

Modul 7

Persamaan Diferensial Biasa – 1

A. Tujuan

- Memahami teknik perhitungan persamaan diferensial biasa dengan menggunakan metode numerik
- Menuliskan perintah pemrograman perhitungan solusi persamaan diferensial biasa dengan menggunakan metode euler dan metode heun

B. Dasar Teori

1. Metode Euler

Metode euler adalah algoritma paling sederhana untuk mengintegrasikan persamaan diferensial secara bertahap. Metode numerik euler diperoleh dengan mengganti bagian turunan dengan metode beda hingga selisih maju. Misalnya terdapat persamaan diferensial seperti berikut

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Maka ruas sebelah kiri dapat diganti menjadi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_i - y_{i+1}}{\Delta x}$$

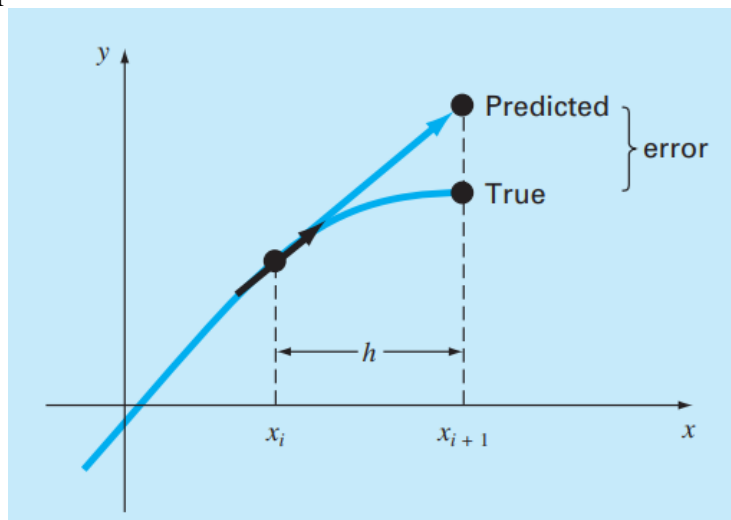
Dengan begitu persamaannya dapat ditulis kembali menjadi

$$\frac{y_i - y_{i+1}}{\Delta x} = f(x_i, y_i)$$

Setelah pengaturan sederhana, maka untuk memperoleh solusi persamaan diferensial biasa, rumus di atas dapat ditulis kembali menjadi

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)\Delta x$$

Pada dasarnya metode euler memanfaatkan gradien fungsi yang dijadikan sebagai pendekatan untuk solusi persamaan diferensial. Oleh karenanya metode ini sangat bergantung pada



Gambar 1. Ilustrasi metode euler

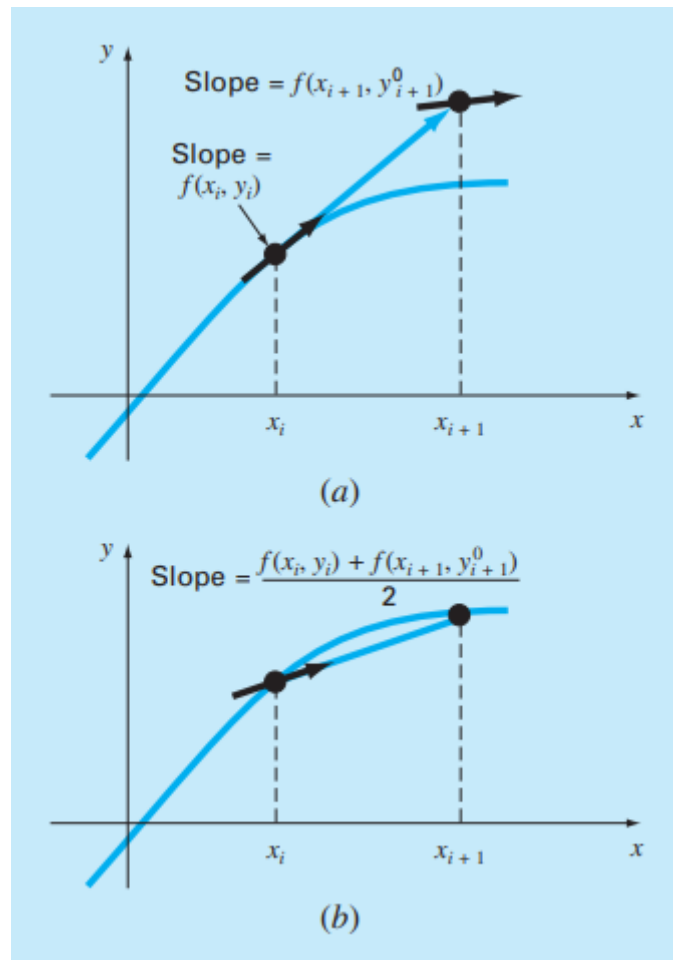
2. Metode Heun

Metode heun merupakan bentuk yang menyempurnakan metode euler dengan mengestimasi kemiringan melibatkan penentuan dua turunan untuk interval di titik awal dan satu lagi di titik akhir. Kemudian turunan keduanya di rata – ratakan untuk mendapatkan perkiraan kemiringan yang lebih baik. Persamaan heun terbagi menjadi dua persamaan yang disebut dengan prediktor dan korektor. Persamaan prediktor adalah persamaan euler dan persamaan korektor adalah penyelesaian numerik dengan gradien rata-rata. Berikut adalah persamaannya

$$\text{Prediktor : } y_{i+1}^0 = y_i + f(x_i, y_i)\Delta x$$

$$\text{Korektor : } y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)}{2} \Delta x$$

Berikut adalah ilustrasi dari metode heun



Gambar 2. (a) menunjukkan prediktor dan (b) menunjukkan korektor

Sumber gambar : Chapra, S.C dan Canale, R.P. 2015. *Numerical Methods for Engineers*

C. Persoalan

Diberikan persamaan seperti berikut

$$y' = (2 - xy)y$$

Apabila nilai awal fungsi $y = 0.5$ saat $x = 0$

1. Tentukan solusi persamaan diferensial biasa dengan metode Euler dan metode Heun dengan ukuran langkah berbeda, yakni 0.05, 0.1, 0.25, 0.5, 0.75 dengan domain 0 sampai 8.
2. Buatlah galat dari masing – masing metode terhadap setiap ukuran langkah kemudian plot rata – rata galatnya terhadap ukuran langkah yang berbeda. Untuk menghitung nilai galat, diberikan solusi eksak dari fungsi diferensial di atas sebagai berikut :

$$y = \frac{4}{-1 + 9e^{-2x} + 2x}$$

3. Buatlah plot solusi hasil perhitungan numerik dengan solusi eksak dari fungsi di atas.

D. Bentuk Laporan

[Markdown/Text] 1. Problem statement

[Markdown/Text] 2. Persamaan matematika

[Markdown/Text] 3. Algoritma PDB yang digunakan

[Markdown/Text] 4. Diagram alir metode yang digunakan

[Code] 5. Program metode numerik yang digunakan

[Markdown/Text/Code] 6. Analisis hasil PDB yang digunakan (diperbolehkan untuk menambahkan program yang mendukung pernyataan analisis semisal analisis error, konsumsi waktu, dan beban memori)