

Modul 2

Metode Penyelesaian Linear Dengan Matriks

A. Teori

Sistem persamaan linear adalah persamaan-persamaan linear yang dikorelasikan untuk membentuk suatu sistem. Sistem persamaannya bisa terdiri dari satu variabel, dua variabel atau lebih. Persamaan linear banyak diterapkan pada kasus fisika seperti pada penyelesaian permasalahan rangkaian listrik, gaya pegas benda, persamaan gerak, dll. Beberapa metode penyelesaian sistem persamaan linear antara lain Eliminasi Gauss, Gauss – Jordan, Matriks Invers, dekomposisi LU, dll.

1. Metode Eliminasi Gauss

Ide dasar eliminasi gauss adalah untuk mentransformasi sistem persamaan linear asli ke salah satu bentuk di antara matriks koefisien segitiga atas atau segitiga bawah, yang hasil akhirnya memiliki hasil yang sama. Dalam contoh berikut, bentuk yang diadopsi adalah matriks koefisien segitiga atas (*upper triangular*). Dalam bentuk ini, maka elemen matriks segitiga bawah dibuat menjadi 0.

Contoh :

$$\begin{aligned}3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 &= 7.85 \\0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 &= -19.3 \\0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 &= 71.4\end{aligned}$$

Terdapat 2 proses dalam metode eliminasi gauss, yakni eliminasi maju (*forward elimination*) dan substitusi mundur (*back substitution*).

1.1 Eliminasi Maju

Proses eliminasi dilakukan untuk membuat elemen segitiga bawah bernilai 0, dengan melakukan operasi baris elementer (OBE). Proses eliminasi elemen matriks mengikuti persamaan di bawah :

$$a_{jk} - m_{jk}a_{kk} = a_{jk} - \frac{a_{jk}}{a_{kk}} a_{kk} = 0.$$

Lakukan OBE pada baris ke-2, agar nilai 3 menjadi 0.

$$3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 = 7.85$$

$$0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 = -19.3$$

$$0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 = 71.4$$

$$a'_{2,1} = a_{2,1} - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} a_{1,1} = 0.1 - \frac{0.1}{3}(3) = 0$$

$$a'_{2,2} = a_{2,2} - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} a_{1,2} = 7 - \frac{0.1}{3}(-0.1) = 7.0033$$

$$a'_{2,3} = a_{2,3} - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} a_{1,3} = -0.3 - \frac{0.1}{3}(-0.2) = -0.2933$$

$$b'_2 = b_2 - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} b_1 = -19.3 - \frac{0.1}{3}(7.85) = -19.5617$$

Lakukan OBE pada baris ke – 3, kolom pertama, seperti berikut

$$a'_{3,1} = a_{3,1} - \frac{a_{3,1}}{a_{1,1}} a_{1,1} = 0.3 - \frac{0.3}{3}(3) = 0$$

$$a'_{3,2} = a_{3,2} - \frac{a_{3,1}}{a_{1,1}} a_{1,2} = -0.2 - \frac{0.3}{3}(-0.1) = -0.19$$

$$a'_{3,3} = a_{3,3} - \frac{a_{3,1}}{a_{1,1}} a_{1,3} = 10 - \frac{0.3}{3}(-0.2) = 10.02$$

$$b'_3 = b_3 - \frac{a_{3,1}}{a_{1,1}} b_1 = 71.4 - \frac{0.3}{3}(7.85) = 70.6150$$

Dan hasilnya seperti berikut

$$3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 = 7.85$$

$$7.00333x_2 - 0.293333x_3 = -19.5617$$

$$-0.190000x_2 + 10.0200x_3 = 70.6150$$

Lakukan OBE pada baris ke – 3, kolom kedua, seperti berikut

$$a'_{3,2} = a_{3,2} - \frac{a_{3,2}}{a_{2,2}} a_{2,2} = -0.19 - \frac{-0.19}{7.00333}(7.00333) = 0$$

$$a'_{3,3} = a_{3,3} - \frac{a_{3,2}}{a_{2,2}} a_{2,3} = 10.02 - \frac{0.3}{3}(-0.2933) = 10.0120$$

$$b'_3 = b_3 - \frac{a_{3,2}}{a_{2,2}} b_2 = 70.6150 - \frac{0.3}{3}(-19.5617) = 70.0843$$

Dan menghasilkan

$$3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 = 7.85$$

$$7.00333x_2 - 0.293333x_3 = -19.5617$$

$$10.0120x_3 = 70.0843$$

1.2 Substitusi Mundur

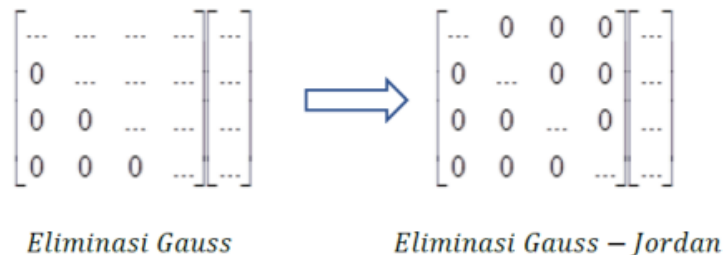
Setelah bentuk matriks koefisien segitiga atas (*upper triangular*) sudah terbentuk, maka selanjutnya lakukan substitusi mundur. Lakukan dengan mencari nilai x_3 kemudian substitusi ke persamaan atasnya untuk memperoleh x_2 dan terakhir x_1 .

$$x_3 = \frac{70.0843}{10.0120} = 7; x_2 = \frac{-19.5617 + 0.2933(7)}{7.0033} = -2.5$$

$$x_1 = \frac{7.85 - 0.1(2.5) + 0.2(7)}{3} = 3$$

2. Metode Eliminasi Gauss-Jordan

Pada dasarnya metode eliminasi Gauss Jordan melanjutkan metode eliminasi Gauss dengan cara menolkan segitiga atas, sehingga menjadikan sebagai matriks diagonal.



$$\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix}$$

Eliminasi Gauss

→

$$\begin{bmatrix} \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix}$$

Eliminasi Gauss – Jordan

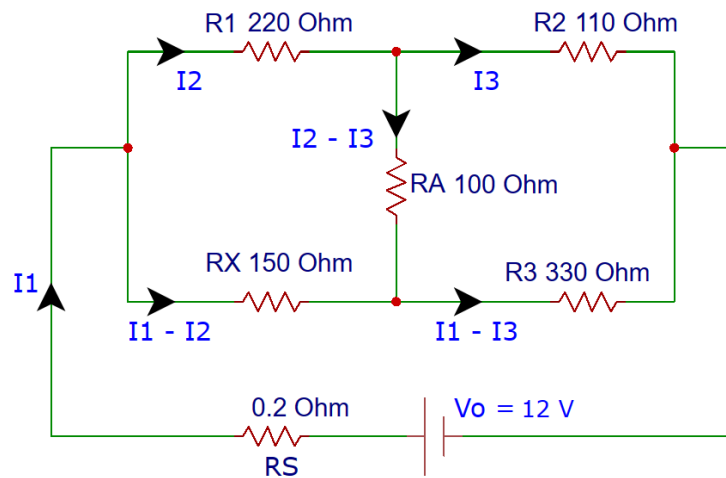
Atau dapat langsung menjadikan matriks koefisien menjadi matriks identitas (matriks dengan diagonal 1).

Catatan :

Sebagai acuan lihat buku Steven C. Chapra, Raymond P. Canal. *Numerical Method For Engineers*. Tambahan referensi lainnya, Alex Gezerlis. *Numerical Methods in Physics with Python*, Taopang, *An Introduction Computational Physics*, dan Erwin Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*.

B. Persoalan

Terdapat sebuah rangkaian jembatan wheatstone yang tidak seimbang, seperti yang ditunjukkan pada skema berikut



Berdasarkan hukum kirchoff, diperoleh persamaan sebagai berikut

$$\begin{aligned}r_s i_1 + r_1 i_2 + r_2 i_3 &= V_0, \\-r_x i_1 + (r_1 + r_x + r_a) i_2 - r_a i_3 &= 0, \\-r_3 i_1 - r_a i_2 + (r_2 + r_3 + r_a) i_3 &= 0,\end{aligned}$$

1. Tentukanlah solusinya yang meliputi i_1 , i_2 , dan i_3 dengan metode eliminasi Gauss dan Gauss-Jordan
2. Tentukan juga arus pada masing-masing percabangan dengan nilai i_1 , i_2 , dan i_3 yang telah diketahui

C. Bentuk Laporan

[Markdown/Text] 1. Problem Statement

[Markdown/Text] 2. Persamaan Matematika

[Markdown/Text] 3. Algoritma Metode Eliminasi Gauss

[Markdown/Text] 4. Diagram Alir Eliminasi Gauss

[Code] 5. ProgramMetode Eliminasi Gauss

[Markdown/Text] 6. Algoritma Metode Eliminasi Gauss-Jordan

[Markdown/Text] 7. Diagram Alir Eliminasi Gauss-Jordan

[Code] 8. ProgramMetode Eliminasi Gauss-Jordan

[Markdown/Text/Code] 5. Analisis Hasil Perbandingan kedua metode yang digunakan (diperbolehkan untuk menambahkan program yang mendukung pernyataan analisis semisal analisis error, konsumsi waktu, dan beban memori)