Lista 3

Hubert Jackowski

Układ Lotki-Volterry

Równanie Lotki-Volterry to model układu dynamicznego opisujący wzajemną zależność rozmiarów populacji drapieżników i ofiar. Został on zaproponowany niezależnie przez dwóch badaczy Vito Volterrę w 1926 oraz Alfreda James Lotkę w 1920 roku. [1]

MODEL

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (a - by)x \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = (cx - d)y, \end{cases}$$

Figure 1: Matematyczny model układu Lotki-Volterry

Gdzie: x - populacja ofiar, y - populacja drapieżników, t - czas, a - częstość narodzin ofiar, b - częstość umierania ofiar, c - częstość narodzin drapieżników, d - częstość umierania drapieżników.

```
def lotkaVolterra(dt: float, t: float, x0: float, y0: float, a: float, b: float, c: float, d: float):
    def _lotkaVolterra(state):
        x, y = state

        dx = (a - b * y) * x
        dy = (c * x - d) * y

        return np.array([dx, dy])

    num_steps = int(t / dt)

    states = np.empty((num_steps + 1, 2))
    states[0] = (x0, y0)
    for i in range(num_steps):
        states[i + 1] = states[i] + _lotkaVolterra(states[i]) * dt
    return states
```

Figure 2: Realizacja modelu Lotki-Volterry za pomocą metody Eulera w języku Python

```
def lotkaVolterra(dt: float, t: float, x0: float, y0: float, a: float, b: float, c: float, d: float):
    def _lotkaVolterra(state, _t, _a, _b, _c, _d) -> list:
```

```
        x, y = state

        dx = (_a - _b * y) * x
        dy = (_c * x - _d) * y

        return [dx, dy]

    args = (x0, y0)
    time = np.arange(0.0, t, dt)
    param = (a, b, c, d)
    return odeint(_lotkaVolterra, args, time, param)
```

Figure 3: Realizacja modelu Lotki-Volterry za pomocą metody scipy.integrate.odeint w języku Python

Układ Lorenza

Układ Lorenza to model układu dynamicznego opisujący zjawisko konwekcji termicznej w atmosferze. Uwzględnia on lepkość ośrodka, jego przewodnictwo cieplne oraz rozmiary ośrodka, w którym odbywa się proces. Zaproponowany został przez Edwarda Lorenza w 1963 roku. [2]

MODEL

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sigma(y - x) \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x(\rho - z) - y \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = xy - \beta z, \end{cases}$$

Figure 4: Matematyczny model układu Lorentza

Gdzie: σ – liczba Prandtla, charakteryzująca lepkość ośrodka; ρ – liczba Rayleigha, charakteryzująca przewodnictwo cieplne ośrodka; β – stała charakteryzująca rozmiary obszaru, w którym odbywa się przepływ konwekcyjny.

```
def lorentz(dt: float, t: float, x0: float, y0: float, z0: float, sigma: float, beta: float, rho: float):
    def _lorentz(state):
        x, y, z = state
        dx = sigma * (y - x)
        dy = rho * x - y - x * z
        dz = x * y - beta * z
        return np.array([dx, dy, dz])
```

```
    num_steps = int(t / dt)

    states = np.empty((num_steps + 1, 3))
    states[0] = (x0, y0, z0)
    for i in range(num_steps):
        states[i + 1] = states[i] + _lorentz(states[i]) * dt
    return states
```

Figure 5: Realizacja modelu Lorentza za pomocą metody Eulera w języku Python

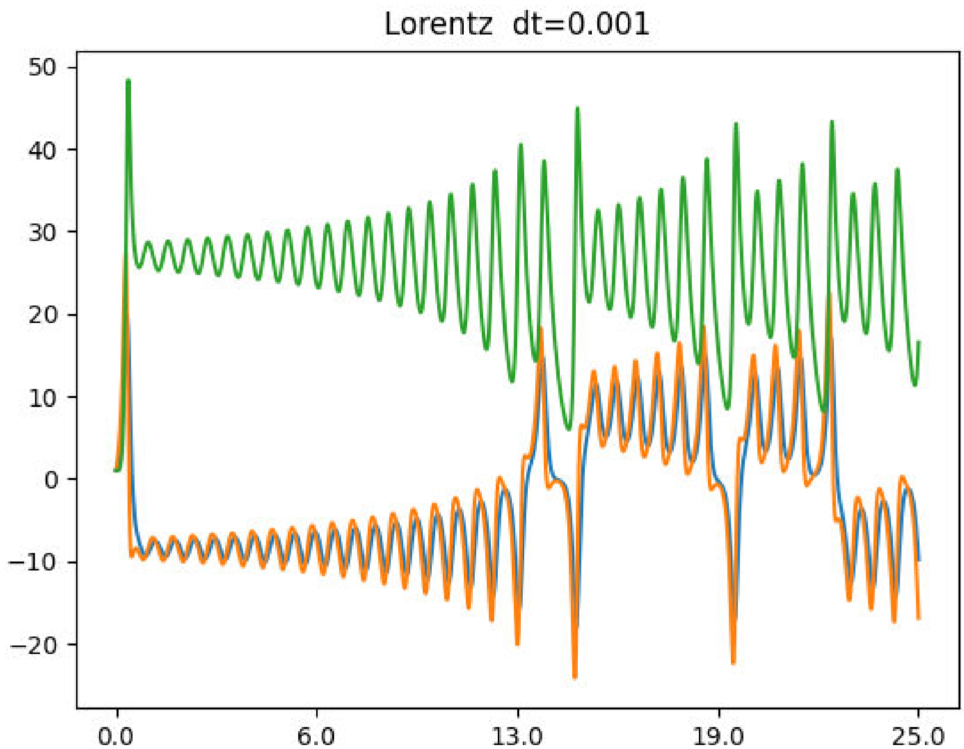
```
def lorentz(dt: float, t: float, x0: float, y0: float, z0: float, sigma: float,
beta: float, rho: float):
    def _lorenz(state, _t, _sigma, _beta, _rho):
        x, y, z = state

        dx = _sigma * (y - x)
        dy = x * (_rho - z) - y
        dz = x * y - _beta * z

        return [dx, dy, dz]

    args = (x0, y0, z0)
    time = np.arange(0.0, t, dt)
    param = (sigma, beta, rho)
    return odeint(_lorenz, args, time, param)
```

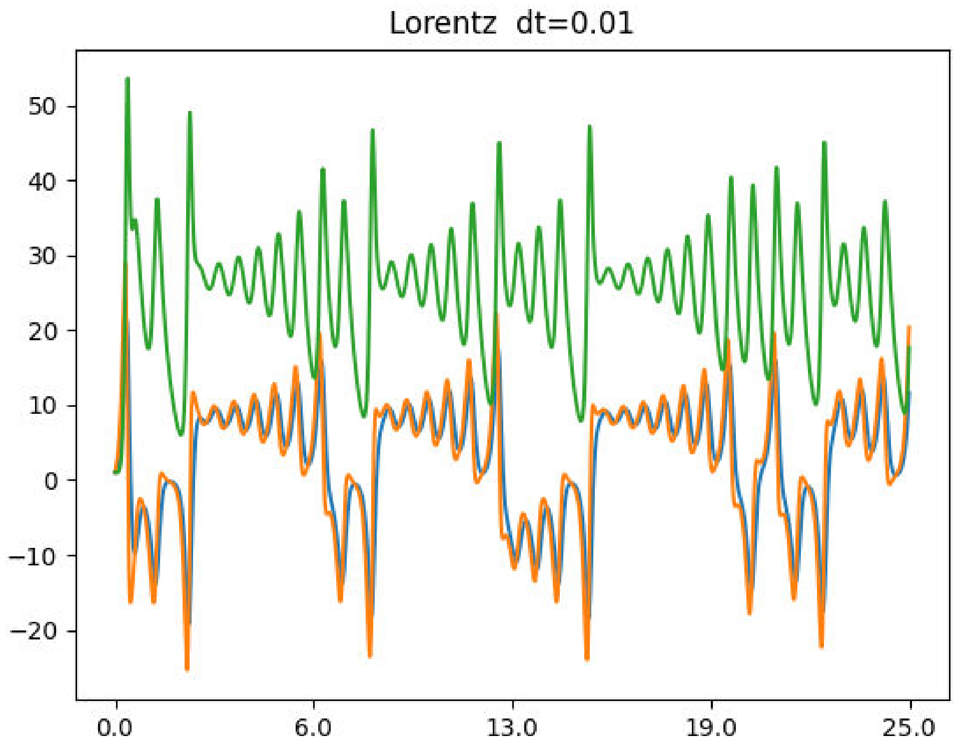
Figure 6: Realizacja modelu Lorentza za pomocą metody scipy.integrate.odeint w języku Python

OBSERWACJE

Poniżej przedstawione wykresy są wynikami symulacji dla wartości parametrów modelu Lotki-Volterry: $\{a = 1.2, b = 0.6, c = 0.3, d = 0.8, x(0) = 2, y(0) = 1\}$ oraz modelu Układu Lorenza: $\{\sigma = 10, \beta = 8/3$ i $\rho = 28, x(0) = y(0) = z(0) = 1\}$ dla czasu $t \in [0, 25]$ i zmiennego $dt \in \{0.001, 0.01, 0.02\}$.

1. WYKRESY SYGNAŁÓW





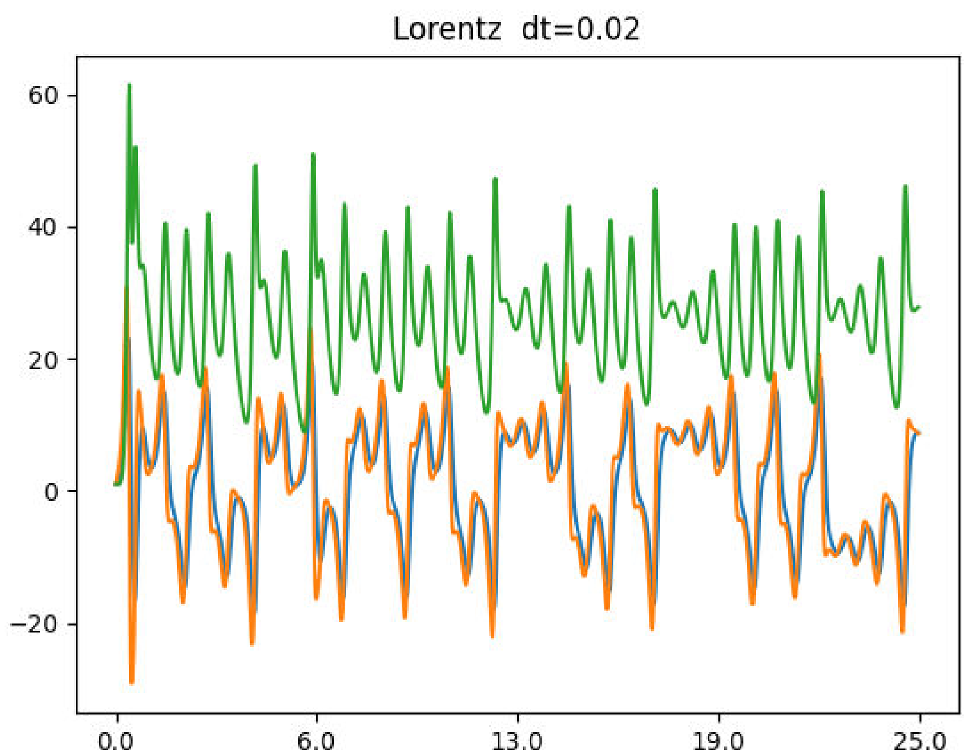
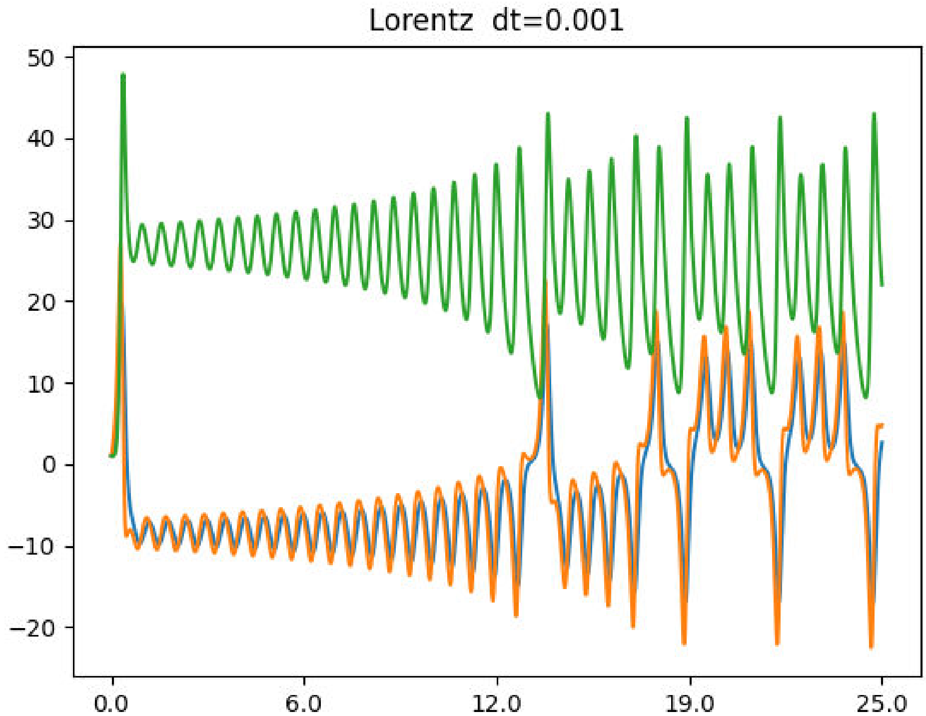
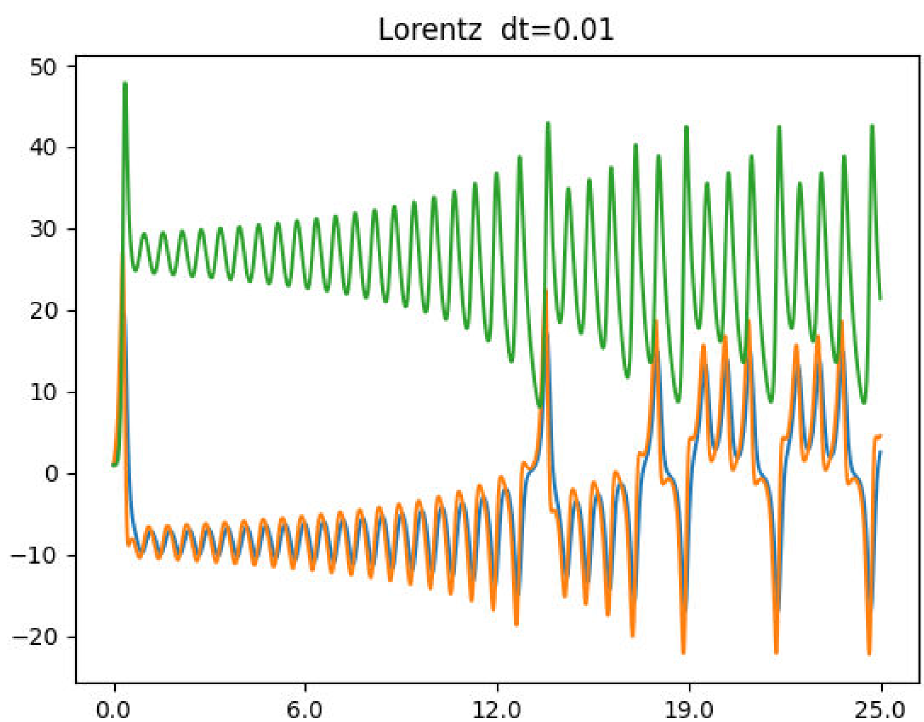


Figure 7: Wykresy x(t) (niebieski), y(t) (pomarańczowy), z(x) (zielony) układu Lorentza metodą Eulera dla kroków dt = {0.001, 0.01, 0.02} przy stałych parametrach


Lorentz dt=0.001
50
40
30
20
10
0
−10
−20
0.0
6.0
12.0
19.0
25.0


Lorentz dt=0.01
50
40
30
20
10
0
−10
−20
0.0
6.0
12.0
19.0
25.0

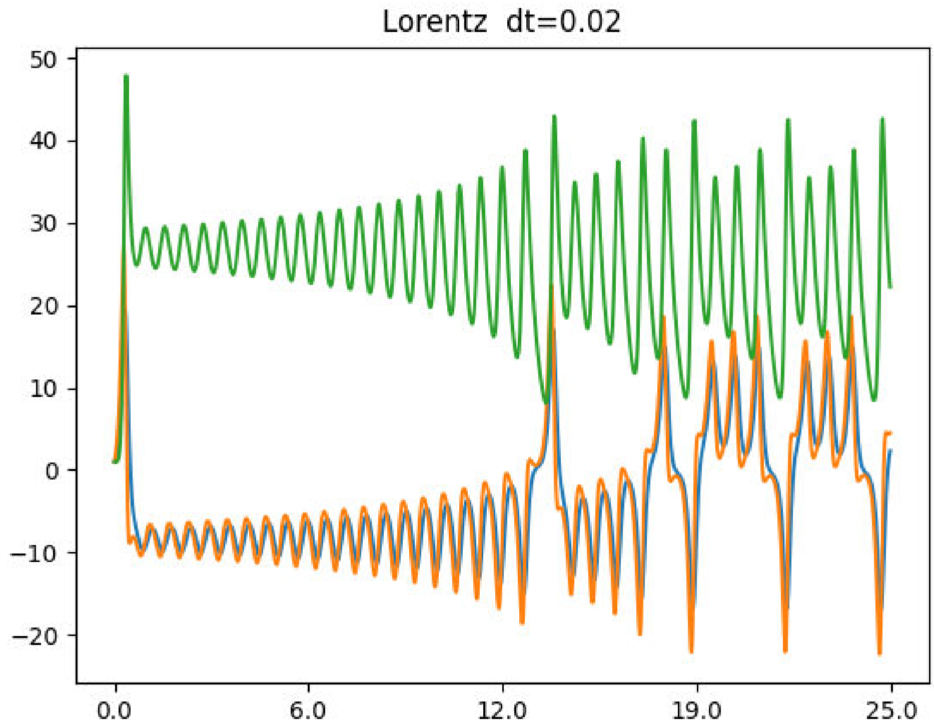
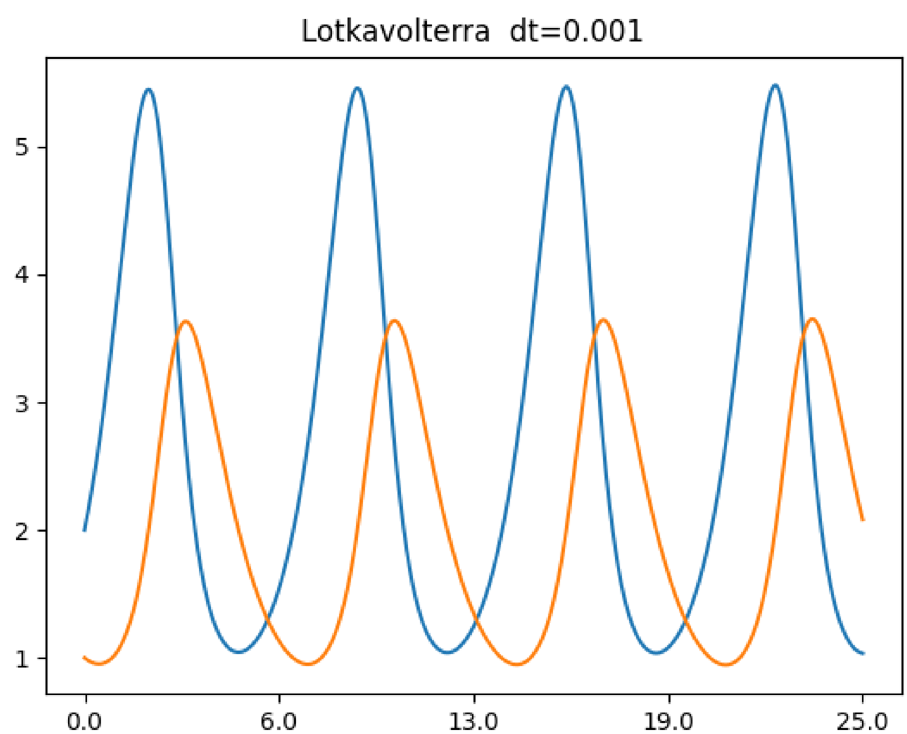


Figure 8: Wykresy x(t) (niebieski), y(t) (pomarańczowy), z(x) (zielony) układu Lorentza metodą scipy.integrate.odeint dla kroków dt = {0.001, 0.01, 0.02} przy stałych parametrach



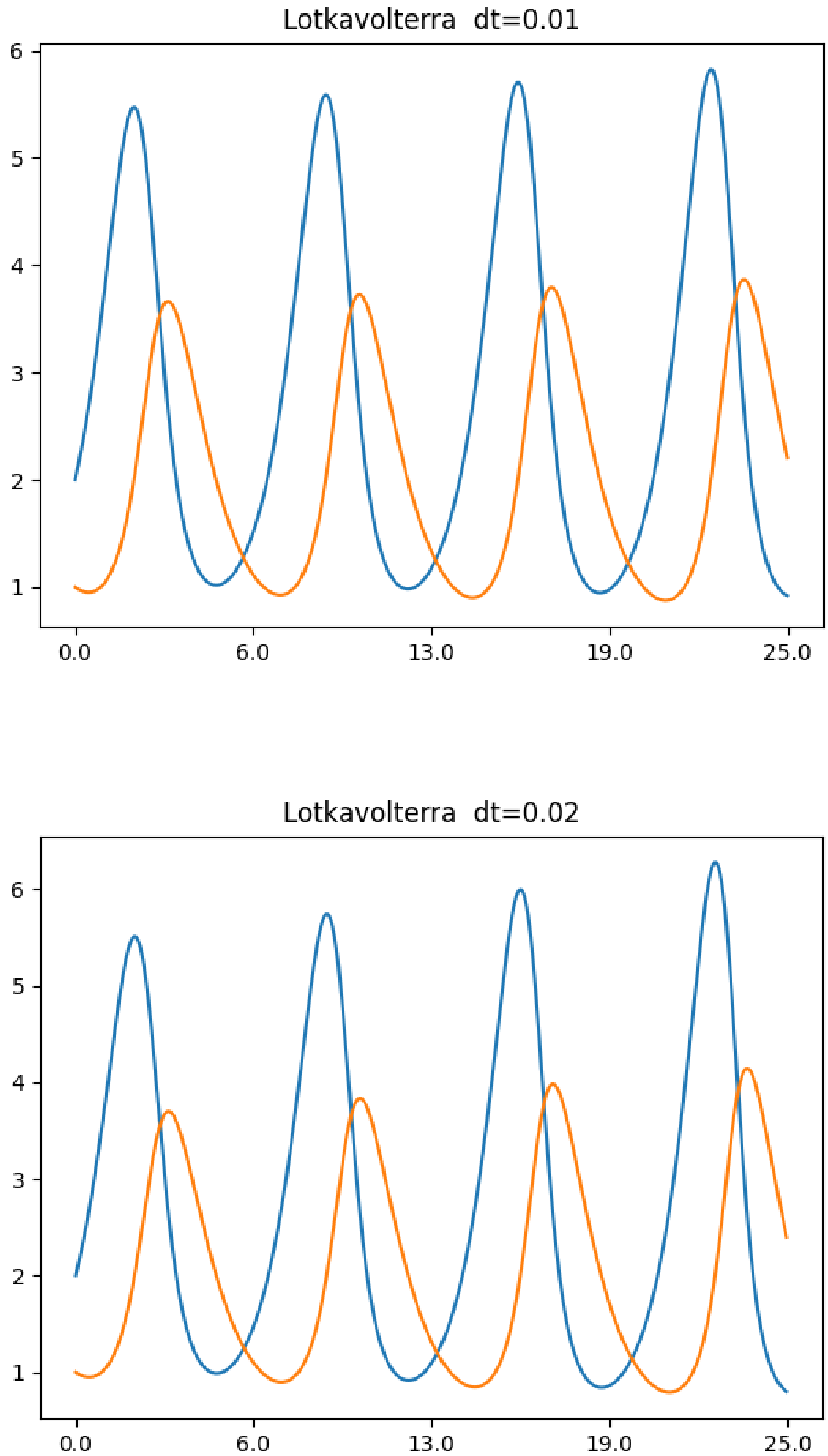
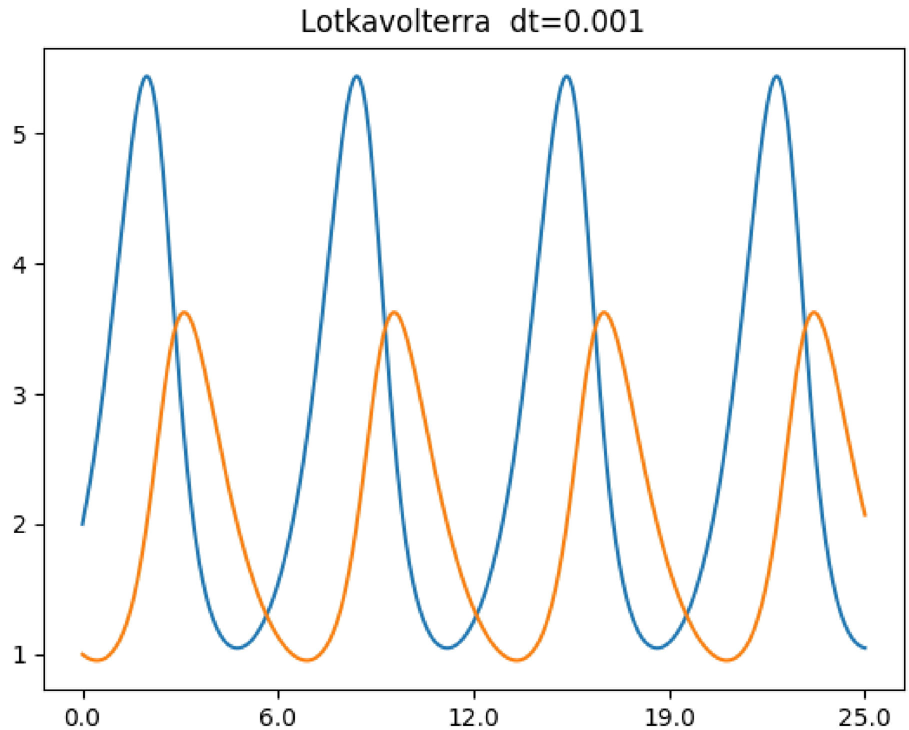
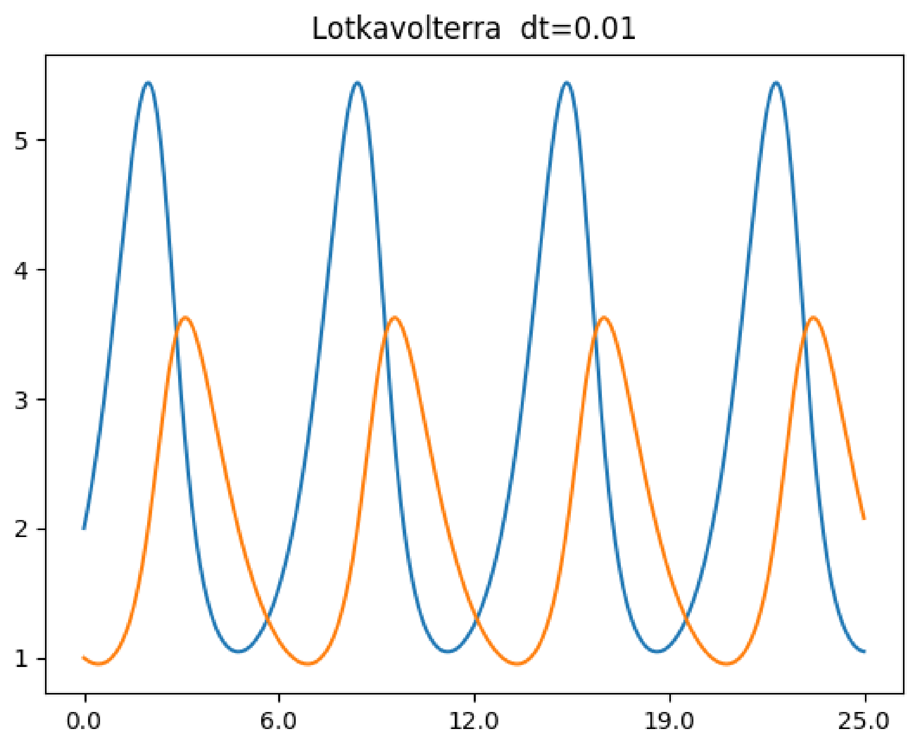


Figure 9: Wykresy x(t) (niebieski), y(t) (pomarańczowy) układu Lotki-Volterry metodą Eulera dla kroków dt = {0.001, 0.01, 0.02} przy stałych parametrach


Lotkavolterra dt=0.001
5
4
3
2
1
0.0
6.0
12.0
19.0
25.0


Lotkavolterra dt=0.01
5
4
3
2
1
0.0
6.0
12.0
19.0
25.0

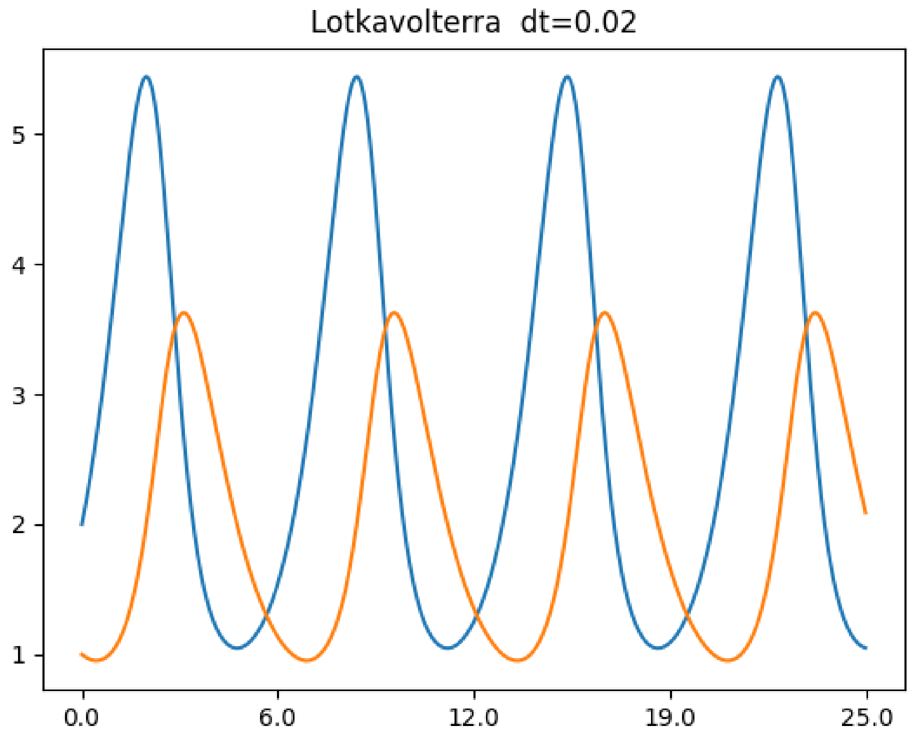
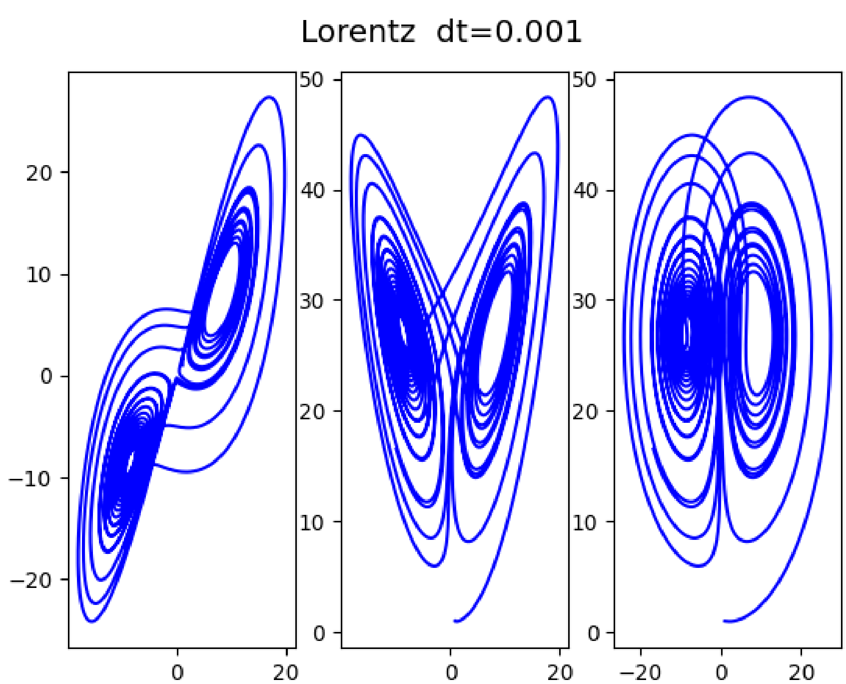


Figure 10: Wykresy x(t) (niebieski), y(t) (pomarańczowy) układu Lotki-Volterry metodą scipy.integrate.odeint dla kroków dt = {0.001, 0.01, 0.02} przy stałych parametrach

2. WYKRESY ZALEŻNOŚCI



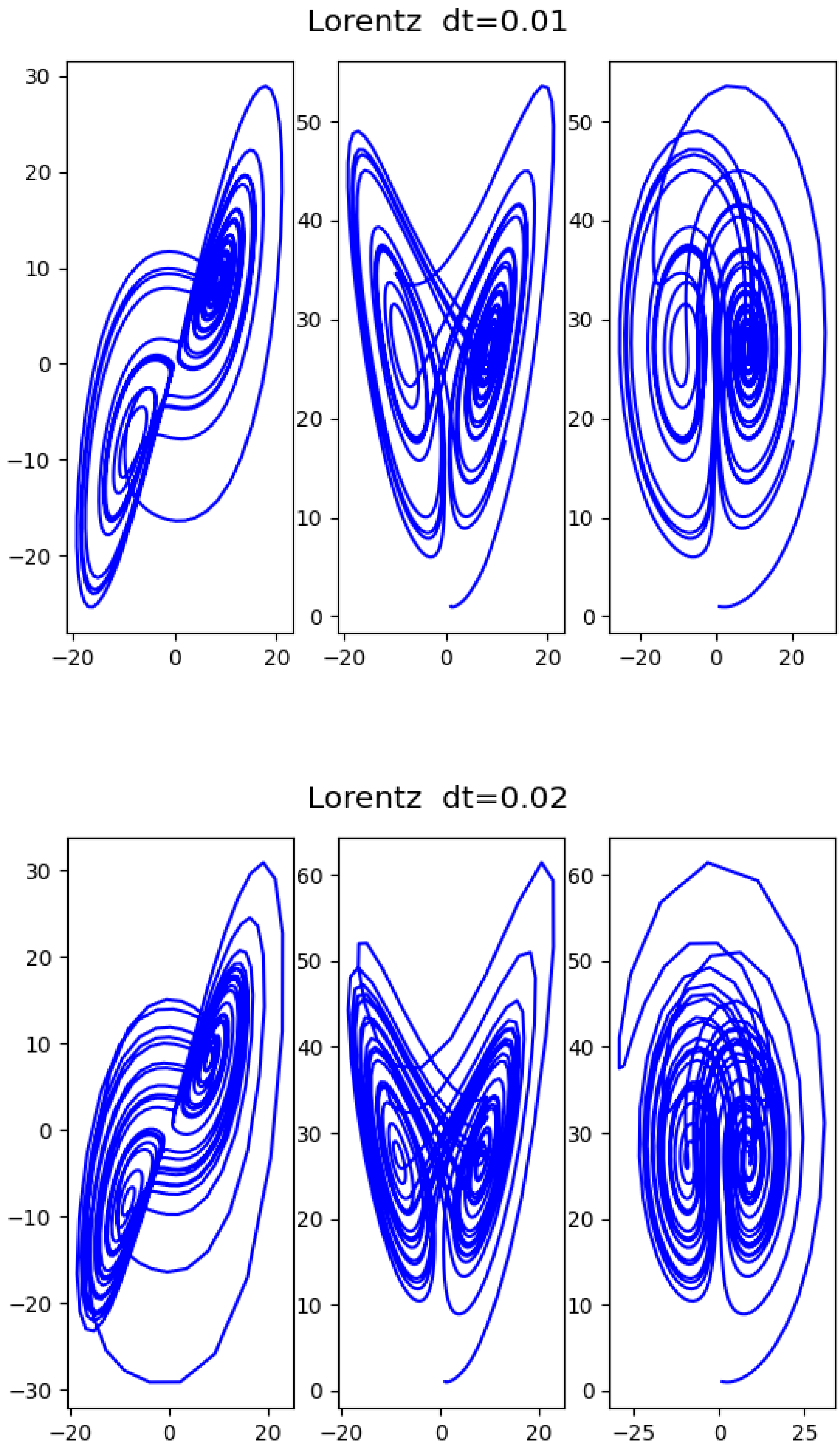
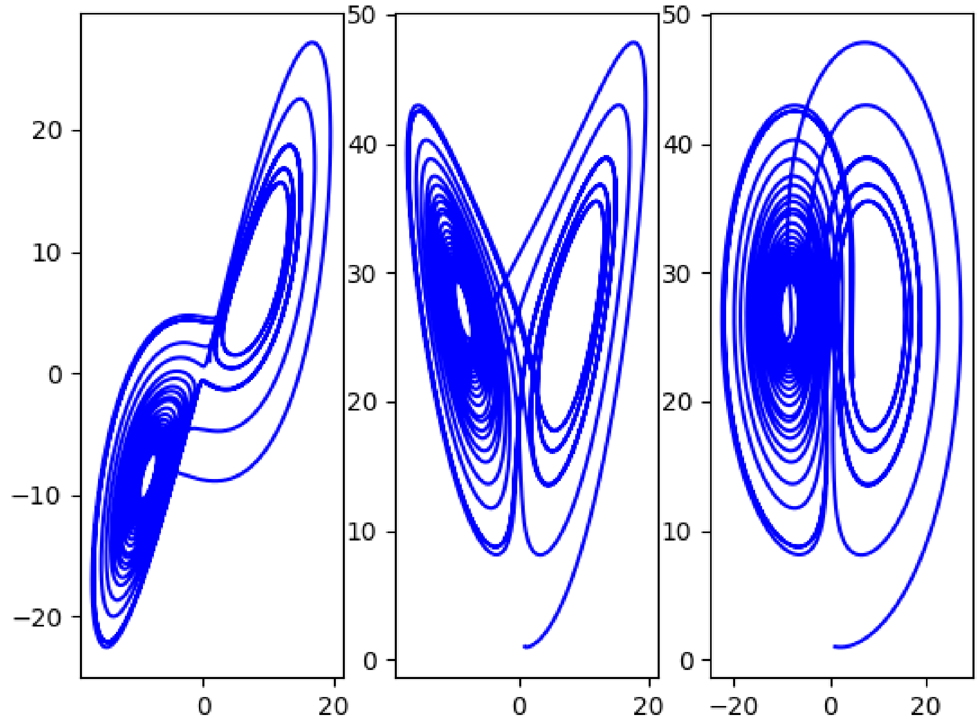
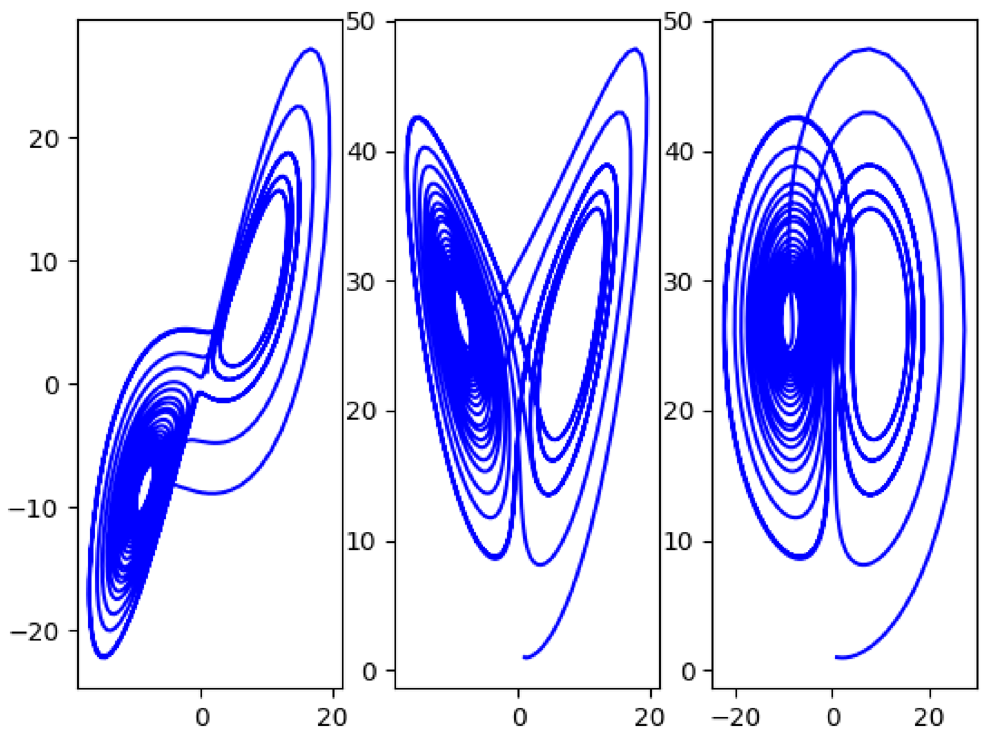


Figure 11: Wykresy y(x), z(y), z(x) układu Lorentza metodą Eulera dla kroków dt = {0.001, 0.01, 0.02} przy stałych parametrach

Lorentz dt=0.001



Lorentz dt=0.01



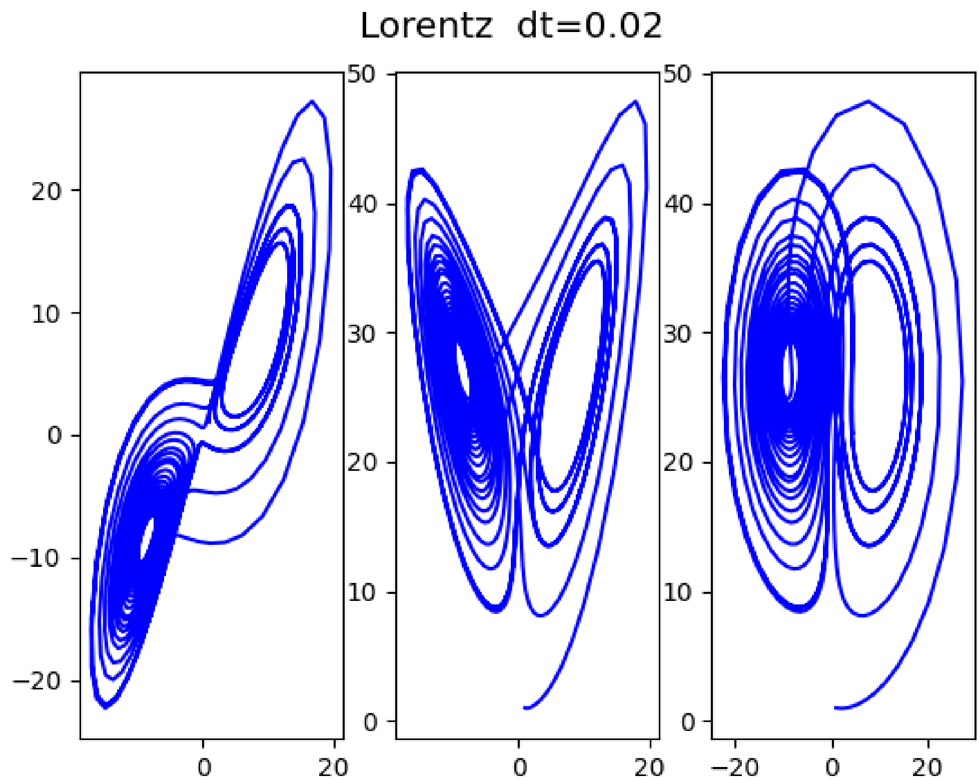
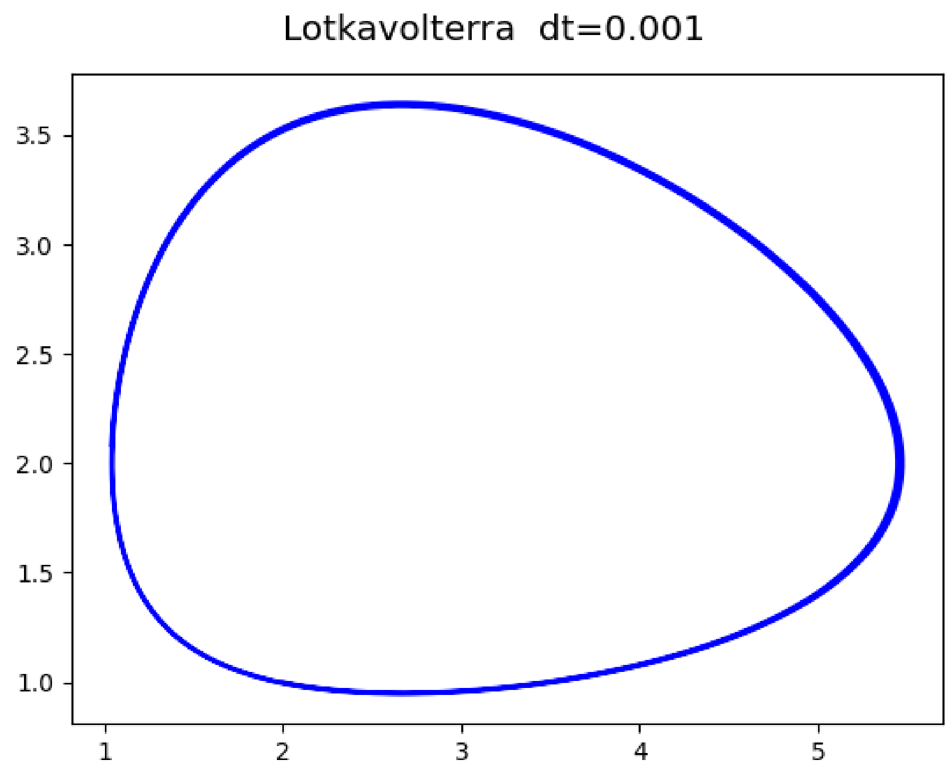
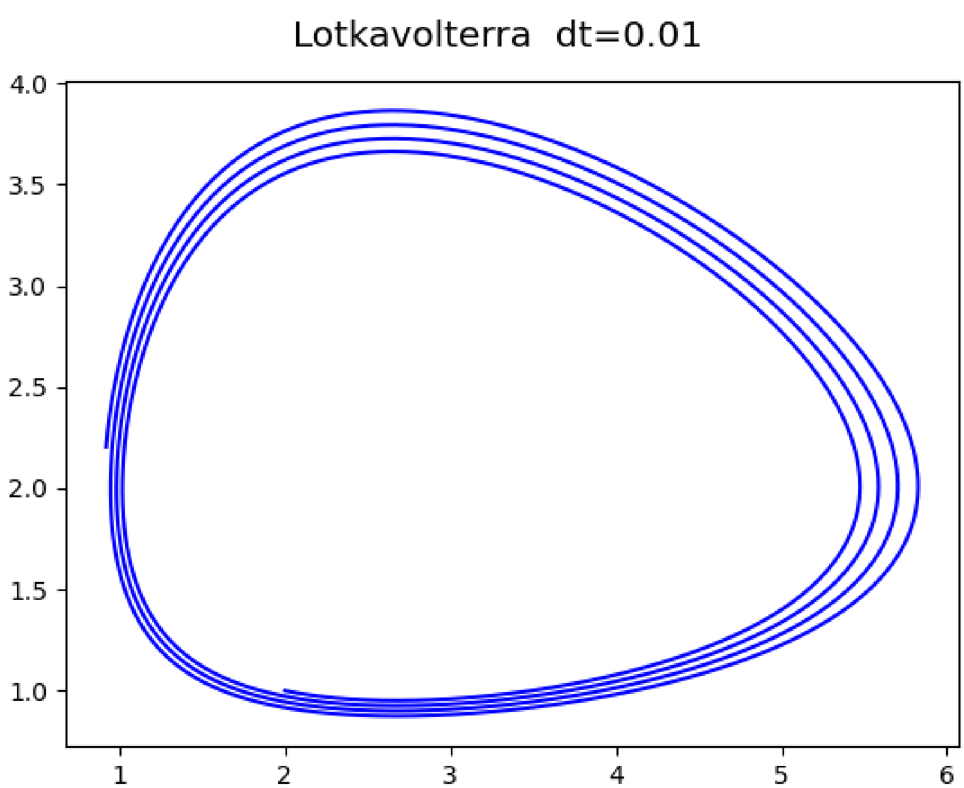


Figure 12: Wykresy y(x), z(y), z(x) układu Lorentza metodą scipy.integrate.odeint dla kroków dt = {0.001, 0.01, 0.02} przy stałych parametrach


Lotkavolterra dt=0.001
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
1
2
3
4
5


Lotkavolterra dt=0.01
4.0
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
1
2
3
4
5
6

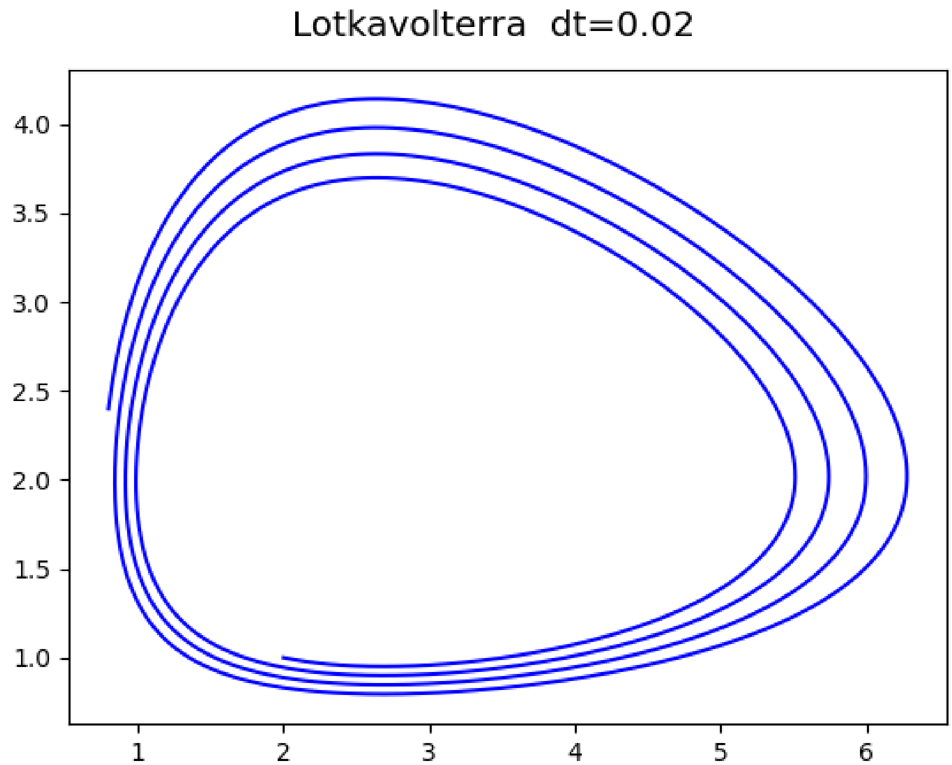
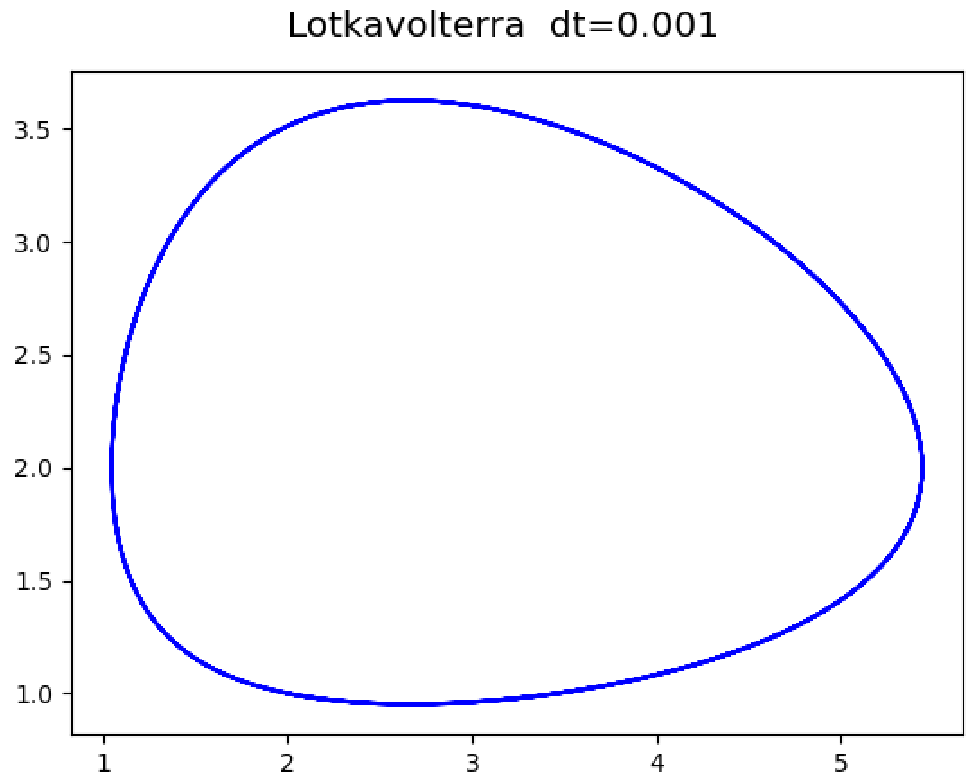
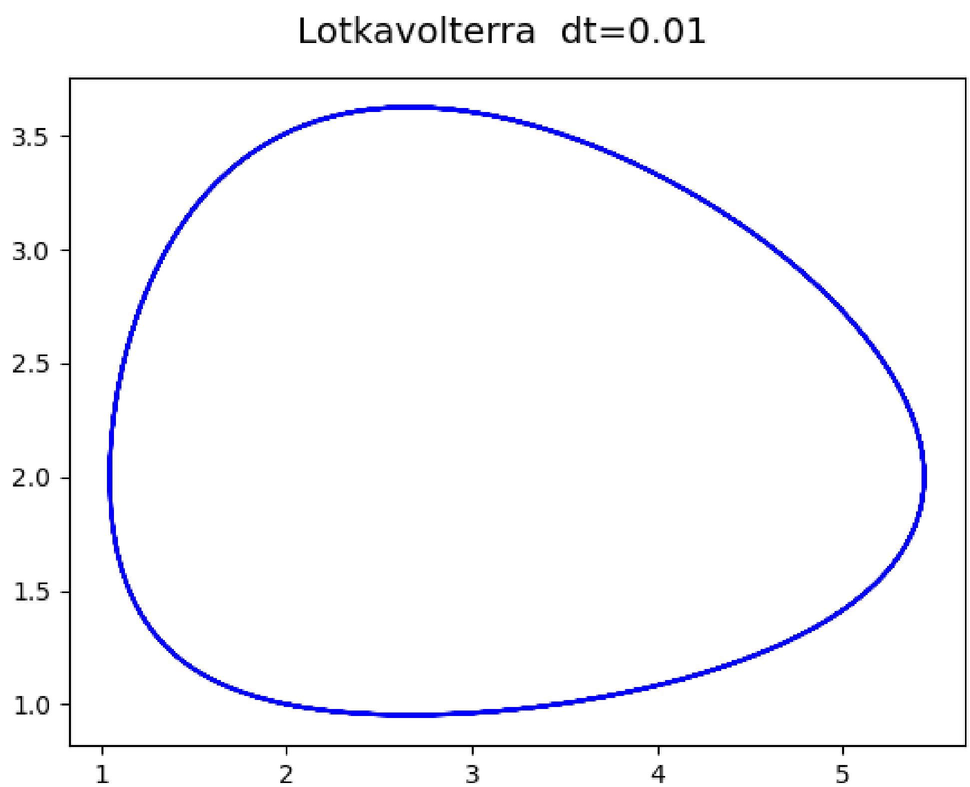


Figure 13: Wykresy y(x) układu Lotki-Volterry metodą Eulera dla kroków dt = {0.001, 0.01, 0.02} przy stałych parametrach


Lotkavolterra dt=0.001
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
1
2
3
4
5


Lotkavolterra dt=0.01
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
1
2
3
4
5

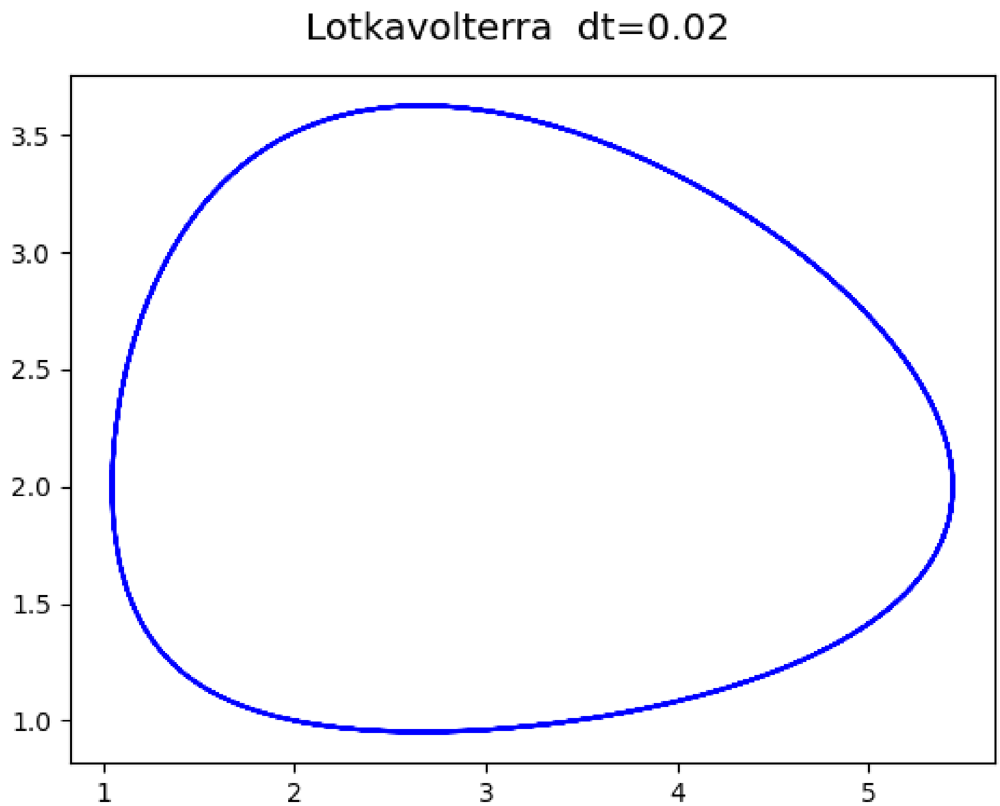
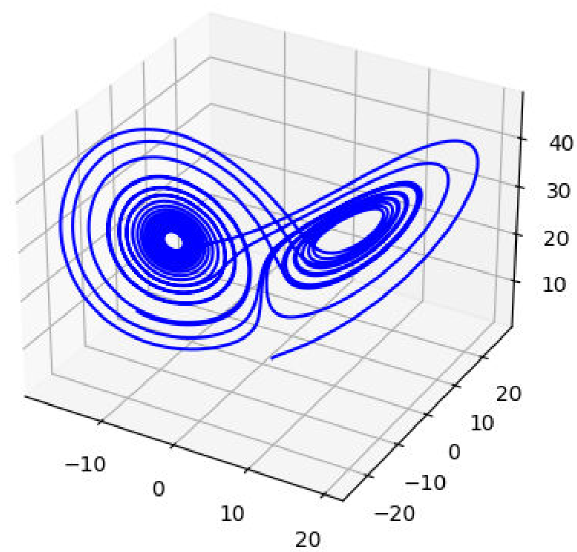


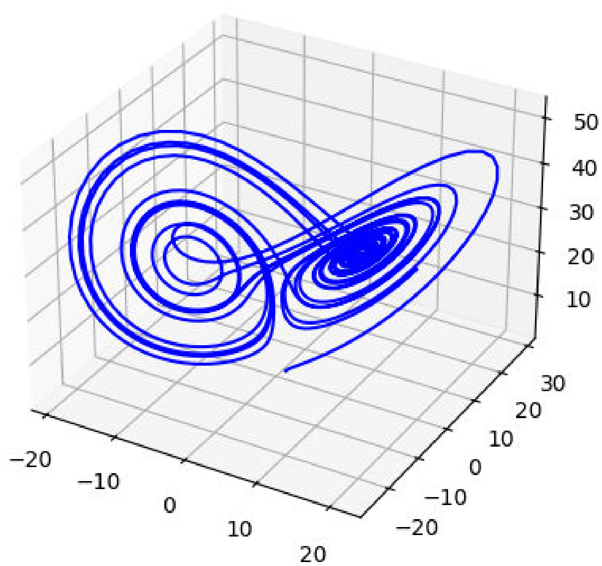
Figure 14: Wykresy y(x) układu Lotki-Volterry metodą scipy.integrate.odeint dla kroków dt = {0.001, 0.01, 0.02} przy stałych parametrach

3. WYKRESY ZALEŻNOŚCI W PRZESTRZENI

Lorentz dt=0.001



Lorentz dt=0.01



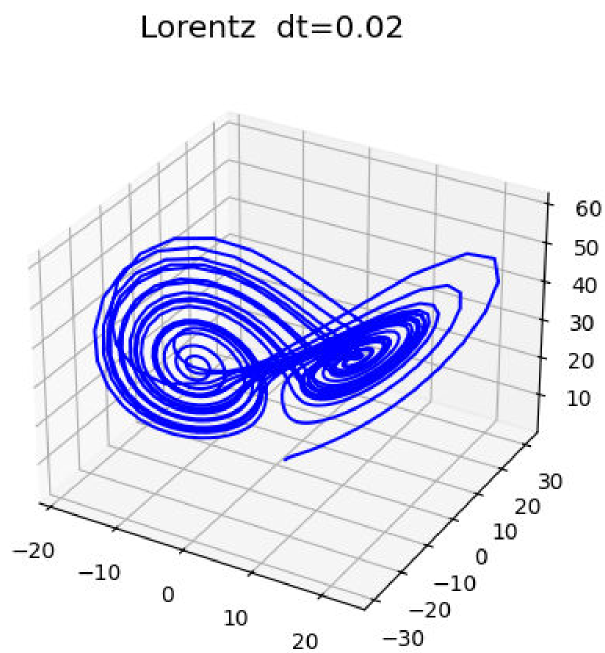
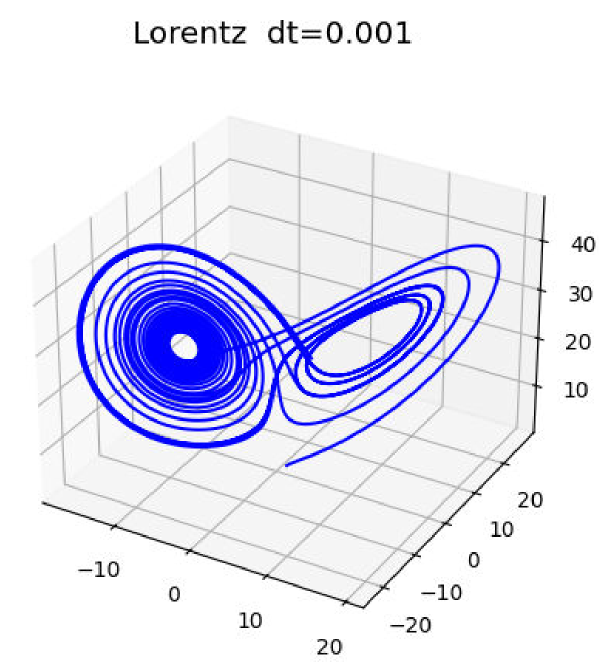


Figure 15: Wykres z(x,y) układu Lorenza metodą Eulera dla kroków dt = {0.001, 0.01, 0.02} przy stałych parametrach



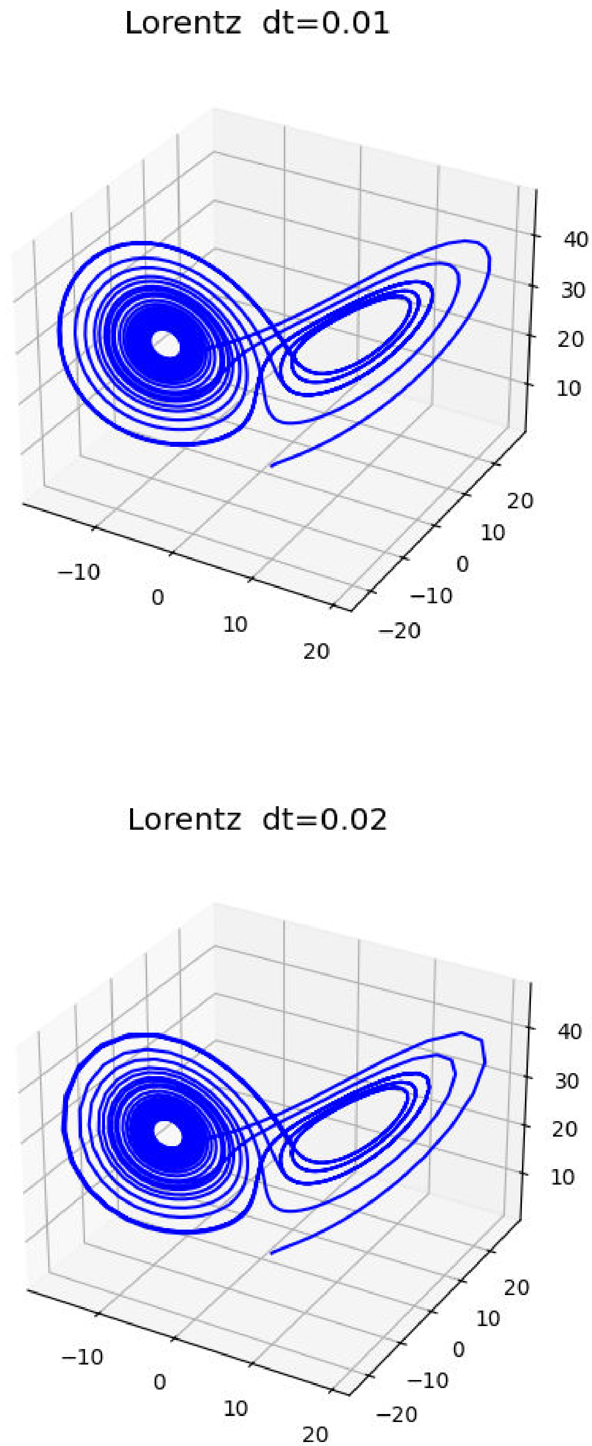


Figure 16: Wykres z(x,y) układu Lorenza metodą scipy. dla kroków dt = {0.001, 0.01, 0.02} przy stałych parametrach

3. ŚREDNI BŁĄD APROKSYMACJI

$$MSE_F = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(F(x_i) - W(x_i))^2$$

Figure 17: Matematyczny wzór średniego błędu kwadratowego układu Lorenza [3]

Obliczymy średni błąd kwadratowy każdego sygnału za pomocą wzoru [Figure 17]:

```
def MSE(f1, f2, params):
x = [f1(*params), f2(*params)]
n = len(x[0])
mse = 0
for i in range(n):
    mse += pow(x[0][i] - x[1][i], exp=2)
mse /= n
print(mse)
```

Figure 18: Realizacja średniego błędu kwadratowego w języku Python

- dt = 0.001

```
Model Lorenza:        δx = 0.19591265       δy = 0.40308504      δz = 0.63858806
Model Lotki-Volterry: δx = 2.28737774e-04   δy = 08.76694501e-05
```

- dt = 0.01

```
Model Lorenza:        δx = 176.65041139     δy = 195.93848631    δz =  66.78692278
Model Lotki-Volterry: δx = 0.02694779       δy = 0.01025241
```

- dt = 0.02

```
Model Lorenza:        δx = 155.92353612     δy = 187.39329765    δz =  72.94273338
Model Lotki-Volterry: δx = 0.13041354       δy = 0.0490712
```

Figure 19: Średnie błędy kwadratowe dla dt = {0.001, 0.01, 0.02} w języku Python

WNIOSKI

Obie metody wyliczania układów są algorytmami rozwiązywania równań różniczkowych, zatem spodziewać możemy się, że w zależności od doboru dyskretnego kroku czasowego, otrzymany wynik będzie jedynie przybliżeniem rozwiązania. Metoda odeint wykorzystuje algorytm lsoda, który dynamicznie dostosowywuje sposób podejścia do rozwiązania ODE (wybierając pomiędzy różnymi metodami rozwiązywania ODE takimi jak metoda Runge-Kutta), z tego powodu obserwujemy, że szybciej zbiega on do rzeczywistego rozwiązania niż metoda Eulera. Jest on również z tego powodu stosunkowo mniej wrażliwy na niewiekie zmiany dt dla większości układów niż algorytm Eulera. Wciąż jednak, wybór kroku czasowego dt jest znaczący, ponieważ nie dokonujemy dyskretyzacji modelu, a rekurencyjnego podejścia rozwiązania numerycznego, co sprawia, że błędy wynikające z doboru dt nakładają się wraz z każdą iteracją, co uwidacznia się dla średnich kwadratowych błędów aproksymacji.

LITERATURA

[1] J.D. Murray: Wprowadzenie do Biomatematyki. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2006.

[2] Edward N. Lorenz: Deterministic Nonperiodic Flow. „J.Atmos.Sci.”. 20 (2), s. 130–141, 1963.

[3] Robert Perliński: Aproksymacja II Metody numeryczne.