Содержание

А.С. нам рассказывает вещи, которые не должны быть утеряны. Каждый раз он рассказывает, каковой (по-видимому) на самом деле должна быть парадигма. Здесь будет записываться «передний фронт разработки», как в программировании. (Таким образом, это не конспект нашего семинара.)

Пожалуйста, **вносите изменения** в этот файл, **дополняйте** его. Пусть он станет вашим рабочим столом. Нет никакого другого способа что-то понять, чем попытаться изложить это листу бумаги/соседу/уточке в ванной. Но у изложения листу бумаги есть два дополнительных бонуса:

- не пропадёт ваш скорбный труд и дум высокое стремленье
- возможность конструктивного фидбека от n слушателей семинара

0.0.1 Как вносить изменения в файл

После некоторых размышлений я пришёл к выводу, что в качестве системы контроля версий мы будем использовать GitHub.

Если вы обнаруживаете, что чего-то не понимаете — предлагаю задать вопрос сноской. Делается это с помощью синтаксиса \que{почему?}. Пример[1] заданного таким образом вопроса.

Если вы обнаруживаете, что что-то понимаете — просто берёте и редактируете текст.

Если у вас не компилится этот tex-файл — закомментируйте строку \usepackage{pscyr} и попробуйте снова; пакет pscyr, содержащий красивые кириллические шрифты, не все себе устанавливали.

моё третье изменение

[1] почему?

1 A_∞-структуры, Δ_{BV}-оператор, поливекторные поля

1.1 Наша задача — понять, что вместо вопроса

(Пока что наша задача — великолепно переписать этот огрызок.)

Есть нечётные векторные поля $v_{\text{н}}$:

$$v_{\text{н}} \in \oplus_k V^{\otimes k} \to V.$$

[2]

И главное уравнение A_∞-структуры имеет вид: $v_{\text{н}}^2 = 0$. Или $\{v, v\}_G = 0$.

Но неправильно говорить просто об этом уравнении. Нужно ещё сфакторизовать по соотношению эквивалентности $v \sim v + \{v, w\}$ — автоморфизмам этого векторного пространства.

$$v = v_0 + Pol, \qquad Pol \ll v_0.$$

Получится уравнение $\{v_0, Pol\} + \{Pol, Pol\} = 0$.

Далее, можно сказать, что $Pol = P_0 + \omega$. Т.е. $v = v_0 + P_0 + \omega$. Именно ω, этот чёртов третий член, даёт нам когомологии. Первые же два члена этого разложения определяют мир, который рассматривается.

Стоит отметить, что $v_0 : V^{\otimes 2} \to V$ — обычное умножение. Поэтому его обычно обозначают m_2.

Если мы работаем с кольцом $\mathbb{C}[x] \otimes \mathbb{C}[\lambda, \theta]/(\lambda\gamma\lambda)$ (пространственных переменных x 10, чётных полей λ 16, нечётных полей θ тоже 16), а в качестве P_0 мы берём $\lambda^\alpha \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}$, то получится $\mathcal{N} = 1$ $D = 10$ SYM [3]. Низкоэнергетическое приближение — $D = 10$ супергравитация.

Получается такой коммутативный квадрат:

$$\begin{tikzcd}
? \arrow[r, dotted] \arrow[d, dotted] & \text{nearly comm.limit} \arrow[d] \\
\hbar\Delta_{BV} Pol + \{Pol, Pol\} = 0 \arrow[r] & \{Pol, Pol\} = 0
\end{tikzcd}$$

И наша задача — понять, что вместо вопроса.

1.2 Задача матричной факторизации

Точки на нашем пространстве модулей могут подъезжать к границе, и нужно предложить какое-то граничное условие. Граница является браной.

Сама по себе задача матричной факторизации давно известна в теории особенностей и сводится к элементарному утверждению. Именно, нужно решить матричное уравнение на N вида $W = N^2$. $W(x)$ — суперпотенциал, N — матрица, которую необходимо найти.[4] Высший смысл происходящего формулируется так: триангулированные категории особенностей слоёв отображения W эквивалентны категориям B-бран.

[2] Напомни, что такое нечётные векторные поля, то есть вставь нужное определение, что ли... Юра.

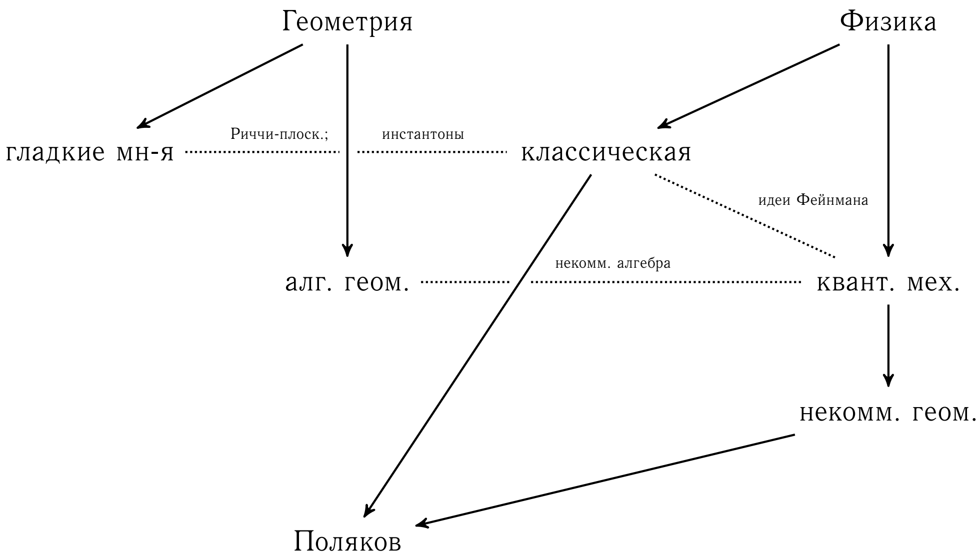
[3] интересно, какая из пяти?..

[4] Тема матриц не раскрыта

2 Новый взгляд на геометрию

2.1 Собственно взгляд

Классическая геометрия является вырождением геометрии Полякова.



Есть две точки зрения на то, что изучает геометрия:

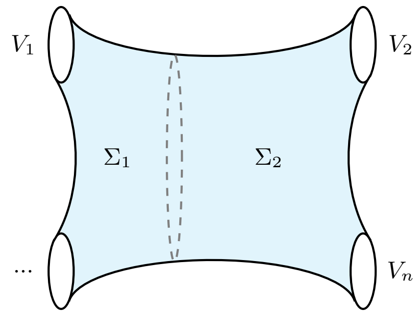
- пространство
- пространство и какая-нибудь геометрическая структура на нём

Согласно Полякову, (гомотопическая) конформная теория — это и есть пространство + геометрия на нём.

2.2 Напоминание о том, что такое конформная теория поля

Конформные теории поля — теории поля, инвариантные относительно конформных преобразований метрики. В них есть «основной объект» I, зависящий от поверхности Σ (вид поверхности зависит от того, открытая или замкнутая струна, а также от количества наблюдаемых V_1, ..., V_n в рассматриваемом корреляторе). Метрик, сфакторизованных по соотношению эквивалентности «конформно связанные метрики эквивалентны», столько же, сколько комплексных структур, поэтому основной объект I зависит также от комплексной структуры (т.е. от дифференциала Бельтрами μ, который параметризует модули комплексных структур на Σ). Комплексные структуры, очевидно, надо изучать по модулю диффеоморфизмов. Физический смысл нижеследующей картинки вот каков: для того, чтобы вычислить коррелятор операторов V_1, ..., V_n, нужно вырезать малые диски вокруг точек worldsheet'а и вычислять инварианты Громова—Виттена, являющиеся подсчётом композиций кобордизмов комплексно одномерных многообразий[5].

[5] я правильно понимаю, что основной объект $I(\Sigma, V_1, ..., V_n)$ и соответствующий ему инвариант Громова—Виттена — это одно и то же?



Т.е. вот где основной объект принимает значения:

$$I(\Sigma,\mu) \in V_1 \otimes ... \otimes V_n \otimes \Big(\mu(\Sigma)/\mathrm{diff}\Big)$$

и при этом есть единственная аксиома: что если эту поверхность разрезать, то

$$I(\Sigma,\mu) = I(\Sigma_1,\mu) \circ I(\Sigma_2,\mu).$$

Тензор энергии-импульса же можно вытащить из такой теории вариацией основного объекта по дифференциалу Бельтрами:

$$T = \frac{\delta I(\Sigma,\mu)}{\delta\mu}$$

Польчинский пишет действие, которое мы назовём действием старой струнной геометрии:

$$S = \int g_{\mu\nu}(x) dx^\mu * dx^\nu + B_{\mu\nu}(x) dx^\mu \wedge dx^\nu,$$

второй член — поле Калба—Рамона, 2-форма на таргете. Действие новой же струнной геометрии таково:

$$S = \int\limits_\Sigma \left(P_i \bar\partial X^i + \bar P_{\bar i} \partial \bar X^{\bar i} + \boxed{g^{i\bar j}(x,\bar x) P_i P_{\bar j} + \mu^i_{\bar j} P_i \bar\partial \bar X^{\bar j} + \mu^{\bar i}_j P_{\bar i} \partial X^j + b_{i\bar j} \partial X^i \bar\partial \bar X^{\bar j}} \right). \tag{2.1}$$

С помощью комплексной структуры J можно переходить от старой геометрии к новой и, почти всегда, наоборот:

$$(G,B) \overset{J}{\leftrightarrow} (g, \mu, \bar\mu, b). \tag{2.2}$$

Поговорим про теорию

$$S = \int\limits_\Sigma P_i \bar\partial X^i.$$

В ней есть поля размерности $(\bullet, 0)$. Это, конечно, функции $f(x) \in (0,0)$, но также и $(\mathrm{Vect} \oplus \Omega) \in (1,0)$ — алгебра векторных полей, расширенная своими представлениями. Такие элементы образуют алгебру Ли, назовём её L.

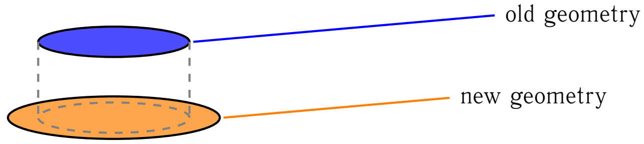
Новая геометрия лежит в $L \otimes \bar L$. Именно, произведём следующее несложное вычисление:

$$(V \oplus \Omega^1) \otimes (\bar V \oplus \bar\Omega^1) =$$

$$= \boxed{V\otimes\bar V} \oplus \boxed{V\otimes\bar\Omega^1} \oplus \boxed{\Omega^1\otimes\bar V} \oplus \boxed{\Omega^1\otimes\bar\Omega^1}.$$

Как уже стало понятно из боевой раскраски, $g\in V\otimes\bar V$, $\mu\in V\otimes\bar\Omega^1$, $\bar\mu\in\Omega^1\otimes\bar V$, $b\in\Omega^1\otimes\bar\Omega^1$.

Новая геометрия «чуть» больше старой:



Например, в старой геометрии годилась только Риччи-плоская метрика.

Новая геометрия существует на 0-мерных схемах. (А 0-мерные схемы — это по разным причинам хорошо.)

Говоря «схема», мы, в первую очередь, держим в уме следующий пример:

$$\mathbb{C}[x_1,...,x_n]/I_{F(x)}.$$

Посредством резольвенты Кошуля это эквивалентно $\mathbb{C}[x_1,...,x_n,\theta]$ с дифференциалом $Q=F\frac{\partial}{\partial\theta}$.

Пространство является гомологическим многообразием с гомологическим векторным полем. (Гомологическое векторное поле — такое векторное поле $Q=v^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$, что $Q^2=0$.) Для вещественно двумерного многообразия с комплексной структурой условие гомологичности векторного поля означает интегрируемость структуры. Деформация многообразия — это деформация гомологического векторного поля.[6]

Традиционного пространства в CFT нет.

Пусть есть семейство CFT$_t$. Пусть, когда $t\to t_0$, некоторая группа полей неожиданно приобретает размерность 0.

Назовём эти поля $\tilde\varphi$. У них есть операторное разложение

$$\tilde\varphi_a(t)\tilde\varphi_b(0)=c^c_{ab}(z,t)\tilde\varphi_c+...$$

Мы видим, что пространство возникает алгебраически. Возникает как аффинная схема («по Гротендику»), а не как набор дисков, склеенных между собой.

Классическая физика и связанная с ней дифференциальная геометрия умерли. Фейнман как великий контрреволюционер.

Пусть $\gamma\in L\otimes\bar L, a\in L,\bar a\in\bar L$. Определим скобку $[[,]]$:

$$[[a\otimes\bar a,b\otimes\bar b]]:=[a,b]_L\otimes[\bar a,\bar b]_{\bar L}$$

Уравнение струнной гравитации, предположительно, выглядит так:

$$(d+Q)(\gamma)+[[\gamma,\gamma]]+\mathcal{O}(\gamma^3)=0 \tag{2.3}$$

$\gamma\in(g,\mu,\bar\mu,b)$, так что это действительно уравнение струнной гравитации (струнной — потому что с полем Калба—Рамона b, гравитации — потому что с метрикой). У этого уравнения есть решения на схемах, которые можно изучать.

То есть, по-видимому, уравнения струнной гравитации имеют вид уравнения Маурера—Картана.

Не так же ли выглядят уравнения М-теории? Этот вопрос, естественно, открыт.

Изучение этого уравнения и его симметрий — это и есть более-менее изучение струнной геометрии пространства-времени.

[6] Тут где-то ещё мимо проходили обобщённые деформации комплексных структур по Баранникову—Концевичу, но, где конкретно, я не понимаю.