Lista 2

Hubert Jackowski

Układ Lotki-Volterry

Równanie Lotki-Volterry to model układu dynamicznego opisujący wzajemną zależność rozmiarów populacji drapieżników i ofiar. Został on zaproponowany niezależnie przez dwóch badaczy Vito Volterrę w 1926 oraz Alfreda James Lotkę w 1920 roku. [1]

MODEL

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (a - by)x \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = (cx - d)y, \end{cases}$$

Figure 1: Matematyczny model układu Lotki-Volterry

Gdzie: x - populacja ofiar, y - populacja drapieżników, t - czas, a - częstość narodzin ofiar, b - częstość umierania ofiar, c - częstość narodzin drapieżników, d - częstość umierania drapieżników.

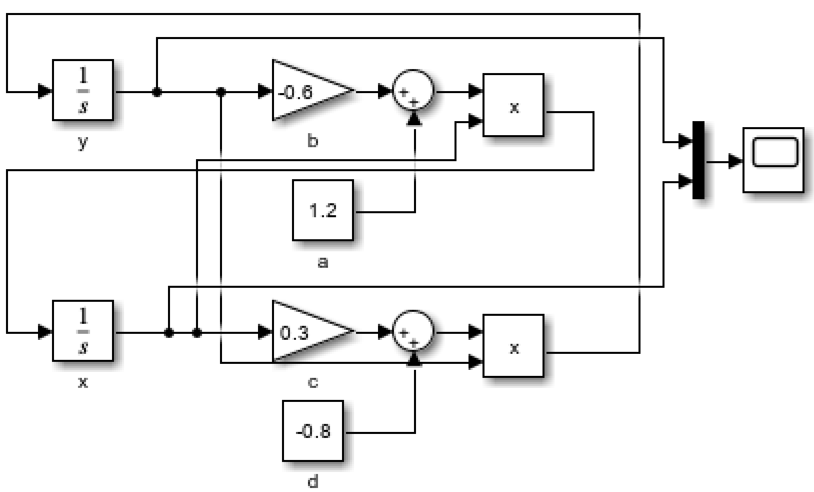

Figure 2: Realizacja modelu za pomocą biblioteki Simlink

OBSERWACJE

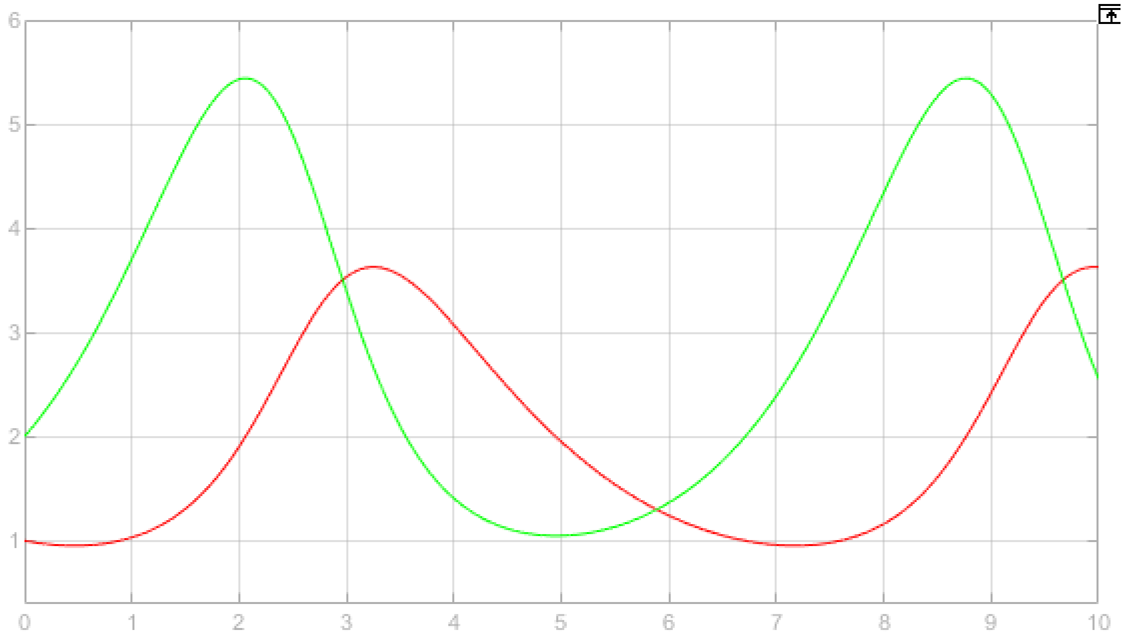

Figure 3: Rezultat symulacji dla wartości parametrów modelu a = 1.2, b = 0.6, c = 0.3, d = 0.8 oraz populacje początkowe x(0) = 2 i y(0) = 1.. Kolorem czerwonym zaznaczono populację drapieżników, a kolorem zielonym populację ofiar

WNIOSKI

Zauważmy, że liczebność populacji drapieżników jest ściśle związana z liczebnością populacji ofiar. Spadek populacji ofiar skutkuje zmniejszeniem populacji drapieżników. Ta zmiana skutkuje natomiast stworzeniem okoliczności, w której niezagrożona populacja ofiar wzrasta i cykl się powtarza, co zauważamy na wykresach przeprowadzonych symulacji [Figure 1-4].

Układ Lorentza

Układ Lorentza to model układu dynamicznego opisujący zjawisko konwekcji termicznej w atmosferze. Uwzględnia on lepkość ośrodka, jego przewodnictwo cieplne oraz rozmiary ośrodka, w którym odbywa się proces. Zaproponowany został przez Edwarda Lorentza w 1963 roku. [2]

MODEL

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sigma(y - x) \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x(\rho - z) - y \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = xy - \beta z, \end{cases}$$

Figure 4: Matematyczny model układu Lorentza

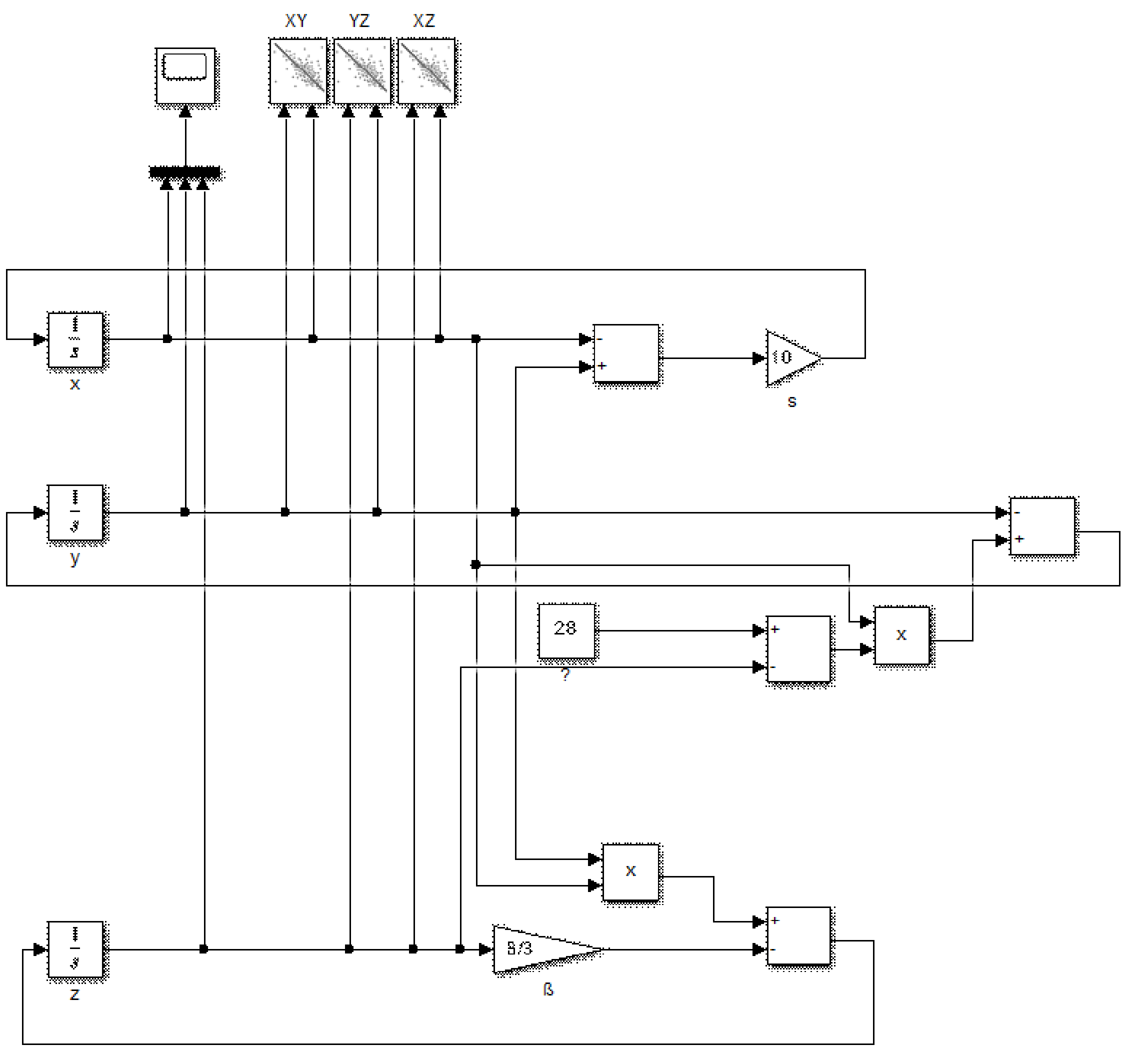

Figure 5: Realizacja modelu za pomocą biblioteki Simlink

OBSERWACJE

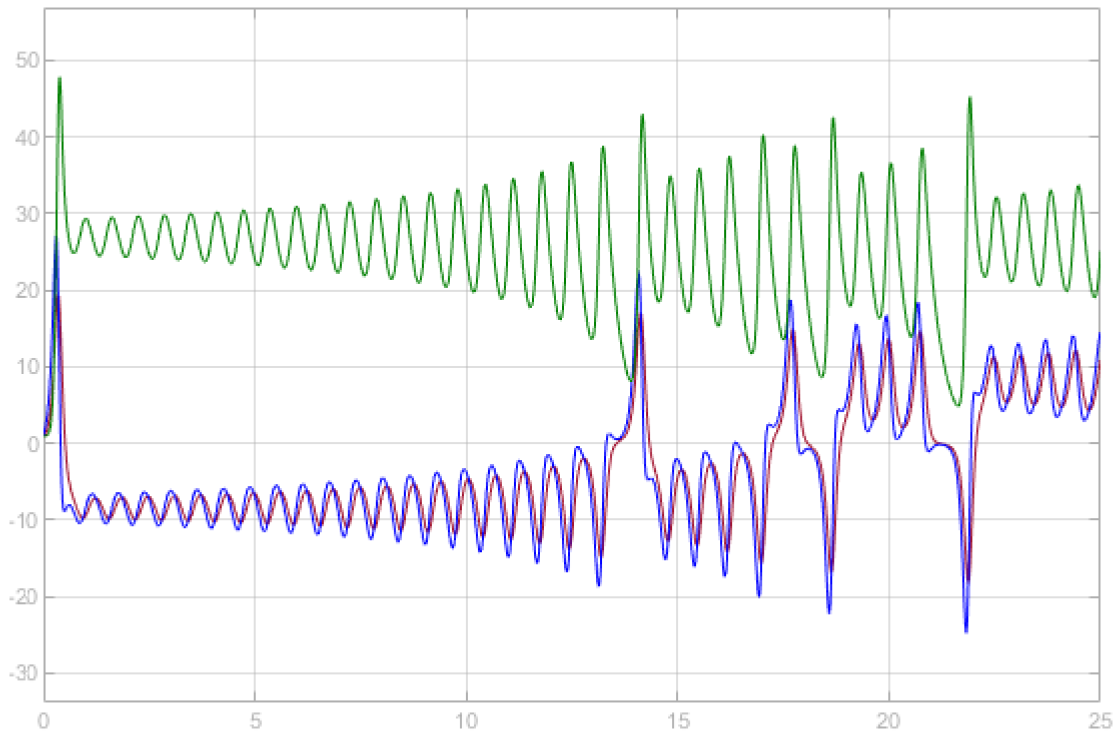

Figure 6: Wykresy x(t) (czerwony), y(t) (niebieski), z(x) (zielony) dla czasu t $\in$ [0, 25] przy kroku dt = 0.001 dla parametrów $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ i $\rho = 28$ oraz warunków początkowych $x(0) = y(0) = z(0) = 1$

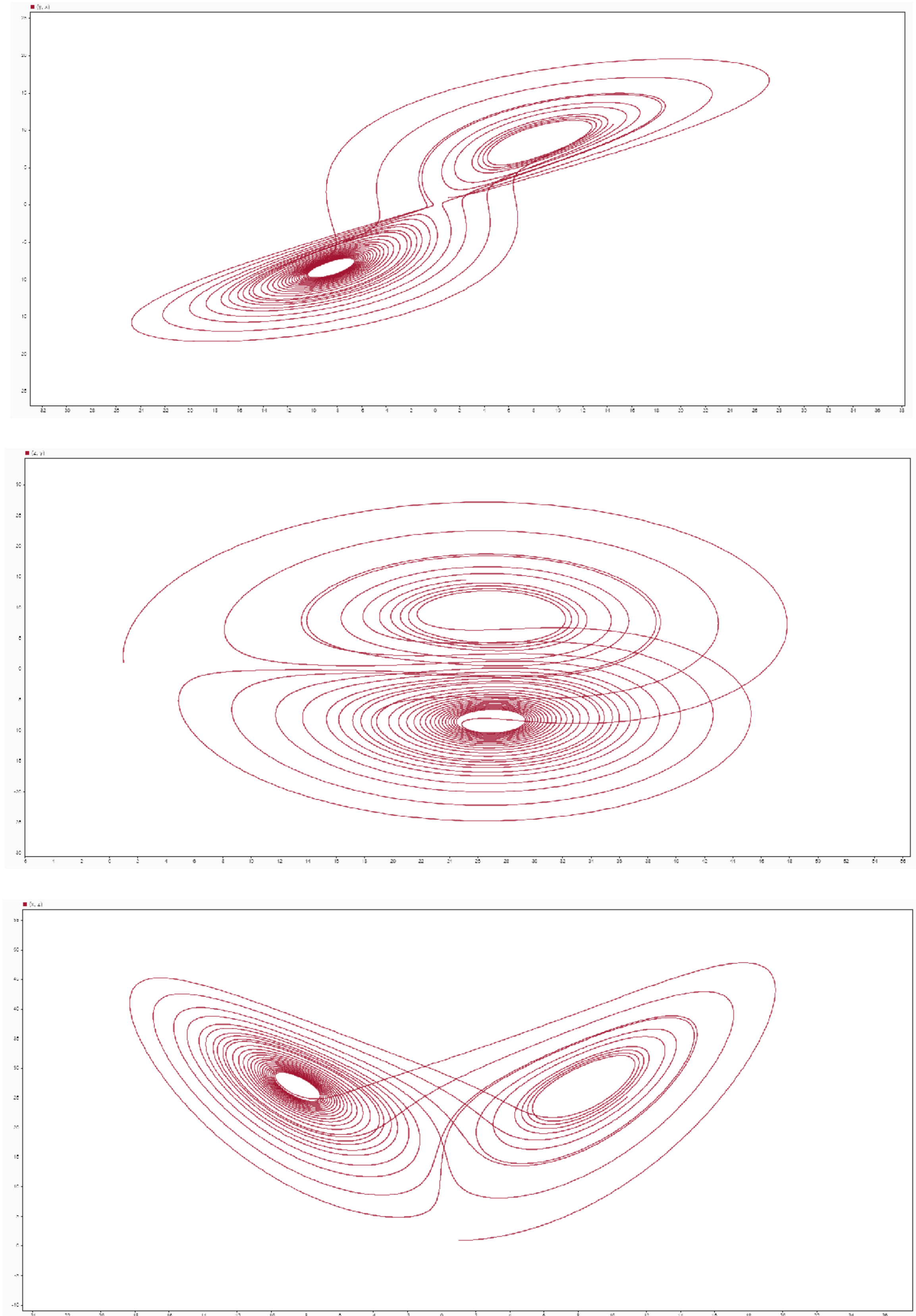

Figure 7: Wykresy y(x), z(y), z(x) dla czasu $t \in [0, 25]$ przy kroku $dt = 0.001$ dla parametrów $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ i $\rho = 28$ oraz warunków początkowych $x(0) = y(0) = z(0) = 1$

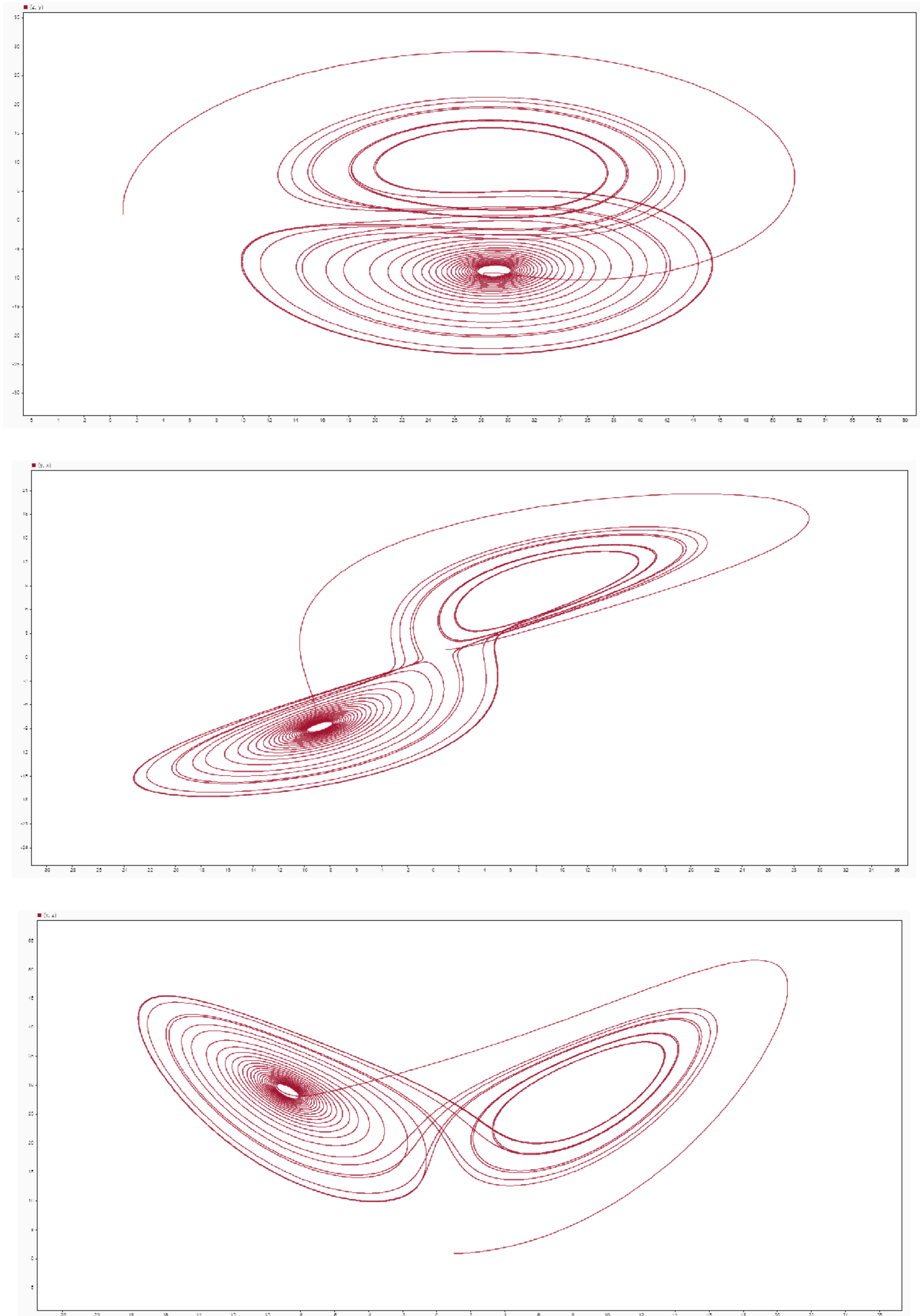

Figure 8: Wykresy $y(x)$, $z(y)$, $z(x)$ dla czasu $t \in [0, 25]$ przy kroku $dt = 0.001$ dla parametrów $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ i ***$\rho = 30$*** oraz warunków początkowych $x(0) = y(0) = z(0) = 1$

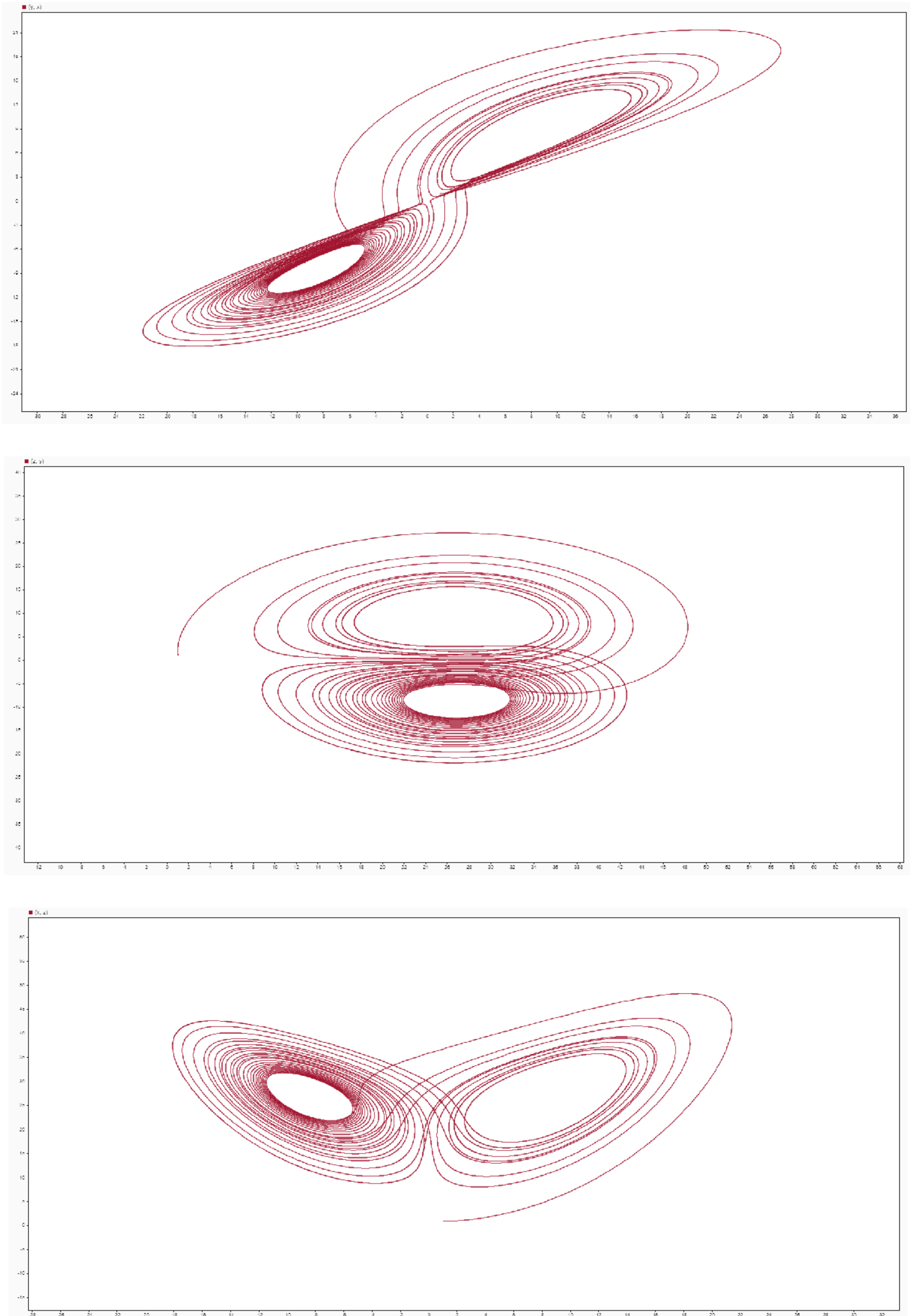

Figure 9: Wykresy y(x), z(y), z(x) dla czasu t $\in$ [0, 25] przy kroku dt = 0.001 dla parametrów ***σ = 15***, β = 8/3 i ρ = 28 oraz warunków początkowych x(0) = y(0) = z(0) = 1

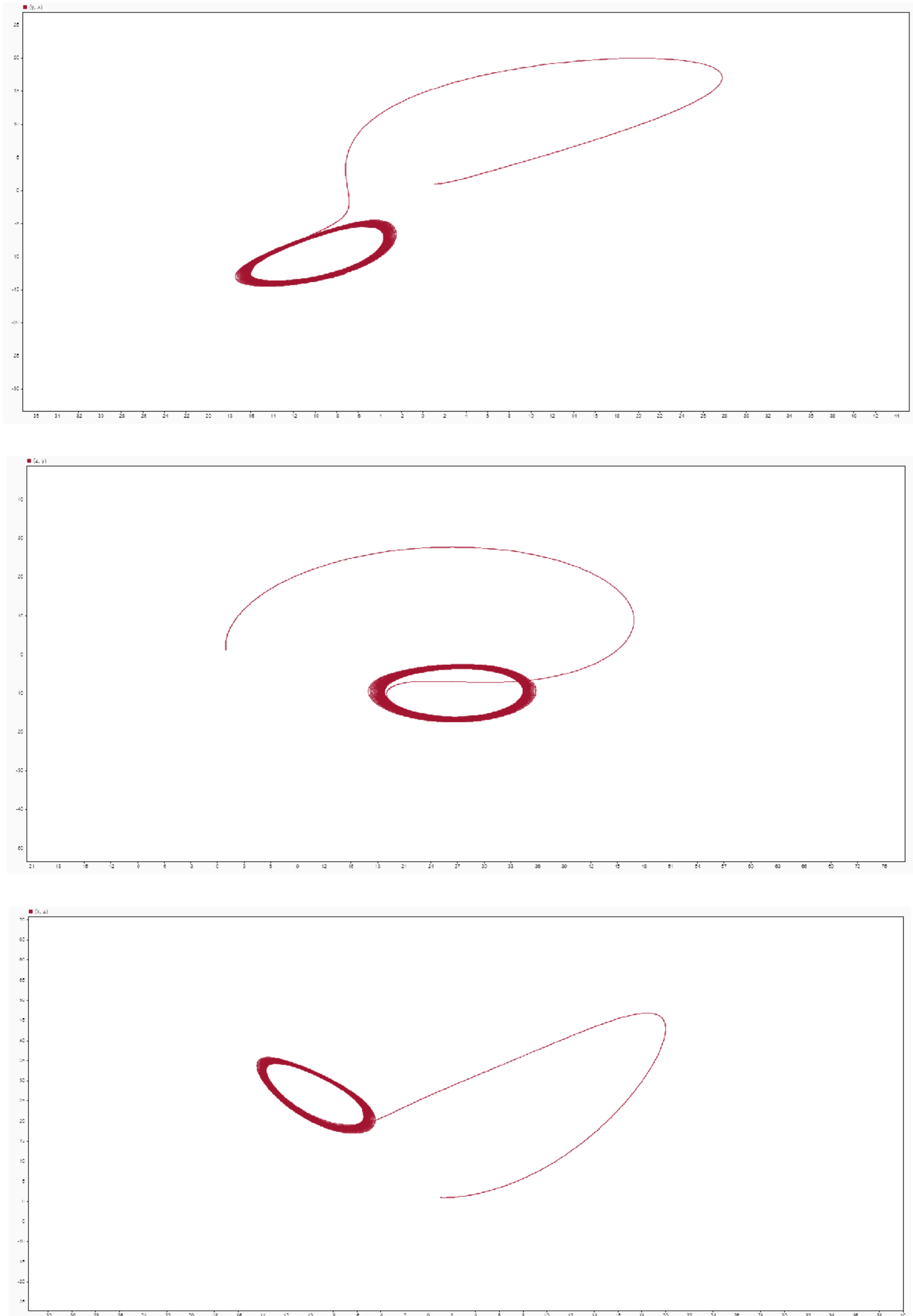

Figure 10: Wykresy y(x), z(y), z(x) dla czasu t ∈ [0, 25] przy kroku dt = 0.001 dla parametrów σ = 10, ***β = 3.5*** i ρ = 28 oraz warunków początkowych x(0) = y(0) = z(0) = 1

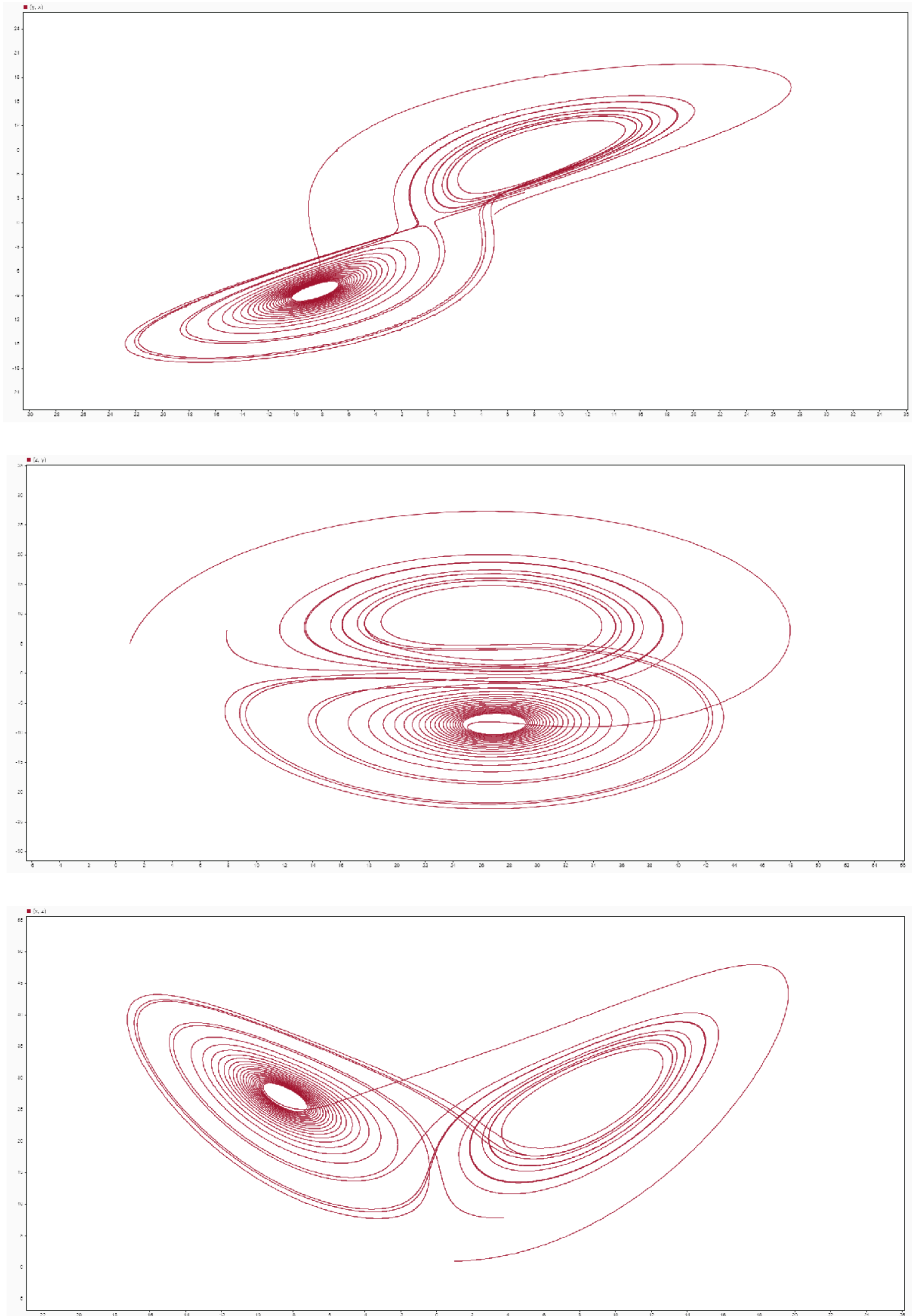

Figure 11: Wykresy $y(x)$, $z(y)$, $z(x)$ dla czasu $t \in [0, 25]$ przy kroku $dt = 0.001$ dla parametrów $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ i $\rho = 28$ oraz warunków początkowych $x(0) = z(0) = 1$ oraz ***$y(0) = 5$***

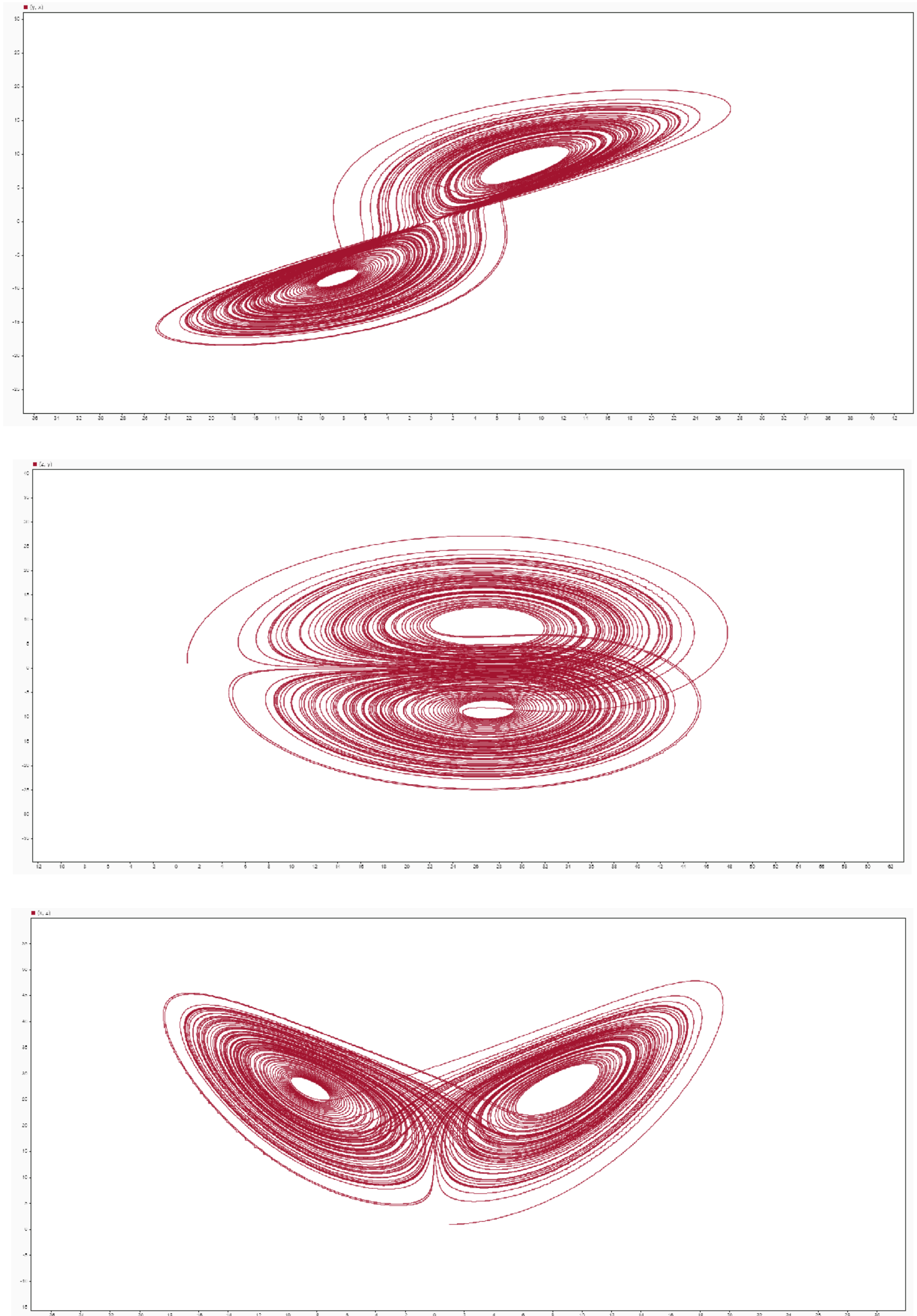

Figure 12: Wykresy y(x), z(y), z(x) dla czasu ***$t \in [0, 100]$*** przy kroku dt = 0.001 dla parametrów $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ i $\rho = 28$ oraz warunków początkowych $x(0) = y(0) = z(0) = 1$

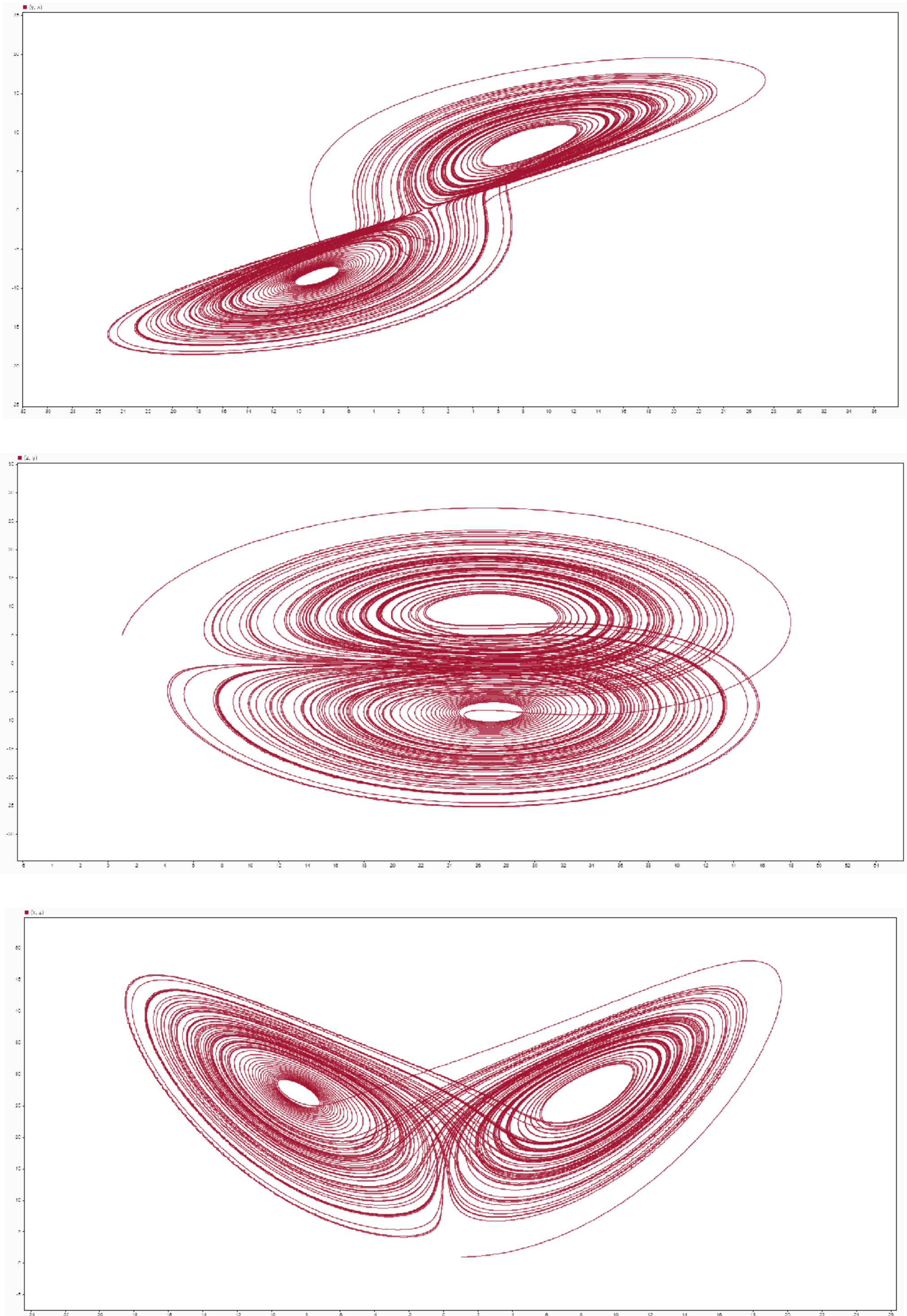

Figure 13: Wykresy $y(x)$, $z(y)$, $z(x)$ dla czasu ***$t \in [0, 100]$*** przy kroku $dt = 0.001$ dla parametrów $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ i $\rho = 28$ oraz warunków początkowych $x(0) = z(0) = 1$ oraz ***$y(0) = 5$***

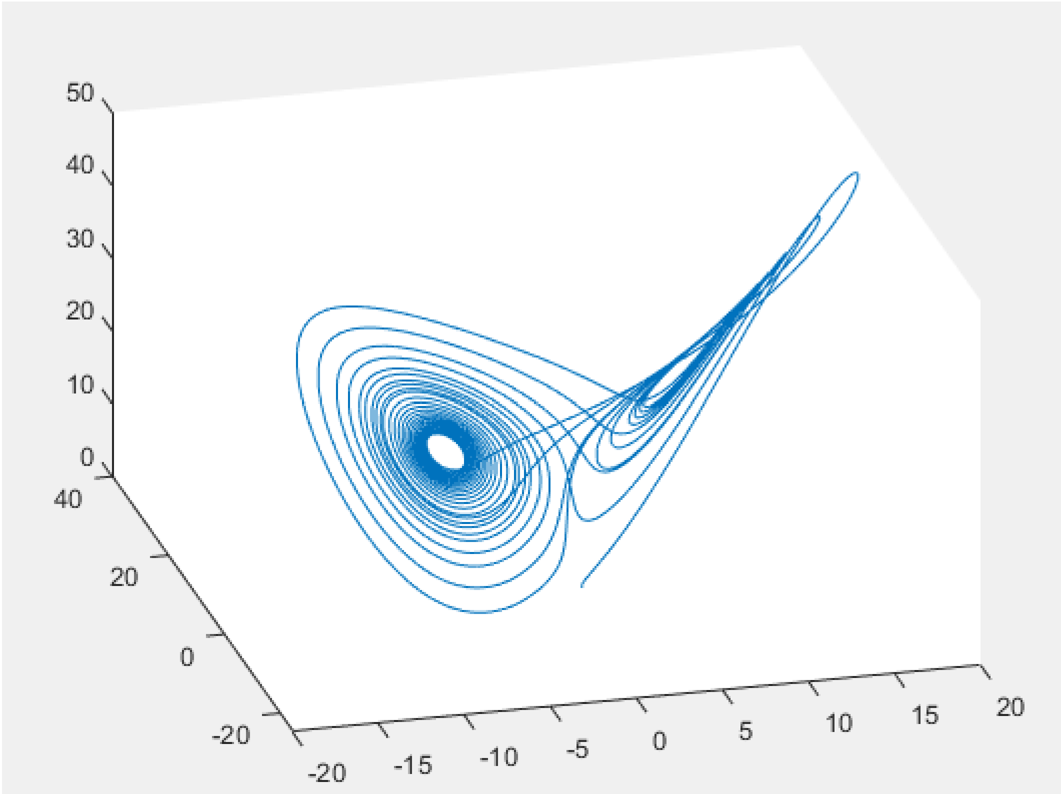

Figure 14: Wykres z(x,y) dla czasu t ∈ [0, 25] przy kroku dt = 0.001 dla parametrów $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ i $\rho = 28$ oraz warunków początkowych x(0) = y(0) = z(0) = 1

WNIOSKI

Manipulacja parametrem σ powoduje skośne rozszerzenia wykresów [Figure 9]; parametrem β - prędkość ewolucji układu [Figure 10], parametrem ρ - całościowe rozszerzenia wykresów [Figure 8]. Obserwując dwa modele o nieznacznie różniących się warunkach początkowych, wraz z upływem czasu smulacji zauważamy diametralne zmiany w ich zachowaniu [Figure 7, 11-13]. Układ równań Lorentza jest bardzo wrazliwy od warunków początkowych. Jest jednym z modeli określanych determistycznie chaotycznymi podlegających efektowi motyla, które są podstawą teorii chaosu.

LITERATURA

[1] J.D. Murray: Wprowadzenie do Biomatematyki. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2006.

[2] Edward N. Lorenz: Deterministic Nonperiodic Flow. „J.Atmos.Sci.”. 20 (2), s. 130–141, 1963.