

Lista 2

Hubert Jackowski

Układ Lotki-Volterry

Równanie Lotki-Volterry to model układu dynamicznego opisujący wzajemną zależność rozmiarów populacji drapieżników i ofiar. Został on zaproponowany niezależnie przez dwóch badaczy Vito Volterrę w 1926 oraz Alfreda James Lotkę w 1920 roku. [1]

MODEL

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (a - by)x \\ \frac{dy}{dt} = (cx - d)y, \end{cases}$$

Figure 1: Matematyczny model układu Lotki-Volterry

Gdzie: x - populacja ofiar, y - populacja drapieżników, t - czas, a - częstość narodzin ofiar, b - częstość umierania ofiar, c - częstość narodzin drapieżników, d - częstość umierania drapieżników.

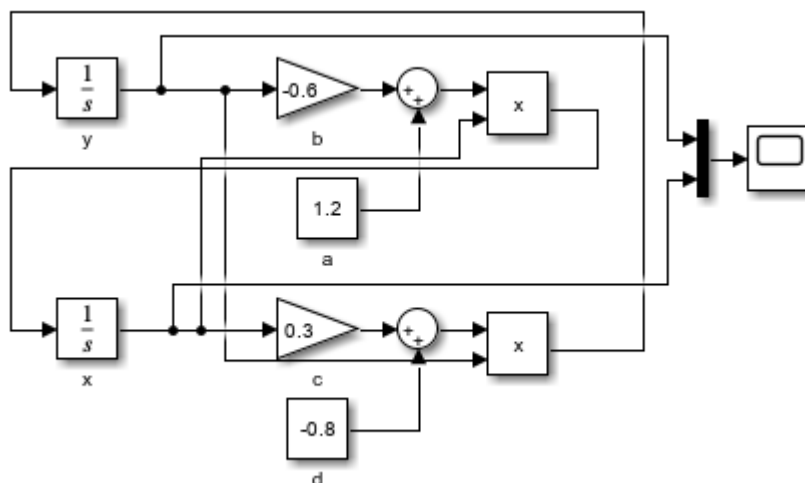


Figure 2: Realizacja modelu za pomocą biblioteki Simlink

OBSERWACJE

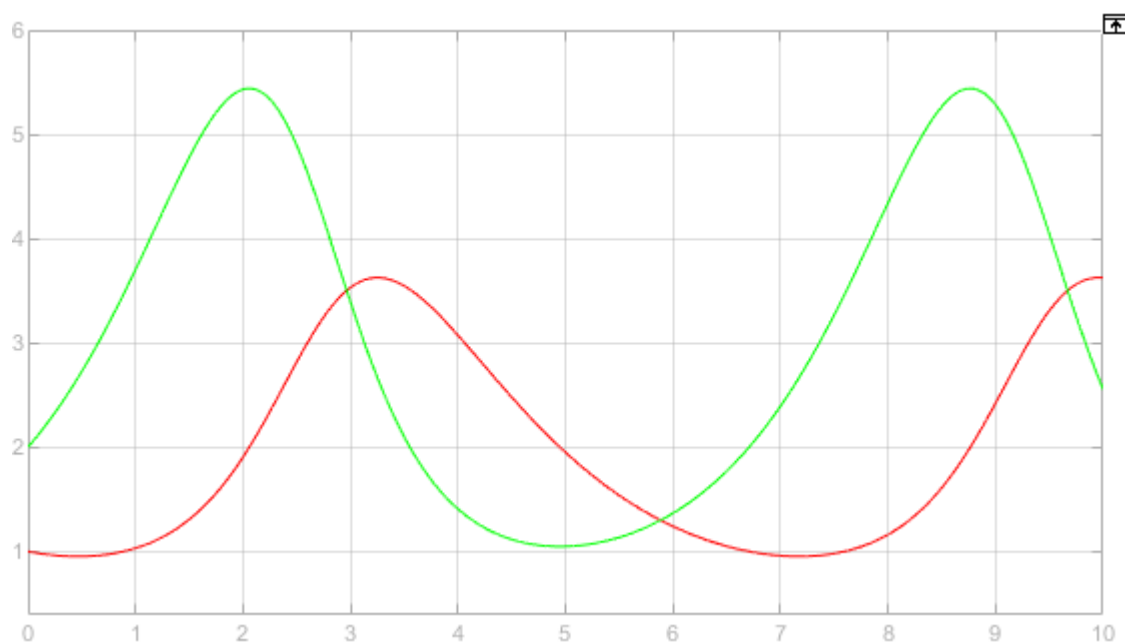


Figure 3: Rezultat symulacji dla wartości parametrów modelu $a = 1.2$, $b = 0.6$, $c = 0.3$, $d = 0.8$ oraz populacje początkowe $x(0) = 2$ i $y(0) = 1$. Kolorem czerwonym zaznaczono populację drapieżników, a kolorem zielonym populację ofiar

WNIOSKI

Zauważmy, że liczebność populacji drapieżników jest ściśle związana z liczebnością populacji ofiar. Spadek populacji ofiar skutkuje zmniejszeniem populacji drapieżników. Ta zmiana skutkuje natomiast stworzeniem okoliczności, w której niezagrożona populacja ofiar wzrasta i cykl się powtarza, co zauważamy na wykresach przeprowadzonych symulacji [Figure 1-4].

Układ Lorentza

Układ Lorentza to model układu dynamicznego opisujący zjawisko konwekcji termicznej w atmosferze. Uwzględnia on lepkość ośrodka, jego przewodnictwo cieplne oraz rozmiary ośrodka, w którym odbywa się proces. Zaproponowany został przez Edwarda Lorentza w 1963 roku. [2]

MODEL

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - \beta z, \end{cases}$$

Figure 4: Matematyczny model układu Lorentza

Gdzie: σ – liczba Prandtla, charakteryzująca lepkość ośrodka; ρ – liczba Rayleigha, charakteryzująca przewodnictwo cieplne ośrodka; β – stała charakteryzująca rozmiary obszaru, w którym odbywa się przepływ konwekcyjny.

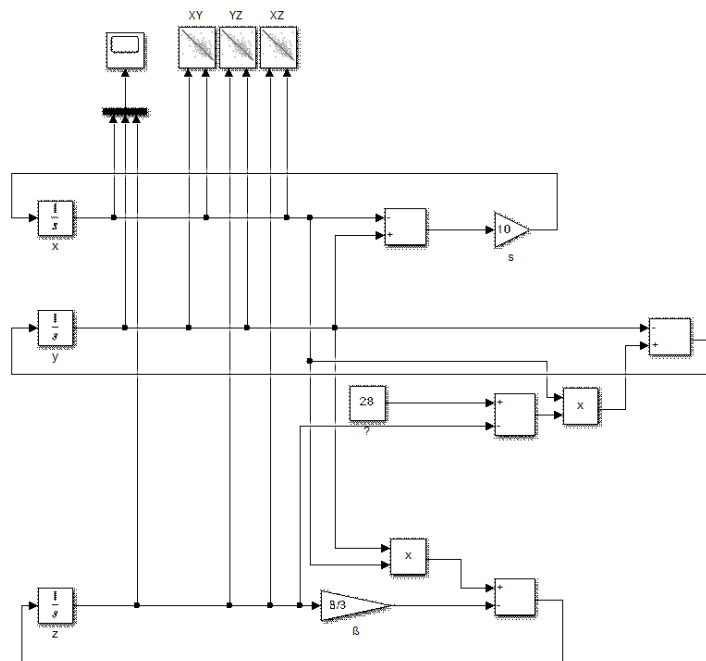


Figure 5: Realizacja modelu za pomocą biblioteki Simlink

OBSERWACJE

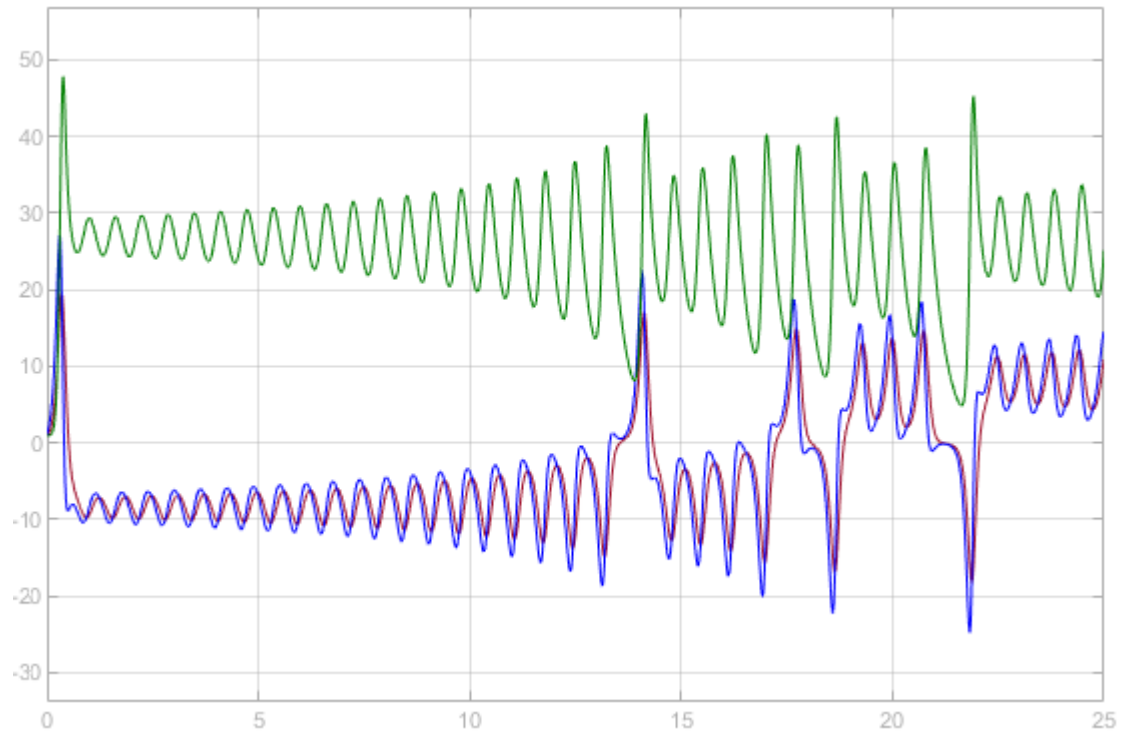


Figure 6: Wykresy $x(t)$ (czerwony), $y(t)$ (niebieski), $z(x)$ (zielony) dla czasu $t \in [0, 25]$ przy kroku $dt = 0.001$ dla parametrów $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ i $\rho = 28$ oraz warunków początkowych $x(0) = y(0) = z(0) = 1$

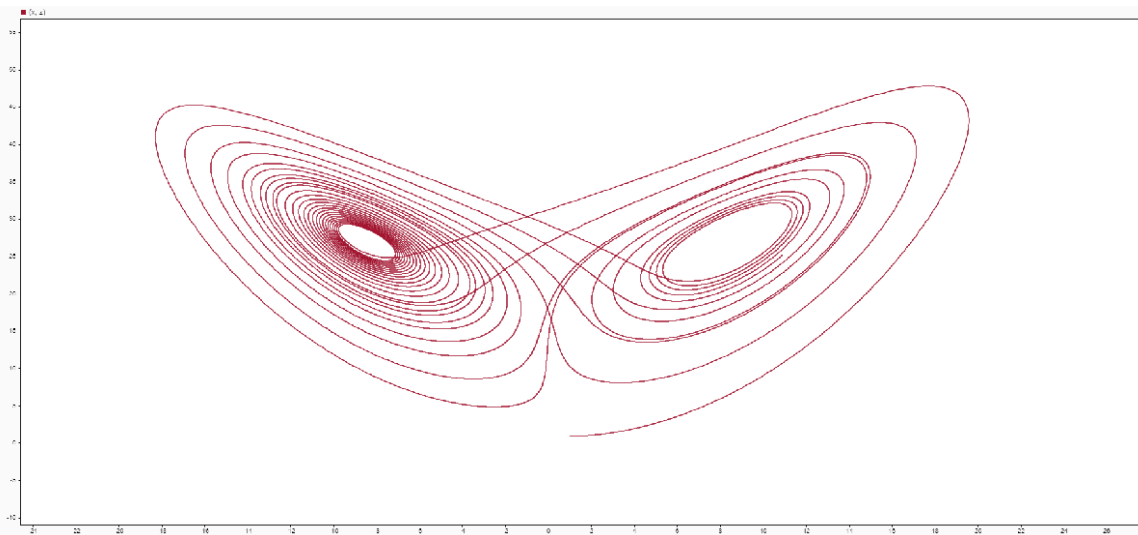
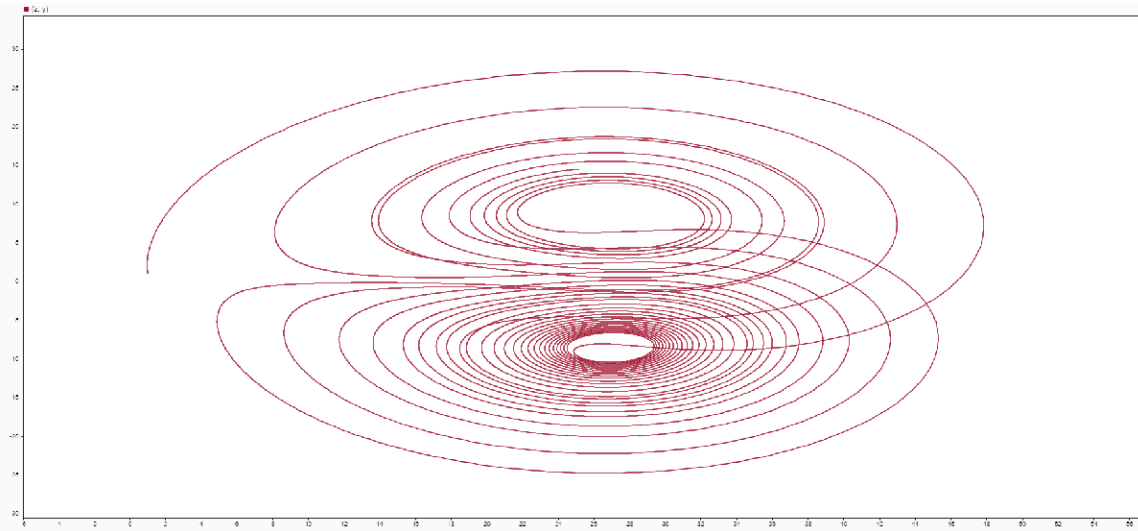
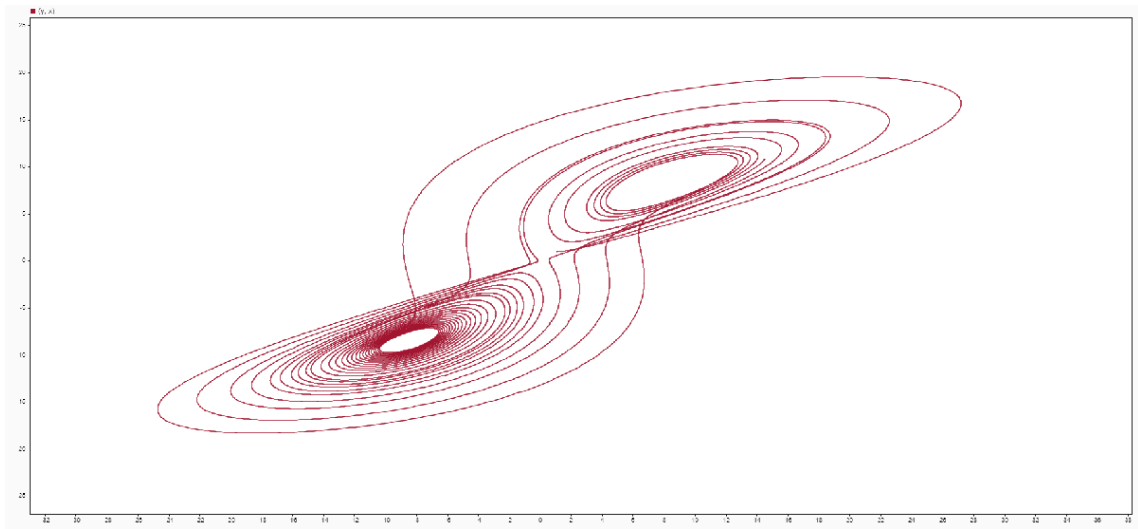


Figure 7: Wykresy $y(x)$, $z(y)$, $z(x)$ dla czasu $t \in [0, 25]$ przy kroku $dt = 0.001$ dla parametrów $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ i $\rho = 28$ oraz warunków początkowych $x(0) = y(0) = z(0) = 1$

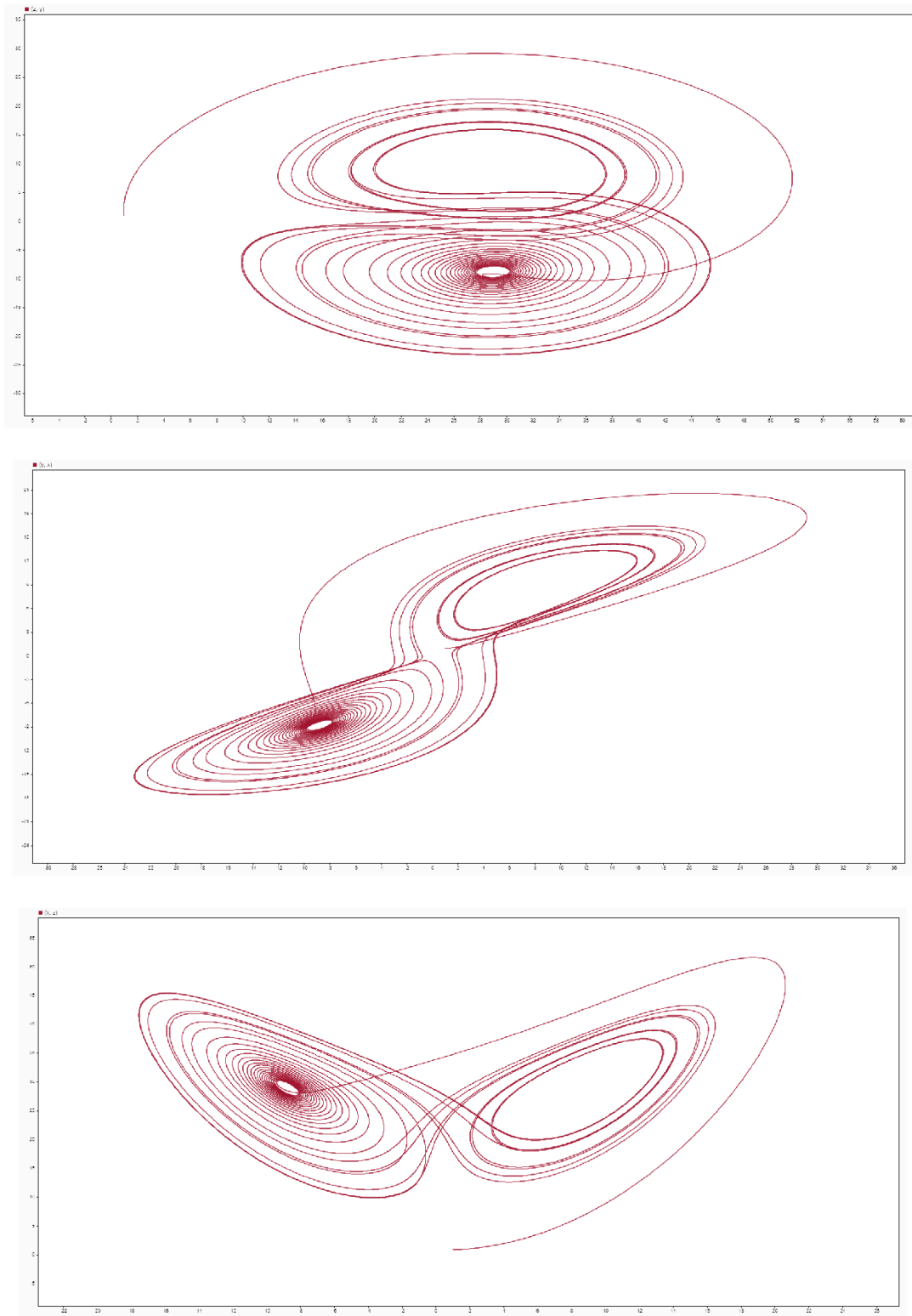


Figure 8: Wykresy $y(x)$, $z(y)$, $z(x)$ dla czasu $t \in [0, 25]$ przy kroku $dt = 0.001$ dla parametrów $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ i $\rho = 30$ oraz warunków początkowych $x(0) = y(0) = z(0) = 1$

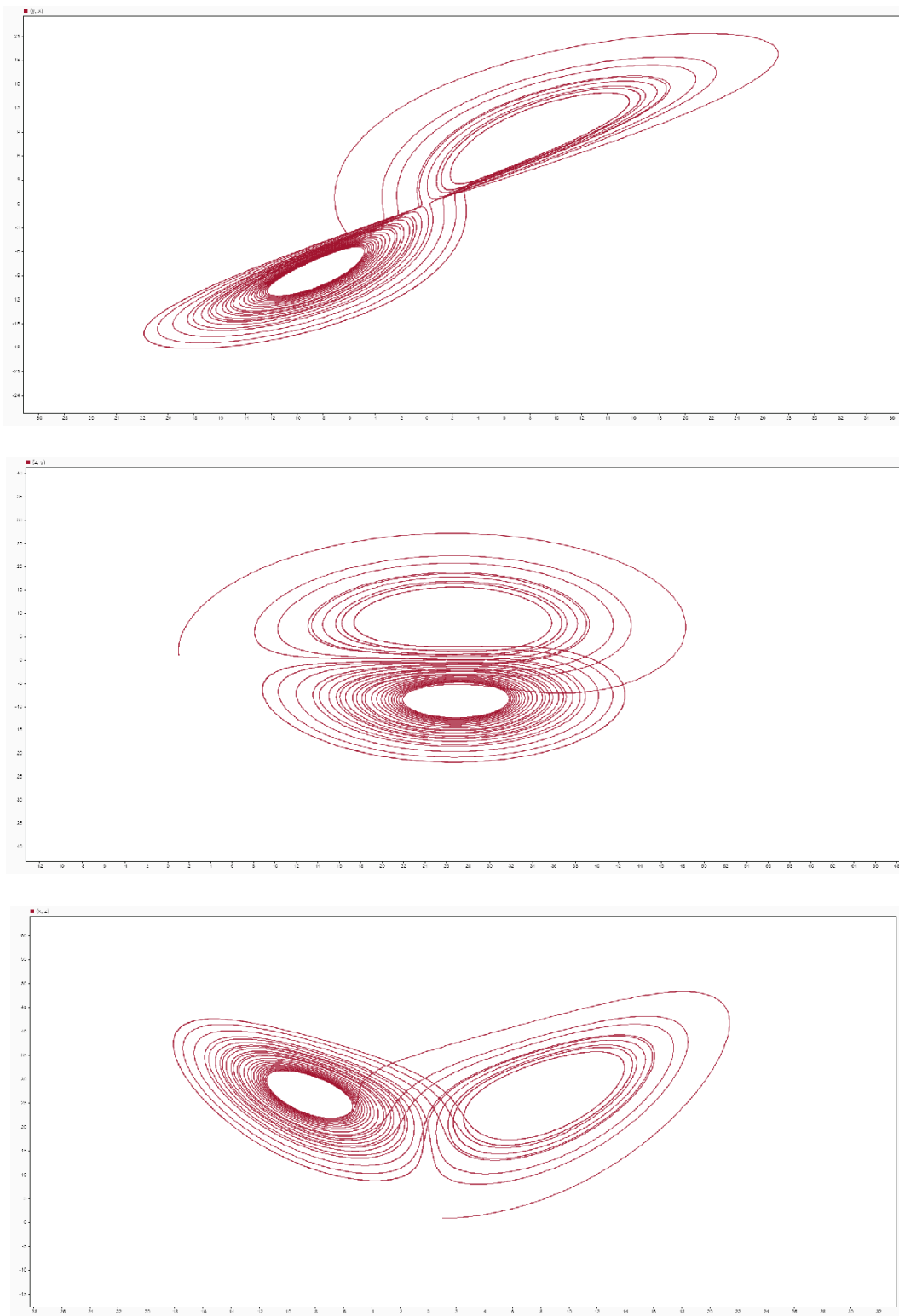


Figure 9: Wykresy $y(x)$, $z(y)$, $z(x)$ dla czasu $t \in [0, 25]$ przy kroku $dt = 0.001$ dla parametrów $\sigma = 15$, $\beta = 8/3$ i $\rho = 28$ oraz warunków początkowych $x(0) = y(0) = z(0) = 1$

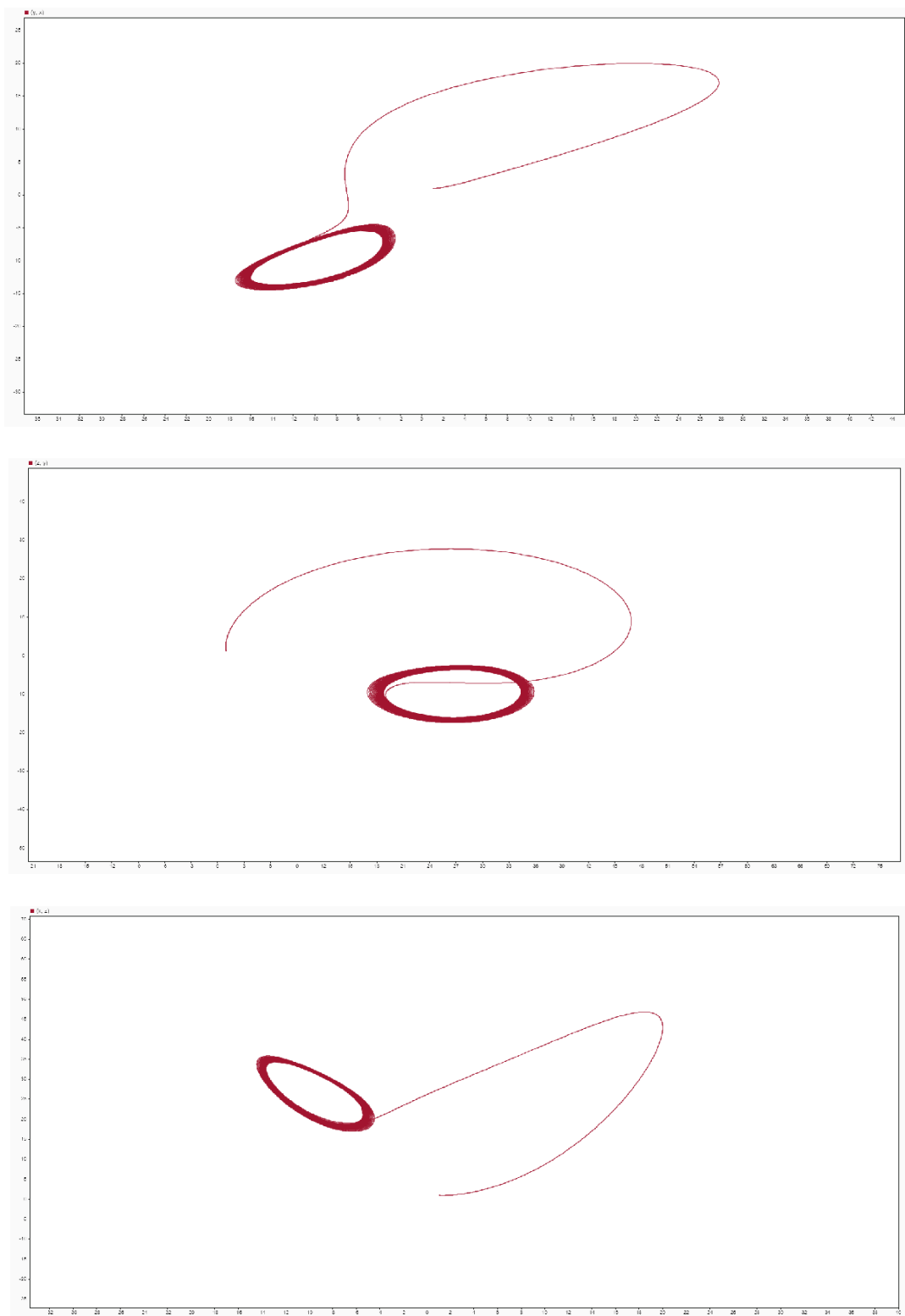


Figure 10: Wykresy $y(x)$, $z(y)$, $z(x)$ dla czasu $t \in [0, 25]$ przy kroku $dt = 0.001$ dla parametrów $\sigma = 10$, $\theta = 3.5$ i $\rho = 28$ oraz warunków początkowych $x(0) = y(0) = z(0) = 1$

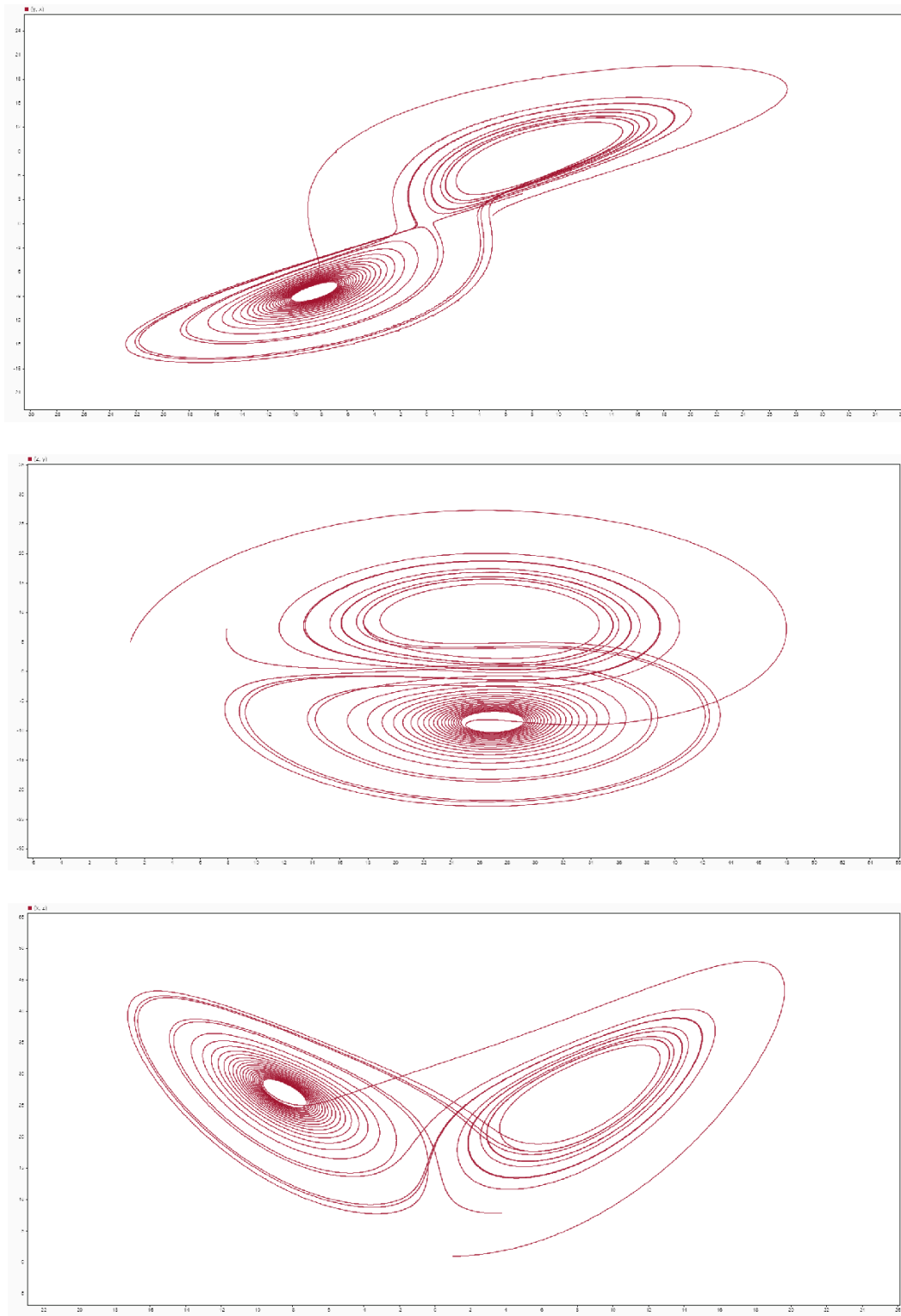


Figure 11: Wykresy $y(x)$, $z(y)$, $z(x)$ dla czasu $t \in [0, 25]$ przy kroku $dt = 0.001$ dla parametrów $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ i $\rho = 28$ oraz warunków początkowych $x(0) = z(0) = 1$ oraz $y(0) =$

5

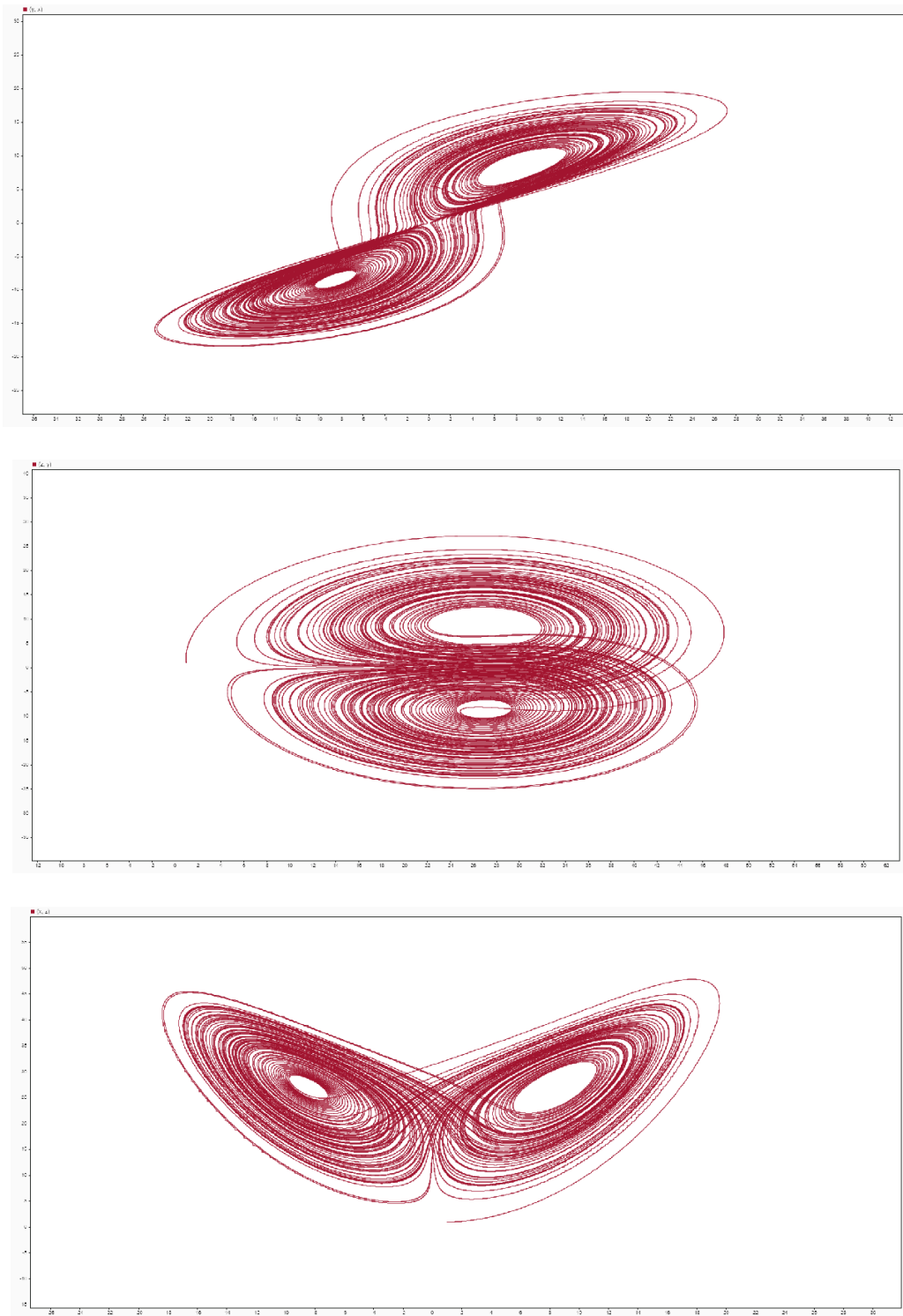


Figure 12: Wykresy $y(x)$, $z(y)$, $z(x)$ dla czasu $t \in [0, 100]$ przy kroku $dt = 0.001$ dla parametrów $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ i $\rho = 28$ oraz warunków początkowych $x(0) = y(0) = z(0) = 1$

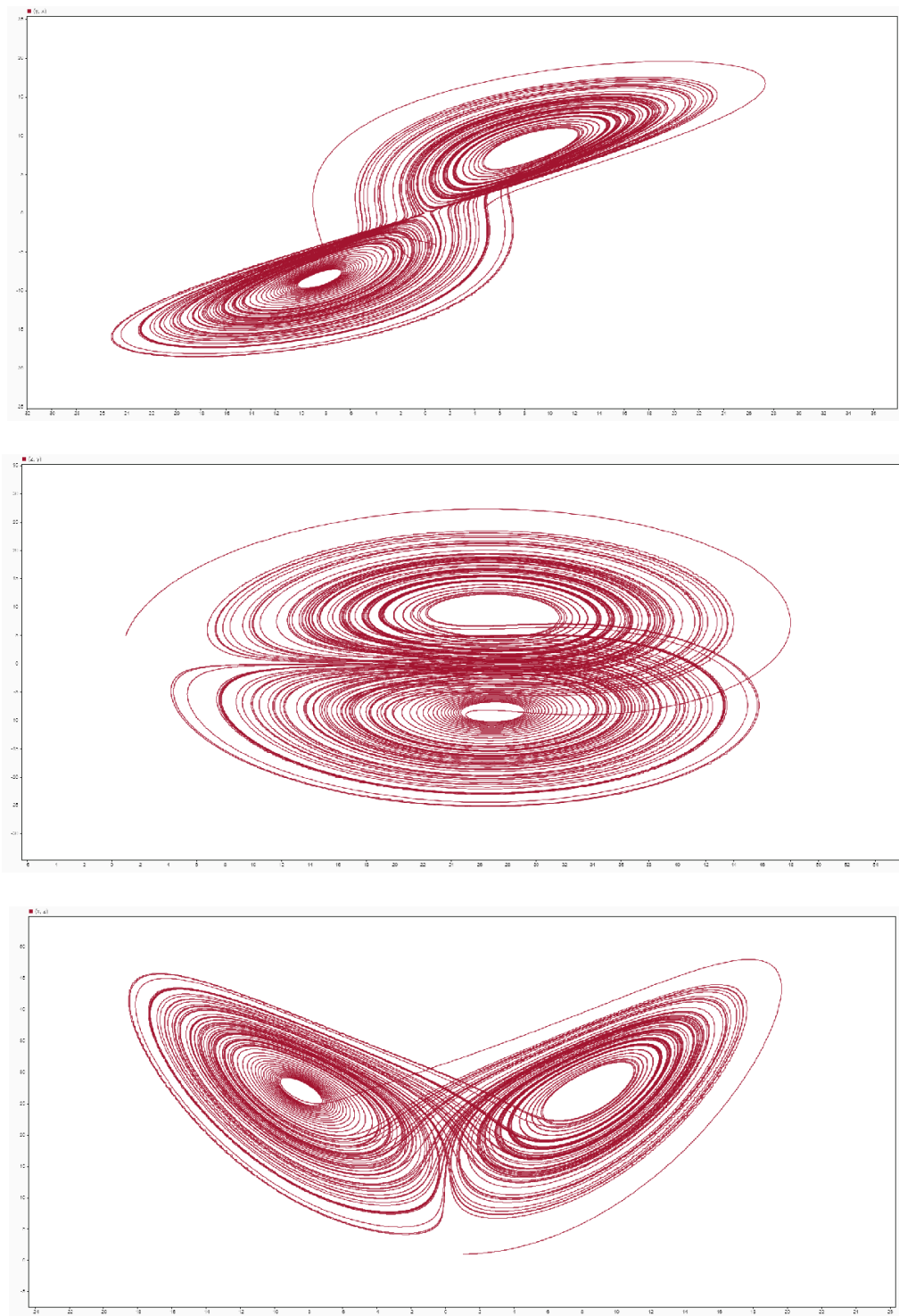


Figure 13: Wykresy

$y(x)$, $z(y)$, $z(x)$ dla czasu $t \in [0, 100]$ przy kroku $dt = 0.001$ dla parametrów $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ i $\rho = 28$ oraz warunków początkowych $x(0) = z(0) = 1$ oraz $y(0) = 5$

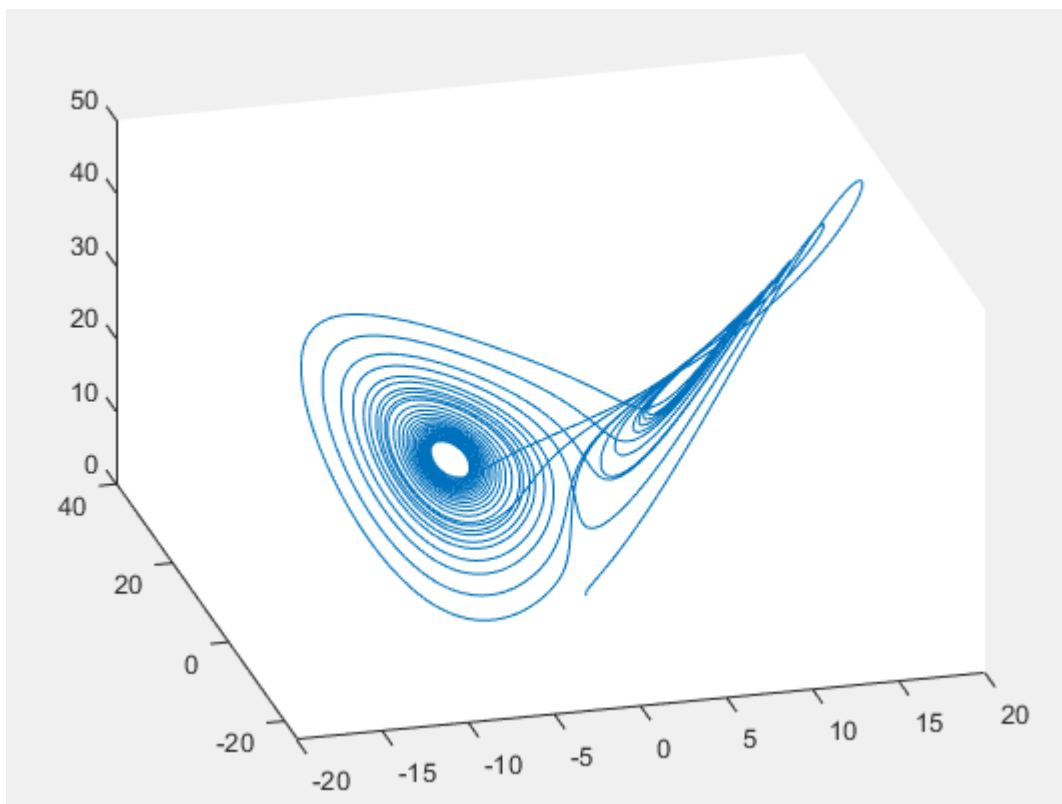


Figure 14: Wykres $z(x,y)$ dla czasu $t \in [0, 25]$ przy kroku $dt = 0.001$ dla parametrów $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ i $\rho = 28$ oraz warunków początkowych $x(0) = y(0) = z(0) = 1$

WNIOSKI

Manipulacja parametrem σ powoduje skośne rozszerzenia wykresów [Figure 9]; parametrem β - prędkość ewolucji układu [Figure 10], parametrem ρ - całościowe rozszerzenia wykresów [Figure 8]. Obserwując dwa modele o nieznacznie różniących się warunkach początkowych, wraz z upływem czasu symulacji zauważamy diametralne zmiany w ich zachowaniu [Figure 7, 11-13]. Układ równań Lorentza jest bardzo wrażliwy od warunków początkowych. Jest jednym z modeli określanych deterministycznie chaotycznymi podlegających efektowi motyla, które są podstawą teorii chaosu.

LITERATURA

- [1] J.D. Murray: Wprowadzenie do Biomatematyki. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2006.
- [2] Edward N. Lorenz: Deterministic Nonperiodic Flow. „J.Atmos.Sci.”. 20 (2), s. 130–141, 1963.