Modul 5

Turunan Numerik

A. Teori

Turunan fungsi banyak digunakan di berbagai bidang ilmu pengetahuan. Banyak perumusan masalah fisis menggunakan model berupa persamaan – persamaan diferensial biasa ataupun parsial seperti contoh persamaan pertubuhan penduduk, persamaan gerak, persamaan Maxwell dan persamaan Schrodinger. Namun dalam melakukan observasi atau eksperimen, data yang diperoleh pada umumnya bersifat diskrit yang diperoleh dari sampel. Dan beberapa eksperimen dapat menghasilkan data yang sulit diestimasi oleh suatu fungsi. Sehingga untuk memperoleh turunannya diperlukan metode numerik selain dengan menggunakan metode analitik.

1. Metode Beda Hingga (*Finite Difference Method*)

Metode numerik yang diperoleh untuk mendapatkan hasil turunan suatu data dapat didekati melalui deret taylor. Metode ini kemudian disebut dengan metode beda hingga. Sebagai contoh, untuk mencari turunan pertama dari suatu fungsi atau himpunan data $f(x) \xrightarrow{Turunan} f'(x)$, untuk memperoleh nilai $f'(x)$ mula-mula definisikan terlebih dulu deret taylor

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2}h^2 + \cdots$$

Setelah itu, maka dapat diperoleh

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f''(x_i)}{2}h + O(h^2)$$

Kemudian nilai $f''(x)$ dan turunan yang memiliki orde lebih tinggi dapat diabaikan atau dapat juga ditulis dalam simbol $O(h)$ yang memiliki makna sebagai *error* hasil pemotongan. Sehingga persamaan di atas dapat ditulis kembali sebagai berikut

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + O(h)$$

Turunan kedua dan seterusnya dapat dicari dengan cara yang sama. Sehingga diperoleh persamaan seperti berikut :

- Metode Selisih Maju
  - Turunan Pertama

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$$

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h}$$

  - Turunan Kedua

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2}$$

$$f''(x_i) = \frac{-f(x_{i+3}) + 4f(x_{i+2}) - 5f(x_{i+1}) + 2f(x_i)}{h^2}$$

- Turunan Ketiga

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_{i+3}) - 3f(x_{i+2}) + 3f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h^3}$$

$$f'''(x_i) = \frac{-3f(x_{i+4}) + 14f(x_{i+3}) - 24f(x_{i+2}) + 18f(x_{i+1}) - 5f(x_i)}{2h^3}$$

- Turunan Keempat

$$f''''(x_i) = \frac{f(x_{i+4}) - 4f(x_{i+3}) + 6f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^4}$$

$$f''''(x_i) = \frac{-2f(x_{i+5}) + 11f(x_{i+4}) - 24f(x_{i+3}) + 26f(x_{i+2}) - 14f(x_{i+1}) + 3f(x_i)}{h^4}$$

- Metode Selisih Mundur
  - Turunan Pertama

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}$$

$$f'(x_i) = \frac{3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{2h}$$

  - Turunan Kedua

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2}$$

$$f''(x_i) = \frac{2f(x_i) - 5f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{h^2}$$

  - Turunan Ketiga

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_i) - 3f(x_{i-1}) + 3f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{h^3}$$

$$f'''(x_i) = \frac{5f(x_i) - 18f(x_{i-1}) + 24f(x_{i-2}) - 14f(x_{i-3}) + 3f(x_{i-4})}{2h^3}$$

➢ Turunan Keempat

$$f''''(x_i) = \frac{f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + 6f(x_{i-2}) - 4f(x_{i-3}) + f(x_{i-4})}{h^4}$$

$$f''''(x_i) = \frac{3f(x_i) - 14f(x_{i-1}) + 26f(x_{i-2}) - 24f(x_{i-3}) + 11f(x_{i-4}) - 2f(x_{i-5})}{h^4}$$

- Metode Selisih Tengah / Pusat

➢ Turunan Pertama

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}$$

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{12h}$$

➢ Turunan Kedua

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2}$$

$$f''(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 16f(x_{i+1}) - 30f(x_i) + 16f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{12h^2}$$

➢ Turunan Ketiga

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + 2f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{2h^3}$$

$$f'''(x_i) = \frac{-f(x_{i+3}) + 8f(x_{i+2}) - 13f(x_{i+1}) + 13f(x_{i-1}) - 8f(x_{i-2}) + f(x_{i-3})}{8h^3}$$

➢ Turunan Keempat

$$f''''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + 6f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^4}$$

$$f''''(x_i) = \frac{-f(x_{i+3}) + 12f(x_{i+2}) - 39f(x_{i+1}) + 56f(x_i) - 39f(x_{i-1}) + 12f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{6h^4}$$

2. Ekstrapolasi Richardson

Ekstrapolasi Richardson adalah metode numerik diferensial yang memiliki dasar dari metode beda hingga. Metode ini membutuhkan metode beda hingga dengan dua ukuran langkah yang berbeda untuk dapat menghitung turunan yang dicari. Metode ini memiliki bentuk persamaan umum sebagai berikut

$$D \approx D(h_2) + \frac{1}{\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 - 1}\left(D(h_2) - D(h_1)\right)$$

Pada metode ini biasanya $h_2 = 2h_1$, sehingga persamaannya menjadi

$$D \approx \frac{4D(h_2) - D(h_1)}{3}$$

B. Persoalan

Sebuah benda mengalami osilasi teredam dengan posisi yang diukur setiap 0.1 detik sekali. Data posisi tersebut tersedia dalam file excel yang dilampirkan. Dalam data tersebut, kecepatan secara asli benda juga telah dilampirkan. Berikut adalah sampel data dari file terkait

Waktu	Simpangan	Kecepatan
0	0.002740304	0.163849985
0.1	0.018200199	0.153440662
0.2	0.031180503	0.128990952
0.3	0.040571458	0.093503746
0.4	0.045657738	0.050881971
0.5	0.046167045	0.00551465
0.6	0.042274311	-0.038162937
0.7	0.034563305	-0.076092029
0.8	0.023951345	-0.10495684
0.9	0.011586055	-0.122462704
1	-0.001274672	-0.127503832

Dari data tersebut :

a. Tentukan kecepatan osilasi benda dengan metode beda hingga (selisih maju, selisih mundur, selisih tengah), tentukan kesalahan/error hasil masing-masing metode beda hingga dengan data kecepatan asli di atas.

b. Tentukan energi total dari dari osilasi teredam benda di atas, dengan data kecepatan asli dan kecepatan hasil turunan beda hingga.

   Catatan :

$$Energi\ Total = Energi\ Kinetik + Energi\ Potensial$$

$$Energi\ Total = (C_1 \times kecepatan^2) + (C_2 \times posisi^2)$$

   Dimana dalam kasus ini $C_1 = 0.05$ dan $C_2 = 0.49$

c. Analisis masing-masing hasil perhitungan ketiga metode beda hingga yang digunakan (selisih maju, selisih mundur, selisih tengah)

C. Bentuk Laporan

[Markdown/Text] 1. Problem statement

[Markdown/Text] 2. Persamaan matematika

[Markdown/Text] 3. Algoritma turunan numerik yang digunakan

[Markdown/Text] 4. Diagram alir metode yang digunakan

[Code] 5. Program metode numerik yang digunakan

[Markdown/Text/Code] 6. Analisis hasil diferensial numerik dan energi yang digunakan (diperbolehkan untuk menambahkan program yang mendukung pernyataan analisis semisal analisis error, konsumsi waktu, dan beban memori)