

## Lista 3

Hubert Jackowski

### Układ Lotki-Volterra

Równanie Lotki-Volterra to model układu dynamicznego opisujący wzajemną zależność rozmiarów populacji drapieżników i ofiar. Został on zaproponowany niezależnie przez dwóch badaczy Vito Volterrę w 1926 oraz Alfreda James Lotkę w 1920 roku. [1]

#### MODEL

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (a - by)x \\ \frac{dy}{dt} = (cx - d)y, \end{cases}$$

Figure 1: Matematyczny model układu Lotki-Volterra

Gdzie:  $x$  - populacja ofiar,  $y$  - populacja drapieżników,  $t$  - czas,  $a$  - częstość narodzin ofiar,  $b$  - częstość umierania ofiar,  $c$  - częstość narodzin drapieżników,  $d$  - częstość umierania drapieżników.

```
def lotkaVolterra(dt: float, t: float, x0: float, y0: float, a: float, b: float, c: float, d: float):  
    def _lotkaVolterra(state):  
        x, y = state  
  
        dx = (a - b * y) * x  
        dy = (c * x - d) * y  
  
        return np.array([dx, dy])  
  
    num_steps = int(t / dt)  
  
    states = np.empty((num_steps + 1, 2))  
    states[0] = (x0, y0)  
    for i in range(num_steps):  
        states[i + 1] = states[i] + _lotkaVolterra(states[i]) * dt  
    return states
```

Figure 2: Realizacja modelu za pomocą metody Eulera w języku Python

```
def lotkaVolterra(dt: float, t: float, x0: float, y0: float, a: float, b: float, c: float, d: float):  
    def _lotkaVolterra(state, _t, _a, _b, _c, _d) -> list:
```

```

x, y = state

dx = (_a - _b * y) * x
dy = (_c * x - _d) * y

return [dx, dy]

args = (x0, y0)
time = np.arange(0.0, t, dt)
param = (a, b, c, d)
return odeint(_lotkaVolterra, args, time, param)

```

Figure 3: Realizacja modelu za pomocą metody `scipy.integrate.odeint` w języku Python

## OBSERWACJE

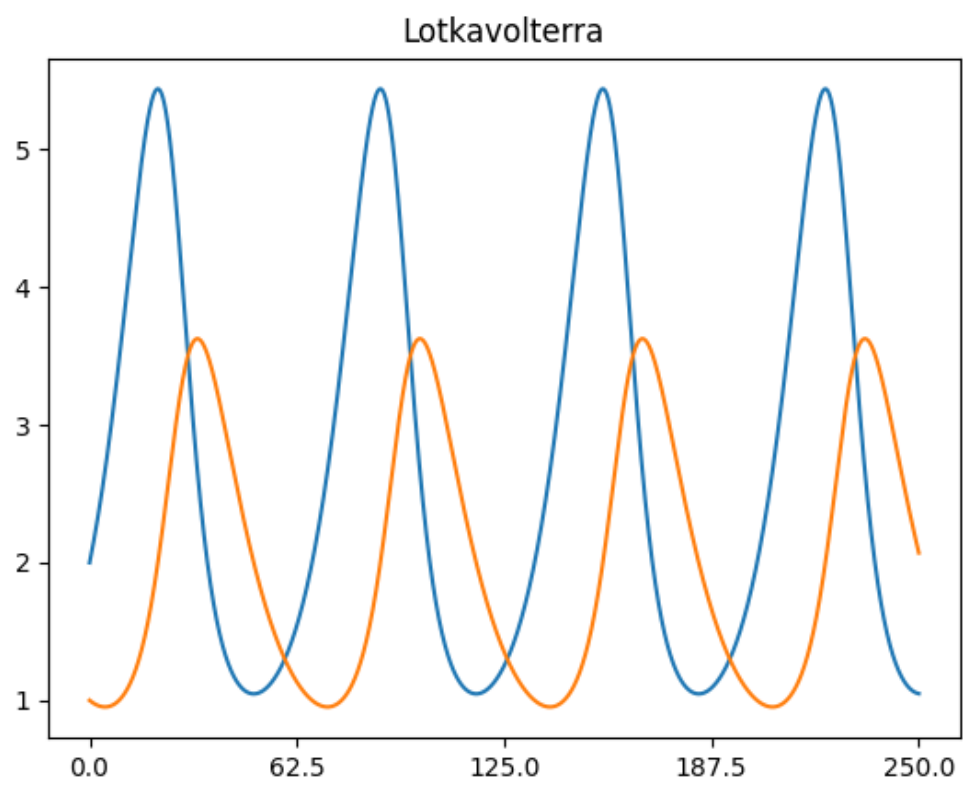
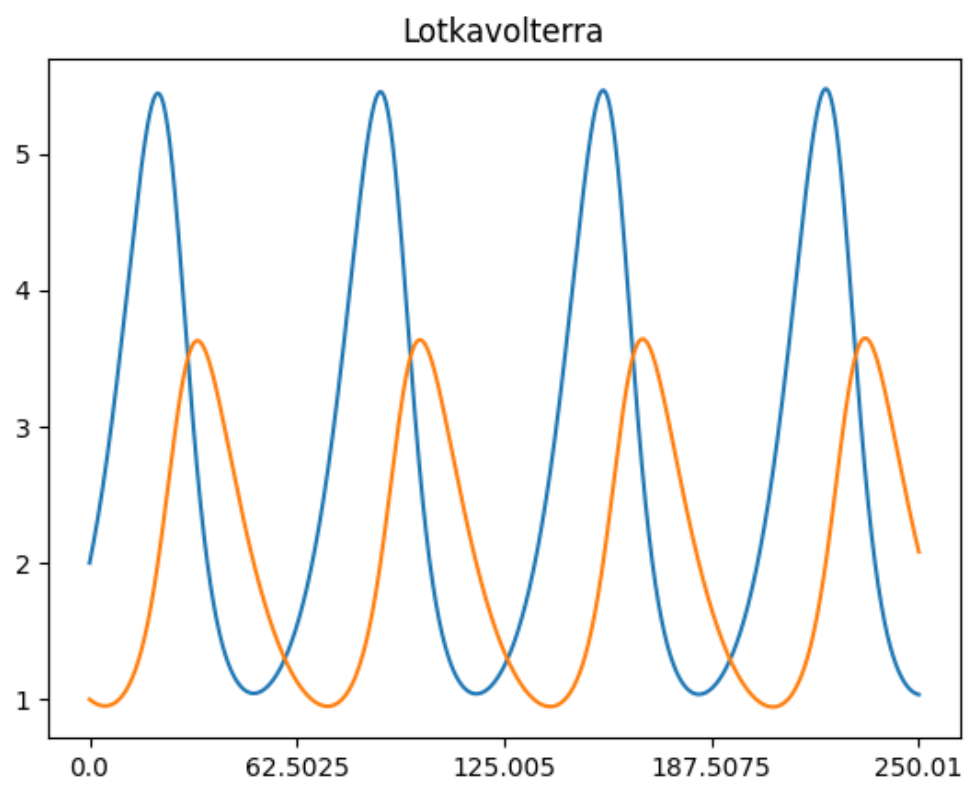


Figure 3: Rezultat symulacji dla wartości parametrów modelu  $a = 1.2$ ,  $b = 0.6$ ,  $c = 0.3$ ,  $d = 0.8$  oraz populacje początkowe  $x(0) = 2$  i  $y(0) = 1$ . Kolorem czerwonym zaznaczono populację drapieżników, a kolorem zielonym populację ofiar

### WNIOSKI

Zauważmy, że liczebność populacji drapieżników jest ściśle związana z liczebnością populacji ofiar. Spadek populacji ofiar skutkuje zmniejszeniem populacji drapieżników. Ta zmiana skutkuje natomiast stworzeniem okoliczności, w której niezagrożona populacja ofiar wzrasta i cykl się powtarza, co zauważamy na wykresach przeprowadzonych symulacji [Figure 1-4].

## Układ Lorentza

Układ Lorentza to model układu dynamicznego opisujący zjawisko konwekcji termicznej w atmosferze. Uwzględnia on lepkość ośrodka, jego przewodnictwo cieplne oraz rozmiary ośrodka, w którym odbywa się proces. Zaproponowany został przez Edwarda Lorentza w 1963 roku. [2]

### MODEL

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - \beta z, \end{cases}$$

Figure 4: Matematyczny model układu Lorentza

Gdzie:  $\sigma$  – liczba Prandtla, charakteryzująca lepkość ośrodka;  $p$  – liczba Rayleigha, charakteryzująca przewodnictwo cieplne ośrodka;  $\beta$  – stała charakteryzująca rozmiary obszaru, w którym odbywa się przepływ konwekcyjny.

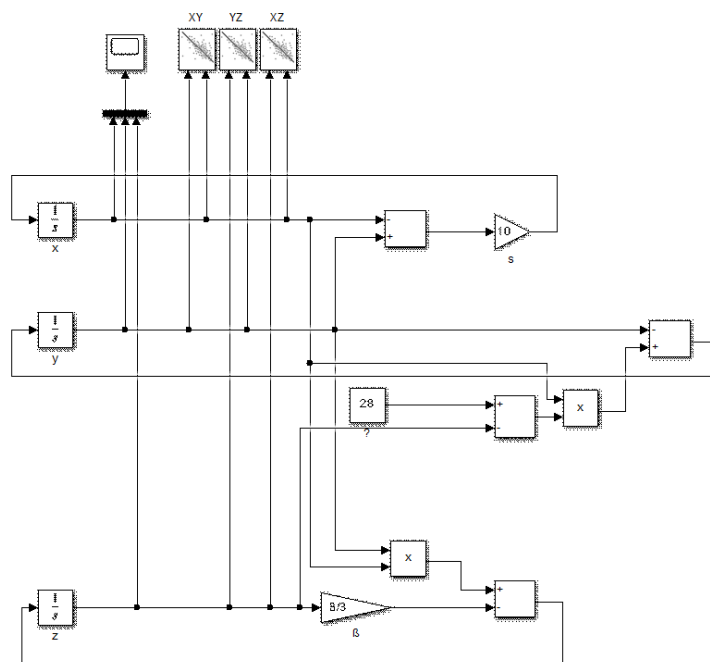


Figure 5: Realizacja modelu za pomocą biblioteki Simlink

## OBSERWACJE

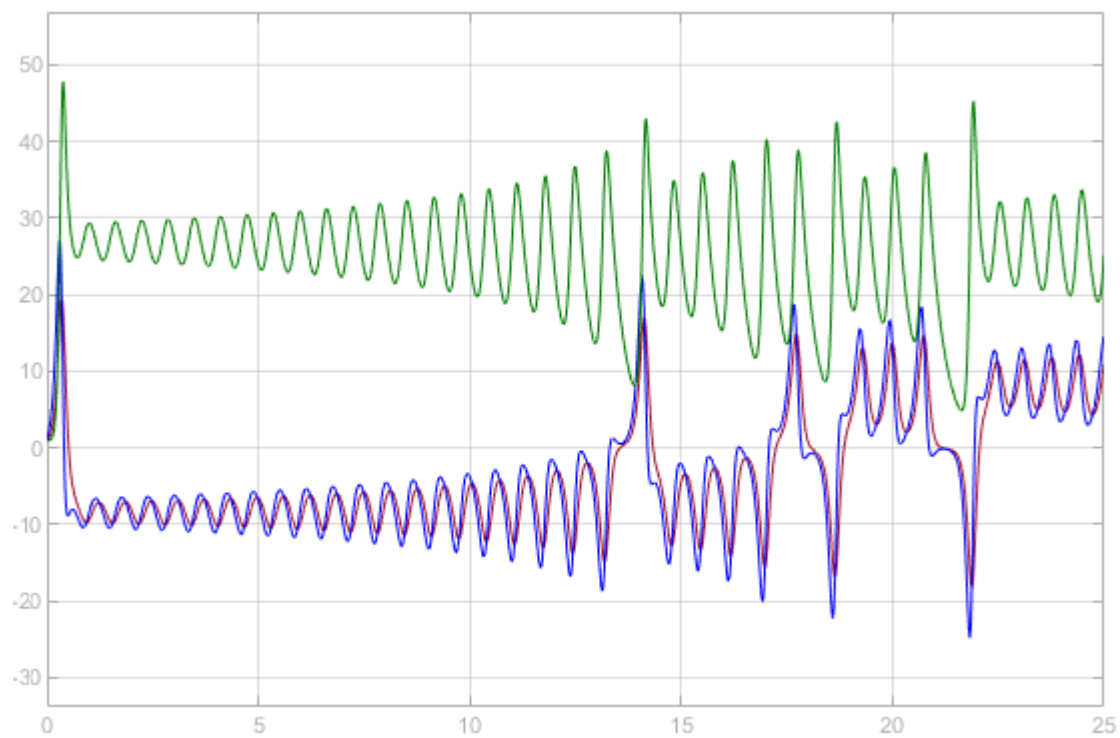


Figure 6: Wykresy  $x(t)$  (czerwony),  $y(t)$  (niebieski),  $z(x)$  (zielony) dla czasu  $t \in [0, 25]$  przy kroku  $dt = 0.001$  dla parametrów  $\sigma = 10$ ,  $\beta = 8/3$  i  $\rho = 28$  oraz warunków początkowych  $x(0) = y(0) = z(0) = 1$

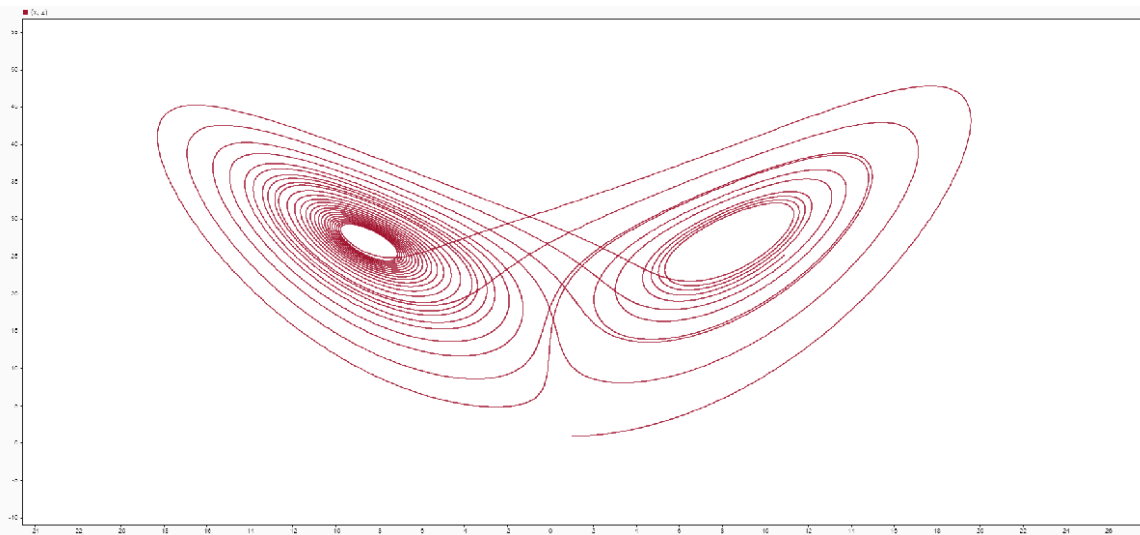
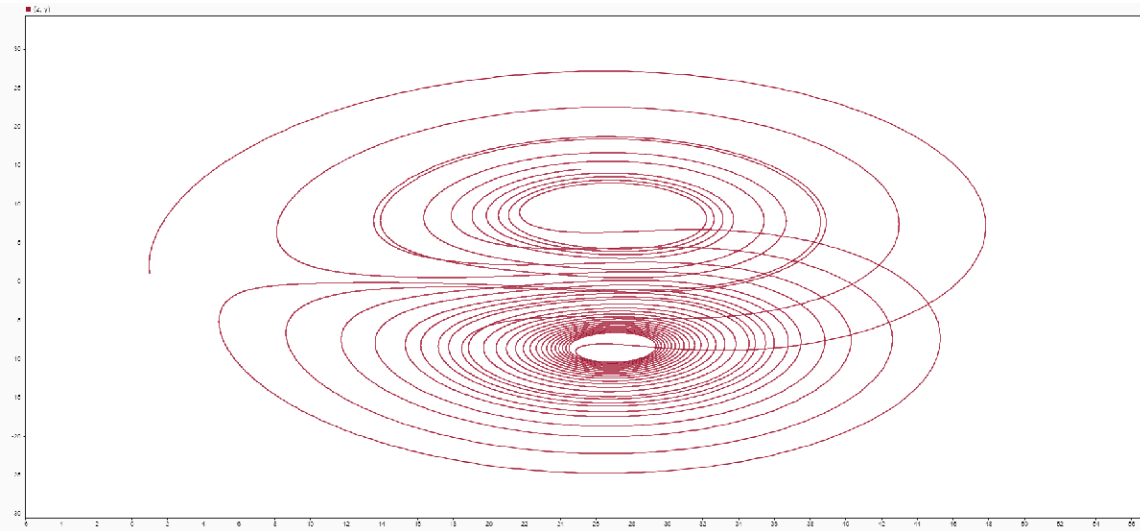
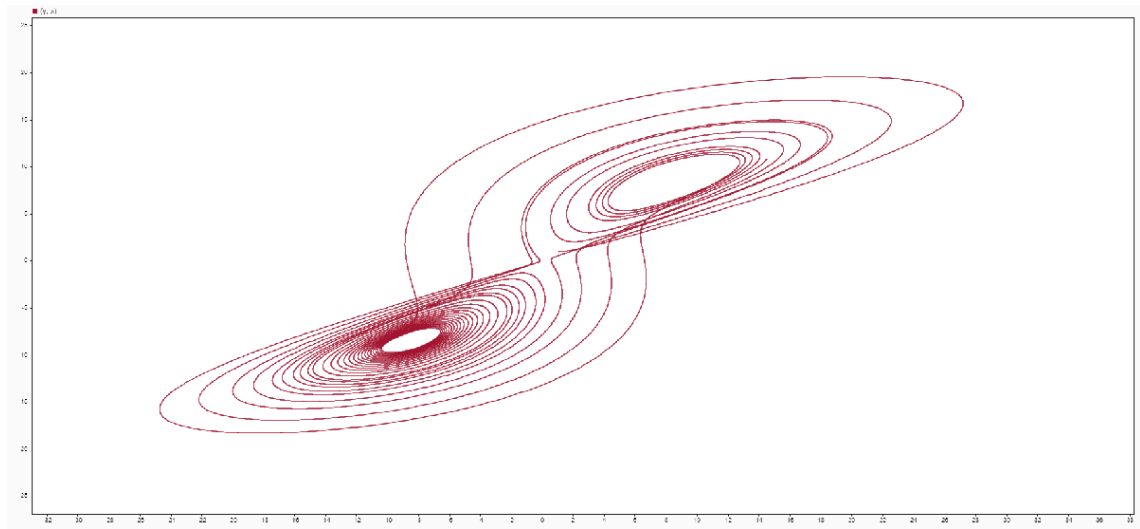


Figure 7: Wykresy  $y(x)$ ,  $z(y)$ ,  $z(x)$  dla czasu  $t \in [0, 25]$  przy kroku  $dt = 0.001$  dla parametrów  $\sigma = 10$ ,  $\beta = 8/3$  i  $\rho = 28$  oraz warunków początkowych  $x(0) = y(0) = z(0) = 1$

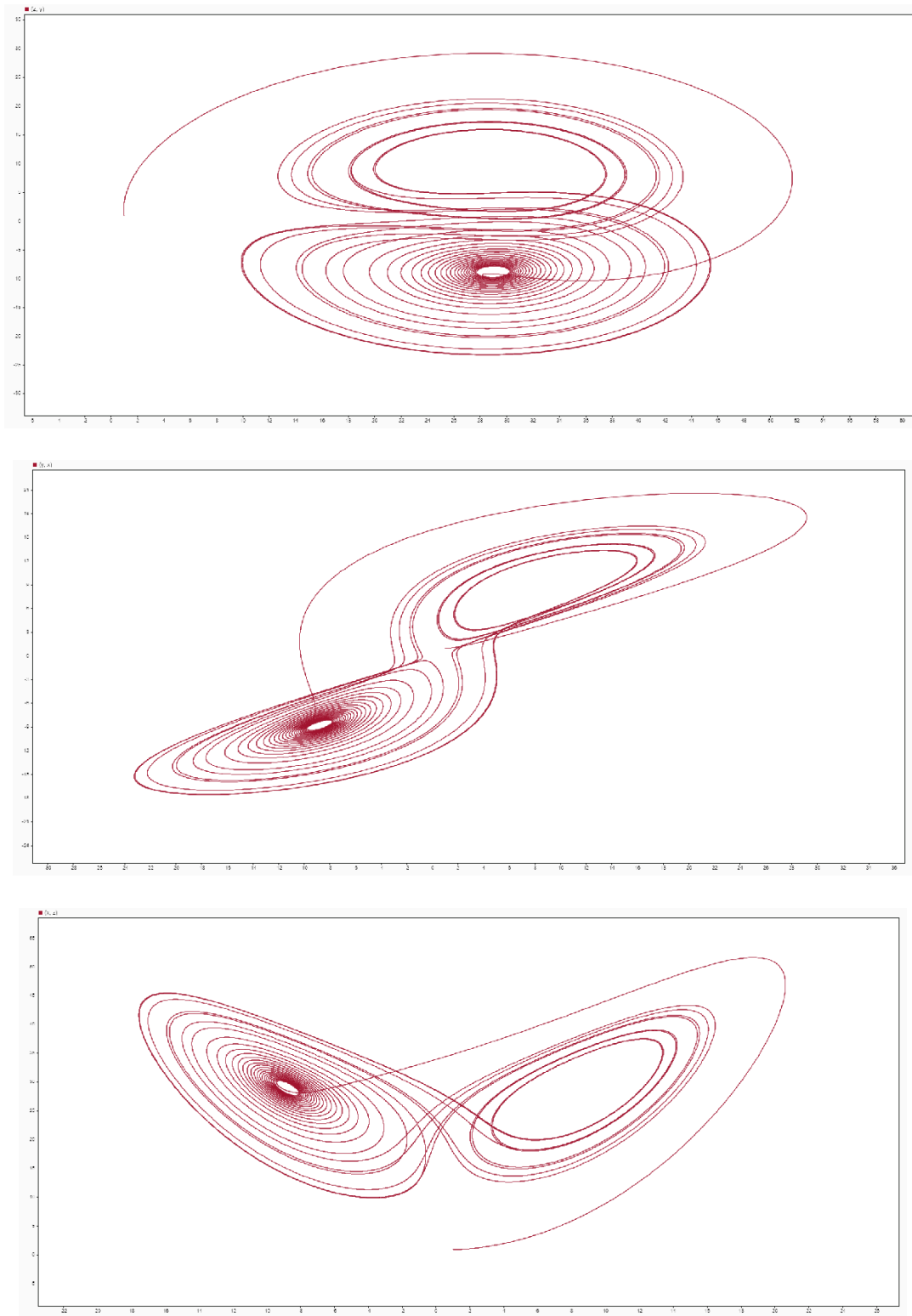


Figure 8: Wykresy  $y(x)$ ,  $z(y)$ ,  $z(x)$  dla czasu  $t \in [0, 25]$  przy kroku  $dt = 0.001$  dla parametrów  $\sigma = 10$ ,  $\beta = 8/3$  i  $\rho = 29$  oraz warunków początkowych  $x(0) = y(0) = z(0) = 1$



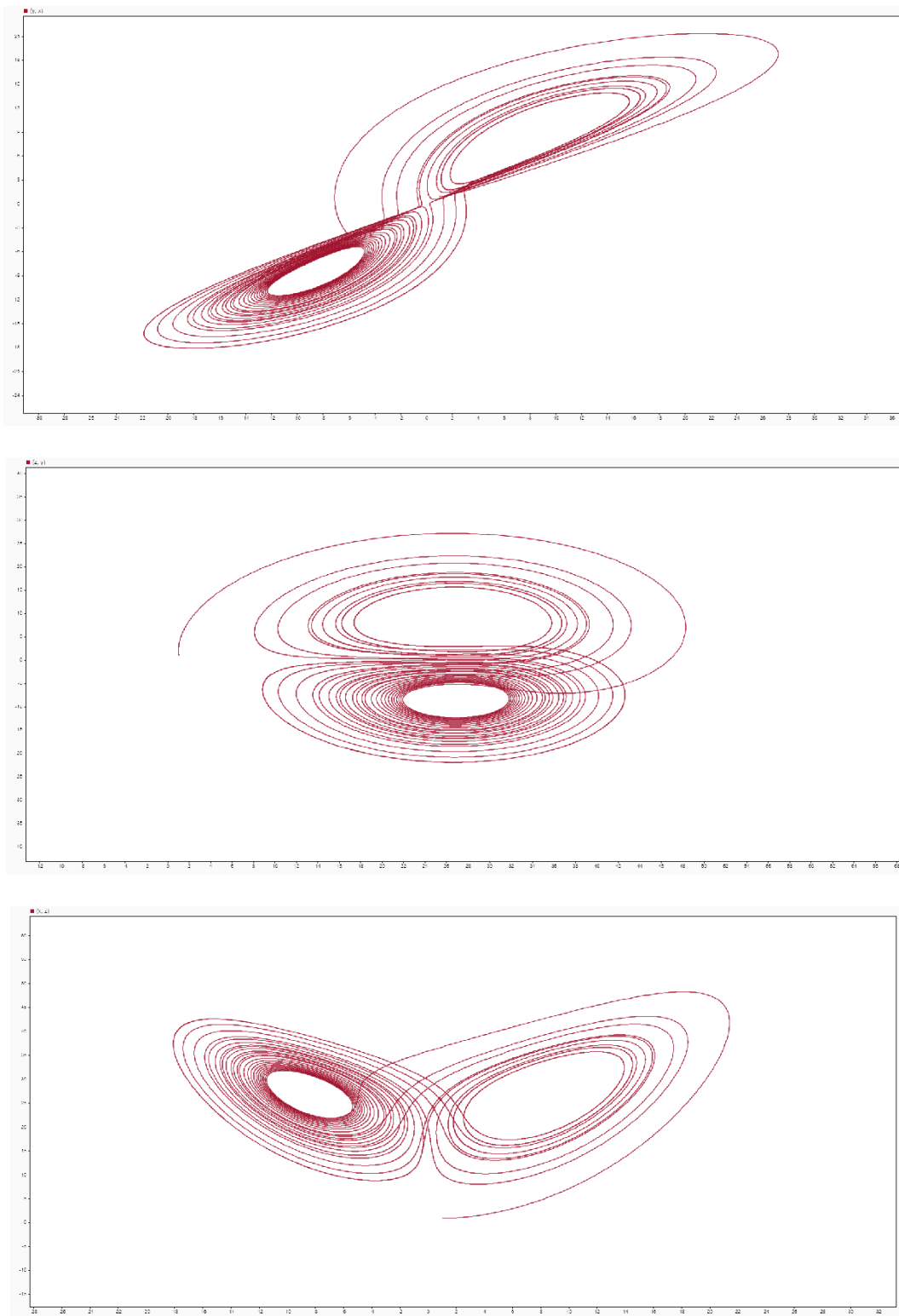


Figure 9: Wykresy  $y(x)$ ,  $z(y)$ ,  $z(x)$  dla czasu  $t \in [0, 25]$  przy kroku  $dt = 0.001$  dla parametrów  $\sigma = 12.5$ ,  $\beta = 8/3$  i  $\rho = 28$  oraz warunków początkowych  $x(0) = y(0) = z(0) = 1$

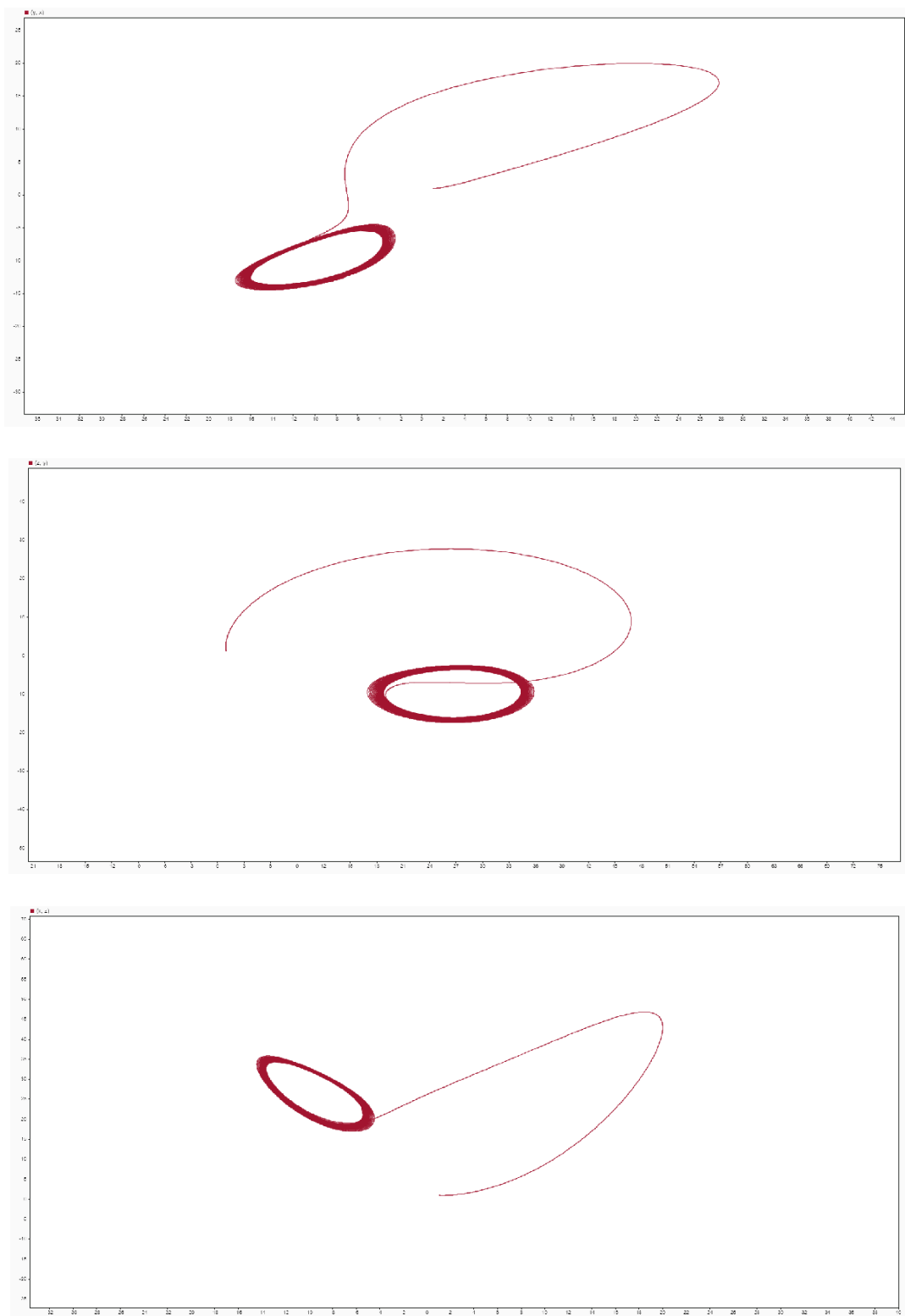


Figure 10: Wykresy  $y(x)$ ,  $z(y)$ ,  $z(x)$  dla czasu  $t \in [0, 25]$  przy kroku  $dt = 0.001$  dla parametrów  $\sigma = 10$ ,  $\theta = 3.5$  i  $\rho = 28$  oraz warunków początkowych  $x(0) = y(0) = z(0) = 1$

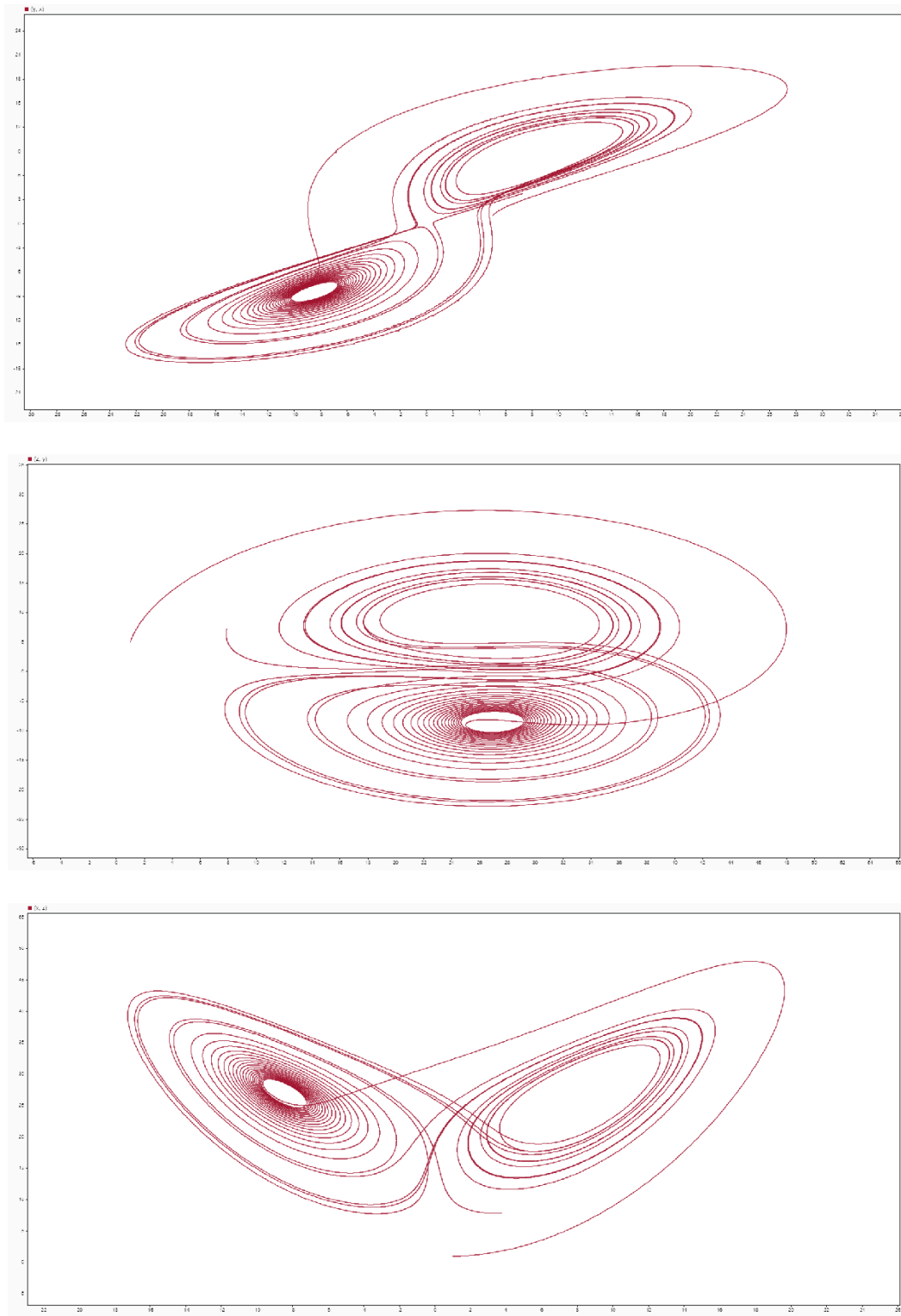


Figure 11: Wykresy  $y(x)$ ,  $z(y)$ ,  $z(x)$  dla czasu  $t \in [0, 25]$  przy kroku  $dt = 0.001$  dla parametrów  $\sigma = 10$ ,  $\beta = 8/3$  i  $\rho = 28$  oraz warunków początkowych  $x(0) = z(0) = 1$  oraz  $y(0) =$   
5

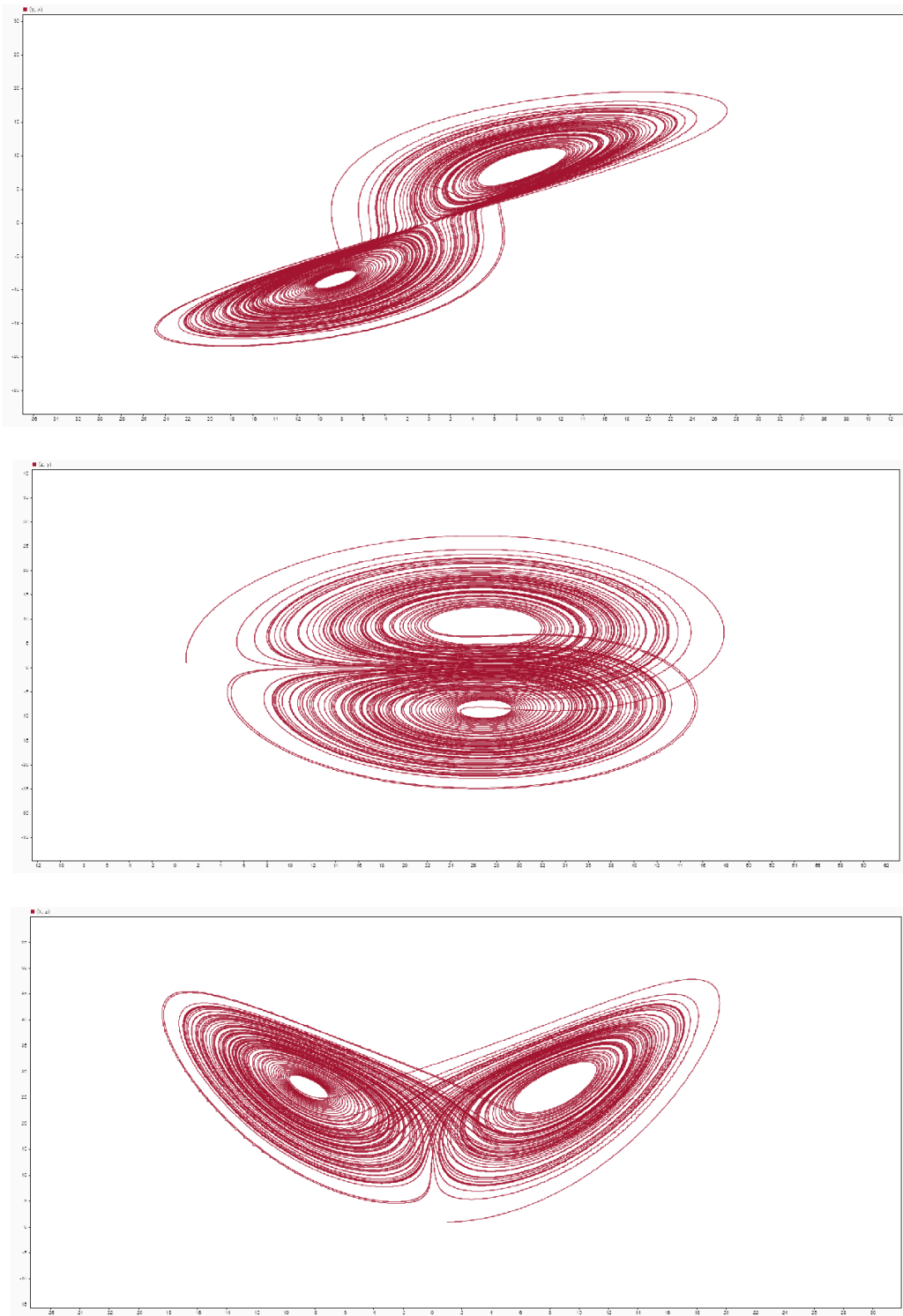


Figure 12: Wykresy  $y(x)$ ,  $z(y)$ ,  $z(x)$  dla czasu  $t \in [0, 100]$  przy kroku  $dt = 0.001$  dla parametrów  $\sigma = 10$ ,  $\beta = 8/3$  i  $\rho = 28$  oraz warunków początkowych  $x(0) = y(0) = z(0) = 1$

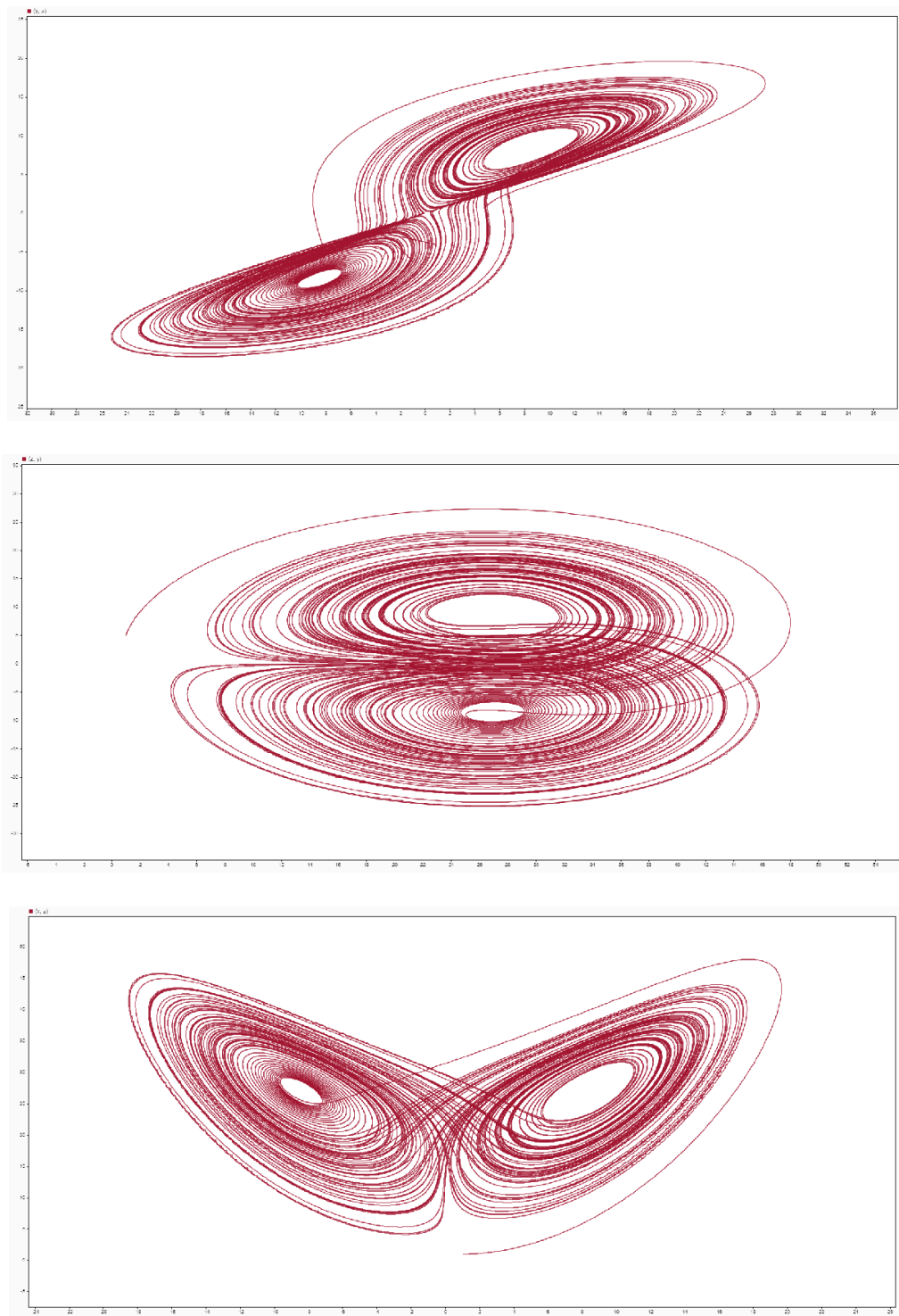


Figure 13: Wykresy

$y(x)$ ,  $z(y)$ ,  $z(x)$  dla czasu  $t \in [0, 100]$  przy kroku  $dt = 0.001$  dla parametrów  $\sigma = 10$ ,  $\beta = 8/3$  i  $\rho = 28$  oraz warunków początkowych  $x(0) = z(0) = 1$  oraz  $y(0) = 4$

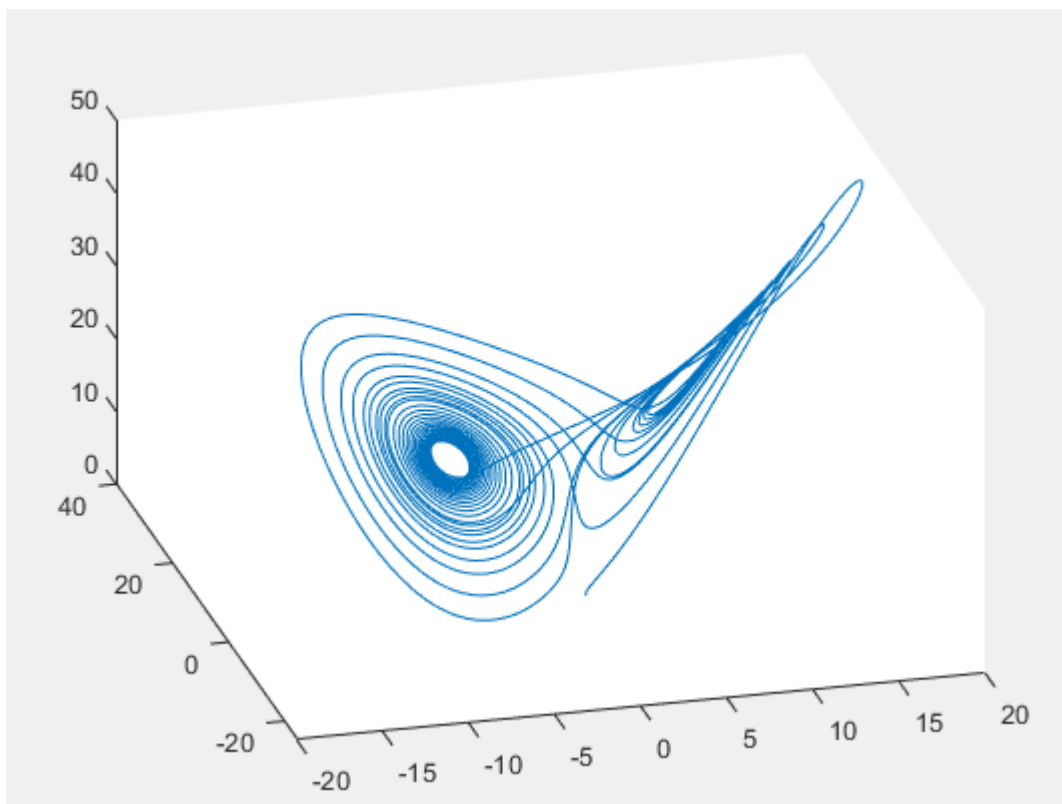


Figure 14: Wykres  $z(x,y)$  dla czasu  $t \in [0, 25]$  przy kroku  $dt = 0.001$  dla parametrów  $\sigma = 10$ ,  $\beta = 8/3$  i  $\rho = 28$  oraz warunków początkowych  $x(0) = y(0) = z(0) = 1$

## WNIOSKI

Manipulacja parametrem  $\sigma$  powoduje skośne rozszerzenia wykresów [Figure 9]; parametrem  $\beta$  - prędkość ewolucji układu [Figure 10], parametrem  $\rho$  - całościowe rozszerzenia wykresów [Figure 8]. Obserwując dwa modele o nieznacznie różniących się warunkach początkowych, wraz z upływem czasu symulacji zauważamy diametralne zmiany w ich zachowaniu [Figure 7, 11-13]. Układ równań Lorentza jest bardzo wrażliwy od warunków początkowych. Jest jednym z modeli określanych deterministycznie chaotycznymi podlegających efektowi motyla, które są podstawą teorii chaosu. Zjawisko, które można zaobserwować na wykresach nazywane zostało przez E. Lorentza jest atraktorem dziwnym. Jest to określenie opisujące naprowadzanie trajektorii na cykliczne krążenie wokół punktu względnej równowagi, która następnie zostaje ponownie przełamana. Podobne zjawiska deterministycznie chaotyczne można zauważyć w wielu dziedzinach nauki. Przykładem takiego występowania są układy planetarne, zjawiska meteorologiczne i tym podobne.

## LITERATURA

- [1] J.D. Murray: Wprowadzenie do Biomatematyki. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2006.
- [2] Edward N. Lorenz: Deterministic Nonperiodic Flow. „J.Atmos.Sci.”. 20 (2), s. 130-141, 1963.