LIMIT
FUNGSI ALJABAR

Oleh
Yan Fardian

Lengkap Dengan:
- **Ringkasan materi**
- **Contoh soal**
- **Soal-soal latihan**

"Matematika adalah bahasa Tuhan ketika Ia menciptakan alam semesta ini"
(Galileo Galilei)

RINGKASAN MATERI

A. Defenisi Limit

Defenisi

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ artinya jika x mendekati a (tetapi $x \neq a$) maka $f(x)$ mendekati L.

Catatan:

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ dibaca "limit fungsi $f(x)$ untuk x mendekati a sama dengan L".

B. Menentukan Nilai Limit Fungsi Aljabar

Langkah awal dalam menentukan nilai dari $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ adalah dengan cara mensubstitusi $x = a$ ke fungsi $f(x)$. Jika $f(a)$ hasilnya terdefenisi, maka $f(a)$ adalah nilai limit yang dicari. Tetapi sebaliknya, apabila $f(a)$ menghasilkan bentuk tak tentu seperti $\frac{0}{0}$, $\infty - \infty$ dan $\frac{\infty}{\infty}$ maka perhitungan nilai limit dilakukan dengan cara lain, pemfaktoran, L'Hopital atau perkalian sekawan.

1. Limit Fungsi berbentuk $\lim\limits_{x \to a} f(x)$

Dapat ditentukan dengan 3 cara:

(a) Substitusi Langsung

Nilai $x = a$ disubstitusi langsung ke dalam $f(x)$.

Contoh:

Hitunglah $\lim\limits_{x \to 3} 3x - 5$

Jawab:

$\lim\limits_{x \to 3} 3x - 5 = 3(3) - 5 = 4$

(b) Pemfaktoran

Jika $F(x)$ dan $G(x)$ adalah fungsi polinom bernilai nol (0) untuk $x = a$, maka:

$$\lim_{x \to a} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)f(x)}{(x-a)g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}$$

Contoh

Hitunglah $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

Jawab

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=2+2=4$$

(c) Perkalian Sekawan

Perkalian sekawan umumnya digunakan untuk menentukan limit fungsi yang berbentuk akar.

Contoh

Hitunglah $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-\sqrt{5-x}}{x-1}$

Jawab

$$\lim_{x\to 1}\frac{2-\sqrt{5-x}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2-\sqrt{5-x}}{x-1}\times\frac{2+\sqrt{5-x}}{2+\sqrt{5-x}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(2-\sqrt{5-x}\right)\left(2+\sqrt{5-x}\right)}{(x-1)\left(2+\sqrt{5-x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{4-(5-x)}{(x-1)\left(2+\sqrt{5-x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-1)}{(x-1)\left(2+\sqrt{5-x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\left(2+\sqrt{5-x}\right)}$$

$$=\frac{1}{2+\sqrt{5-1}}$$

$$=\frac{1}{2+\sqrt{4}}$$

$$=\frac{1}{4}$$

2. Limit Fungsi Berentuk $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

Menghitung nilai limit suatu fungsi untuk x mendekati tak hingga (∞) dapat menggunakan cara:

- Membagi dengan pangkat tertinggi
- Perkalian akar sekawan

Tips:

a. $$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^m+bx^{m-1}+cx^{m-2}+\ldots}{px^n+qx^{n-1}+rx^{n-2}+\ldots}=\begin{cases}0, & \text{jika } m<n\\ \dfrac{a}{p}, & \text{jika } m=n\\ \infty, & \text{jika } m>n\end{cases}$$

Contoh

Hitunglah $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-2x++1}{5x^2+3}$

Jawab

Oleh karena m = n = 2, maka:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 2x + +1}{5x^2 + 3} = \frac{2}{5}$$

b. $$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{px^2 + qx + r}\right) = \begin{cases} \infty, & \text{jika } a > p \\ \dfrac{b-q}{2\sqrt{a}}, & \text{jika } a = p \\ -\infty, & \text{jika } a < p \end{cases}$$

Contoh

Hitunglah $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{2x^2 + 5x - 6} - \sqrt{2x^2 + 2x - 1})$

Jawab

Karena a = p = 2, maka:

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{2x^2 + 5x - 6} - \sqrt{2x^2 + 2x - 1}) = \frac{5-2}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{4}\sqrt{2}$$

C. Teorema Limit

Misalkan k konstanta, a, b bilangan real, serta f dan g fungsi-fungsi yang mempunyai limit di a, maka berlaku teorema-teorema berikut.

a. $\lim_{x\to a} k = k$

b. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

c. $\lim_{x\to a} k.f(x) = k.\lim_{x\to a} f(x)$

d. $\lim_{x\to a} f(x) \pm g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$

e. $\lim_{x\to a} f(x).g(x) = \lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x)$

f. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$

g. $\lim_{x\to a} f^n(x) = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$

h. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$, dengan $\lim_{x\to a} f(x) > 0$

i. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

D. Limit Fungsi trigonometri

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \lim_{x\to 0} \frac{ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan ax}{bx} = \lim_{x\to 0} \frac{ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$
4. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$
5. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$
6. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$

CONTOH SOAL DAN PEMBAHASAN

1. Nilai dari $\lim\limits_{x \to 2} 4x + 12$ sama dengan ....

   A. 6
   B. 16
   C. 20
   D. 24
   E. 48

   Pembahasan

   $$\lim_{x \to 2} 4x + 12 = 4(2) + 12 = 20$$

2. Nilai dari $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 8x - 20}{x^2 - 5x + 6} = ...$

   A. 12
   B. 10
   C. 2
   D. -10
   E. -12

   Pembahasan

   $$\begin{aligned}\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 8x - 10}{x^2 - 5x + 6} &= \lim_{x \to 2} \frac{(x+10)(x-2)}{(x-3)(x-2)} \\ &= \lim_{x \to 2} \frac{x+10}{x-3} \\ &= \frac{2+10}{2-3} \\ &= \frac{12}{-1} \\ &= -12\end{aligned}$$

   Jadi, $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 8x - 20}{x^2 - 5x + 6} = 12$

   Solusi Alternatif: Dengan L'Hopital

   $$\begin{aligned}\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 8x - 10}{x^2 - 5x + 6} &= \lim_{x \to 2} \frac{2x+8}{2x-5} \\ &= \frac{2(2)+8}{2(2)-5} \\ &= \frac{12}{-1} \\ &= -12\end{aligned}$$

3. Nilai dari $\lim\limits_{t \to 1} \dfrac{5t^4 - 4t^2 - 1}{10 - t - 9t^3}$

   Pembahasan

   Dengan aturan L'Hopital

   $$\lim_{t \to 1} \frac{5t^4 - 4t^2 - 1}{10 - t - 9t^3} = \lim_{t \to 1} \frac{20t^3 - 8t}{-1 - 27t^2}$$

$$= \frac{20(1)^3 - 8(1)}{-1 - 27(1)}$$
$$= \frac{12}{-28}$$
$$= -\frac{3}{7}$$

Jadi, $\lim\limits_{t \to 1} \frac{5t^4 - 4t^2 - 1}{10 - t - 9t^3} = -\frac{3}{7}$

4. Tentukan nilai dari $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(x+3)^3 - 27}{x}$

Pembahasan

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x+3)^3 - 27}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(x^3 + 9x^2 + 27x + 27) - 27}{x}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^3 + 9x^2 + 27x}{x}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{x(x^2 + 9x + 27)}{x}$$
$$= \lim_{x \to 0} x^2 + 9x + 27$$
$$= 0^2 + 9(0) + 27$$
$$= 27$$

Jadi, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(x+3)^3 - 27}{x} = 27$

5. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x^2 + 16} - 5} = ...$

A. 8
B. – 3
C. – 5
D. 5
E. 10

Pembahasan

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x^2 + 16} - 5} = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x^2 + 16} - 5} \times \frac{\sqrt{x^2 + 16} + 5}{\sqrt{x^2 + 16} + 5}$$
$$= \lim_{x \to 3} \frac{(x^2 - 9)(\sqrt{x^2 + 16} + 5)}{(\sqrt{x^2 + 16} - 5)(\sqrt{x^2 + 16} + 5)}$$
$$= \lim_{x \to 3} \frac{(x^2 - 9)(\sqrt{x^2 + 16} + 5)}{(x^2 + 16) - 25}$$
$$= \lim_{x \to 3} \frac{(x^2 - 9)(\sqrt{x^2 + 16} + 5)}{x^2 - 9}$$
$$= \lim_{x \to 3} \sqrt{x^2 + 16} + 5$$
$$= \sqrt{(3)^2 + 16} + 5$$
$$= \sqrt{25} + 5$$
$$= 10$$

Jadi, $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x^2 + 16} - 5} = 10$

6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+1}}{x-3}=....$ (UMPTN 2000)

A. $-\dfrac{1}{14}\sqrt{7}$

B. $-\dfrac{1}{7}\sqrt{7}$

C. 0

D. $\dfrac{1}{7}\sqrt{7}$

E. $\dfrac{1}{14}\sqrt{7}$

Pembahasan

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+1}}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+1}}{x-3}\times\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+1}}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+1})(\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+1})}{(x-3)(\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+1})}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x+4)-(2x+1)}{(x-3)(\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+1})}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{-(x-3)}{(x-3)(\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+1})}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{-1}{\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+1}}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{3+4}+\sqrt{2(3)+1}}$$

$$=\frac{-1}{2\sqrt{7}}$$

$$=-\frac{1}{14}\sqrt{7}$$

Jadi, $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+1}}{x-3}=-\dfrac{1}{14}\sqrt{7}$

7. Nilai $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{4x^2-3x-24}=....$

A. $\dfrac{9}{7}$

B. $\dfrac{7}{9}$

C. $\dfrac{2}{21}$

D. $\dfrac{2}{9}$

E. $\dfrac{7}{18}$

Pembahasan

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{4x^2-3x-24}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^2+3x+9}{(4x+9)(x-3)}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{x^2+3x+9}{4x+9}$$
$$=\frac{(3)^2+3(3)+9}{4(3)+9}$$
$$=\frac{27}{21}$$
$$=\frac{9}{7}$$

Solusi Alternatif: Dengan L'Hopital

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{4x^2-3x-24}=\lim_{x\to 3}\frac{3x^2}{8x-3}=\frac{3(3)^2}{8(3)-3}=\frac{9}{7}$$

Jadi, $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{4x^2-3x-24}=\frac{9}{7}$

Jadi, $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{4x^2-3x-24}=\frac{9}{7}$

8. Hitunglah nilai $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)$

Pembahasan:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)\times\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+2)-(x+1)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$
$$=\frac{0}{2}$$
$$=0$$

Jadi, $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)=0$

9. Tentukan nilai dari $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+12}-\sqrt{12}}$

Pembahasan

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+12}-\sqrt{12}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+12}-\sqrt{12}}\times\frac{\sqrt{x^2+12}+\sqrt{12}}{\sqrt{x^2+12}+\sqrt{12}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(\sqrt{x^2+12}+\sqrt{12})}{(\sqrt{x^2+12}-\sqrt{12})(\sqrt{x^2+12}+\sqrt{12})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(\sqrt{x^2+12}+\sqrt{12})}{(x^2+12x)-12}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(\sqrt{x^2+12}+\sqrt{12})}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\sqrt{x^2+12}+\sqrt{12}$$

$$=\sqrt{0+12}+\sqrt{12}$$

$$=2\sqrt{12}$$

$$=4\sqrt{3}$$

Jadi, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+12}-\sqrt{12}}=4\sqrt{3}$

10. Jika $f(x)=2x^2-10,$ maka $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-3}$ adalah ....

A. 12
B. 15
C. 6
D. 7
E. 8

Pembahasan

$f(x)=2x^2-10$

$f(1)=2(1)^2-10$

$f(1)=-8$

Kemudian

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(1)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-10-8}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-18}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3}(x+3)$$

$$=3+3$$

$$=6$$

Jadi, $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-3}=6$

11. Tentukan nilai dari $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^3+5x^2-3x+6}{3x^3-x^2+7x+6}$

Pembahasan

Oleh karena pangkat tertinggi pada bagian pembilang dan penyebut sama yaitu 3, maka cukup perhatikan koefisien-koefisien dari pangkat tertinggi tersebut.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3+5x^2-3x+6}{3x^3-x^2+7x+6} = \frac{4}{3}$$

12. Jika $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{5x^2-bx+3}-\sqrt{ax^2+6x-4}) = \sqrt{5}$, tentukanlah nilai a dan b yang memenuhi.

Pembahasan

Karena nilai dari $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{5x^2-bx+3}-\sqrt{ax^2+6x-4})$ ada nilainya, yaitu $\sqrt{5}$ maka a = 5. Selanjutnya akan dicari nilai b sebagai berikut.

$$\frac{-b-6}{2\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$-b-6 = 10$$

$$b = -14$$

Jadi, nilai a = 5 dan b = -14.

13. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{4x^2+8x}-\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+x}\right) = ...$

A. $\frac{5}{2}$

B. 2

C. $\frac{3}{2}$

D. 1

E. $\frac{1}{2}$

Pembahasan

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{4x^2+8x}-\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+x}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{4x^2+0x}\right) - \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+0x}-\sqrt{x^2+0x+1}\right) - \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+0x}-\sqrt{x^2+x}\right)$$

$$= \left(\frac{4-0}{2\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{0-0}{2\sqrt{1}}\right) - \left(\frac{0-1}{2\sqrt{1}}\right)$$

$$= 2 - 0 - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{2}$$

Solusi Alternatif

Perhatikan

$$\sqrt{4x^2}-\sqrt{x^2}-\sqrt{x^2}=2x-x-x=0$$

Sehingga:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+8x}-\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+x}\right)=\frac{8}{2\sqrt{4}}-\frac{0}{2\sqrt{1}}-\frac{1}{2\sqrt{1}}=2-0-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2}{2\sin^2(2x)}=....$

A. $\frac{3}{2}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{3}{4}$

D. 2

E. 1

Pembahasan

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{2\sin^2(2x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3x}{2\sin(2x)}.\frac{x}{\sin(2x)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{2}.\frac{x}{\sin(2x)}.\frac{x}{\sin(2x)}\right)$$

$$=\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\frac{2}{2}$$

$$=\frac{3}{8}$$

Jadi, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2}{2\sin^2(2x)}=\dfrac{3}{8}$

15. Nilai dari $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x-\sin 2x}{x-\sin x}=....$

A. – 6

B. -4

C. -

D. 4

E. 6

Pembahasan

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-\sin 2x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x-2\cos 2x}{1-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin x+4\sin 2x}{\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cos x+8\cos 2x}{\cos x}$$

$$=\frac{-2+8}{1}$$

$$=6$$

Jadi, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x-\sin 2x}{x-\sin x}=6$

16. Hitunglah $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\tan 9x.\sin 4x}}{x}$

Pembahasan

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\tan 9x.\sin 4x}}{x} = \lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{\tan 9x.\sin 4x}{x^2}}$$
$$= \lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{\tan 9x}{x}.\frac{\sin 4x}{x}}$$
$$= \sqrt{9.4}$$
$$= 6$$

Jadi, $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\tan 9x.\sin 4x}}{x} = 6$

17. Jika $\lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2+x+1}{x+1} - ax - b\right] = 4$, maka nilai dari $a^2 - b^2 = ...$

A. – 15

B. – 10

C. – 5

D. 4

E. 1

Pembahasan

$$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2+x+1}{x+1} - ax - b\right] = 4 \quad \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2+x+1-ax^2-ax-bx-b}{x+1}\right] = 4$$
$$\Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2-ax^2+x-ax-bx+1-b}{x+1}\right] = 4$$
$$\Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} \left[\frac{(1-a)x^2+(1-a-b)x+1-b}{x+1}\right] = 4$$

Bagi bagian pembilang dan penyebut dengan *x*, diperoleh:

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} \left[\frac{(1-a)x+(1-a-b)+\frac{1-b}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right] = 4$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} \left[\frac{(1-a)x+(1-a-b)+0}{1+0}\right] = 4$$ ..... defenisi: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} \left[(1-a)x+(1-a-b)\right] = 4$$

Sehingga diperoleh:

$$(1 - a) = 0 \text{ dan } (1 - a - b) = 4$$

Untuk $a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$

Untuk $1 - a - b = 4 \Rightarrow b = 1 - a - 4 = -4$

Dengan demikian:

$$a^2 - b^2 = (1)^2 - (-4)^2 = -15$$

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos 2x)(3+\cos x)}{x\tan 4x}=....$

A. $-\dfrac{1}{4}$

B. $\dfrac{1}{2}$

C. 1

D. 2

E. 4

Pembahasan

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 2x)(3+\cos x)}{x\tan 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 2x)(3+\cos x)}{x.\frac{\tan 4x}{4x}.4x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 2x)(3+\cos x)}{4x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x(3+\cos x)}{4x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{4}.\frac{\sin^2 x(3+\cos x)}{x^2}$$
$$=\frac{1}{2}.\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}(3+\cos x)$$
$$=\frac{1}{2}.1.4$$
$$=2$$

Konsep:

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$
- $\lim\limits_{x\to 0}k.f(x)=k.\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

19. Jika $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin^3 x}{3\cos^2 x}=\dfrac{m}{n}$, maka tentukan persamaan kuadrat yang akar-akarnya m dan n.

Pembahasan

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^3 x}{3\cos^2 x}=\frac{m}{n}$$
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)(1+\sin x+\sin^2 x)}{3(1-\sin^2 x)}=\frac{m}{n}$$
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)(1+\sin x+\sin^2 x)}{3(1-\sin x)(1+\sin x)}=\frac{m}{n}$$
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin x+\sin^2 x}{3(1+\sin x)}=\frac{m}{n}$$
$$\frac{1+\sin\frac{\pi}{2}+\sin^2\frac{\pi}{2}}{3\left(1+\sin\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{m}{n}$$

Konsep:

- $\sin\dfrac{\pi}{2}=1$
- $(a^3-b^3)=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
- Menyusun Pers. Kuadrat jika diketahui akar-akarnya.

  $x^2-(x_1+x_1)x+x_1x_1=0$

$$\frac{1+1+1}{3(1+1)} = \frac{m}{n}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{m}{n}$$

Jadi, m = 1 dan n = 2, sehingga persamaan kuadrat yang akar-akarnya 1 dan 2 adalah:

$$x^2 - (x_1 + x_1)x + x_1 x_1 = 0 \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0$$

20. Tentukan nilai dari $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{1 + x\sin x} - \cos x}$

Pembahasan

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1 + x\sin x} - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1 + x\sin x} - \cos x} \times \frac{\sqrt{1 + x\sin x} + \cos x}{\sqrt{1 + x\sin x} + \cos x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x(\sqrt{1 + x\sin x} + \cos x)}{(\sqrt{1 + x\sin x} - \cos x)(\sqrt{1 + x\sin x} + \cos x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x(\sqrt{1 + x\sin x} + \cos x)}{1 + x\sin x - \cos^2 x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x(\sqrt{1 + x\sin x} + \cos x)}{\sin^2 x + \cos^2 x + x\sin x - \cos^2 x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x(\sqrt{1 + x\sin x} + \cos x)}{\sin^2 x + x\sin x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x(\sqrt{1 + x\sin x} + \cos x)}{\sin x + x}$$

Konsep:

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Bagi bagian pembilang dan penyebut pada bentuk terakhir dengan sin$x$, diperoleh:

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{1 + x\sin x} + \cos x)}{1 + \dfrac{x}{\sin x}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{1 + x\sin x} + \cos x)}{1 + 1}$$

$$= \frac{\sqrt{1 + 0} + 1}{2}$$

$$= 1$$

Konsep:

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1 + x\sin x} - \cos x} = 1$$

21. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt[5]{x^2} + 11\sqrt[5]{x} - 26}{\sqrt[5]{x^2} - \sqrt[5]{x} - 2} = ...$

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

E. 7

Pembahasan

Misalkan $x = y^5$, sehingga bentuk semula menjadi:

$$\lim_{y\to 2} \frac{\sqrt[5]{(y^5)^2} + 11\sqrt[5]{y^5} - 26}{\sqrt[5]{(y^5)^2} - \sqrt[5]{y^5} - 2} = \lim_{y\to 2} \frac{y^2 + 11y - 26}{y^2 - y - 2}$$

$$= \lim_{y\to 2} \frac{(y-2)(y+13)}{(y-2)(y+1)}$$

$$= \lim_{y\to 2} \frac{y+13}{y+1}$$

$$= \frac{2+13}{2+1}$$

$$= 5$$

22. Jika $\lim_{x\to a} \left(f(x) - 3g(x) \right) = 2$ dan $\lim_{x\to a} \left(3f(x) + g(x) \right) = 1,$ maka $\lim_{x\to a} f(x).g(x) = ...$

A. $-\frac{1}{2}$

B. $-\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{1}{2}$

E. 1

Pembahasan

$$\lim_{x\to a} \left(f(x) - 3g(x) \right) = 2 \Rightarrow f(a) - 3g(a) = 2 \qquad \text{.........} \ (1)$$

$$\lim_{x\to a} \left(3f(x) + g(x) \right) = 1 \Rightarrow 3f(a) + g(a) = 1 \qquad \text{.........} \ (2)$$

Eliminasi (1) dan (2)

$$\begin{array}{r|l|l} f(a) - 3g(a) = 2 & \times 1 & f(a) - 3g(a) = 2 \\ 3f(a) + g(a) = 1 & \times 3 & \underline{9f(a) + 3g(a) = 3}\ + \end{array}$$

$$10f(a) = 5$$

$$f(a) = \frac{1}{2}$$

Substitusi $f(a) = \frac{1}{2}$ ke persamaan (1) diperoleh:

$$f(a) - 3g(a) = 2$$

$$\frac{1}{2} - 3g(a) = 2$$

$$-6g(a) = 3$$

$$g(a) = -\frac{1}{2}$$

Jadi, $\lim_{x\to a} f(x).g(x) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{4}$

SOAL LATIHAN

1. Nilai dari $\lim\limits_{x \to 4} (2x^2 - 4x + 8) = ...$

   A. – 24
   B. – 14
   C. – 10
   D. 10
   E. 24

2. Nilai $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3 - 3}{x^2 - 2x + 8} = ...$

   A. 5
   B. 8
   C. $\frac{5}{8}$
   D. $-\frac{5}{8}$
   E. $-\frac{8}{5}$

3. Nilai dari $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{2x^2 - 9} = ...$

   A. 1
   B. 2
   C. 3
   D. 4
   E. 5

4. $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2 - x - 6}{x + 2} = ...$

   A. – 5
   B. – 2
   C. – 1
   D. 5
   E. 2

5. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{3x^2 - 5x - 12}{x^2 - 9} = ...$

   A. 3
   B. – 3
   C. $\frac{6}{13}$
   D. $\frac{13}{6}$
   E. $-\frac{13}{6}$

6. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{(3x-1)^2 - 4}{x^2 + 4x - 5} = ...$

   A. 0
   B. ∞
   C. 2
   D. 4
   E. 8

7. **UAN 2002**

Nilai $\lim_{x\to 2}\left(\frac{6-x}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)=....$

A. $-\frac{1}{2}$

B. $-\frac{1}{4}$

C. 0

D. $\frac{1}{4}$

E. $\frac{1}{2}$

8. **SPMB 2002**

$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{\sqrt{x-4}}=....$

A. ∞

B. 8

C. 4

D. 1

E. 0

9. **UAN 2002**

$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{6x-2}-\sqrt{3x+7}}{x-3}=....$

A. 0

B. 1

C. $\frac{1}{8}$

D. $\frac{3}{8}$

E. $\frac{9}{8}$

10. Nilai dari $\lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}=....$

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

E. 7

11. Nilai dari $\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-2x}}=....$

A. 2

B. 1

C. 0

D. – 1

E. – 2

12. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2x-1}}{x-1}=....$

A. 1

B. $\frac{1}{2}$

C. $-\frac{1}{2}$

D. – 1

E. 0

13. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}=....$

A. 0
B. 3
C. 6
D. 12
E. 15

14. Jika $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{ax+b+\sqrt{x})}{x-4}=\dfrac{3}{4}$, maka $a+b=....$

A. 3
B. 2
C. 1
D. – 1
E. – 2

15. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{ax-2a}{\sqrt{2x}-x}=4,$ maka nilai a = ...

A. 2
B. 1
C. 0
D. – 1
E. – 2

16. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}=....$

A. 0
B. $\frac{1}{3}$
C. $\frac{1}{5}$
D. $\frac{1}{7}$
E. $\frac{1}{9}$

17. $\lim\limits_{a\to b}\dfrac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=....$

A. 0
B. $3a$
C. $\sqrt[3]{b}$
D. $3b$
E. ∞

18. **UMPTN 2011**

Nilai $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x(4x+5}-\sqrt{4x^2-3}\right)=....$

A. ∞
B. 8
C. $\frac{5}{4}$
D. $\frac{1}{2}$
E. 0

19. **UM UGM 2003**

Nilai $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+5x+6}-\sqrt{2x^2+2x-1}\right)=....$

A. $\frac{3}{2}\sqrt{2}$

B. $\frac{3}{4}\sqrt{2}$

C. $-\frac{3}{\sqrt{2}}$

D. $-\frac{3}{4}\sqrt{2}$

E. 3

20. **UN 2013**

Nilai dari $\lim_{x\to\infty}\left((2x-1)-\sqrt{4x^2-6x-5}\right)=....$

A. 4

B. 2

C. 1

D. $\frac{1}{2}$

E. $\frac{1}{4}$

21. Nilai $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{4+x^2}}{x}=....$

A. 0

B. $-\frac{1}{3}$

C. $-\frac{1}{2}$

D. – 1

E. $-\frac{3}{2}$

22. **UN 20017**

Nilai dari $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+4x-3}-(2x-5)\right)=....$

A. -6

B. -4

C. -1

D. 4

E. 6

23. Nilai dari $\lim_{x\to-2}\frac{1-\cos(x+2)}{x^2+4x+4}=....$

A. 0

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{2}$

D. 2

E. 4

24. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 2x . \sin^2 8x}{x^2 \sin 4x} = ...$

A. 32
B. 24
C. 16
D. 8
E. 4

25. **UAN 2005**

Nilai $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 4x - 1}{\cos 5x - \cos 3x} = ...$

A. 2
B. 1
C. $\dfrac{2}{3}$
D. $\dfrac{4}{5}$
E. 0

26. **SPMB 2002**

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 4x \tan^2 3x + 6x^3}{2x^2 \sin 3x \cos 2x} = ...$

A. 0
B. 4
C. 3
D. 5
E. 7

27. **UN 2017**

Nilai dari $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 4x}{2x \sin 4x} = ...$

A. 1
B. $\dfrac{1}{2}$
C. 0
D. $-\dfrac{1}{2}$
E. -1

28. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x + \tan 4x}{5x + \tan 3x} = ...$

A. $\dfrac{1}{4}$
B. $\dfrac{1}{2}$
C. $\dfrac{3}{4}$
D. ∞
E. $-\infty$

29. **Matdas - UM UGM 2017**

$$\lim_{x\to 1}\frac{x(2x^2-3x+1)^{\frac{3}{2}}}{(x^2-1)\sqrt{x-1}}=\ldots.$$

A. – 1
B. 0
C. $\frac{1}{2}$
D. 1
E. $\frac{3}{2}$

30. **MAT IPA – SIMAK UI 2012**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+7}{\sqrt{x^2+3x}}=\ldots.$$

A. $-\infty$
B. $-\frac{1}{2}$
C. 0
D. $\frac{1}{2}$
E. ∞

31. Misalkan $\lim_{x\to 4}\frac{ax^2+bx-\sqrt{x}}{x^2-16}=\frac{1}{2}$, maka bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan $a-2b$ adalah ....

A. – 5
B. 2
C. 6
D. 7
E. 8

32. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\sin x-\tan x}{x^2\sin x}=\ldots.$

A. – 1
B. $-\frac{1}{2}$
C. 0
D. $\frac{1}{2}$
E. 1

33. **SAINTEK 2017**

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x+3\cos x\cos 2x}{\sin x\cos x}=\ldots.$$

A. 8
B. 7
C. 6
D. 5
E. 2

34. **TO SBMPTN 2018 _ Wardaya College**

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^3-9x^2+12x-5+\tan^2\pi(x-1)}{(x^3-4x^2+5x-2)\cos^2(x-1)+\sin^2(3x-3)}=....$$

A. $\frac{\pi^2+2}{4}$
B. $\frac{\pi^2-2}{4}$
C. $\frac{\pi^2+3}{8}$
D. $\frac{\pi^2-3}{8}$
E. $\frac{\pi^2-1}{3}$

35. **MAT IPA _ UM UNDIP 2016**

$$\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{2+\sqrt[4]{x}}-2}=....$$

A. $\frac{2}{5}$
B. 5
C. 10
D. 12
E. 16

36. Jika $\lim_{x\to 0} f(x)=3$, $\lim_{x\to 0} g(x)=-5$ dan $\lim_{x\to 0} h(x)=\frac{1}{2}$, maka nilai dari $\lim_{x\to 0}\frac{(2f(x)+g(x))^2}{h(x)}$ adalah ....

A. $\frac{1}{2}$
B. 2
C. 8
D. 4
E. 16

37. Nilai dari $\lim_{x\to 1}\frac{(x^3-1)^{\frac{1}{2}}\tan(x-1)}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\sin(x-1)}=....$

A. 0
B. 1
C. $\frac{3}{2}$
D. $\frac{1}{2}\sqrt{6}$
E. 6

38. $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\frac{\sin^3 2t}{\cos 2t}+\sin 2t\cos 2t\right)=....$

A. 0
B. 1
C. 2
D. $\frac{1}{2}$
E. ∞

39. Jika $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)}{x} = \frac{2}{3}$, maka nilai dari $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)}{\sqrt{2-x}-2}$ adalah ....

A. -3

B. -2

C. 1

D. 2

E. 3

40. Diketahui fungsi f kontinu di $x = 2$ dan $\lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{f(x)} = 3$. Nilai $\lim\limits_{x \to 2} \left[\frac{1}{f^2(x)} \times \frac{x-2}{\sqrt{2x}-\sqrt{2}} \right]$ adalah ....

A. 8

B. $10\sqrt{2}$

C. $12\sqrt{3}$

D. 15

E. 18

"Pahala dari tulisan sederhana ini ku hadiahkan kepada kedua orang tuaku tercinta"....:)