TRIANGULACJE WIELOKĄTA PROSTEGO

Przemysław Rola
Juliusz Wasieleski
Grupa 1, rok II Informatyka, WIET
Styczeń 2023

DEFINICJA TRIANGULACJI:

- Triangulacja wielokąta w 2D to podział wielokąta na trójkąty, których jedynymi wierzchołkami są wierzchołki wielokąta.

- Wszystkie te trójkąty muszą mieścić się wewnątrz wejściowego wielokąta

- Żadne dwa trójkąty nie mogą na siebie nachodzić poza krawędziami, ani przecinać się poza wierzchołkami.

- Dla każdego wielokąta można znaleźć jego triangulację

- W każdej Z nich będzie znajdować się taka sama liczba trójkątów

- Dla jednego wielokąta istnieje często wiele różnych triangulacji

1. TRIANGULACJA PRZY UŻYCIU WIELOKĄTÓW MONOTONICZNYCH

OPIS ALGORYTMU:

2.1 KLASYFIKACJA WIERZCHOŁKÓW WIELOKĄTA

2.2 PODZIAŁ WIELOKĄTA NA WIELOKĄTY MONOTONICZNE

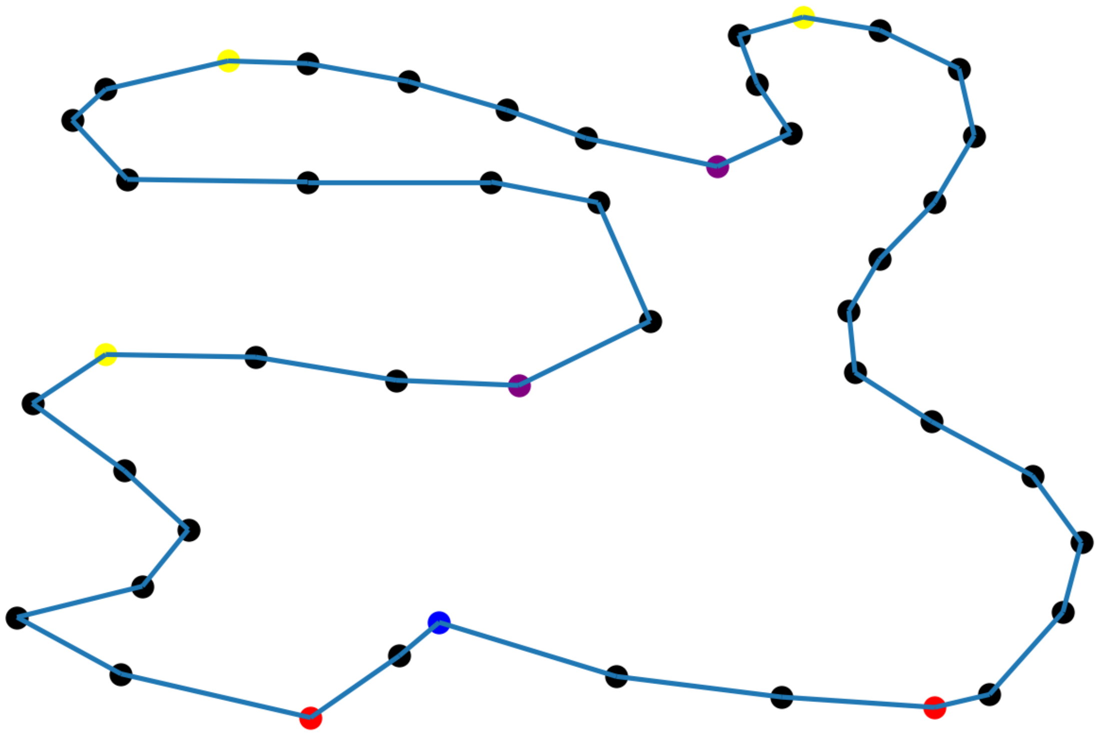
2.3 TRIANGULACJA WIELOKĄTÓW MONOTONICZNYCH

2.4 POŁĄCZENIE POWSTAŁYCH ZBIORÓW TRÓJKĄTÓW W JEDEN

2.1 KLASYFIKACJA WIERZCHOŁKÓW WIELOKĄTA

Wierzchołki dzielimy na:

- Początkowe
- Końcowe
- Dzielące
- Łączące
- Prawidłowe

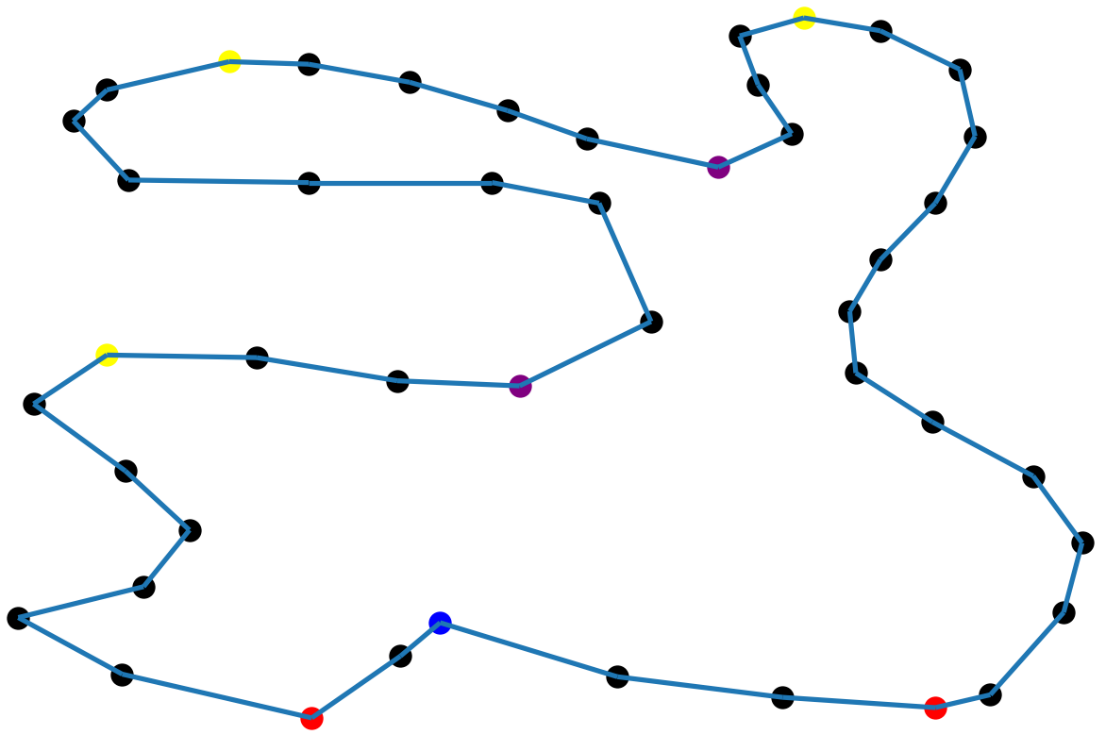


Efekt klasyfikacji

ZASADY PODZIAŁU WIELOKĄTA NA WIERZCHOŁKI

Wierzchołek jest:

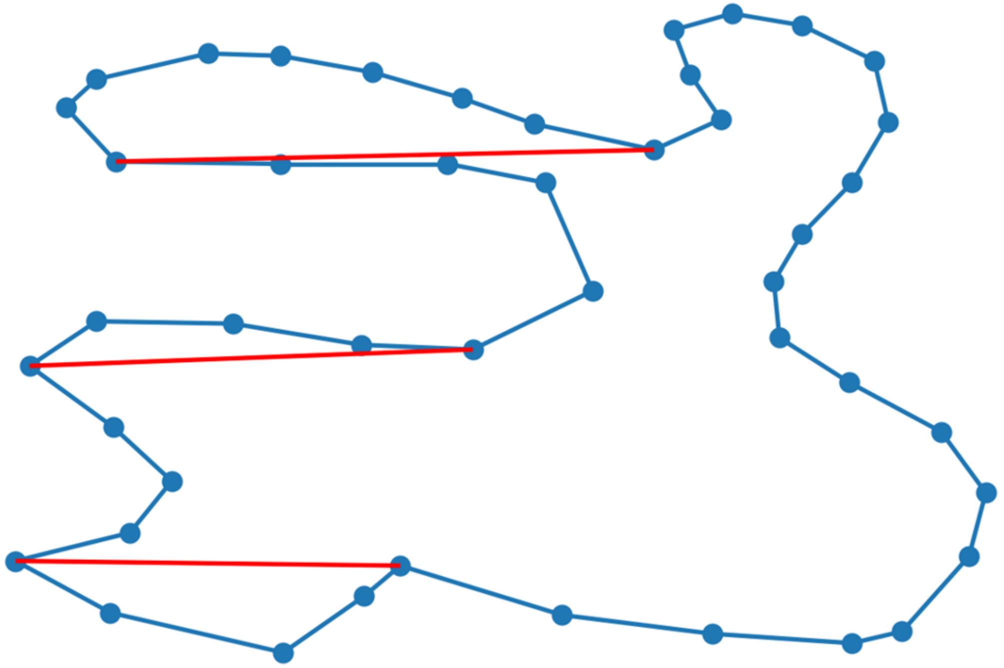
- Początkowy, gdy leży powyżej swoich sąsiadów i kąt przy nim jest wypukły
- Końcowy, gdy leży poniżej swoich sąsiadów i kąt przy nim jest wypukły
- Łączący, gdy leży poniżej swoich sąsiadów i kąt przy nim jest wklęsły
- Dzielący, gdy leży powyżej swoich sąsiadów i kąt przy nim jest wklęsły
- Prawidłowy, gdy leży powyżej jednego ze swoich sąsiadów, a powyżej dru



Efekt klasyfikacji

2.2 PODZIAŁ WIELOKĄTA NA WIELOKĄTY MONOTONICZNE

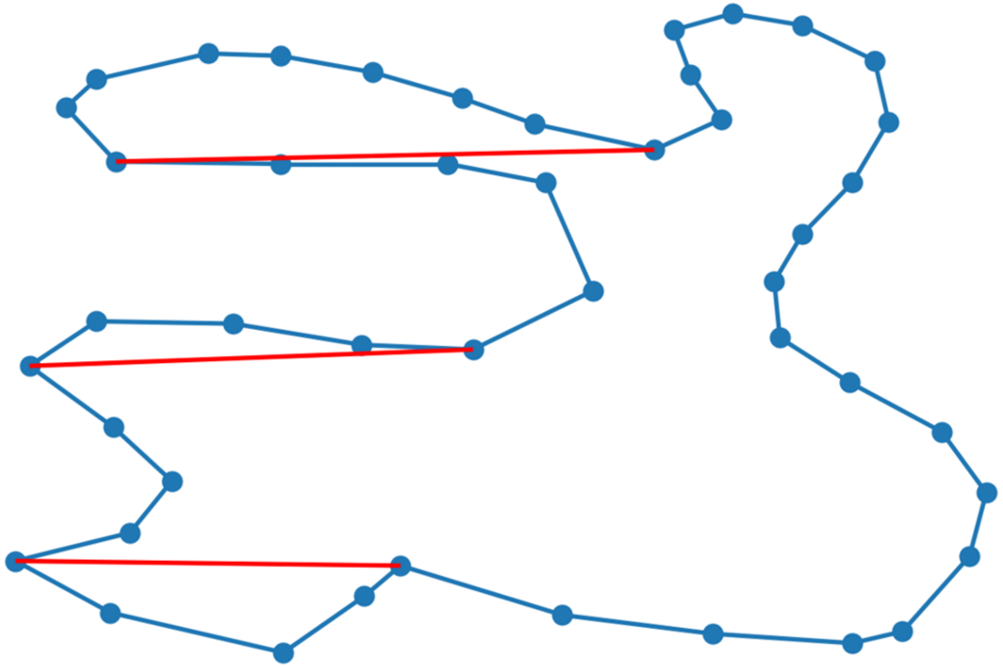
Podział wielokąta na wielokąty monotoniczne wykonywany jest za pomocą algorytmu zamiatającego, przechodzącego po kolejnych wierzchołkach wielokąta, i na podstawie ich rodzajów. Po kolejnych wierzchołkach, z góry na dół przechodzi miotła zatrzymująca się przy każdym wierzchołku. Dodatkowo w algorytmie występuje struktura stanu przechowująca wszystkie lewe krawędzie wielokąta



Efekt podziału na wielokąty monotoniczne

OZNACZENIA PODCZAS PODZIAŁ WIELOKĄTA NA WIELOKĄTY MONOTONICZNE

Oznaczenia:
- v – dany wierzchołek
- e_l – krawędź przylegająca do v, na lewo od niego
- e_p – krawędź przylegająca do v, na prawo od niego
- e_v – krawędź bezpośrednio na lewo od v
- T – struktura stanu w następujących wierzchołkach miotła wykonuje czynności:



Efekt podziału na wielokąty monotoniczne

WIERZCHOŁEK POCZĄTKOWY I KOŃCOWY

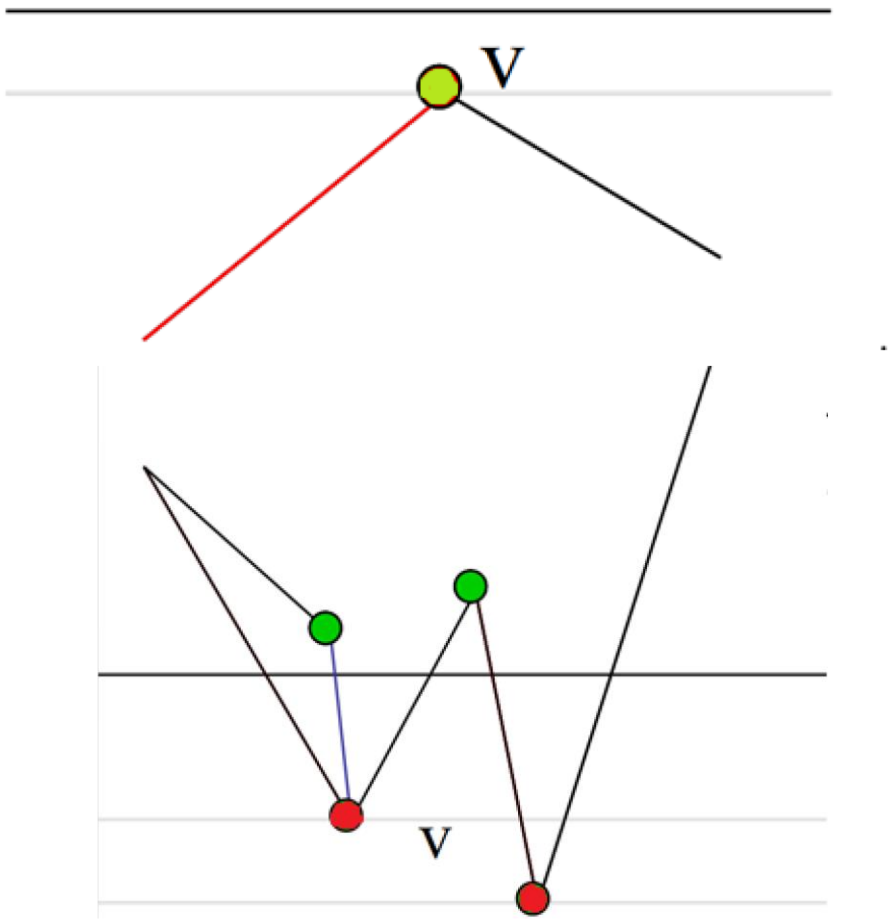
Początkowy:

- wstaw e_l do T
- ustaw pomocnika e_l jako v

Końcowy:

- jeżeli pomocnik e_l jest wierzchołkiem łączącym:

  wstawienie przekątnej miedzy v i jej pomocnik usunięcie e_l ze struktury stanu

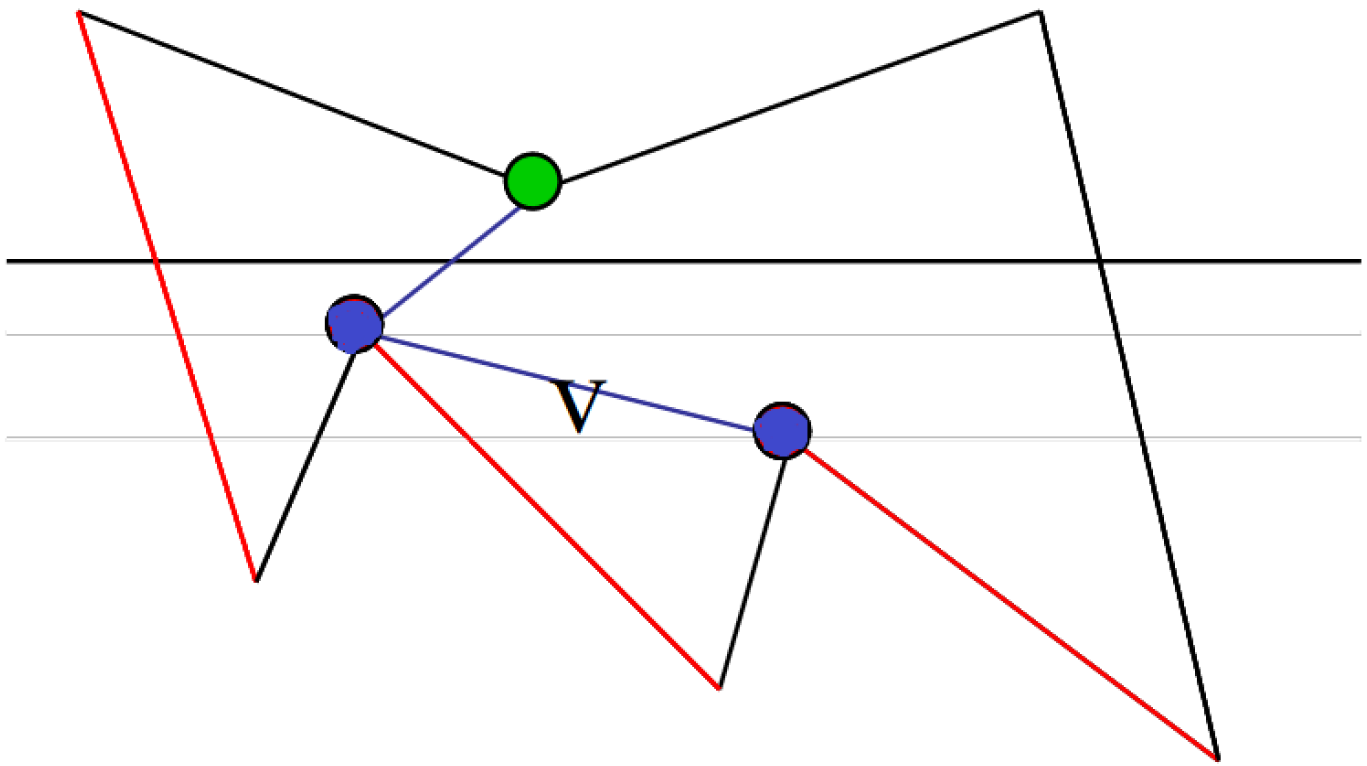


Przykładowe momenty podczas napotkania tych wierzchołków zaczerpnięte z wykładu

WIERZCHOŁEK DZIELĄCY

Dzielący:

- Znalezienie e_v w T
- wstawienie przekątnej między v i pomocnik e_v
- ustawienie pomocnika e_v na v
- wstawienie e_p do T
- ustawienie pomocnika e_p na v



Przykładowe momenty podczas napotkania tych wierzchołków zaczerpnięte z wykładu

WIERZCHOŁEK ŁĄCZĄCY

Łączący:

• jeżeli pomocnik e_p jest wierzchołkiem łączącym:

wstawienie przekątnej między v pomocnik e_p

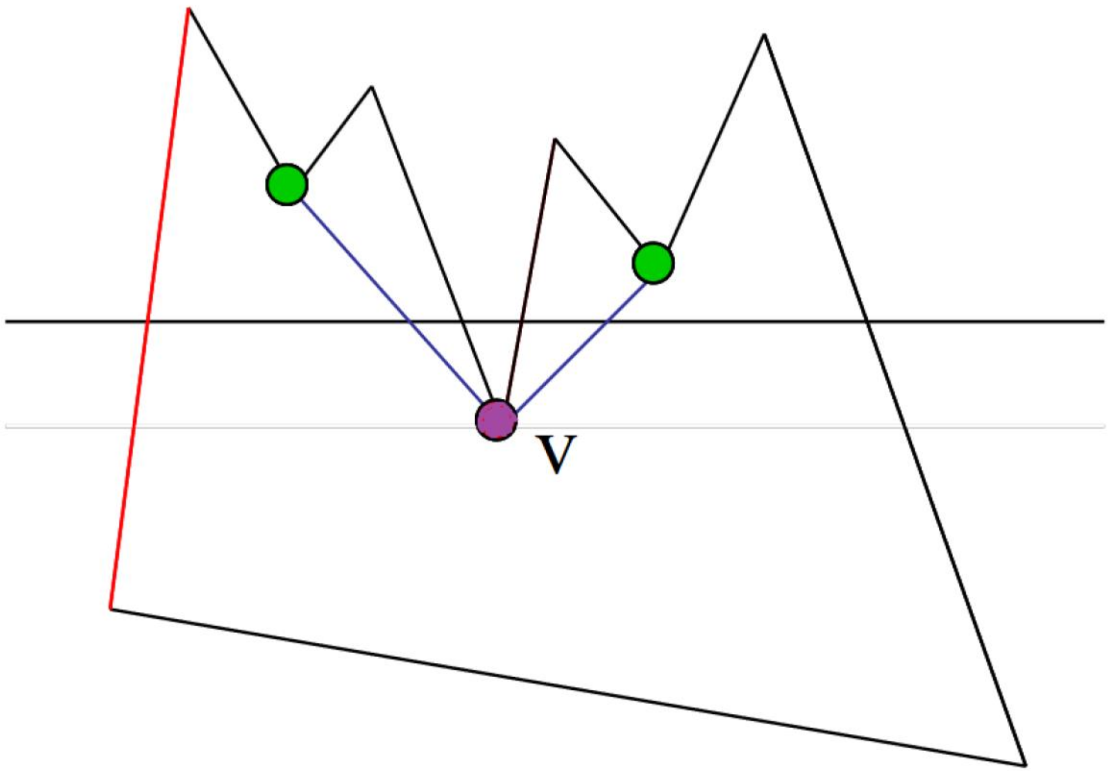
• usunięcie e_p z T

• znalezienie e_v w T

• jeżeli pomocnik e_v jest wierzchołkiem łączącym:

wstawienie przekątnej między v pomocnik e_v

• ustawienie pomocnika e_v na v



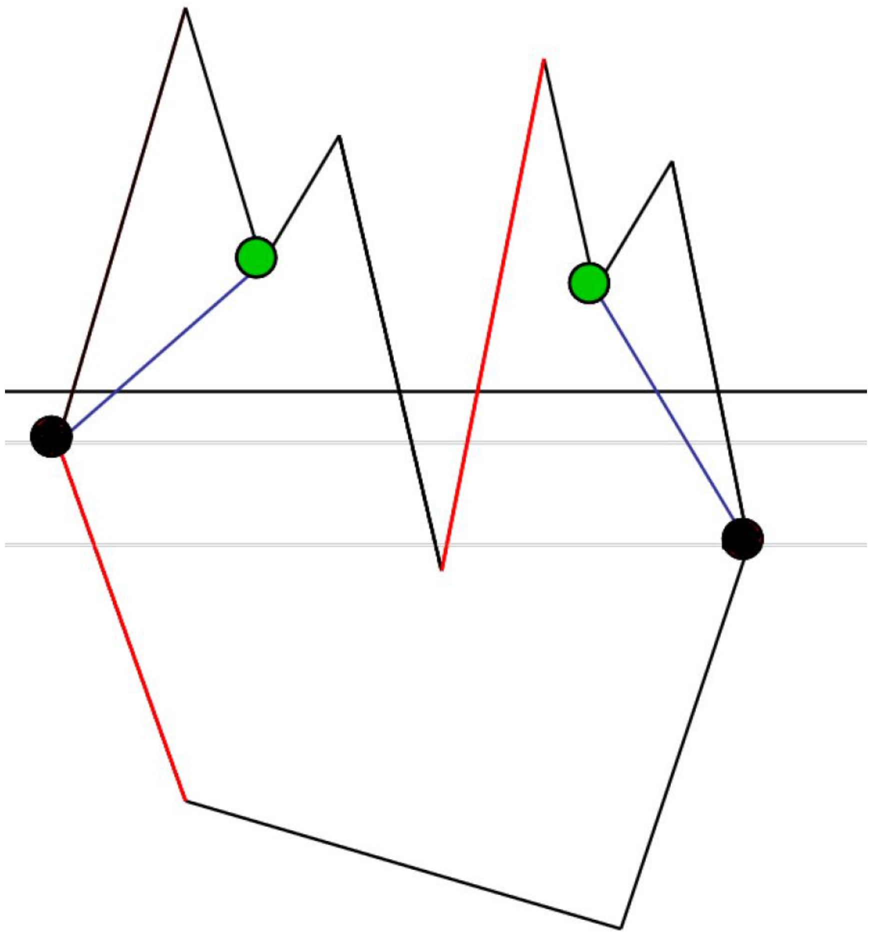
Przykładowe momenty podczas napotkania tych wierzchołków zaczerpnięte z wykładu

WIERZCHOŁEK PRAWIDŁOWY

Prawidłowy:

- e_g, e_d to krawędzie na górze i na dole v
- Jeżeli wnętrze P jest na prawo od v:
  - jeżeli pomocnik e_g jest wierzchołkiem łączącym:
    - wstawienie przekątnej między v pomocnik e_g
  - usunięcie e_g z T
  - wstawienie e_d do T
  - ustawienie pomocnika e_d na v

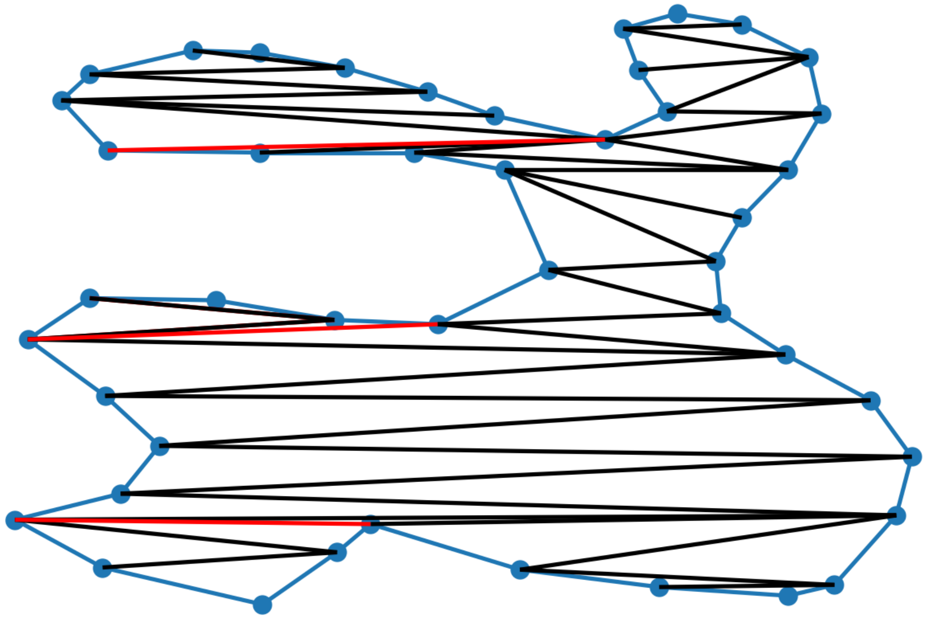
W przeciwnym wypadku:
  - znalezienie e_v w T
  - jeżeli pomocnik e_v jest wierzchołkiem łączącym:
    - wstawienie przekątnej między v pomocnik e_v
  - ustawienie pomocnika e_v na v



Przykładowe momenty podczas napotkania tych wierzchołków zaczerpnięte z wykładu

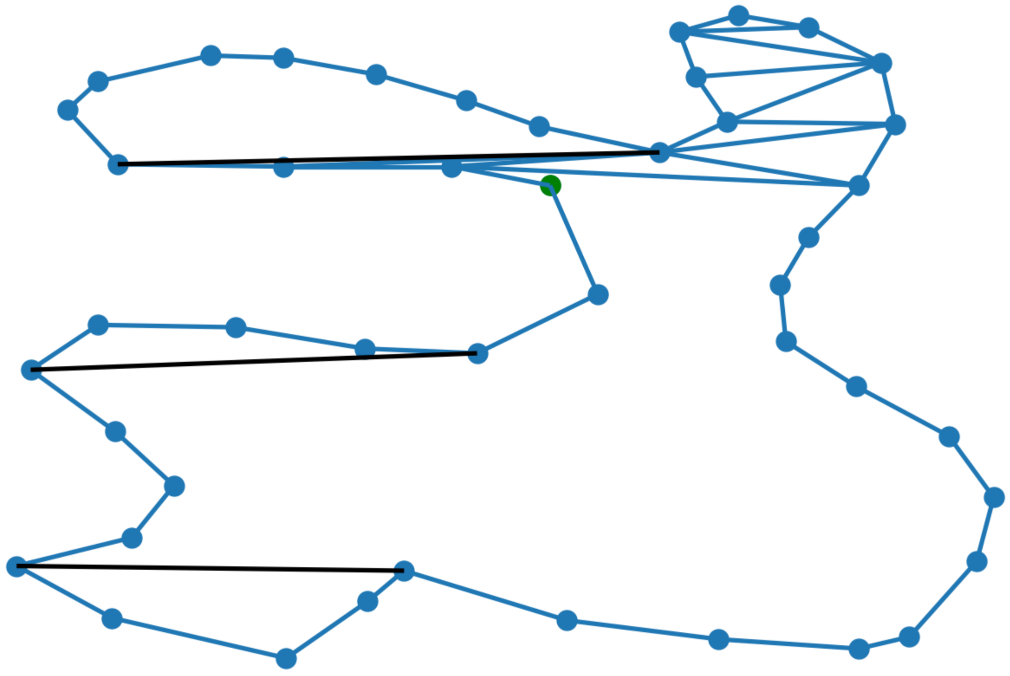
2.3 TRIANGULACJA WIELOKĄTA MONOTONICZNEGO

- Określenie prawego i lewego łańcucha wielokąta
- Posortowanie wierzchołków po współrzędnej y malejąco
- wstawienie 2 pierwszych wierzchołków na stos
- Powtarzamy następującą pętlę przechodzącą po kolejnych wierzchołkach, aż do momentu wykorzystania ostatniego wierzchołka:
  - Jeśli wierzchołek należy do innego łańcucha niż szczyt stosu, to możemy go połączyć ze wszystkimi wierzchołkami na stosie. Na stosie zostają dwa wierzchołki, które były „zamiatane” ostatnie.
  - W przeciwnym wypadku (jeśli kolejny wierzchołek należy do tego samego łańcucha co wierzchołek ze szczytu stosu), to analizujemy kolejne trójkąty, jakie tworzy dany wierzchołek z wierzchołkami zdejmowanymi ze stosu.
    - Jeśli trójkąt należy do wielokąta, to usuwamy wierzchołek ze szczytu stosu
    - w przeciwnym przypadku umieszczamy rozpatrywane wierzchołki na stos

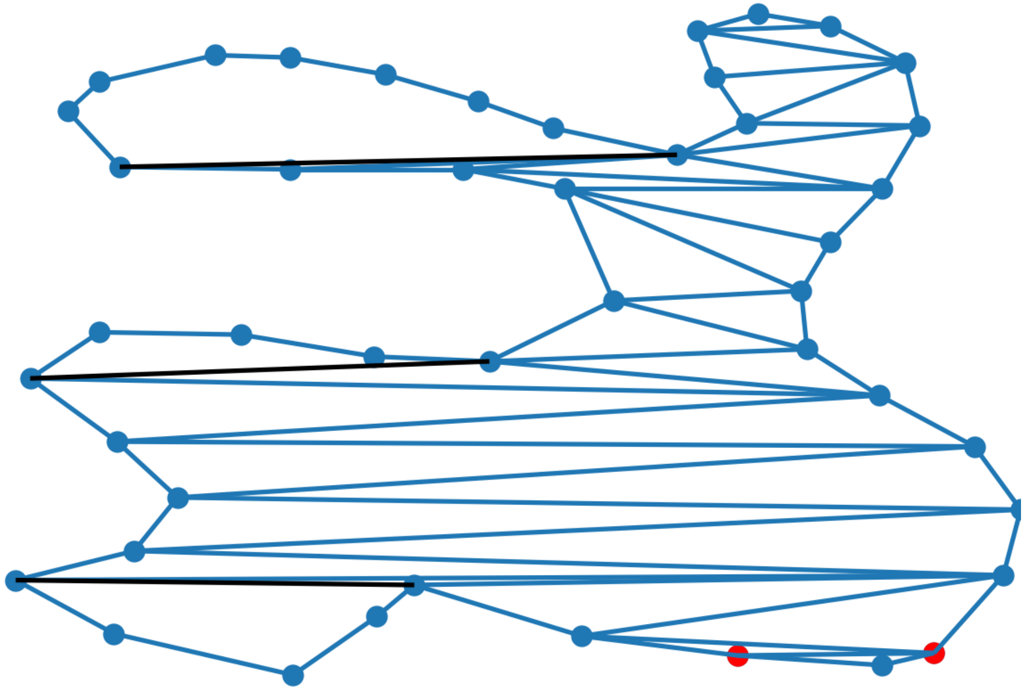


Przykładowa triangulacja z zaznaczonym podziałem na wielokąty monotoniczne

TESTY I PRZYKŁADY

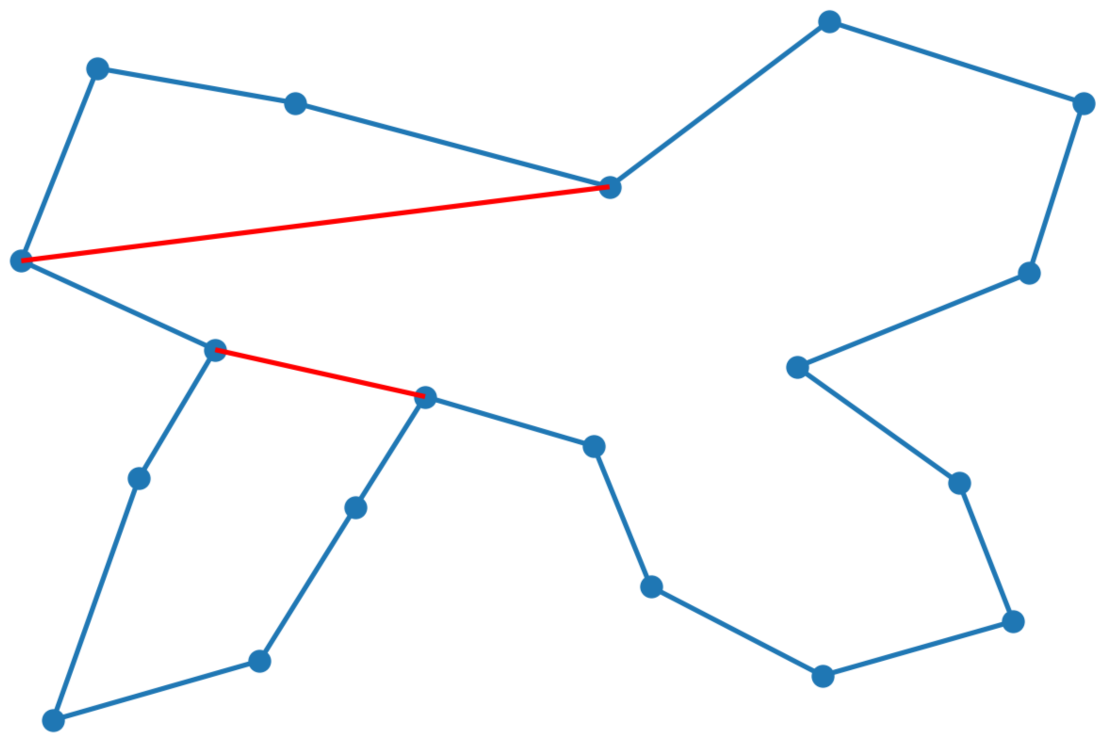


Przykładowy moment triangulacji jednego z wielokątów monotonicznych

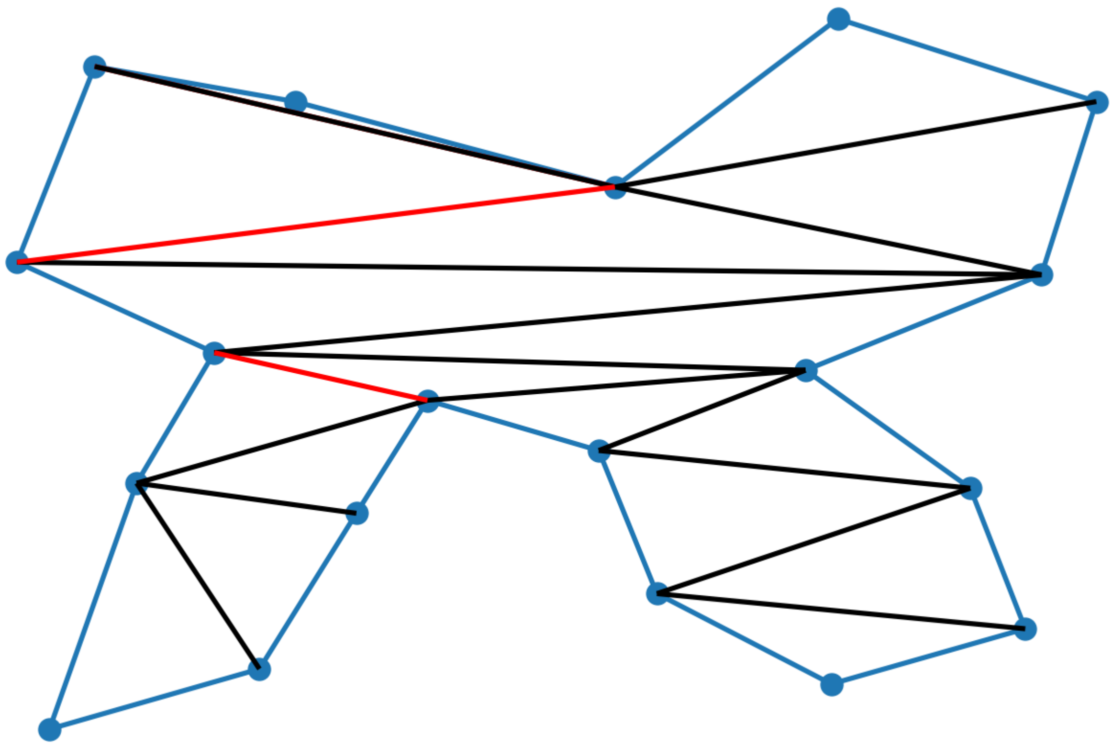


Zakończona triangulacja tego samego wielokątu y - monotonicznego

TESTY I PRZYKŁADY

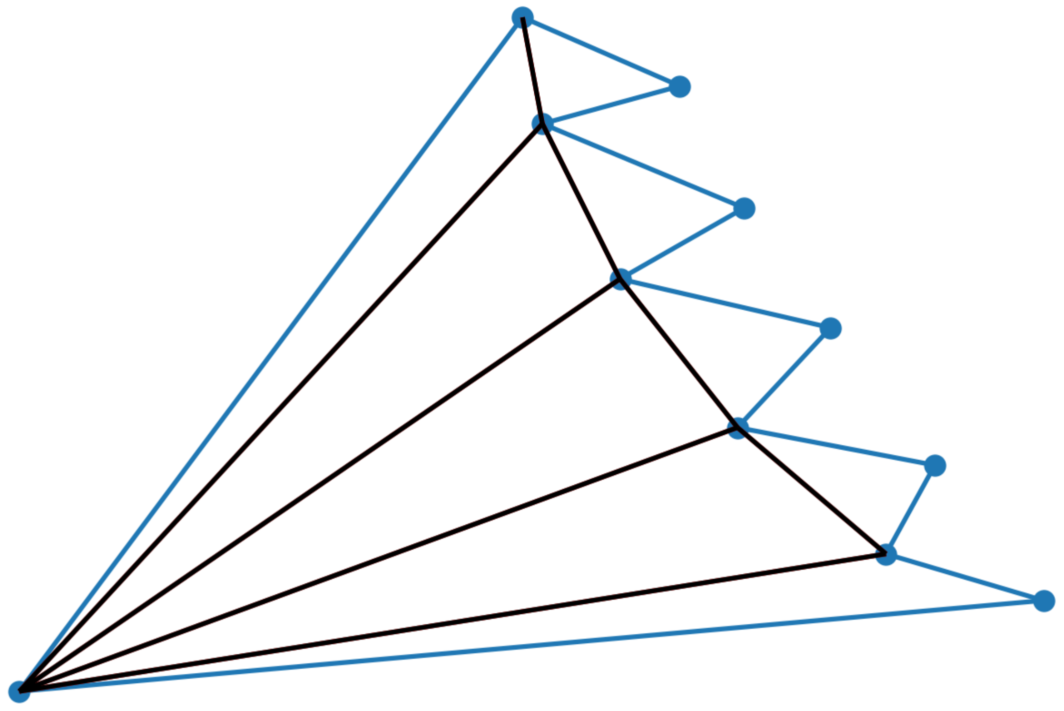


Podział na wielokąty monotoniczne

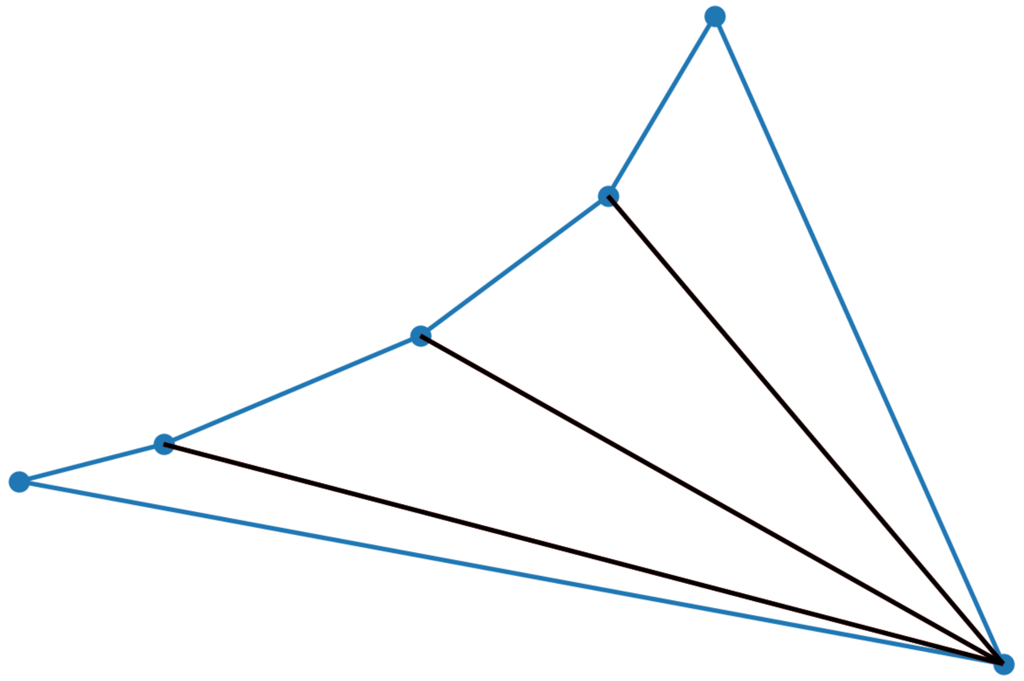


Zakończona triangulacja całego wielokątu

TESTY I PRZYKŁADY

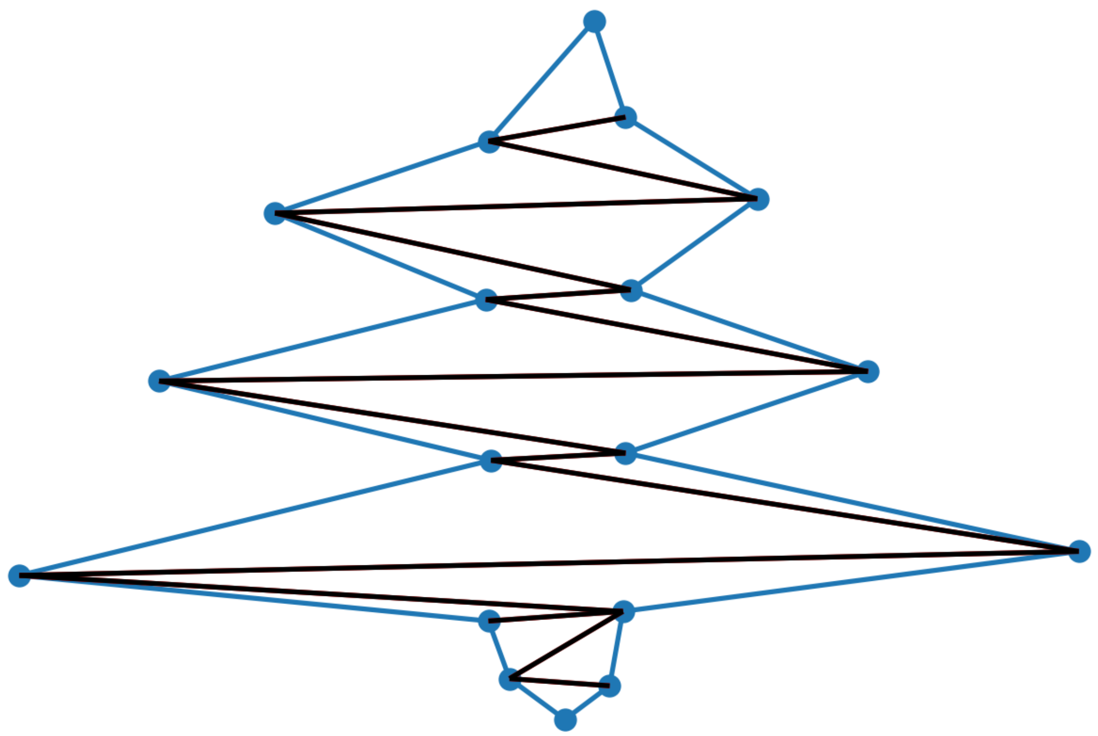


Triangulacja jednego z testowych wielokątów monotonicznych

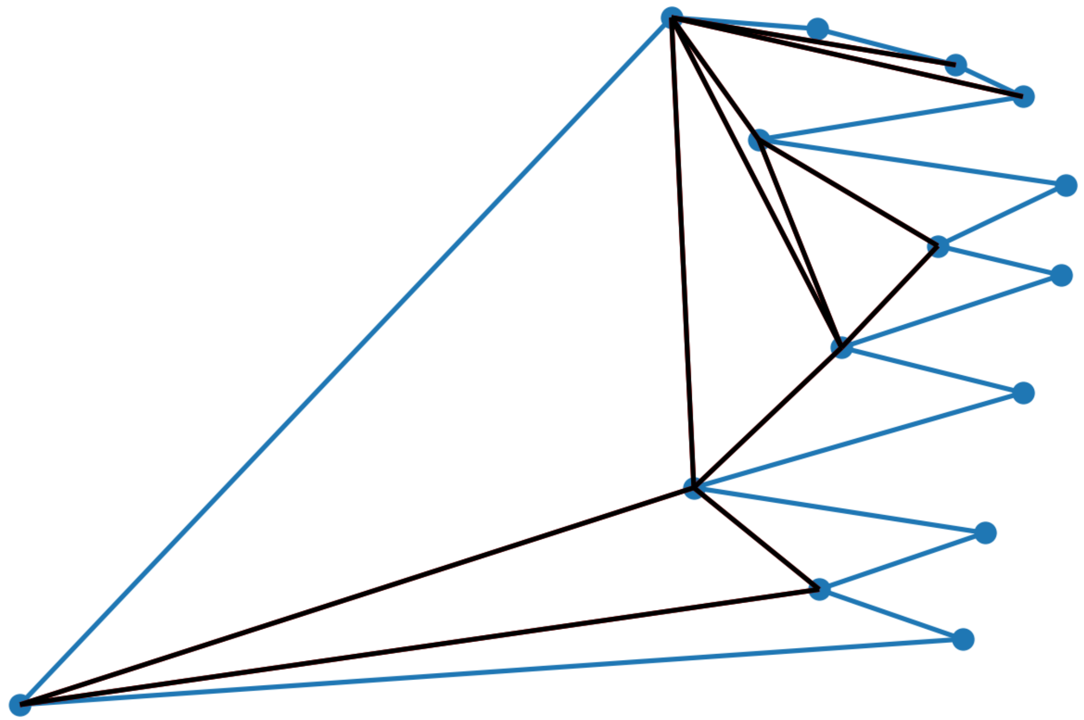


Triangulacja jednego z testowych wielokątów monotonicznych

TESTY I PRZYKŁADY



Triangulacja jednego z testowych wielokątów monotonicznych



Triangulacja jednego z testowych wielokątów monotonicznych

2. TRIANGULACJA DELUNAYA

OPIS ALGORYTMU:

2.1 WSTĘPNA TRIANGULACJA - Algorytm tworzenia wstępnej triangulacji działa na bazie rekurencyjnej:

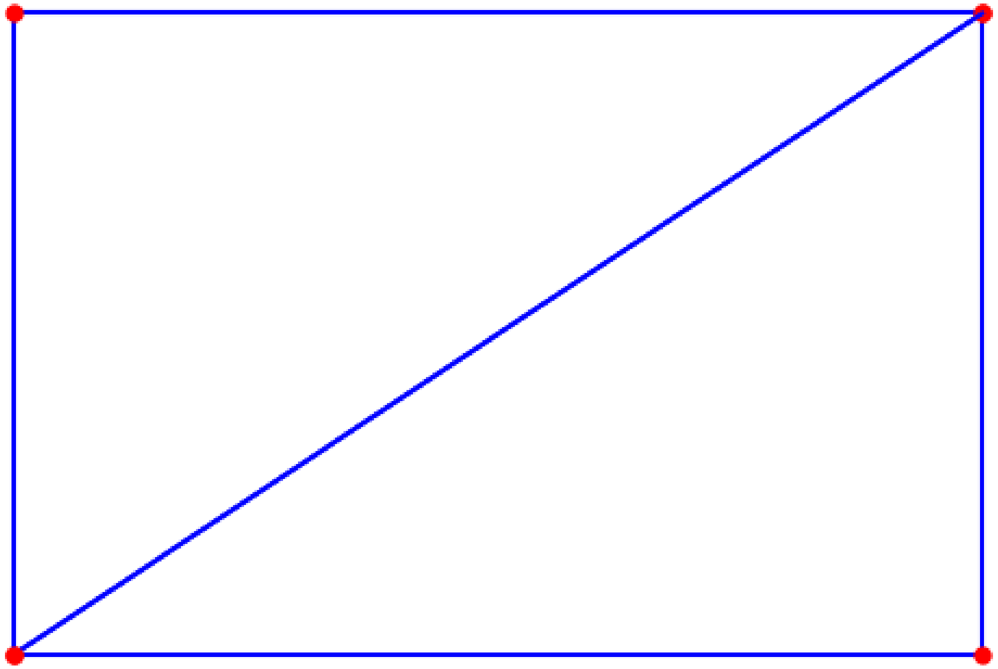
2.2 ODZYKIWANIE - Następnie przystępuje do odzyskania krawędzi, poprzez zamienianie przekątnych w parach trójkątów, których obecne przekątne zaburzają krawędź pierwotną.

2.3 USUWANIE- Na koniec poprzez znalezienie wszystkich wewnętrznych ścian zostaje usunięty zewnętrzna część powstała na skutek zewnętrznych wierzchołków pomocniczych oraz połączeń poza geometrią wielokąta.

2.1 WSTĘPNA TRIANGULACJA

Mając triangulację T_n n-elementową, dokładamy punkt P tworząc T_{n+1}.

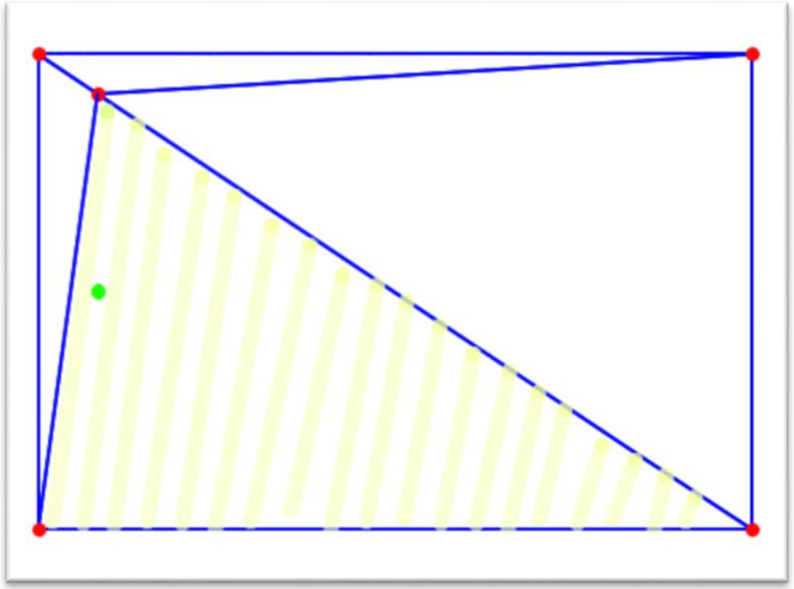
Aby algorytm za każdym razem miał pełną triangulację na początku, stworzone są tymczasowe wierzchołki zewnętrzne, które okrywają prostokątnym polem cały wielokąt. Na końcu zostają one usunięte.



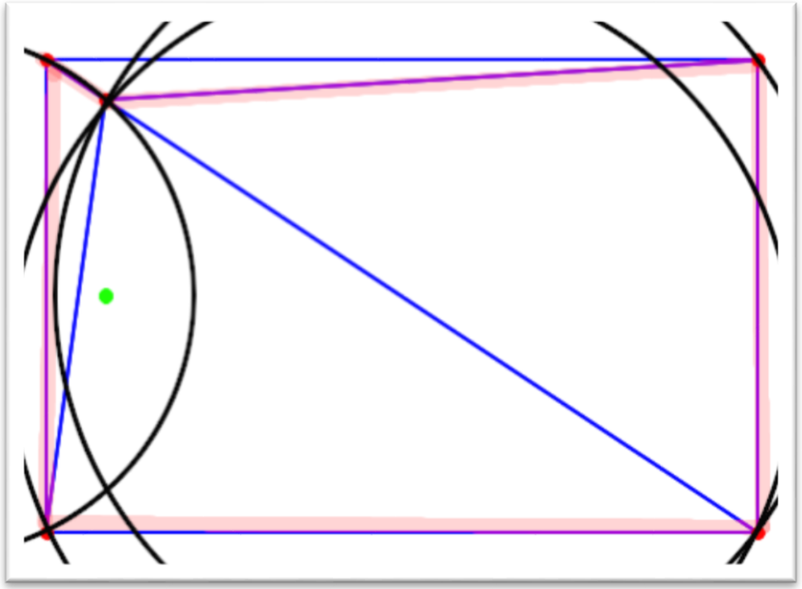
Początkowy stan Triangulacji

DODAWANIE NOWEGO PUNKTU

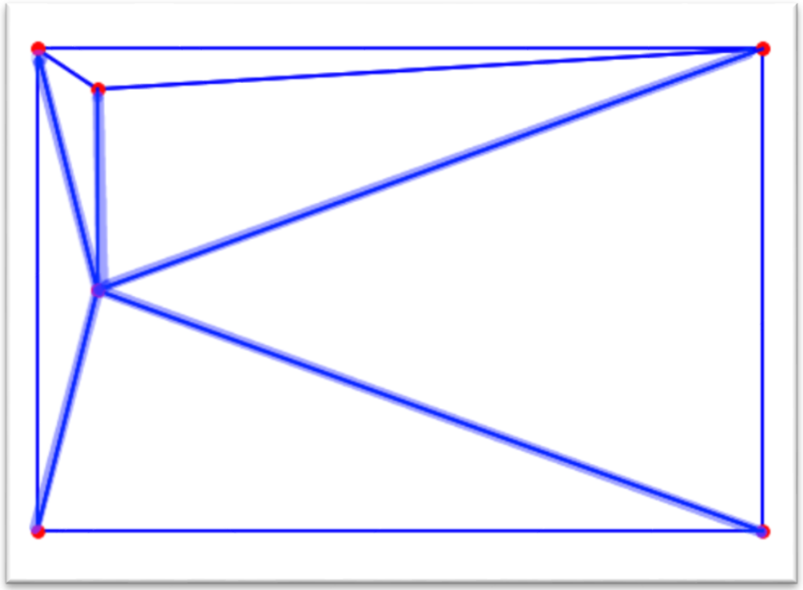
1 Znalezienie ściany zawierającej punkt



2 Znalezienie wszystkich ścian i ich złączenie



3 Połączenie wszystkich wierzchołków z nowym punktem



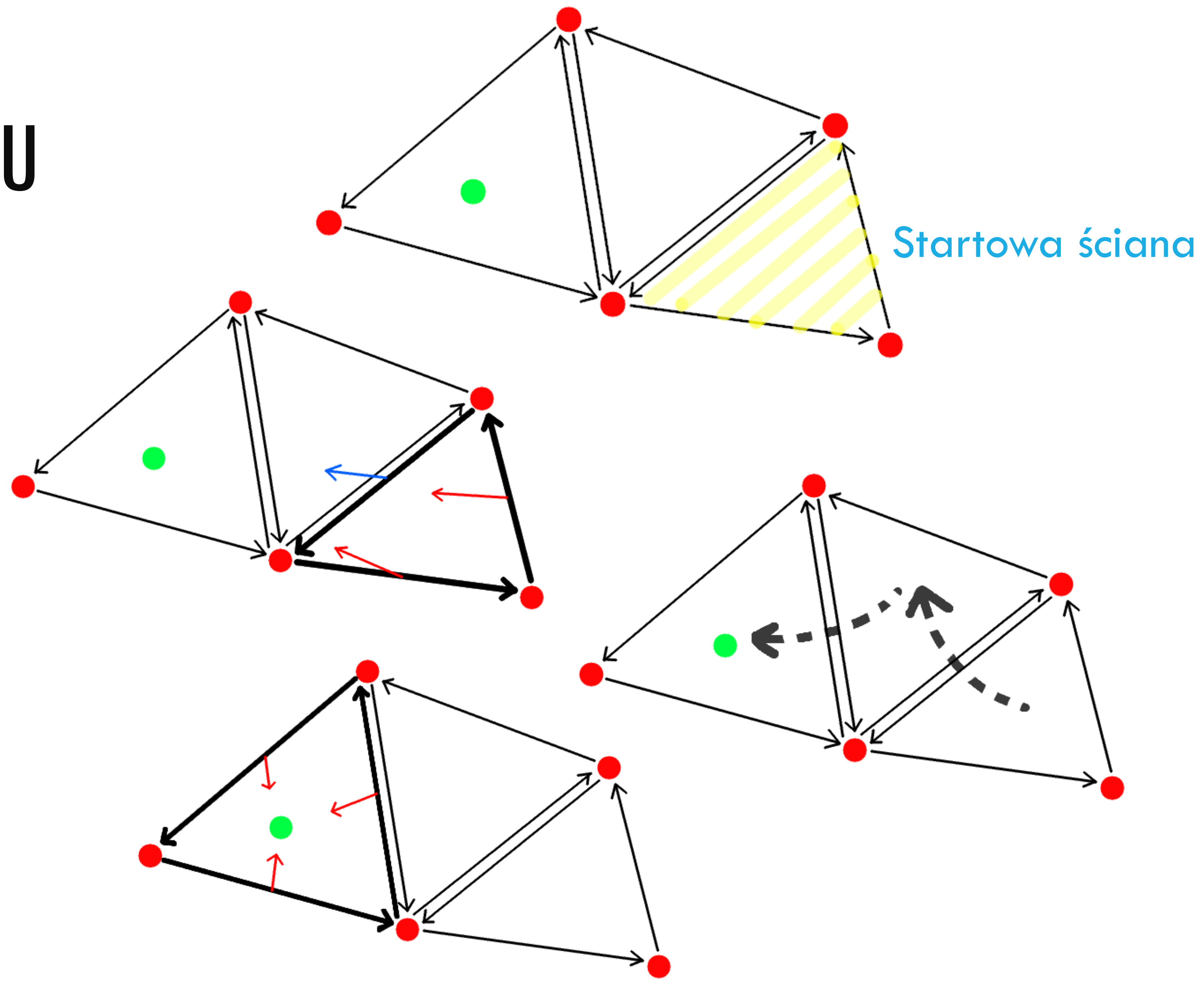
SZUKANIE PUNKTU

Funkcja *orient* może przyjmować wartości dodatnie, ujemne lub 0, w zależności od położenia punktu względem krawędzi.

Dla ściany zawierającej w sobie szukany punkt wszystkie krawędzie będą posiadały nieujemną wartość funkcji orient.

W przypadku 0 mamy do czynienia z punktem leżącym na krawędzi (nie zmienia nam to jednak dalszego postępowania)

W przypadku wartości ujemnej przechodzimy do ściany sąsiadującej, gdyż to w jej kierunku znajduje się punkt

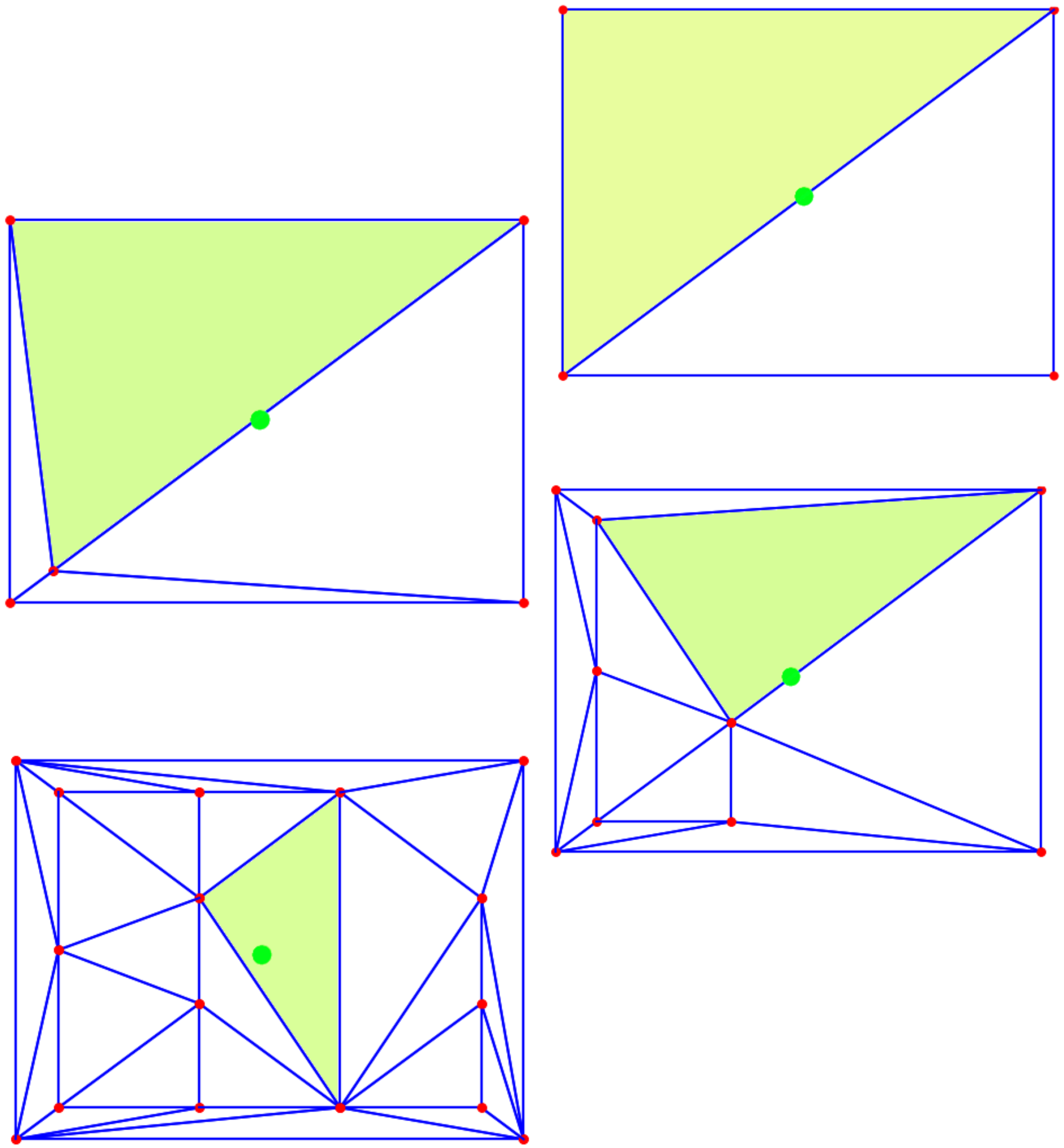


STARTOWA ŚCIANA

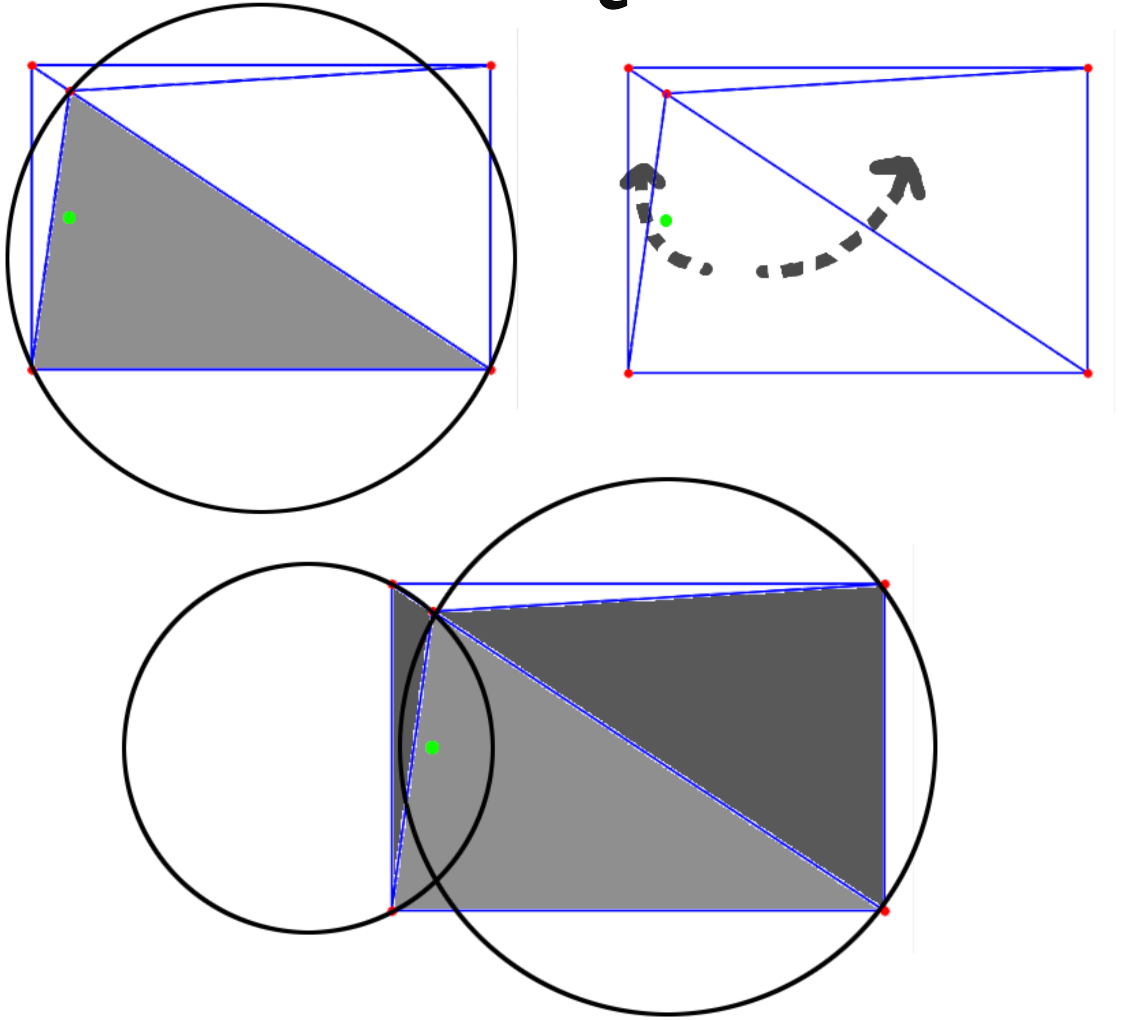
Aby skrócić ilość iteracji za każdym razem zanim znajdziemy ścianę, możemy zawsze startować z środkowej ściany.

Aby to uzyskać przechowujemy ścianę która jest po środku, z tym że jeżeli zmieniamy ją, to wśród nowo utworzonych wyłaniamy nową środkową.

Dla uproszczenia przyjąłem że środkową ścianą jest ta w której zawiera się środek geometryczny całego pola triangulacji.



SZUKANIE WSZYSTKICH ŚCIAN O OKRĘGU Z ZAWIERAJĄCY PUNKT

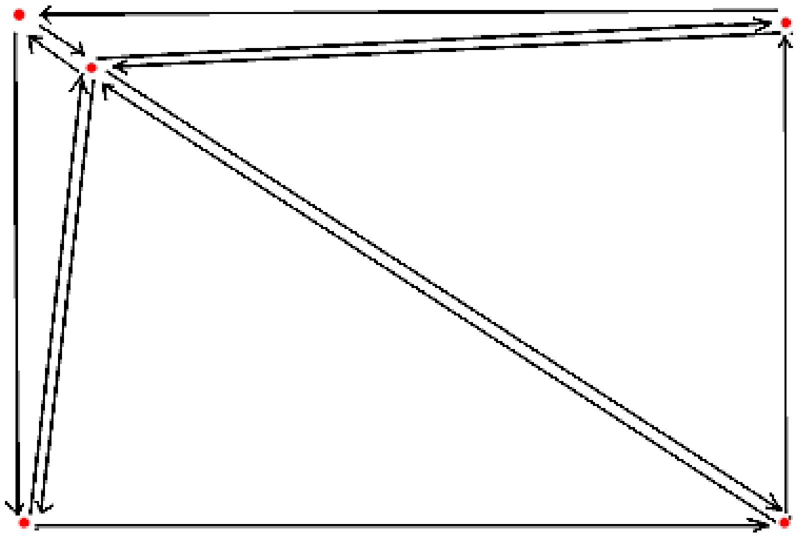


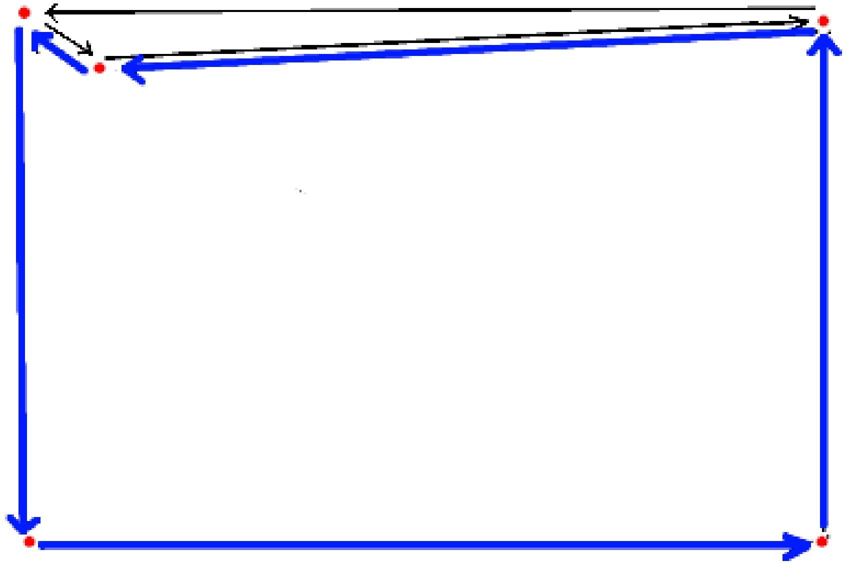
Po znalezieniu ściany w której znajduje się punkt rozpoczynamy znajdowanie wszystkich ścian które trzeba będzie zmienić.

System jest oparty na BFSie na grafie ścian – bierzemy pierwszą ścianę z kolejki, sprawdzamy ją pod kątem warunku koła, a jeżeli zawiera się w niej punkt, to wszystkie jeszcze nie odwiedzone ściany dodajemy do kolejki.

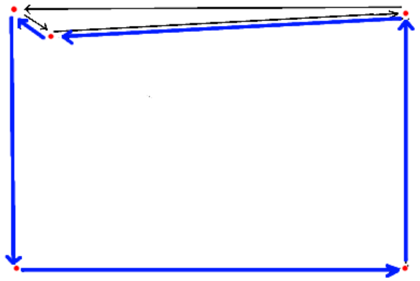
ZŁĄCZENIE ŚCIAN

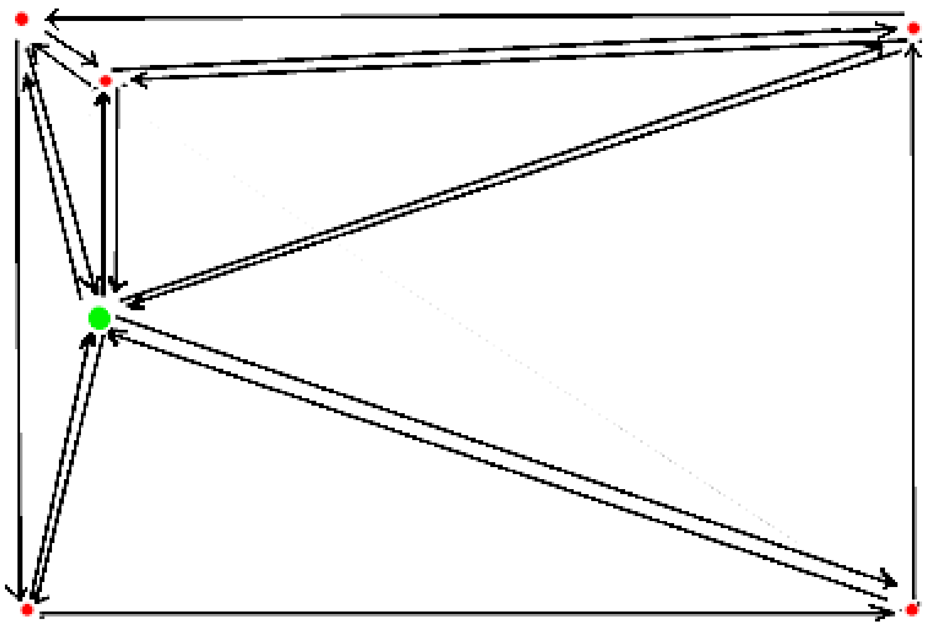
Polega na usunięciu wewnętrznych krawędzi w powstałym wielokącie ze ścian sąsiadujących. Poprawnym wynikiem jest zamknięty cykl krawędzi zewnętrzych krawędzi trójkątów.





POŁĄCZENIE WIERZCHOŁKÓW



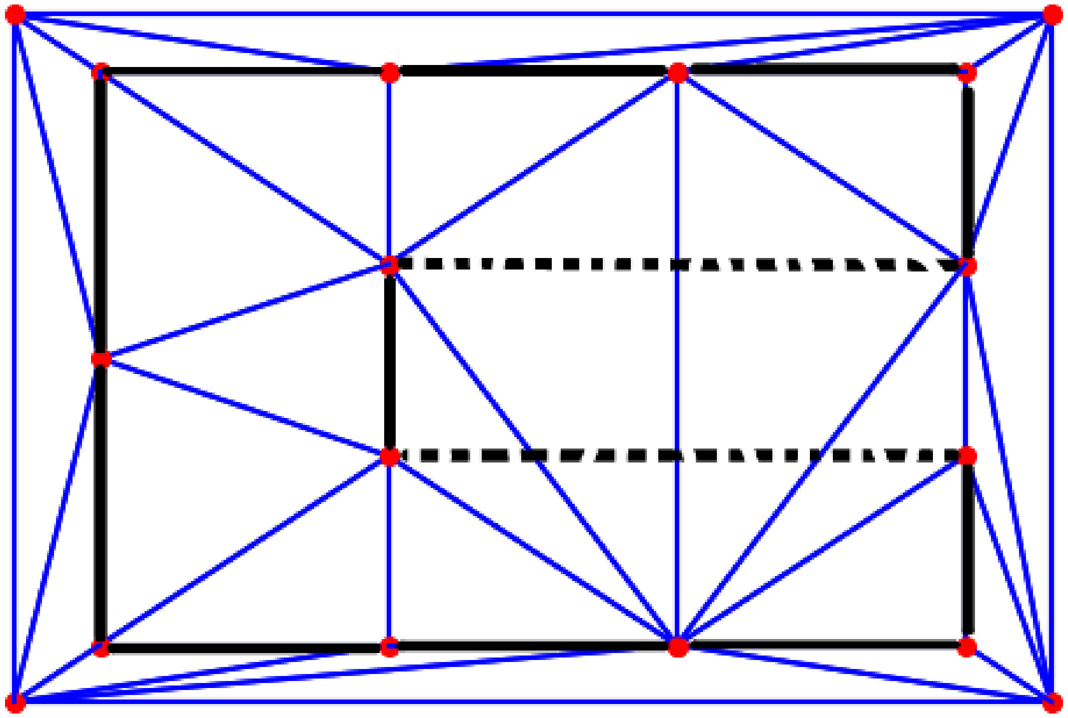


Następnie wszystkie wierzchołki wielokąta zostają połączone z nowym wierzchołkiem, tworząc nowe ściany.

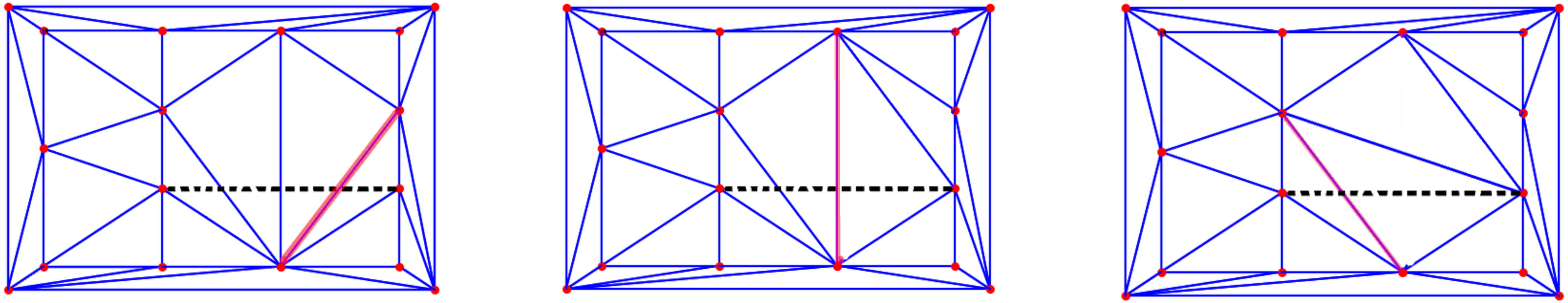
Po tym kroku zaczynamy dodawać kolejny wierzchołek.

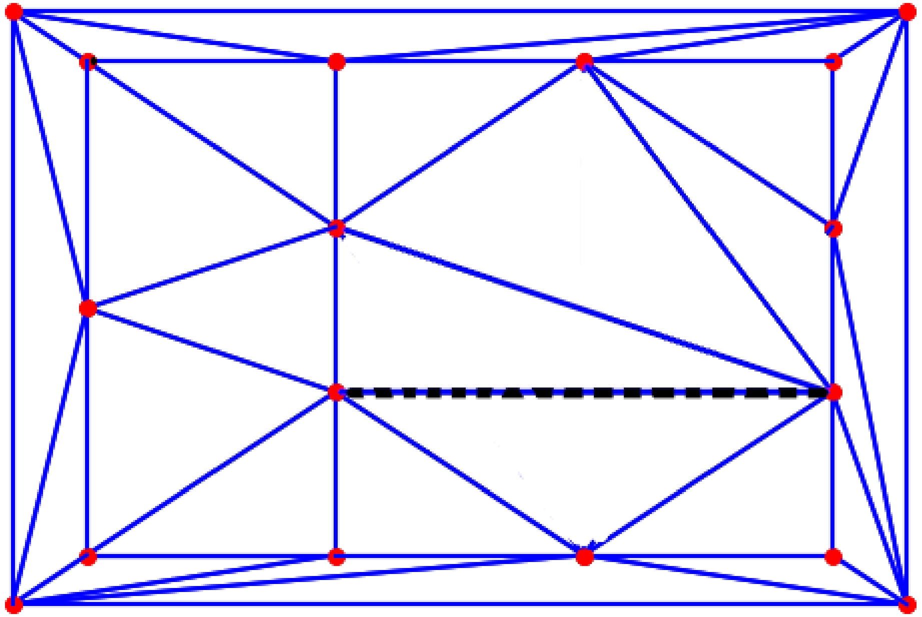
2.2 ODZYSKIWANIE KRAWĘDZI

Odzyskiwanie krawędzi jest potrzebne, ponieważ triangulacja nie ma narzuconych z góry krawędzi które ma utworzyć. Dlatego też zdarzyć się może iż taka krawędź z wielokąta może zniknąć.



ODZYSKIWANIE KRAWĘDZI





Jeżeli nie zostaje odnaleziona krawędź wielokąta, następuje sprawdzanie jakie krawędzie ją przecinają.

Dzieje się to za pomocą znajdowania ściany zawierającej punkt początkowy krawędzi (lekko przesunięty wzdłuż krawędzi, aby nie doszło do złego wyboru). A następnie odwiedzamy kolejne ściany które sąsiadowały z tymi.

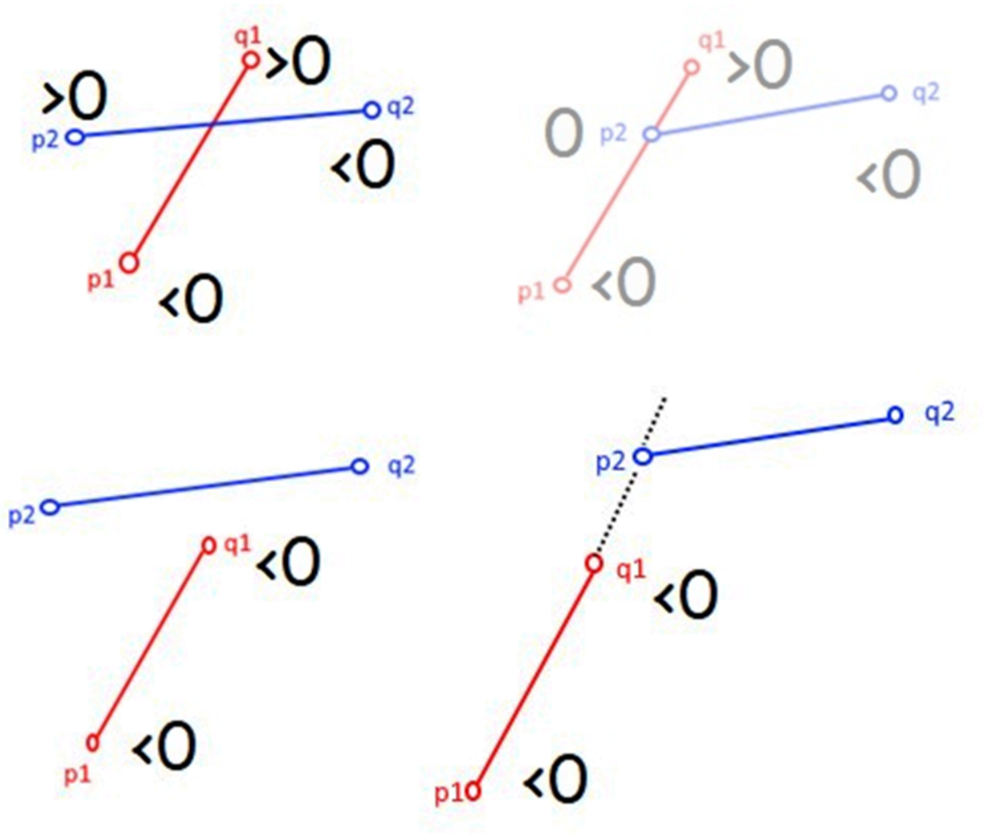
Następnie zostają zamienione przekątne w czworokątach stworzonych z przyległych dwóch ścian do kolidujących krawędzi.

SPRAWDZANIE PRZECINANIA

Ponownie używamy funkcji *orient*, tym razem dla par punktów, sprawdzając czy utworzone z nich odcinki się przecinają.

Aby stwierdzić przecinanie się wyniki funkcji orient muszą być różnych znaków po dla punktów jednego odcinka względem drugiego.

Ze względu na założenia wielokąta prostego, oraz fakt iż szukamy kolejnych wierzchołków, możemy wykluczyć sytuację gdzie punkt leży po środku krawędzi zatraconej.

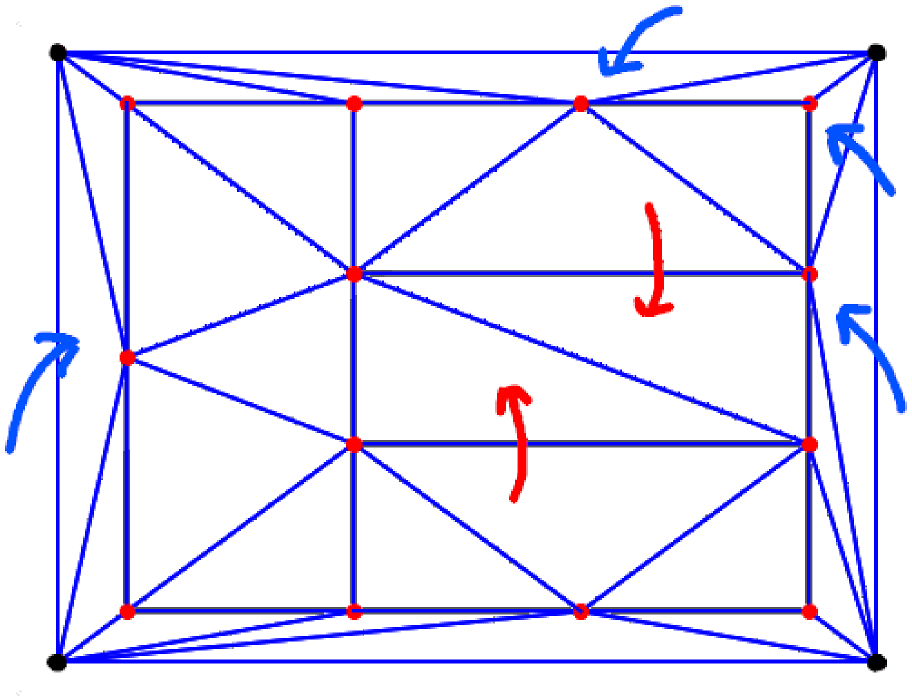


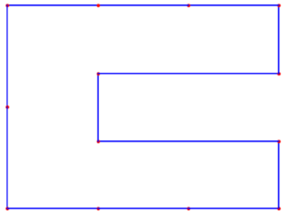
Na rysunku (p1,q1) to krawędź zatracona, a (p2,q2) to krawędź obecnej triangulacji.

2.3 USUWANIE ZEWNĘTRZNYCH TRÓJKĄTÓW

Mając już pełną Triangulację należy zabrać się za pozbycie zbędnych trójkątów:

- powstałych przez kontakt z wierzchołkami pomocniczymi
- których wierzchołki są częścią wielokąta, ale ich ściana znajduje się na zewnątrz.





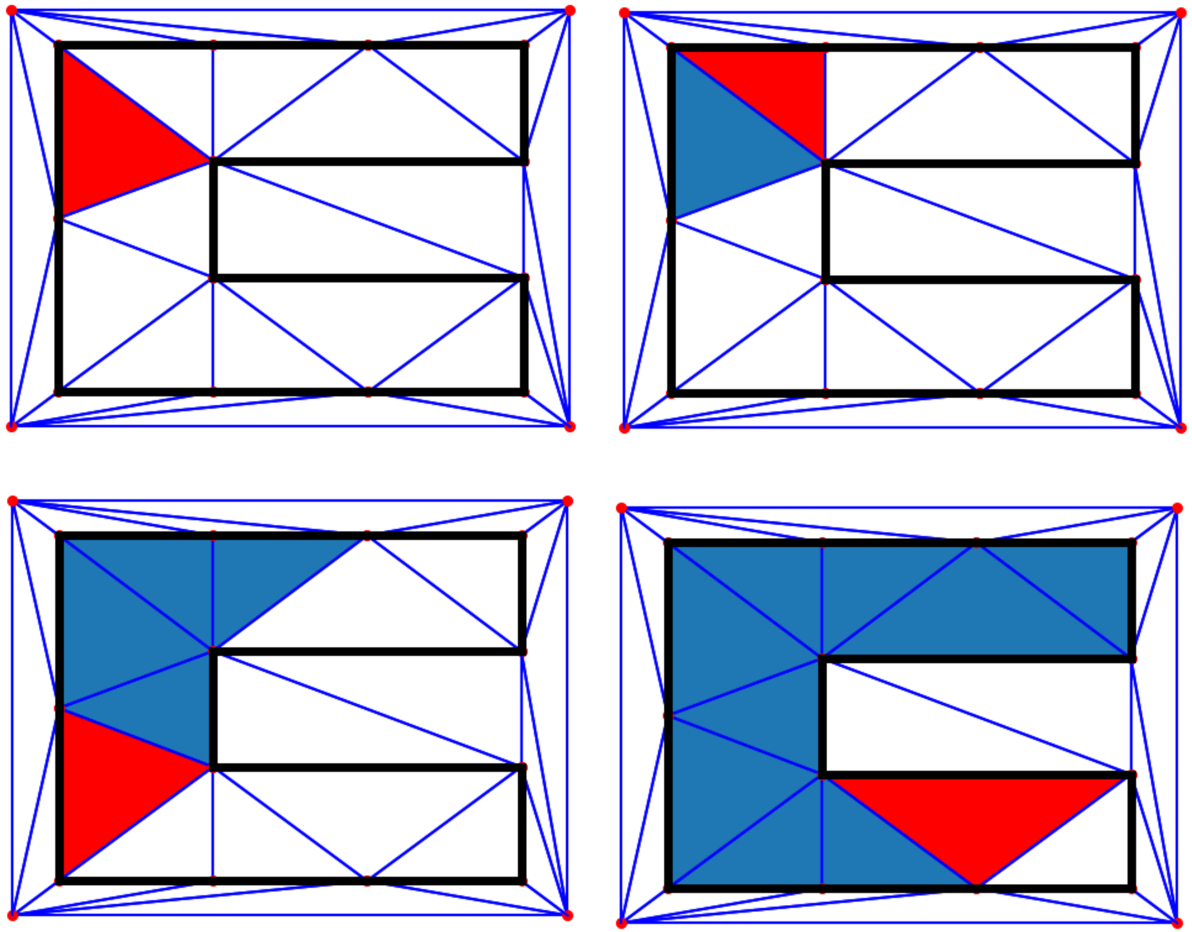
ZNAJDOWANIE WEWNĘTRZNYCH ŚCIAN

Najpierw stworzymy zbiór wszystkich zewnętrznych krawędzi EDGES.

Następnie znajdujemy pierwszą krawędź która zawiera w sobie jedną z krawędzi zewnętrznych, i przystępujemy do DFSa po ścianach.

Warunkiem przejścia na kolejną ścianę jest sąsiedztwo z nią krawędzią niezawierającą się w EDGES.

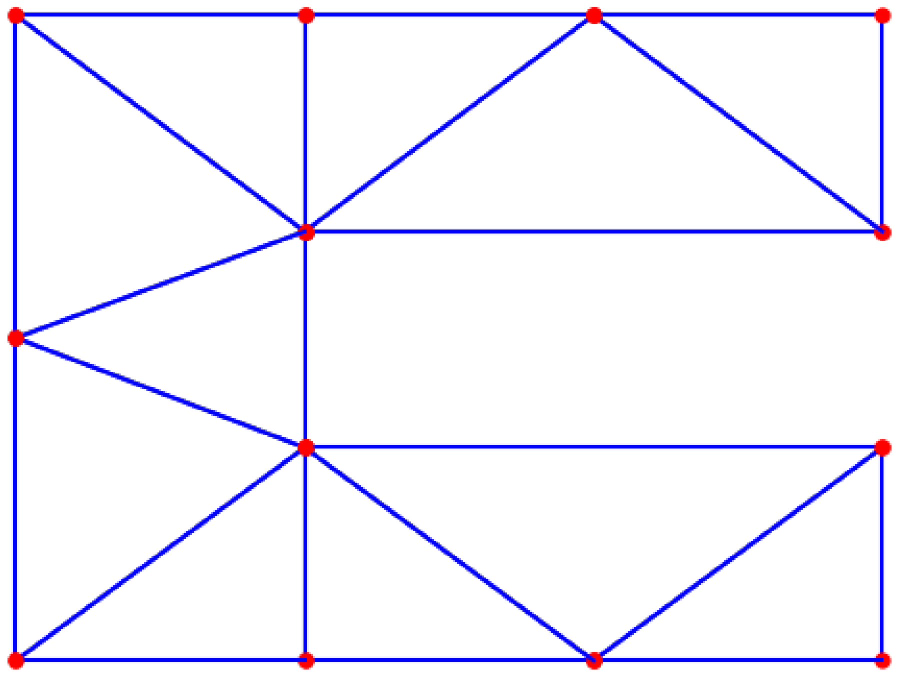
Każdą odwiedzoną ścianę zaznaczamy jako *visited*.



USUWANIE

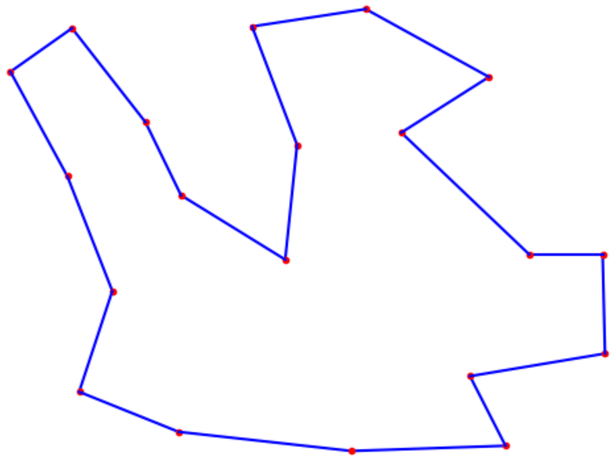
Na koniec przechodzimy przez zbiór krawędzi i sprawdzamy które nie zostały odwiedzone. Zostają one odczepione od siebie i usunięte.

Wynikiem powinien być wielokąt wejściowy z dopisanymi krawędziami triangulacji.

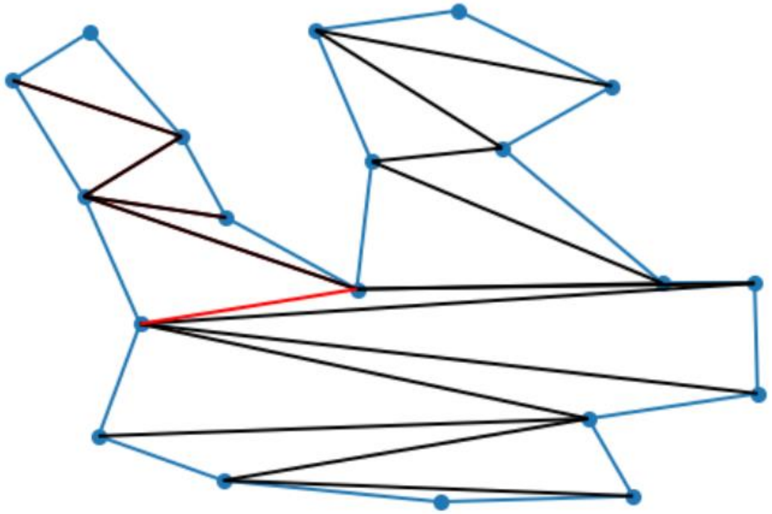


PORÓWNANIE

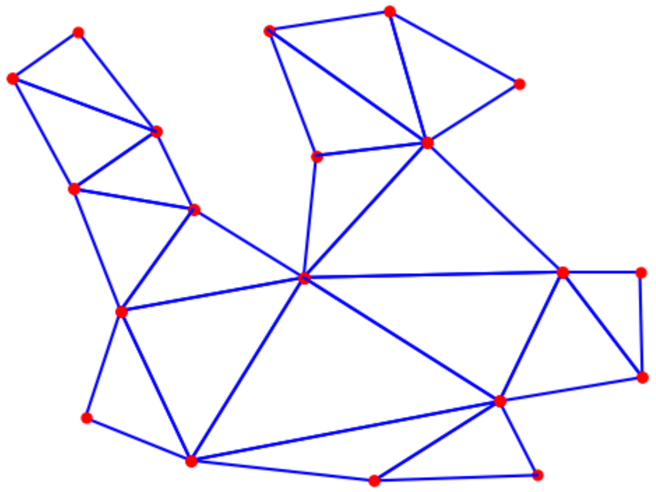
TESTY



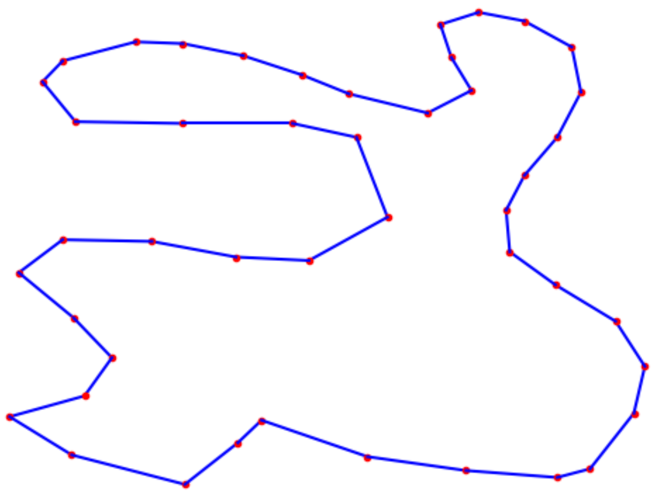
Triangulacja monotonicznych wielokątów



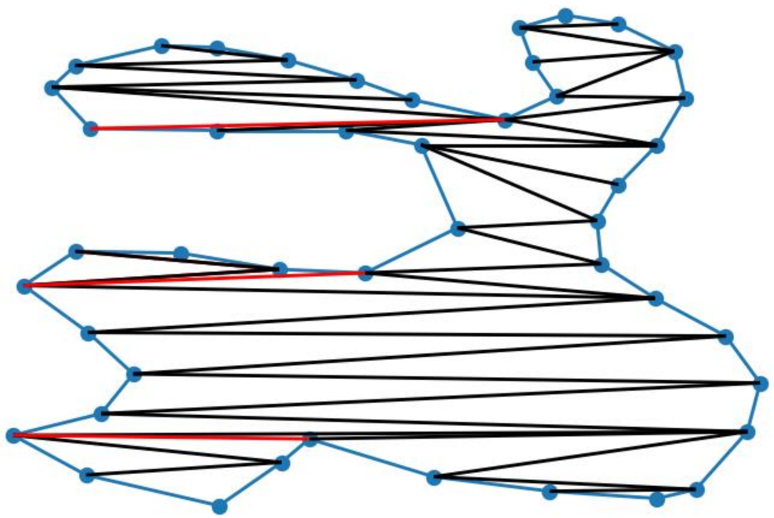
Triangulacja Delunaya



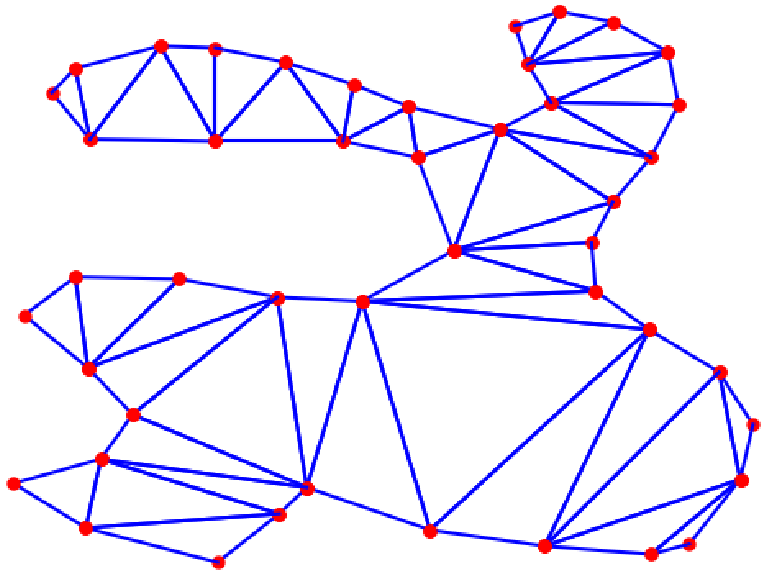
TESTY



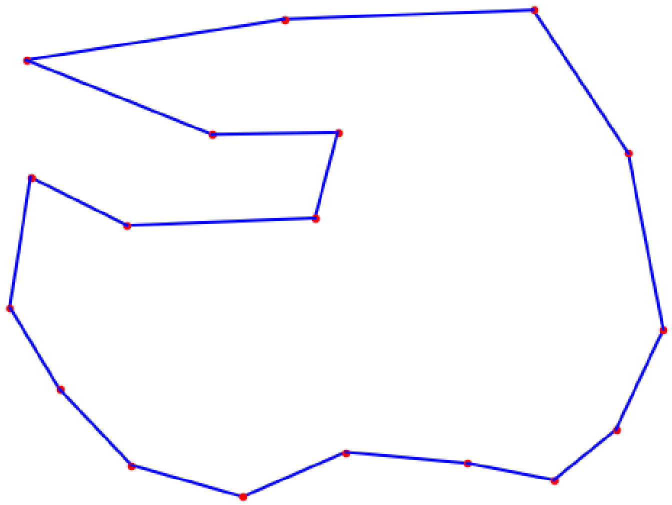
Triangulacja monotonicznych wielokątów



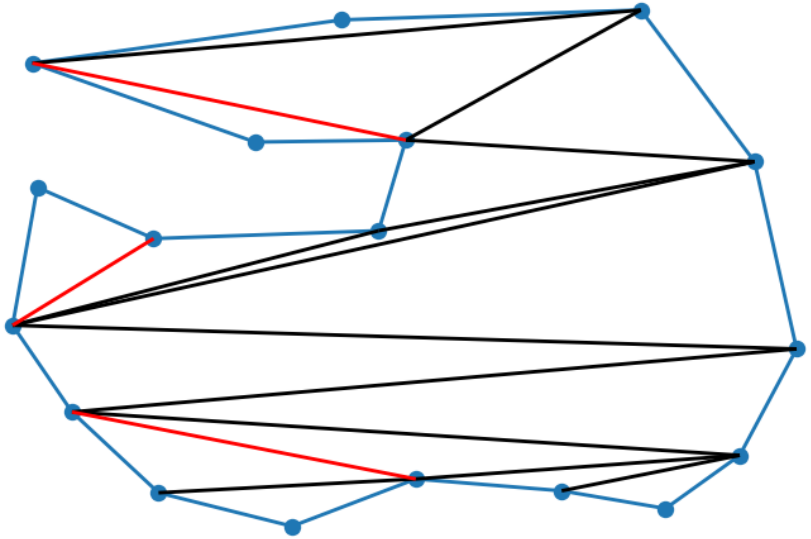
Triangulacja Delunaya



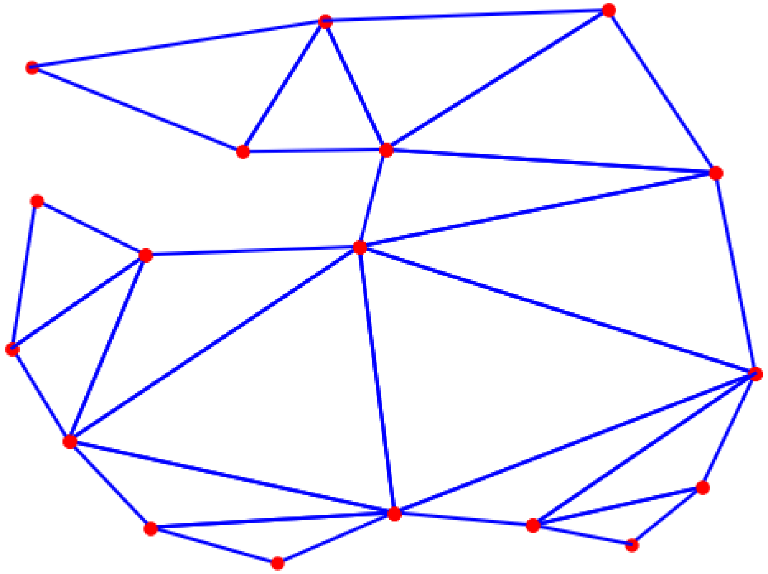
TESTY



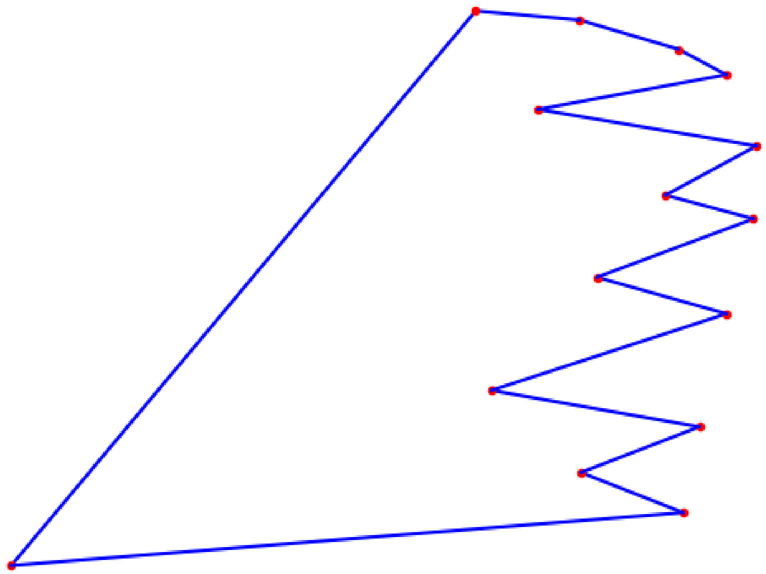
Triangulacja monotonicznych wielokątów



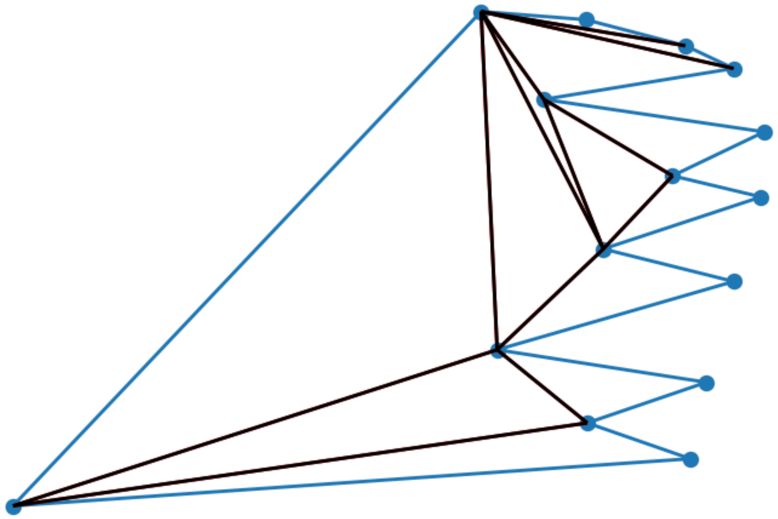
Triangulacja Delunaya



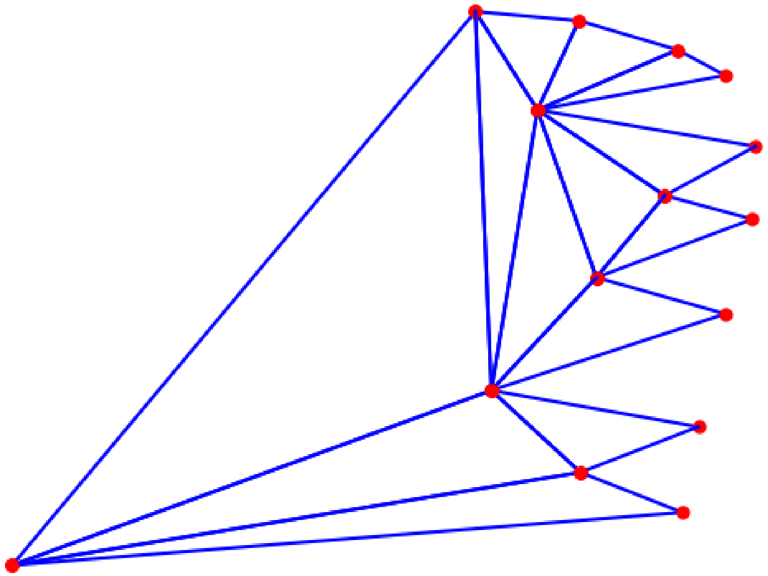
TESTY



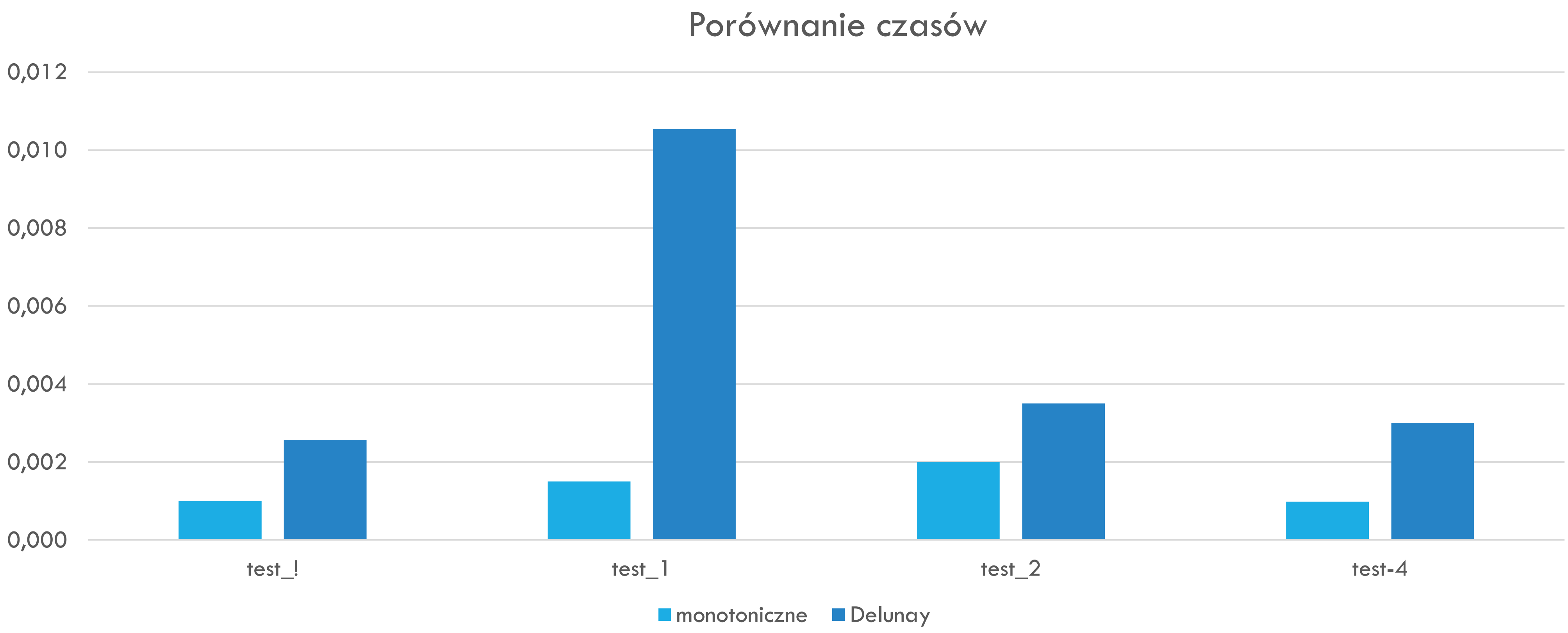
Triangulacja monotonicznych wielokątów



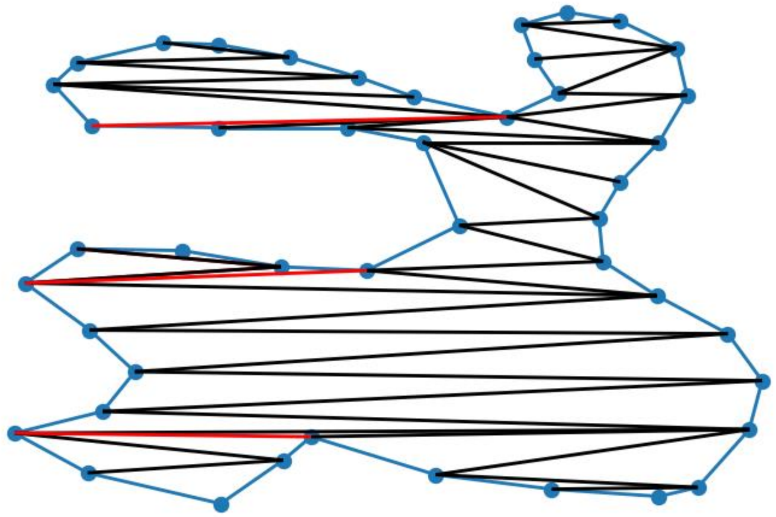
Triangulacja Delunaya



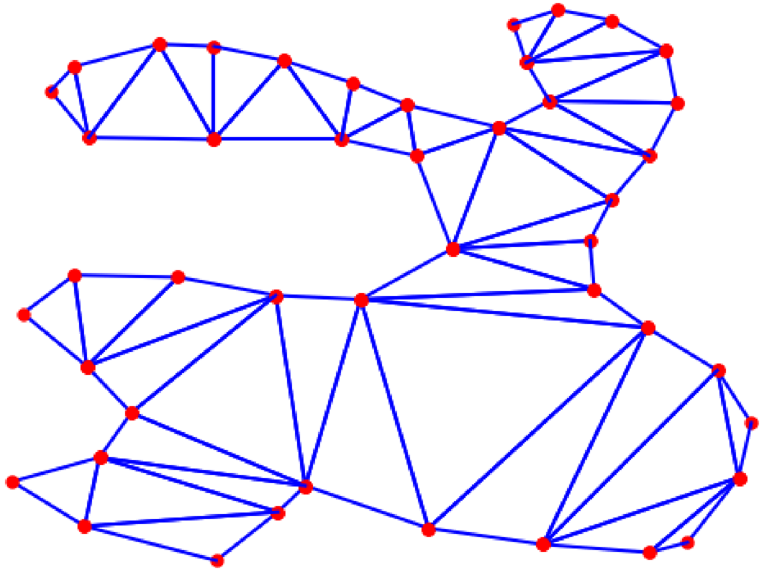
PORÓWNANIE CZASÓW



PORÓWNANIE EFEKTÓW



Triangulacja monotonicznych wielokątów



Triangulacja Delunaya

Po lewej widzimy triangulacje wielokątów monotonicznych, po prawej zaś triangulację Delaunaya z ograniczeniami, jak widać w triangulacji Delonay trójkąty są bardziej zbliżone do równoramiennych i unikają kątów rozwartych. Z tego powodu triangulację Delonay wykorzystuje się do reprezentowania powierzchni. Natomiast porównując czasy (poprzedni slajd) możemy zobaczyć, że „gorsza jakościowo" triangulacja wielokątów monotonicznych jest szybsza

Dziękujemy za uwagę!

ŹRÓDŁA:
- WYKŁADY ALGORYTMÓW GEOMETRYCZNYCH AGH DR. B. GŁUT
- WIKIPEDIA: HTTPS://PL.WIKIPEDIA.ORG/WIKI/TRIANGULACJA_DELONE
- MARK DE BERG - "COMPUTATIONAL GEOMETRY - ALGORITHMS AND APPLICATIONS„
- HTTPS://EN.WIKIPEDIA.ORG/WIKI/DELAUNAY_TRIANGULATION
- HTTPS://EN.WIKIPEDIA.ORG/WIKI/BOWYER–WATSON_ALGORITHM
- HTTPS://UFKAPANO.GITHUB.IO/DOWNLOAD/MONIKA_WIECH_2020.PDF

Przemysław Rola
Juliusz Wasieleski