Integral Numerik

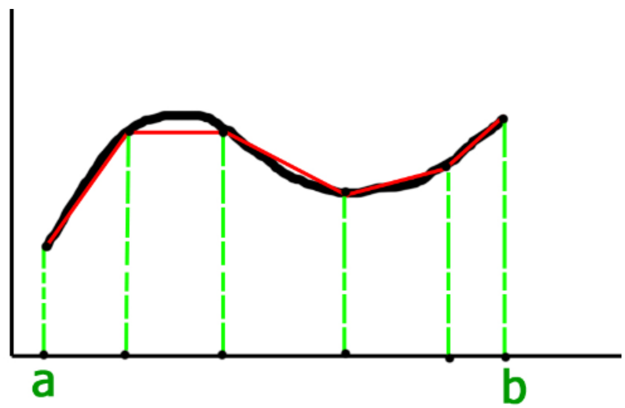
Tujuan

- Memahami teknik perhitungan integral dengan menggunakan metode numerik
- Mampu menuliskan perintah pemprograman perhitungan integral menggunakan metode trapesium
- Mampu menuliskan perintah pemprograman perhitungan integral menggunakan metode simpson

Dasar Teori

1. Metode Trapezoidal

Dalam analisis numerik, metode trapezoidal sering digunakan untuk menghitung integral dari suatu fungsi. Ide dasar dari metode ini adalah dengan mengasumsikan luasan dibawah grafik sebagai suatu luasan trapezoid dan dapat dihitung luas areanya (Gambar.1).



Gambar.1. Ilustrasi metode trapezoidal

Adapun persamaan untuk menghitung luas suatu trapesium adalah sebagai berikut :

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\frac{[f(a)+f(b)]}{2}$$

Untuk mendapatkan hasil yang akurat luasan dibawah grafik menjadi beberapa segmen n dengan ukuran yang seragam, dimana jarak antar segmen berukuran $h = \frac{b-a}{n}$. Kemudian seluruh bagian trapesium dijumlahkan sehingga diperoleh seluruh luas dibawah di bawah grafik. Secara persamaan numerik perhitungan luas dibawah grafik dengan menggunakan metode trapezoid dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\int_a^b f(x)\ dx = \frac{b-a}{2n}\left[f(a) + 2\left\{\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih)\right\} + f(b)\right]$$

Implementasi perhitungan integral untuk menghitung fungsi

$f(x) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\ dx$

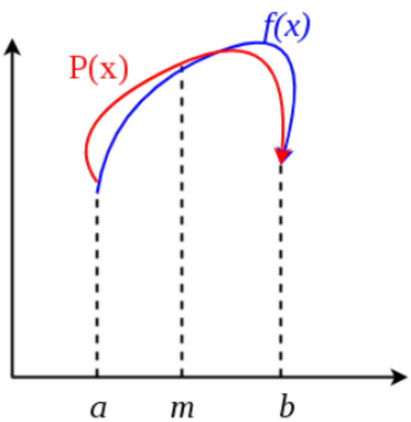
```
def y( x ):
    return (1 / (1 + x * x))

def trapezoidal (a, b, n):
    h = (b - a) / n
    s = (y(a) + y(b))
    i = 1
    while i < n:
        s += 2 * y(a + i * h)
        i += 1
    return ((h / 2) * s)
x0 = 0
xn = 1
n = 6
result = trapezoidal(x0, xn, n))
print(result)
```

2. Metode Simpson

Dalam metode numerik, perhitungan integral banyak dilakukan dengan menggunakan teknik integral simpson. Secara persamaan dapat didekati sebagai berikut :

$$\int_a^b f(x)\ dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

Dalam integral simpson kita menggunakan fungsi parabola untuk mendekati masing – masing titik pada grafik. Kita membagi area dibawah grafik menjadi beberapa elemen dengan lebar Δx. Integral simpson dapat diturunkan dengan mendekati fungsi $f(x)$ dengan fungsi interpolasi kuadratik $P(x)$ (Gambar.2) .



Gambar.2. Ilustrasi pendekatan perhitungan integral dengan metode simpson

Dengan membagi fungsi menjadi banyak elemen kecil dan menjumlahkan seluruh bagiannya, maka persamaan numerik untuk metode simpson dapat dituliskan seperti berikut :

$$\int_a^b f(x)\ dx\ \approx \frac{h}{3}\left(f_0 + f_n + 4\sum_{i=1,3,5,\ldots}^{n-1} f_i + 2\sum_{i=2,4,6\ldots}^{n} f_i\right)$$

Catatan dengan menggunakan metode ini maka jumlah n yang dipilih harus bernilai genap.

Implementasi perhitungan integral menggunakan metode simpson dapat dilakukan dengan perintah pemprograman berikut :

```
def func( x ):
    return (1 / (1 + x * x))


# Function for approximate integral
def simpsons_( ll, ul, n ):
    h = ( ul - ll )/n
    x = list()
    fx = list()
    i = 0
    while i<= n:
        x.append(ll + i * h)
        fx.append(func(x[i]))
        i += 1
    res = 0
    i = 0
    while i<= n:
        if i == 0 or i == n:
            res+= fx[i]
        elif i % 2 != 0:
            res+= 4 * fx[i]
        else:
            res+= 2 * fx[i]
        i+= 1
    res = res * (h / 3)
    return res

lower_limit = 0
upper_limit = 1
n = 6
result = simpsons_(lower_limit, upper_limit, n)
print(result)
```

Tugas

1. Diberikan persamaan integral sebagai berikut :

$$f(x) = \int_2^3 \ln x \ dx$$

   - Hitunglah dengan menggunakan metode trapesium
   - Hitunglah dengan menggunakan metode simpson
   - Bandingkan hasil metode trapesium, metode simpson dan hasil dengan perhitungan secara analitik.

2. Hitunglah periode osilasi bandul yang terdapat pada bidang vertikal dengan persamaan berikut

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}},$$

   dimana $\theta_0 < \pi$ adalah sudut maksimum dari titik terendah ke tinggi maksimum bandul, l adalah panjang bandul, dan g adalah percepatan gravitasi. Hitunglah periode bandul secara numerik untuk beberapa nilai $\theta_0 = \frac{\pi}{128}, \frac{\pi}{64}, \frac{\pi}{32}, \frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, dan \frac{\pi}{2}$. Kemudian bandingkan hasil perhitungan numerik dengan persamaan osilasi bandul dengan pendekatan sudut kecil berikut $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.
   Nyatakan jawaban dalam variabel l dan g.