

Lista 2

Simulink jest pakietem do symulacji systemów dynamicznych wbudowany w środowisko MATLAB. W tym ćwiczeniu zapoznamy się z modelowaniem prostych układów równań różniczkowych używając reprezentacji blockowej. W tym celu wykorzystamy podstawowe bloczki operujące na sygnałach, takie jak Gain (Wzmocnienie), Constant (Stała), Sum (Dodanie), Product (Przemnożenie), Scope (Zapisanie do zmiennej). Wszystkie je można znaleźć w bibliotece Simulinka w zakładce Simulink - Commonly Used Blocks.

Dodatkowym blokiem, który będziemy wykorzystywać, jest blok Integrator, całkujący sygnał, czyli inaczej obniżający stopień pochodnej. Dla przykładu, mając równanie różniczkowe

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 5 \frac{\partial x}{\partial t} + 4x = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -5 \frac{\partial x}{\partial t} - 4x, \quad (1)$$

przy warunkach początkowych $x(0) = 0$, $\frac{\partial x}{\partial t}(0) = 1$, możemy je zamodelować w następujący sposób

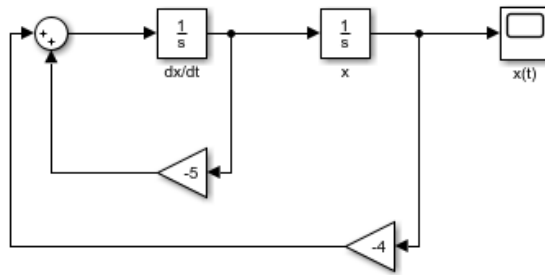


Figure 1: Schemat w pakiecie Simulink dla równania różniczkowego $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 5 \frac{\partial x}{\partial t} + 4x = 0$.

Przy ustawieniu odpowiednich wartości początkowych w ustawieniach bloczków Integrator otrzymany wykres $x(t)$ powinien prezentować się jak na rysunku 2.

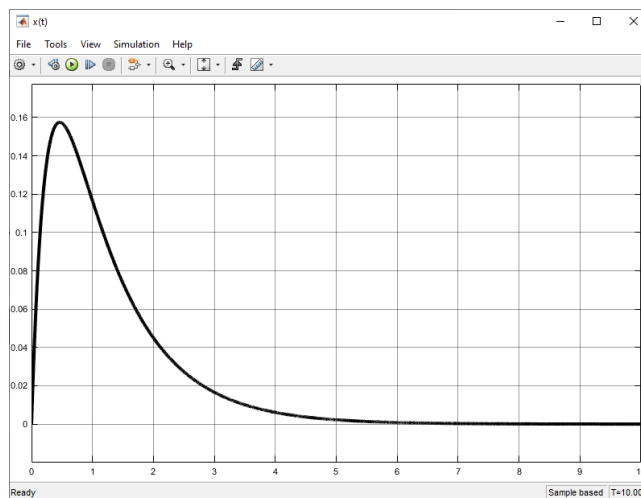


Figure 2: Wykres $x(t)$ dla równania różniczkowego $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 5 \frac{\partial x}{\partial t} + 4x = 0$ i warunków początkowych $x(0) = 0$, $\frac{\partial x}{\partial t}(0) = 1$ dla czasu $t \in [0, 10]$.

Model Lotki-Volterra

W ramach poprzedniej listy zaznajomiliśmy się z modelem Lotki-Volterra, opisującym wzajemną zależność rozmiarów populacji drapieżników i ofiar. Dla przypomnienia, jest to model opisany układem dwóch równań różniczkowych zdefiniowanych następująco

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (a - by)x \\ \frac{dy}{dt} = (cx - d)y, \end{cases} \quad (2)$$

gdzie x - populacja ofiar, y - populacja drapieżników, t - czas, a - częstość narodzin ofiar, b - częstość umierania ofiar, c - częstość narodzin drapieżników, d - częstość umierania drapieżników.

Korzystając z pakietu Simulink należy skonstruować układ odpowiadający układowi równań (2) oraz przeprowadzić symulację. Na potrzeby tego zadania możemy przyjąć (podobnie jak w poprzedniej liście) następujące wartości parametrów: $a = 1.2$, $b = 0.6$, $c = 0.3$, $d = 0.8$ oraz populacje początkowe $x_0 = 2$ i $y_0 = 1$.

Układ Lorenza

Układ Lorenza¹ jest to układ trzech równań różniczkowych modelujących przepływ ciepła w atmosferze.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - \beta z, \end{cases} \quad (3)$$

Parametry układu zakłada się, że są pozytywne. Na potrzeby tego ćwiczenia przyjmujemy wartości użyte przez Lorentza wynoszące $\sigma = 10$, $\beta = \frac{8}{3}$ i $\rho = 28$ oraz warunki początkowe $x(0) = y(0) = z(0) = 1$. Oczekiwane wyjścia dwuwymiarowe prezentuje rysunek 3, a trójwymiarowe rysunek 4

Korzystając z pakietu Simulink należy skonstruować schemat odpowiadający układowi równań (3) oraz przeprowadzić symulację dla zadanych parametrów oraz dla nieznacznie się różniących wartości (w szczególności parametru ρ oraz warunków początkowych) i porównać otrzymane wykresy ($y(x)$, $z(y)$, $z(x)$).

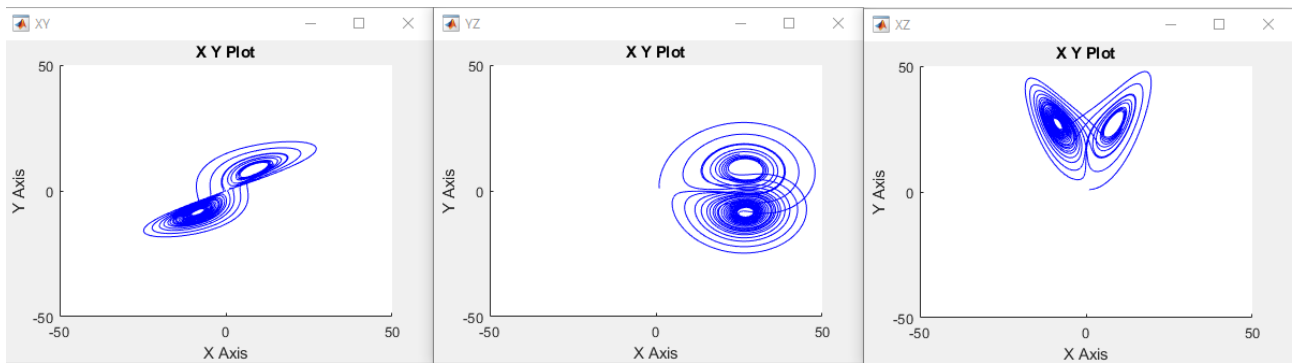


Figure 3: Wykresy $y(x)$, $z(y)$, $z(x)$ dla czasu $t \in [0, 25]$ przy kroku $dt = 0.001$ dla parametrów $\sigma = 10$, $\beta = \frac{8}{3}$ i $\rho = 28$ oraz warunków początkowych $x(0) = y(0) = z(0) = 1$.

Wskazówki

- W ustawieniach symulacji dobrze jest ustawić stały krok symulacji (Fixed-step, domyślnie będzie Variable-step) o małej wartości, np. $dt = 0.01$ lub $dt = 0.001$.
- Blok sumy może wykonać różne działania dla różnych wejść.
- Czasem pomocne dla utrzymania przejrzystości schematu może być odwrócenie blozków na modelu (tak by np. wejścia do bločku były z prawej strony, a wyjście z lewej), jak na rysunku 1.

¹https://en.wikipedia.org/wiki/Lorenz_system

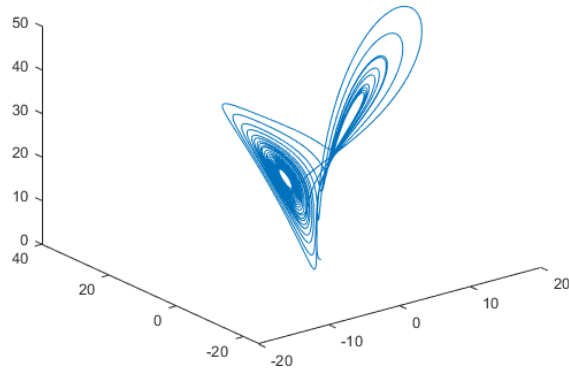


Figure 4: Wykresy $z(x, y)$ dla ustawień jak na rysunku 3.

- Bloczek Scope ma możliwość przedstawiania wielu wyjść na raz. W tym celu należy po kliknięciu na niego prawym przyciskiem myszy, w zakładce **Signals & Ports** wybrać odpowiednią wartość dla **Number of Input Ports** lub połączyć wchodzące sygnały bloczkiem **Mux**.
- W celu wyrysowania wykresów dwuwymiarowego (dla układu Lorenza) należy posłużyć się bloczkiem **XY Graph**. Wykres 3D wymaga przekazania wektorów wartości $x(t)$, $y(t)$ i $z(t)$ z Simulinka do Matlaba i wykorzystanie funkcji `plot3`.