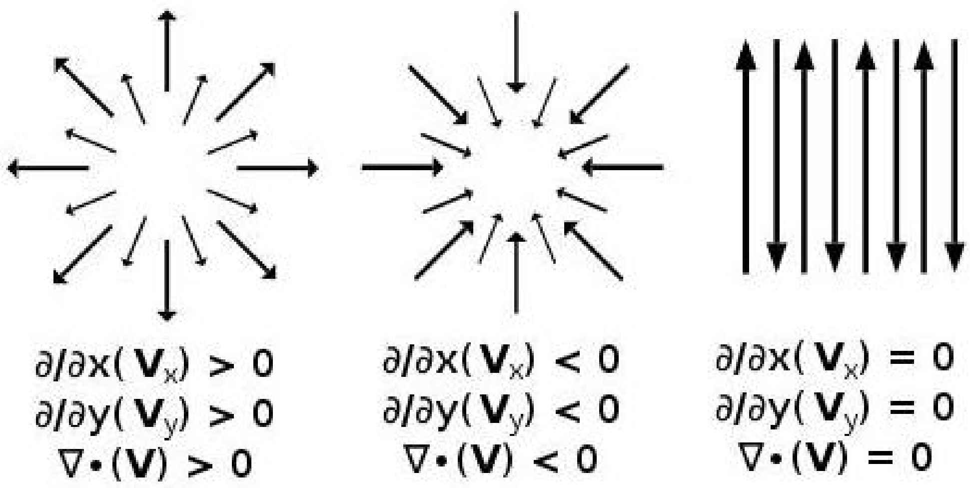


图 8.2: 散度

散度也常写成：

$$\mathbf{div\ F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$$

因为把 ∇ 算子看做向量运算符，函数本身也是向量，所以是点乘的关系

8.3 旋度

现在来解决旋度的问题

$$\textbf{curl F} = \nabla \times \mathbf{F}$$

旋度是从一个向量场得到一个向量，代表的是这一点的旋转情况

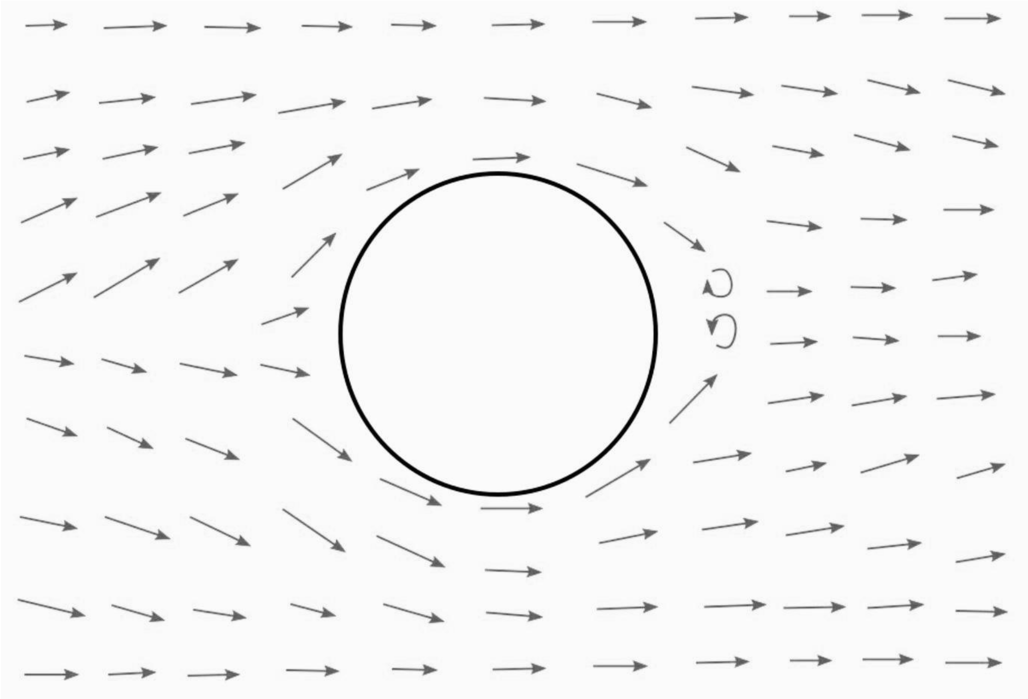


图 8.3: 旋度

在三维空间中，旋度的计算公式为

$$\nabla \times \mathbf{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{i}} & \hat{\boldsymbol{j}} & \hat{\boldsymbol{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

在二维空间中，旋度的计算公式为

$$\nabla \times \mathbf{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{i}} & \hat{\boldsymbol{j}} & \hat{\boldsymbol{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} = (\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y})\hat{\boldsymbol{k}}$$

8.4 高斯-格林公式

定理 8.1 (散度定理)

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}) dS &= \int_{\Omega} div\ \boldsymbol{F} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{F}) d\Omega \end{aligned}$$

笔记 边界上的通量等于内部散度和

定理 8.2 (旋度定理)

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} d\boldsymbol{r} = \int_{\Omega} curl\ \boldsymbol{F} d\boldsymbol{S}$$
$$= \int_{\Omega} (\nabla \times \boldsymbol{F}) d\boldsymbol{S}$$

笔记 围绕边界的线积分等于旋度的面积分

例题 8.1 设开集 $\Omega \subset R^3$ 有界，边界 $\partial\Omega$ 光滑，$u(x) \in C^2(\Omega) \bigcap C^1(\overline{\Omega}), Q \in \Omega$，证明

$$u(Q) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} ds - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial}{\partial n} (\frac{1}{r}) ds - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\triangle u}{r} dx$$

证明

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial\Omega} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} ds - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial}{\partial n} (\frac{1}{r}) ds \\
&= \int_{\partial\Omega} (\frac{1}{r} \nabla u - u \nabla (\frac{1}{r})) \cdot \vec{n} ds \\
&= \int_{\Omega \backslash B(Q,\epsilon)} \nabla \cdot (\frac{1}{r} \nabla u - u \nabla (\frac{1}{r})) dx + \int_{\partial B(Q,\epsilon)} (\frac{1}{r} \nabla u - u \nabla (\frac{1}{r})) \cdot \vec{n} ds \\
&= \int_{\Omega \backslash B(Q,\epsilon)} \frac{\triangle u}{r} - u \triangle (\frac{1}{r}) dx + \int_{\partial B(Q,\epsilon)} (\frac{1}{r} \nabla u + \frac{1}{r^2} u) \cdot \vec{n} ds \\
&= \int_{\Omega \backslash B(Q,\epsilon)} \frac{\triangle u}{r} - u \triangle (\frac{1}{r}) dx + \int_{\partial B(Q,\epsilon)} \frac{1}{\epsilon} \nabla u \cdot \vec{n} + \frac{1}{\epsilon^2} u \cdot \vec{n} ds \\
&\to \int_{\Omega} \frac{\triangle u}{r} dx + 4\pi u(Q), \quad \epsilon \to 0
\end{aligned}$$

因此

$$u(Q) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} ds - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial}{\partial n} (\frac{1}{r}) ds - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\triangle u}{r} dx$$

□