MATERI PERTEMUAN III:

Distribusi Peluang Teoritis, Binomial dan Normal

I Ketut Putu Suniantara

Pertemuan III

Variabel Acak
(Random Variable)

- Pengertian Variabel Acak
- Tipe Variabel Acak: Diskret dan Kontinyu
- Sebaran Peluang Variabel Acak: Fungsi Massa dan Fungsi Kepekatan Peluang
- Karakteristik Fungsi Peluang dan Peluang Kumulatif
- Nilai Tengah dan Ragam Variabel Acak
- Try by Yourself

Pengertian Variabel Acak

- Misalkan, sekeping uang logam dilempar 2 kali, maka ruang sampel dari percobaan acak ini (H menyatakan sisi muka dan T menyatakan sisi belakang uang logam) adalah:

  S = {HH, HT, TH, TT}

- Jika pengamat hanya tertarik dengan Jumlah Sisi Muka yang Muncul pada percobaan tersebut – bukan pada urutan pemunculan sisi-sisi dari mata uang – maka dapat didefinisikan:

  R = {0, 1, 2}

- Variabel Acak (*Random Variable*) didefinisikan sebagai suatu fungsi yang memetakan setiap anggota S dari suatu percobaan acak ke himpunan bilangan Real R.

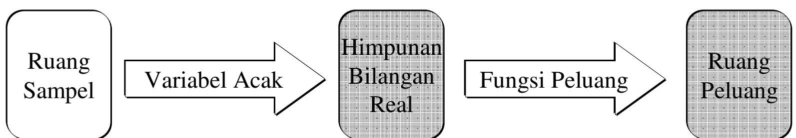
Variabel Acak Diskret dan Kontinyu

- Ditinjau dari wilayah (*range*) fungsi, sebuah Variabel acak X dapat diklasifikasikan menjadi:

1. Variabel Acak Diskret: Variabel acak yang wilayah fungsinya terdiri dari himpunan bilangan bulat. Pada umumnya, wilayah dari Variabel acak ini diperoleh dengan melakukan teknik pencacahan (*counting*). Sebagai contoh dalam kelompok ini adalah Variabel acak yang menyatakan selisih dari kedua sisi dadu yang muncul – seperti contoh pada slide sebelumnya.
2. Variabel Acak Kontinyu: Variabel acak yang wilayah fungsinya terdiri dari himpunan bilangan rasional. Pada umumnya, wilayah dari Variabel acak ini diperoleh dengan melakukan teknik pengukuran (*measu-rement*). Sebagai contoh, Variabel acak yang menyatakan tinggi badan dari 10 orang mahasiswa FMIPA yang mengikuti UKM Taekwondo.

Sebaran Peluang dari Variabel Acak

- Sebaran peluang (*probability distribution*) dari suatu Variabel acak tidak lain menggambarkan peluang dari nilai-nilai suatu Variabel acak. Fungsi peluang (*probability function*) akan memetakan setiap nilai dari suatu Variabel acak ke Ruang Peluang.
- Ruang Peluang merupakan suatu himpunan bilangan real yang anggota-anggotanya merupakan wilayah (*range*) dari suatu Variabel acak. Nilai minimum dan maksimum pada sebuah ruang peluang adalah **0** dan **1** (sesuai dengan aksioma-aksioma peluang).
- Perhatikanlah diagram berikut:



⇨ Fungsi Distribusi … | ⇧SAP | Variabel Acak Disk … ⇦

Distribusi Peluang Diskrit - Fungsi Massa Peluang

- Fungsi Massa Peluang (*Probability Mass Function*) merupakan suatu fungsi yang memetakan seluruh nilai dari sebuah Variabel acak diskret ke ruang peluang.
- Pada kasus pelemparan sekeping uang logam 2 kali di mana pengamat terta-rik dengan kejadian Jumlah Sisi Muka yang Muncul, maka distribusi peluang dari Variabel acak ini dapat dinyatakan dalam tabel berikut:
- X = Jumlah Sisi Muka yang Muncul pada Pelemparan Uang Logam 2 Kali

X = x	0	1	2
P (X = x)	¼	½	¼

$$P(X=x) = \binom{2}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{2-x}$$

⇨ Fungsi Massa Peluang dari X

⇨ Fungsi Kepekatan … | ⇧SAP | Fungsi Distribusi … ⇦

Karakteristik Fungsi Peluang dan Peluang Kumulatif

- Karakteristik dari fungsi massa pe-luang Variabel acak diskret dapat di-nyatakan sebagai berikut:

$$P(X = x) \geq 0 \qquad (1)$$

$$\sum_{\forall x} P(X = x) = 1 \qquad (2)$$

- Fungsi Peluang Kumulatif Variabel acak X pada *x* didefinisikan sebagai jumlah seluruh peluang X untuk semua $y \leq x$ dan dinotasikan sebagai F(*x*)
- Peluang kumulatif Variabel acak diskret X dinyatakan sebagai:

$$P(X \leq x) = \sum_{\forall y \leq x} P(X = y)$$

Nilai Tengah dan Ragam dari Variabel Acak

- Memperhatikan bahwa wilayah (*range*) dari sebuah Variabel acak merupakan himpunan bilangan real; maka (wilayah) sebuah Variabel acak akan memiliki Nilai Tengah (*mean*) dan Ragam (*variance*).
- Nilai Tengah dan Ragam dari fungsi massa peluang Variabel acak diskret pada suatu populasi dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\text{Nilai Tengah} = \mu_X = \sum_{\forall x} x \cdot P(X = x)$$

$$\text{Ragam} = \sigma_X^2 = \sum_{\forall x} [(x - \mu_X)^2 \cdot P(X = x)]$$

Contoh – Distribusi Peluang Diskrit

Seorang pengusaha perhotalan bermaksud ingin membuka hotel baru disalah satu daerah yaitu Jimbaran atau Kuta. Dengan membuka hotel di Jimbaran ia akan mendapatkan keuntungan sebesar 3 miliar rupiah pertahun dan 2 miliar rupiah pertahun jika membangun di daerah Kuta. Tetapi jika usahanya ini gagal ia akan menderita rugi setiap tahunnya 400 juta untuk Jimbaran dan 200 juta di daerah Kuta. Jika hotel itu sukses berjalan dengan baik, peluang untuk memperoleh keuntungan untuk Jimbaran dan Kuta masing – masing sebesar 0,6 dan 0,7. Dimana sebaiknya hotel tersebut dibangun?

Penyelesaian:

Misalkan, x_1 = untung

x_2 = rugi

Untuk daerah Jimbaran, berlaku:

x_1 = Rp 3 M $\quad$ $P(x_1) = 0,6$

x_2 = - Rp 400 juta = - Rp 0,4 M $\quad$ $P(x_2)= 1 – 0,6 = 0,4$

$\boxed{E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i . P(x_i) =}$ E(X) $= x_1.P(x_1) – x_2.P(x_2)$

$= 3(0,6) – 0,4(0,4)$

$= 1,8 – 0,16 = 1,64$ M

suniantara.wordpress.com

Contoh – Distribusi Peluang Diskrit - Lanjutan

Penyelesaian:

Misalkan, x_1 = untung

x_2 = rugi

Untuk daerah Kuta, berlaku:

x_1 = Rp 2 M $\quad$ $P(x_1) = 0,7$

x_2 = - Rp 200 juta = - Rp 0,2 M $\quad$ $P(x_2) = 1 – 0,7 = 0,3$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i . P(x_i) = x_1 . P(x_1) - x_2 . P(x_2)$$
$$= 2(0,7) - 0,2(0,3)$$
$$= 1,4 - 0,06 = 1,34\,\mathrm{M}$$

Oleh karena E(X) di Jimabaran lebih besar dari Kuta, maka sebaiknya hotel tersebut dibangun di Daerah Jimbaran

suniantara.wordpress.com

Distribusi Peluang Kontinu - Fungsi Kepekatan Peluang

- Fungsi Kepekatan Peluang (*Probability Density Function*) merupakan suatu fungsi yang memetakan seluruh nilai dari sebuah Variabel acak kontinyu ke ruang peluang.
- Misalkanlah dari sebuah kolam kecil yang dihuni ratusan gurame ditangkap 10 ekor. Panjang masing-masing ikan (cm terdekat) dinyatakan dalam tabel berikut:

Ikan ke -	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Panjang	12,5	11,4	15,3	14,2	13,5	13,8	12,8	11,9	15,2	16,3

- Pada Variabel acak kontinyu peluang Variabel acak = x adalah 0 memperhati-kan bahwa nilai x hanyalah 'hampiran' dari nilai sesungguhnya yang sangat ditentukan oleh ketelitian alat ukur yang digunakan. Pada contoh di atas, peluang gurame yang ditangkap memiliki panjang 13,5 cm = P(X=13,5) = 0.

⇨ Fungsi Kepekatan … | ⇧SAP | Fungsi Distribusi … ⇦

Fungsi Kepekatan Peluang (2)

- Pada Variabel acak kontinyu, peluang dari Variabel acak > 0 akan terdefinisi pada rentang kontinyu dari nilai a ≤ x ≤ b. Pada kasus ini, maka peluang dari X – dinyatakan sebagai:

$$\mathrm{P}(a \le x \le b) = \int_a^b \underbrace{f(x)}_{\text{Fungsi Kepekatan Peluang}} dx = \mathrm{F}(b) - \underbrace{\mathrm{F}(a)}_{\text{Fungsi Peluang Kumulatif}}$$

- Pada contoh sebelumnya, peluang gurame yang ditangkap memiliki panjang 13,5 cm dapat dihitung dengan memperhatikan ketelitian alat ukur = 0,1 cm; sehingga:

$$\mathrm{P}(13{,}45 \le x \le 13{,}55) = \int_{13{,}45}^{13{,}55} f(x)dx = \mathrm{F}(13{,}55) - \mathrm{F}(13{,}45)$$

⇨ Nilai Tengah Pe … | ⇧SAP | Fungsi Kepekatan … ⇦

Karakteristik Fungsi Peluang dan Peluang Kumulatif

- Karakteristik dari fungsi kepekatan peluang Variabel acak kontinyu da-pat dinyatakan sebagai berikut:

$$P(X = x) = 0 \qquad (1)$$

$$P(a \le X \le b) \ge 0 \qquad (2)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \qquad (3)$$

- Fungsi Peluang Kumulatif Variabel acak X pada *x* didefinisikan sebagai jum-lah seluruh peluang X untuk semua $y \le x$ dan dinotasikan sebagai F(*x*)
- Peluang kumulatif Variabel acak kontinyu X dinyatakan sebagai:

$$P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

Nilai Tengah dan Ragam dari Variabel Acak

- Memperhatikan bahwa wilayah (*range*) dari sebuah Variabel acak merupa-kan himpunan bilangan real; maka (wilayah) sebuah Variabel acak akan me-miliki Nilai Tengah (*mean*) dan Ragam (*variance*).
- Sedangkan Nilai Tengah dan Ragam dari fungsi kepekatan peluang Variabel acak kontinyu pada suatu populasi dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\text{Nilai Tengah} = \mu_X = \int_{\forall x} x.f(x)dx$$

$$\text{Ragam} = \sigma_X^2 = \int_{\forall x} (x - \mu_X)^2 f(x)dx$$

Contoh: Distribusi Peluang Kontinu

Sebuah variabel acak kontinu X memiliki nilai antara x = 2,4 dan x = 3,5 yang mempunyai fungsi kepekatan peluang f(x) = (x + 3)/8. Tentukanlah nilai peluangnya?

Penyelesaian:

$$P(2{,}4 < X < 3{,}5) = \int_{2,4}^{3,5} \left(\frac{x+3}{8} \right) dx \quad = \int_{2,4}^{3,5} \left(\frac{1}{8}x + \frac{3}{8} \right) dx$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{8} x \Big]_{2,4}^{3,5} \quad = \frac{1}{16} x^2 + \frac{3}{8} x \Big]_{2,4}^{3,5}$$

$$= \left\{ \frac{1}{16}(3{,}5)^2 + \frac{3}{8}(3{,}5) \right\} - \left\{ \frac{1}{16}(2{,}4)^2 + \frac{3}{8}(2{,}4) \right\}$$

$$= \left(\frac{12{,}25}{16} + \frac{10{,}5}{8} \right) - \left(\frac{5{,}76}{16} + \frac{7{,}2}{8} \right)$$

$$= \left(\frac{12{,}25}{16} + \frac{21}{16} \right) - \left(\frac{5{,}76}{16} + \frac{14{,}4}{16} \right)$$

$$= 2{,}08 - 1{,}26 = 0{,}82$$

☹ Try by Yourself

Diketahui sekeping uang logam memiliki peluang munculnya sisi muka (M) 2x dari peluang munculnya sisi belakang (B). Jika uang logam ini dilempar 3 kali dan pengamat tertarik dengan Variabel-Variabel acak berikut:

1. X = Jumlah sisi M yang muncul pada ketiga lemparan;
2. Y = Nilai total dari sisi-sisi yang muncul pada ketiga lemparan, di mana jika M muncul diberikan nilai 2 dan jika B muncul diberikan nilai 1 untuk masing-masing pelemparan.

Maka untuk setiap Variabel acak, tentukanlah:

1. Fungsi massa peluangnya, dinyatakan dalam tabel distribusi frekuensi;
2. Fungsi peluang kumulatif untuk X jika $x = 2$ dan peluang kumulatif untuk Y jika $y \le 4$;
3. Nilai tengah dan ragam dari X dan Y.

☹ Try by Yourself

Diketahui:

S = Ruang Sampel untuk percobaan acak tersebut adalah:

= {MMM, MMB, MBM, MBB, BMM, BMB, BBM, BBB}

P(M) = 2 P(B)

Jadi:

R_x = {0, 1, 2, 3}

P(M) + P(B) = 1

⇒ 2 (PB) + P(B) = 1

⇒ 3 P(B) = 1

⇒ P(B) = 1/3, dan

⇒ P(M) = 2/3

1. Dari informasi di samping, maka dapat dibuat tabel distribusi frekuensi yang menyatakan fungsi massa peluang dari Variabel acak X, sebagai berikut:

x	0	1	2	3
P(X = x)	1/27	6/27	12/27	8/27

2. $P(X \leq 2) = F(2) = 1/27 + 6/27 + 12/27 = \underline{19/27}$
3. $\mu_x = 0(1/27) + 1(6/27) + 2(12/27) + 3(8/27)$
   $= 54/27 = 2$ (Apakah arti dari angka 2 ini???)

Contoh Soal

1. Sebuah variabel X, memiliki sebaran peluang sebagai berikut:

X	1	2	3	4	5	6
P(X=x)	8/27	4/27	2/27	1/27	9/27	3/27

   Tentukanlah nilai tengah x (*mean*) dan variansinya?

2. Sebuah variabel kontinu X, memiliki nilai antara x = 2 dan x = 5 yang mempunyai fungsi kepekatan:

   $$\boxed{f(x) = \frac{2+2x}{27}}$$

   hitunglah P(2 < X <5) dan P(4 < X <6)

Solusi

1. Nilai Tengahnya, yaitu :$x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = 5$, $x_6 = 6$

   $P(x_1) = 8/27$, $P(x_2) = 4/27$, $P(x_3) = 2/27$, $P(x_4) = 1/27$, $P(x_5) = 9/27$ dan $P(x_6) = 3/27$

$$E(X) = \mu_x = \sum_{i=1}^{n} X_i . P(X_i)$$
$$= \left(1x\frac{8}{27}\right) + \left(2x\frac{4}{27}\right) + \left(3x\frac{2}{27}\right) + \left(4x\frac{1}{27}\right) + \left(5x\frac{9}{27}\right) + \left(6x\frac{3}{27}\right)$$
$$= \frac{8}{27} + \frac{8}{27} + \frac{6}{27} + \frac{4}{27} + \frac{45}{27} + \frac{18}{27} = \frac{89}{27} = 3{,}30$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_x)^2 . P(x_i)$$
$$= (1-3{,}30)^2 \left(\tfrac{8}{27}\right) + (2-3{,}30)^2 \left(\tfrac{4}{27}\right) + (3-3{,}30)^2 \left(\tfrac{2}{27}\right)$$
$$+ (4-3{,}30)^2 \left(\tfrac{1}{27}\right) + (5-3{,}30)^2 \left(\tfrac{9}{27}\right) + (6-3{,}30)^2 \left(\tfrac{1}{27}\right)$$
$$= 3{,}62$$

Solusi

2. - P(2 < X < 5)

$$P(2 < x < 5) = \int_a^b f(x)dx = \int_2^5 \left(\frac{2+2x}{27}\right) dx$$
$$= \int_2^5 \frac{2}{27} + \frac{2x}{27} dx = \frac{2}{27}x + \frac{2}{27} . \frac{1}{2} x^2 \Big]_2^5$$
$$= \frac{2}{27}x + \frac{2}{54}x^2 \Big]_2^5 = \left\{\left(\frac{2}{27}\right)(5) + \frac{2}{54}(5)^2\right\} - \left\{\left(\frac{2}{27}\right)(2) + \frac{2}{54}(2)^2\right\}$$
$$= \left(\frac{10}{27} + \frac{50}{54}\right) - \left(\frac{4}{27} + \frac{8}{54}\right) = \left(\frac{20}{54} + \frac{50}{54}\right) - \left(\frac{8}{54} + \frac{8}{54}\right)$$
$$= \frac{70}{54} - \frac{16}{54} = \frac{54}{54} = 0$$

Solusi

2. - P(4 < X < 6)

$$P(4 < x < 5) = \int_a^b f(x)dx = \int_4^6 \left(\frac{2+2x}{27}\right)dx$$

$$= \int_4^6 \frac{2}{27} + \frac{2x}{27}\,dx = \frac{2}{27}x + \frac{2}{27}.\frac{1}{2}x^2\Big]_4^6$$

$$= \frac{2}{27}x + \frac{2}{54}x^2\Big]_4^6 = \left\{\left(\frac{2}{27}\right)(6) + \frac{2}{54}(6)^2\right\} - \left\{\left(\frac{2}{27}\right)(4) + \frac{2}{54}(4)^2\right\}$$

$$= \left(\frac{12}{27} + \frac{72}{54}\right) - \left(\frac{8}{27} + \frac{32}{54}\right) = \left(\frac{24}{54} + \frac{72}{54}\right) - \left(\frac{16}{54} + \frac{32}{54}\right)$$

$$= \frac{96}{54} - \frac{48}{54} = \frac{48}{54} = 0{,}89$$

Diberikan var. acak kontinu X dengan nilai x = 5 dengan fungsi kepekatan peluang:

$$f(x) = \frac{4X+3}{2}$$

tentukan nilai peluangnya?