

PROPOSISI

MATEMATIKA SISTEM INFORMASI 1





Logika

- Logika merupakan dasar dari semua penalaran (*reasoning*).
- Penalaran didasarkan pada hubungan antara pernyataan (*statements*).

Proposisi

- Pernyataan atau kalimat deklaratif yang bernilai benar (*true*) atau salah (*false*), tetapi tidak keduanya.

Definisi (Proposisi)

Sebuah proposisi (*proposition*) atau *statement* ialah sebuah **kalimat deklaratif (pernyataan)** yang memiliki tepat satu nilai kebenaran, yaitu: **"Benar"(B)** atau **"Salah"(S)**.

NILAI KEBENARAN suatu pernyataan didasarkan pada fakta ilmiah atau kesepakatan umum.

Suatu proposisi adalah sebuah variabel logika p, q, r, \dots atau sebuah ungkapan yang dibangun dari variabel-variabel ini dan hubungan dengan logika (\wedge, \vee, \sim).



“Gajah lebih besar daripada tikus.”

Apakah ini sebuah pernyataan?

YA

Apakah ini sebuah proposisi?

YA

Apakah nilai kebenaran
dari proposisi ini?

BENAR



“250 < 111”

Apakah ini sebuah pernyataan?

YA

Apakah ini sebuah proposisi?

YA

Apakah nilai kebenaran
dari proposisi ini?

SALAH


$$“y > 5”$$

Apakah ini sebuah pernyataan?

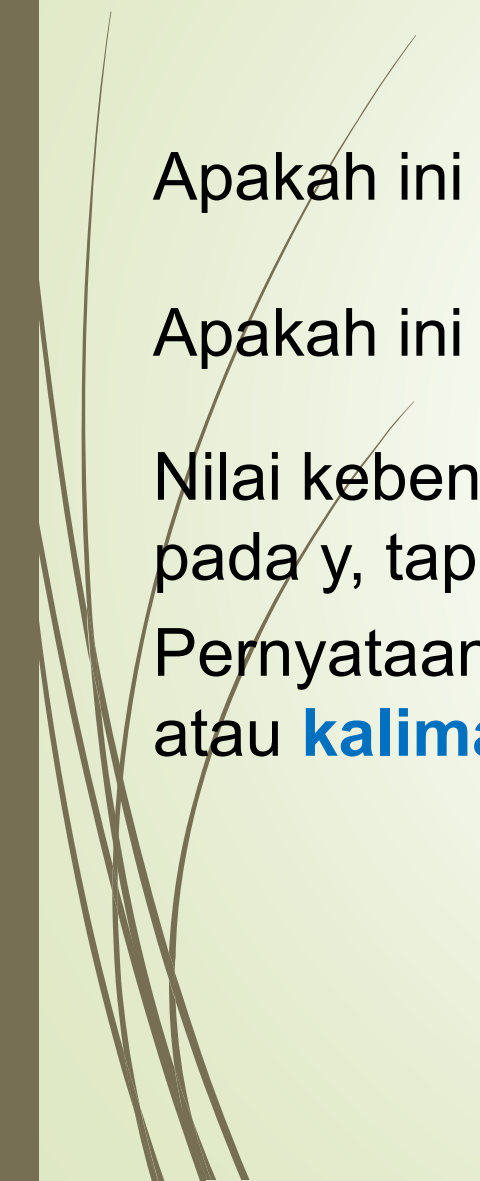
YA

Apakah ini sebuah proposisi?

TIDAK

Nilai kebenaran dari pernyataan tersebut bergantung pada y , tapi nilainya belum ditentukan.

Pernyataan jenis ini kita sebut sebagai **fungsi proposisi** atau **kalimat terbuka**.





“Sekarang tahun 2016 dan $77 < 7$.”

Apakah ini sebuah pernyataan?

YA

Apakah ini sebuah proposisi?

YA

Apakah nilai kebenaran
dari proposisi ini?

SALAH



“Tolong untuk tidak tidur selama kuliah”

Apakah ini sebuah pernyataan?

TIDAK

Ini adalah sebuah permintaan.

Apakah ini sebuah proposisi?

TIDAK

**Hanya pernyataanlah yang bisa
menjadi proposisi.**



“ $x < y$ jika dan hanya jika $y > x$.”

Apakah ini pernyataan ?

YA

Apakah ini proposisi ?

YA

... karena nilai kebenarannya tidak bergantung harga spesifik x maupun y .

Apakah nilai kebenaran dari proposisi ini ?

BENAR

CONTOH :

- 1) Jakarta adalah ibukota negara Republik Indonesia
- 2) Ponorogo terletak di propinsi Jawa Tengah
- 3) $1 + 2 = 3$
- 4) $2 + 2 = 5$
- 5) Jam berapakah sekarang ?
- 6) Silahkan masuk ke ruangan !
- 7) $x + 2 = 3$

Jawaban:


No. 1 dan 3 **Proposisi** bernilai benar (T)

No. 2 dan 4 **Proposisi** bernilai salah (F)

No. 5 dan 6 **bukan Proposisi** karena pertanyaan dan permintaan.

No. 7, Bila $x=1$ maka Proposisi benar, tp bila $x=2$ maka proposisi salah. kebenarannya tidak pasti maka ia

bukan proposisi **TETAPI** **Fungsi proposisi**



Dalam logika matematika dikenal sebanyak 5 penghubung, yaitu:

1. Negasi(*Negation*)
2. Konjungsi(*Conjunction*)
3. Disjungsi(*Disjunction*)
4. Implikasi(*Implication*)
5. Ekuivalensi(*Equivalence*)

NEGASI (INGKARAN)

DEFINISI : Untuk sembarang proposisi, p , yang memiliki nilai kebenaran, B/S , maka negasinya ditulis sebagai, $\sim p$, memiliki nilai kebenaran lawannya, S/B .

TABEL 1 : TB untuk proposisi dan negasinya

p	$\neg p$
T	F
F	T

NOTASI UNTUK PROPOSISI : p, q, r, s, \dots

Misalkan p suatu proposisi. Proposisi yang menyatakan “bukan p ” disebut **NEGASI** atau ingkaran dari pernyataan p , dan disimbolkan oleh $\neg p$.

CONTOH :

PROPOSISI	INGKARAN
Hari ini adalah hari Senin	Hari ini adalah bukan hari Senin
2 adalah bilangan genap	2 adalah bilangan ganjil
3 lebih dari 2	3 kurang dari atau sama dengan 2

INGAT : Jika suatu proposisi bernilai T maka ingkarannya bernilai F, begitu juga sebaliknya.

KONJUNGSI

DEFINISI : Misalkan p dan q adalah proposisi. Proposi “ p dan q ” ditulis $p \wedge q$ adalah proposisi yang bernilai **benar** jika kedua p dan q **benar** dan bernilai salah untuk kasus lainnya. Proposisi $p \wedge q$ disebut **konjungsi** dari p dan q .

TABEL 2 : TB Konjungsi

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

CONTOH :

1. Misalkan p : Hari ini Jumat, q : Hari ini hujan.
maka $p \wedge q$: Hari ini Jumat dan hujan.

Bagaimana nilai kebenarannya. Sangat tentatif, tergantung pada keadaan disaat pernyataan ini diungkapkan.

2. Misalkan p : Ada 7 hari dalam seminggu,
 q : $2+2 = 4$, maka $p \wedge q$: Ada 7 hari dalam seminggu
dan $2+2 = 4$. Proposisi ini yang bernilai benar.

CONTOH :

p = Bumi adalah satu-satunya planet di jagat raya yang mempunyai kehidupan. (B)

q = Satu dekade sama dengan 10 tahun. (B)

$p \wedge q = ?$

Jawab:

Bumi adalah satu-satunya planet di jagat raya yang mempunyai kehidupan dan satu dekade sama dengan 10 tahun.

DISJUNGSI

DEFINISI : Misalkan p dan q adalah proposisi. Proposisi “ p atau q ” ditulis $p \vee q$ adalah proposisi yang bernilai **salah** jika kedua p dan q **salah** dan bernilai **benar** untuk kasus lainnya.

TABEL 3. TB Disjungsi

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Diperhatikan proposisi berikut :

CONTOH :

“Mahasiswa yang sudah mengambil kuliah kalkulus atau kuliah algoritma pemrograman boleh mengambil kuliah metoda numerik.

bentuk disjungsi $p \vee q$, dimana

p : Mhs yang sudah kuliah kalkulus boleh ambil numerik

q : Mhs yang sudah ambil algoritma boleh ambil numerik

Beberapa kemungkinan mhs yang boleh ambil numerik :

1. Mhs yang sudah mengambil kuliah kalkulus saja
2. Mhs yang sudah mengambil kuliah algoritma saja
3. Mhs yang sudah mengambil keduanya.

Diketahui proposisi-proposisi berikut:

p : Pemuda itu tinggi

q : Pemuda itu tampan

Nyatakan dalam bentuk simbolik:

- (a) Pemuda itu tinggi dan tampan
- (b) Pemuda itu tinggi tapi tidak tampan
- (c) Pemuda itu tidak tinggi maupun tampan
- (d) Tidak benar bahwa pemuda itu pendek atau tidak tampan
- (e) Pemuda itu tinggi, atau pendek dan tampan
- (f) Tidak benar bahwa pemuda itu pendek maupun tampan

Penyelesaian

- (a) $p \wedge q$
- (b) $p \wedge \sim q$
- (c) $\sim p \wedge \sim q$
- (d) $\sim(\sim p \vee \sim q)$
- (e) $p \vee (\sim p \wedge q)$
- (f) $\sim(\sim p \wedge \sim q)$

IMPLIKASI

DEFINISI : Misalkan p dan q adalah proposisi. Proposi “jika p maka q ” ditulis $p \rightarrow q$ adalah proposisi yang bernilai **salah** jika p **benar** tetapi q **salah** dan bernilai **benar** untuk kasus lainnya.

TABEL 5. TB Impilkasi

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Diperhatikan TB implikasi :

- ❖ apapun nilai kebenaran q , asalkan p bernilai salah maka implikasinya bernilai benar.

PENYEBUTAN LAIN UNTUK

$p \rightarrow q$:

1. p berimplikasi q
2. p berakibat q
3. q hanya jika p
4. p adalah syarat cukup q
5. q adalah syarat perlu p

Misalkan p : soal ujian yang diberikan oleh guru
q : jawaban yang diberikan oleh siswa

Nilai kebenaran dari $p \rightarrow q$ diilustrasikan sbg penilaian guru :

1. Bila soal ujian **benar**, jawaban juga **benar** maka nilainya **lulus**
2. Bila soal ujian **benar**, jawaban **salah** maka nilainya harus **gagal**
3. Bila soal ujiannya **salah**, dijawab **benar** maka nilainya **lulus**
4. Bila soal ujiannya **salah**, dijawab **salah** maka nilainya **lulus**.

BI-IMPLIKASI

DEFINISI : Misalkan p dan q adalah proposisi. Proposi “ p jika hanya jika q ” ditulis $p \leftrightarrow q$ adalah proposisi yang bernilai **benar** jika p dan q keduanya **benar** atau keduanya bernilai **salah**.


TABEL 6. TB bi-Implikasi

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T



Proposisi majemuk berikut adalah bi-implikasi:

- (a) $1 + 1 = 2$ jika dan hanya jika $2 + 2 = 4$.
- (b) Syarat cukup dan syarat perlu agar hari hujan adalah kelembaban udara tinggi.
- (c) Jika anda orang kaya maka anda mempunyai banyak uang, dan sebaliknya.
- (d) Bandung terletak di Jawa Barat *jika dan hanya jika* Jawa Barat adalah sebuah propinsi di Indonesia.



Tuliskan setiap proposisi berikut ke dalam bentuk “ p jika dan hanya jika q ”:

- (a) Jika udara di luar panas maka anda membeli es krim, dan jika anda membeli es krim maka udara di luar panas.
- (b) Syarat cukup dan perlu agar anda memenangkan pertandingan adalah anda melakukan banyak latihan.

Penyelesaian:

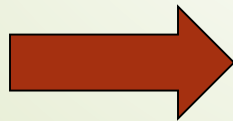
- (a) Anda membeli es krim jika dan hanya jika udara di luar panas.
- (b) Anda memenangkan pertandingan jika dan hanya jika anda melakukan banyak latihan.

Konvers, invers dan kontraposisi

Diperhatikan implikasi $p \rightarrow q$:

- Konvers : $q \rightarrow p$
- Invers : $\neg p \rightarrow \neg q$
- Kontraposisi : $\neg q \rightarrow \neg p$

Coba buat tabel kebenaran untuk konjungsi, disjungsi, XOR, implikasi, konvers, invers dan kontraposisi. Selidikilah apa saja pasangan proposisi yang mempunyai nilai kebenaran yang sama.



EKUIVALENSI PROPOSISI

Tautologi dan Kontradiksi

Proposisi majemuk disebut **tautologi** jika ia benar untuk semua kasus

Proposisi majemuk disebut **kontradiksi** jika ia salah untuk semua kasus.

Contoh :

$p \vee \neg p$: Tautologi

$p \wedge \neg p$: Kontradiksi

Besok akan turun hujan atau tidak turun hujan \longrightarrow tautologi

2 adalah bilangan genap dan bilangan ganjil \longrightarrow kontradiksi

Contoh Tautologi:

Buktikan bahwa proposisi $p \vee \sim (p \wedge q)$ adalah sebuah tautologi. Buatlah tabel kebenarannya!

Jawab

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$p \vee \sim (p \wedge q)$
B	B	B	S	B
B	S	S	B	B
S	B	S	B	B
S	S	S	B	B

Karena nilai kebenaran dari $p \vee \sim (p \wedge q)$ adalah B (benar) untuk semua nilai p dan q maka proposisi adalah sebuah Tautologi.

Contoh Kontradiksi:

Buktikan bahwa proposisi $(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q)$ adalah sebuah Kontradiksi.

Jawab

Tabel kebenaran

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$	$(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q)$
B	B	B	B	S	S
B	S	S	B	S	S
S	B	S	B	S	S
S	S	S	S	B	S

Karena nilai kebenaran dari $(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q)$ adalah S (salah) untuk semua nilai p dan q maka proposisi adalah sebuah kontradiksi.

EKUIVALEN LOGIS

DEFINISI :



Dua proposisi m dan n dikatakan **ekuivalen logis** jika $m \leftrightarrow n$ merupakan suatu **tautologi**.

Notasi $m \leftrightarrow n$: untuk menyatakan bahwa m dan n ekuivalen secara logis.

CONTOH : 1. implikasi $p \rightarrow q$ ekuivalen logis dengan kontraposisinya

$$2. \neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

Bukti : Gunakan tabel kebenaran. Berikut untuk contoh 1, contoh 2 diberikan sebagai latihan.



p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$\neg q \rightarrow \neg p$
T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

sama

Dalam penerapannya, kebenaran proposisi yang berupa implikasi kadangkala dibuktikan melalui kontraposisinya.

BEBERAPA BENTUK EKUIVALENSI LOGIS

Misalkan T proposisi yang selalu bernilai benar dan F propoisi Yang selalu bernilai salah.

1. Hukum Identitas : $p \wedge T \Leftrightarrow p$ dan $p \vee F \Leftrightarrow p$
2. Hukum Dominasi : $p \vee T \Leftrightarrow T$ dan $p \wedge F \Leftrightarrow F$
3. Hukum Idempoten : $p \vee p \Leftrightarrow p$ dan $p \wedge p \Leftrightarrow p$
4. Hukum negasi ganda : $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$
5. Hukum Komutatif : $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ dan $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
6. Hukum Asosiatif : $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
 $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
7. Hukum Distributif : $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
 $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
8. Hukum De Morgan : $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
 $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

LATIHAN

1. Misalkan p adalah "Dia tinggi" dan q adalah "Dia tampan".
Tuliskan setiap pernyataan berikut dalam bentuk simbolik dengan menggunakan p dan q
(Asumsikan bahwa "Dia rendah" berarti "Dia tidak tinggi".)

- Dia tinggi dan tampan.
- Dia tinggi tetapi tidak tampan.
- Salah bahwa dia rendah atau tampan.
- Dia tidak tinggi maupun tampan.

2. Misalkan p adalah "Sam orang kaya" dan q adalah "Sam bahagia". Berikan sebuah kalimat verbal sederhana yang menggambarkan setiap pernyataan berikut:

a. $p \wedge q$

c. $p \vee \sim q$

b. $\sim p \wedge \sim q$

d. $\sim p \vee (p \wedge \sim q)$

LATIHAN

3. Diberikan pernyataan “Perlu memiliki *password* yang sah agar anda bisa *log on* ke *server*”
 - (a) Nyatakan pernyataan di atas dalam bentuk proposisi “jika p , maka q ”.
 - (b) Tentukan ingkaran, konvers, invers, dan kontraposisi dari pernyataan tsb

4. Tuliskan setiap proposisi berikut ke dalam bentuk “ p jika dan hanya jika q ”.
 - (a) Jika anda lama menonton televisi maka mata anda lelah, begitu sebaliknya.
 - (b) Anda naik jabatan jika anda punya koneksi, dan anda punya koneksi jika anda naik jabatan.
 - (c) Kereta api datang terlambat tepat pada hari-hari ketika saya membutuhkannya.



FINISH...