Modul 8

Persamaan Diferensial Biasa – 2

A. Tujuan

- Memahami teknik perhitungan persamaan diferensial biasa dengan menggunakan metode numerik
- Menuliskan perintah pemrograman perhitungan solusi persamaan diferensial biasa dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde 2, 3, 4 dan Runge-Kutta Fehlberg adaptif.

B. Dasar Teori

Metode Taylor bisa memberikan hasil dengan akurasi tinggi, tetapi diperlukan turunan-turunan orde tinggi. Metode Runge-Kutta (RK) memberikan hasil yang setara dengan metode Taylor order tinggi tanpa menentukan turunan-turunannya. Secara umum, metode Runge-Kutta berbentuk,

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h$$

Dimana $\phi(x_i, y_i, h) = fungsi\ peningkatan\ (increment\ function)$ yang mewakili kemiringan atau gradien yang pada interval terntentu. Dimana bentuk fungsi peningkatan adalah sebagai berikut:

$$\phi = a_1k_1 + a_2k_2 + \cdots + a_nk_n$$

1. Runge Kutta Orde 2

Runge Kutta Orde dua memiliki bentuk persamaan sebagai berikut

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1\right)$$

dengan solusi akhir sebagai berikut

$$y_{i+1} = y_i + k_2h$$

2. Runge Kutta Orde 3

Runge Kutta orde tiga memiliki bentuk persamaan sebagai berikut

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1\right)$$
$$k_3 = f(x_i + h.y_i - k_1h + 2k_2h)$$

dengan solusi akhir sebagai berikut

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)h$$

3. Runge Kutta Orde 4

Runge Kutta orde empat memiliki bentuk persamaan sebagai berikut

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1\right)$$
$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2\right)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3 h)$$

dengan solusi akhir sebagai berikut

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

4. **Runge Kutta Fehlberg**

Runge Kutta Fehlberg merupakan perluasan dari metode Runge-Kutta orde keempat yang diadaptasi untuk menghitung langkah-langkah yang kebih akurat. Dimana ukuran langkah akan berubah menyesuaikan daerah-daerah tertentu yang membutuhkan kepresisian yang tinggi. Berikut diberikan persamaan Runge-Kutta-Fehlberg (RK45)

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$
$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{4}, y_i + \frac{k_1}{4}\right)$$
$$k_3 = hf\left(x_i + \frac{3h}{8}, y_i + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2\right)$$
$$k_4 = hf(x_i + \frac{12h}{13}, y_i + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3)$$
$$k_5 = hf\left(x_i + h, y_i + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4\right)$$
$$k_6 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5\right)$$

Selanjutnya solusi pada langkah berikutnya dapat dicari dengan persamaan berikut,

$$y_{i+1} = y_i + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5$$
$$\hat{y}_{i+1} = y_i + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6$$

Kemudian dengan dua persamaan runge kutta dengan orde yang berbeda di atas, dapat dicari nilai error lokal pada setiap langkah dengan menghitung selisih keduanya

$$\epsilon = |\hat{y}_{i+1} - y_{i+1}|$$

Untuk memperbarui ukuran langkah, dapat dilakukan dengan mengikuti persamaan berikut

$$\delta = \left(h_i \, \frac{\tau}{2\epsilon}\right)^{\frac{1}{4}} = 0.84089\left(h_i \, \frac{\tau}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{4}}$$

Kemudian ukuran langkah selanjutnya dapat ditentukan dengan

$$h_{i+1} = \begin{cases} h_i, & \epsilon \leq \tau \\ \delta h_i, & \epsilon > \tau \end{cases}$$

dimana h_{i+1} adalah ukuran langkah yang telah diperbarui, τ adalah kesalahan toleransi, h_i adalah ukuran langkah sebelumnya, ϵ adalah kesalahan lokal tiap langkah, dan $\frac{1}{4}$ diperoleh dari orde terkecil yang digunakan yakni adalah Runge-Kutta-Fehlberg orde ke 4. Meskipun begitu, pada praktiknya nilai ukuran langkah hanya akan diupdate ketika $\epsilon > \tau$.

C. Persoalan

Diberikan persamaan seperti berikut

$$y' = -y + 0.1\cos(1.5x)e^{x/4}$$

Apabila nilai awal fungsi y = 2 saat x = 0

1. Tentukan solusi persamaan diferensial biasa dengan metode RK-2, RK-3, RK-4 dengan variasi ukuran langkah yakni 0.5, 1, 1.5, 2 dengan dari 0 sampai 35 (sesuaikan input nilai x akhir agar solusi yang ditampilkan minimal sampai 35)
2. Buatlah galat dari masing – masing metode pada nomor 1 terhadap setiap ukuran langkah kemudian plot rata – rata galatnya terhadap ukuran langkah yang berbeda. Untuk menghitung nilai galat, diberikan solusi eksak dari fungsi diferensial di atas sebagai berikut :
$$y = \frac{2}{61}\cos\left(\frac{3}{2}x\right)e^{\frac{x}{4}} + \frac{12}{305}\sin\left(\frac{3}{2}x\right)e^{x/4} + \frac{120}{61}e^{-x}$$
3. Tentukan solusi persamaan diferensial biasa di atas dengan metode Runge-Kutta Fehlberg, dengan ukuran langkah 2 dengan variasi toleransi sebesar 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001 dan plot hasil solusinya dengan *scatter* dan solusi eksak yang tertera di atas. (catatan : untuk menampilkan solusi Runge Kutta Fehlberg, gunakan solusi dari orde tertingginya atau $\hat{y}_{i+1}$)
4. Buatlah plot fluktuasi ukuran langkah dan delta terhadap nilai x pada masing-masing variasi toleransinya.
5. Jelaskan makna dari hasil – hasil visualisasi pada bagian analisis

D. Bentuk Laporan

[Markdown/Text] 1. Problem statement

[Markdown/Text] 2. Persamaan matematika

[Markdown/Text] 3. Algoritma PDB yang digunakan

[Markdown/Text] 4. Diagram alir metode yang digunakan

[Code] 5. Program metode numerik yang digunakan

[Markdown/Text/Code] 6. Analisis hasil PDB yang digunakan (diperbolehkan untuk menambahkan program yang mendukung pernyataan analisis semisal analisis error, konsumsi waktu, dan beban memori)