Pertemuan III – Distribusi Peluang

Peubah Acak
(Random Variable)

- Distribusi Peluang Peubah Acak Diskret: Binomial, Nilai Tengah dan Ragam Peubah Acak Binom
- Distribusi Peluang Peubah Acak Kontinyu: Distribusi Normal dan Kurva Normal
- Transformasi ke Distribusi Normal Baku
- Tabel Normal Baku
- Luas Daerah di Bawah Kurva Normal
- Hampiran Normal pada Distribusi Binomial
- Try by Yourself

Distribusi Binomial

Jika pada suatu percobaan acak berlaku kondisi-kondisi berikut:

- ► Jumlah ulangan dari percobaan terbatas – misalnya n kali;
- ► Hasil dari setiap ulangan percobaan dapat dikelompokkan ke dalam 2 jenis kejadian: kejadian 'sukses' – suatu kejadian yang dijadikan perhatian pengamat dan kejadian 'gagal';
- ► Peluang dari kejadian 'sukses' dan kejadian 'gagal' konstan pada setiap ulangan percobaan.

Maka Distribusi Peluang dari Peubah Acak yang dijadikan perha-tian pengamat akan memiliki distribusi Binomial dengan fungsi massa peluang dinyatakan oleh:

n = jumlah ulangan percobaan;
p = peluang dari kejadian sukses;
x = 0, 1, …, n

⇨ Contoh Binomial (1) | ⇧SAP

suniantara.wordpress.com

Contoh Distribusi Binomial (1)

Sekeping uang logam setimbang dilempar 5 kali. Pengamat tertarik dengan jumlah dari sisi muka yang muncul. Buatlah: (a) Distribusi peluang dari peubah acak tersebut, (b) histogram dari distribusi peluang, dan (c) peluang munculnya sekurang-kurangnya 3 sisi muka.

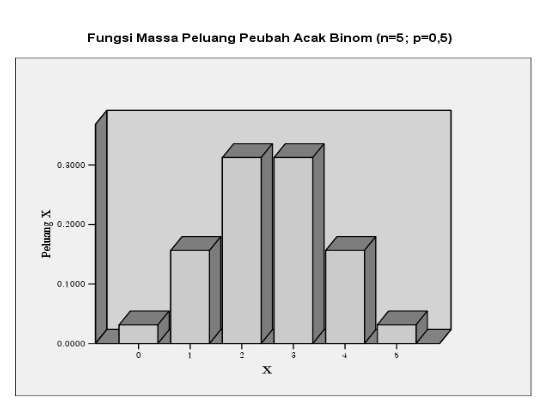
> Perhatikan, pada pelemparan sekeping uang logam hanya ada 2 jenis kejadian yang mungkin: munculnya sisi muka (H) dan munculnya si-si belakang (T). Pada setiap pelemparan, p(H) dan p(T) konstan dengan nilai = ½ (uang logam setimbang). Memperhatikan hal ini, jika X didefinisikan sebagai jumlah dari sisi muka yang muncul pada 5 kali pelemparan maka distribusi peluang dari X akan mengikuti se-baran Binomial dengan n = 5 dan p = ½. Jadi:

⇨ Lanjutan Contoh (1) | ⇪SAP

Contoh Distribusi Binomial (1)

Distribusi Peluang X

x	0	1	2	3	4	5
P(X=x)	0,03125	0,15625	0,31250	0,31250	0,15625	0,03125



$$
\begin{aligned}
P(X\leq 3) &= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) \\
&= 0{,}03125 + 0{,}15625 + 0{,}31250 + 0{,}31250 \\
&= \mathbf{0{,}81250}
\end{aligned}
$$

⇨ Contoh Binomial (2) | ⇪SAP

Contoh Distribusi Binomial (2)

Sebuah obat baru – NoGluc® – diciptakan pabrik farmasi SickFree Inc. yang berlokasi di Jimbaran Hill. Obat ini sangat bermanfaat untuk menurunkan kadar gula darah penderita Diabetes. Hasil pengujian di laboratorium menunjukkan bahwa dari 100 penderita, 95 orang terbukti secara klinis kadar gula darahnya menjadi normal. Jika 5 orang penderita Diabetes diobati dengan NoGluc®, berapakah peluang paling tidak ada 2 orang yang tidak tersembuhkan dengan obat ini?

Skenario di atas merupakan percobaan Binomial dengan peluang tersembuh-kan oleh NoGluc® = p(S) = 0,95 dan peluang tidak tersembuhkan = p(TS) = 0,05. Jika X menyatakan jumlah orang yang <u>tidak</u> tersembuhkan, maka:

X ≈ Binom(5; 0,05) ⇨ dibaca X menyebar Binomial dengan n = 5 dan pe-luang dari kejadian sukses = 0,05. Sehingga:

μ dan σ² Peubah Acak Binom

Nilai Tengah (μ) dan Ragam (σ^2) dari peubah acak X ≈ Binom(n; p) adalah:

$\mu = n\ p$ dan $\sigma^2 = n\ p\ (1-p)$ (Pembuktian di luar cakupan materi)

Untuk kasus obat NoGluc®, jika X menyatakan jumlah orang yang tersem-buhkan dengan obat ini, maka seandainya penderita diabetes yang diujicoba-kan berjumlah 100 orang; maka X ≈ Binom(100; 0,95). Sehingga:

$\mu = n\ p = 100\ (0{,}95) = 95$ orang;

$\sigma = \sqrt{[\ n\ p\ (1-p)\ ]} = \sqrt{[\ 100\ (0{,}95)\ (0{,}05)\ ]} = \sqrt{4{,}75} = 2{,}18$ orang; dan

$\mu \pm 2\sigma = 95 \pm 2\ (2{,}18) = (95 \pm 4{,}36)$ orang ⇒ (90,64 — 99,36) orang

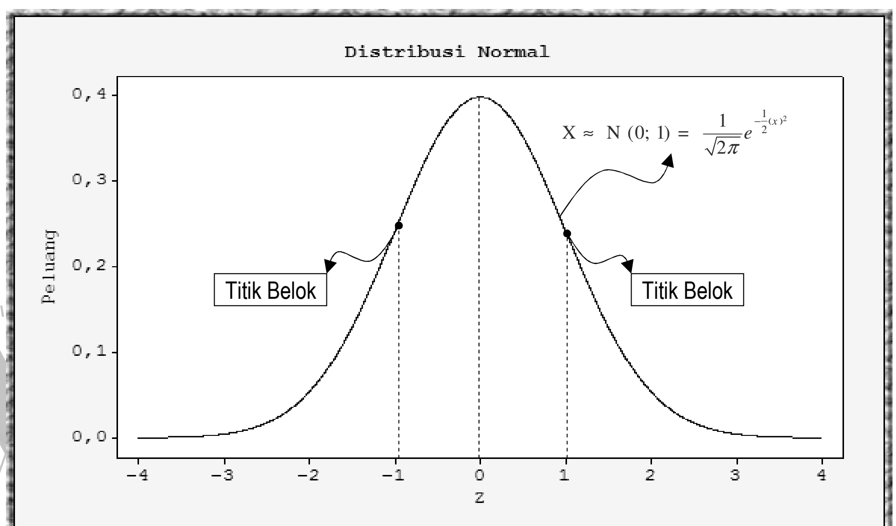
<u>Dalil Chebyshev</u>: sekurang-kurangnya akan ada $1 - 1/k^2$ bagian data terletak dalam k simpangan baku dari nilai tengahnya! Jadi, jumlah pasien yang tersembuhkan antara 90,64 – 99,36 orang me-miliki peluang sekurang-kurangnya 0,75!

Distribusi Normal

- Distribusi Normal merupakan sebaran peluang peubah acak kontinyu. Distribusi ini dianggap sebagai distribusi peluang yang paling penting dalam ilmu Statistika;
- Distribusi Normal pertama kalinya dipelajari oleh Matematikawan Perancis – Abraham de Moivre (1667 – 1754) dan Matematikawan Jerman – Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855);
- Distribusi peluang dari peubah acak yang menyebar normal akan berbentuk genta (bel) – disebut dengan nama **Kurva Normal** – dengan karakteristik: (a) simetri terhadap sumbu $X = \mu$, (b) memiliki nilai terbesar pada $X = \mu$, dan (c) luas daerah di bawah kurva = 1;
- Jika X merupakan peubah acak normal dengan nilai tengah μ dan simpangan baku σ – dinotasikan sebagai $X \approx$ Normal $(\mu; \sigma)$ – maka kurva normalnya dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan berikut:

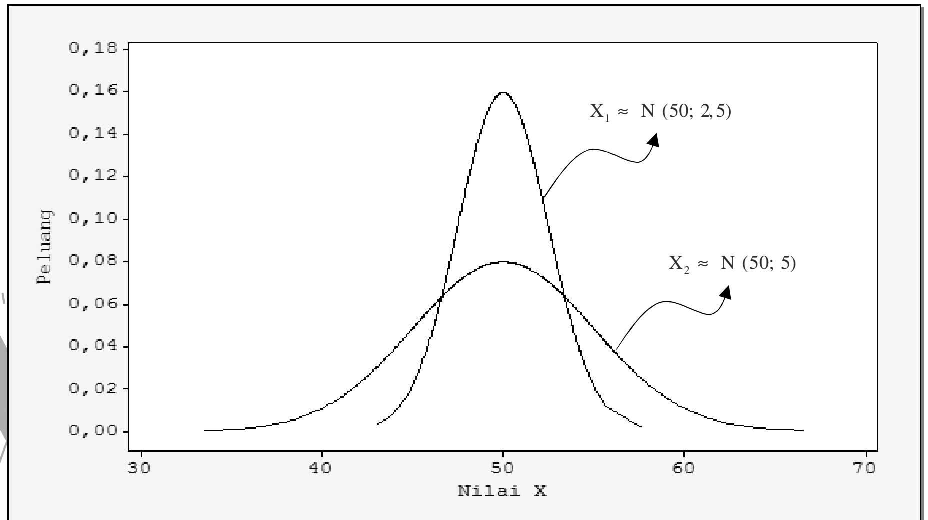
⇨ Kurva Normal | ⇧SAP

Kurva Normal Baku



⇨ Kurva Normal | ⇧SAP

Kurva Normal



⇨ Transformasi ke … | ⇧SAP

Transformasi ke Distribusi Normal Baku

- Peubah acak Z yang menyebar normal dengan nilai tengah $\mu = 0$ dan simpangan baku $\sigma = 1$ dikatakan menyebar <u>normal baku</u> dan dinotasikan dalam bentuk $Z \approx$ Normal (0; 1);
- Sembarang peubah acak X yang menyebar normal dengan nilai tengah μ dan simpangan baku σ – dinotasikan sebagai $X \approx$ Normal $(\mu; \sigma)$ – dapat diubah menjadi peubah acak normal baku melalui tranformasi berikut:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

- Transformasi ke Normal Baku dilakukan untuk <u>mempermudah</u> proses penghitungan peluang. Sebagai misal, jika $X \approx$ Normal (50; 5) maka untuk mencari Peluang $(40 \le X \le 55)$ harus dihitung integral berikut:

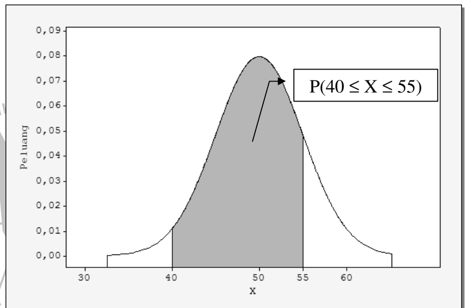
⇨ Transformasi … | ⇧SAP

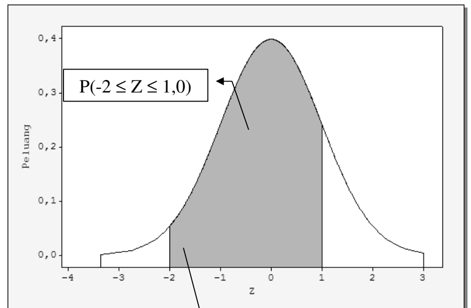
Transformasi ke Distribusi Normal Baku

Jika X ≈ Normal (50; 5) maka Peluang (40 ≤ X ≤ 55) dapat dihitung dengan melakukan tranformasi berikut:

$Z_1 = (40 - 50) / 5 = -2,0$ dan $Z_2 = (55 - 50) / 5 = 1,0$; sehingga:

$P(40 \le X \le 55) = P(-2,0 \le Z \le 1,0)$



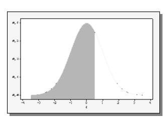


Bisa dilihat pada tabel Normal Baku

⇨ Tabel Normal … | ⇪SAP

suniantara.wordpress.com

Tabel Normal Baku



$P(40 \le X \le 55) = P(-2,0 \le Z \le 1,0)$
$= P(Z \le 1,0) - P(-2,0 \le Z)$
$= 0,8413 - 0,0228 = \underline{0,8185}$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
-2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
-2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
-1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
-1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
-0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621

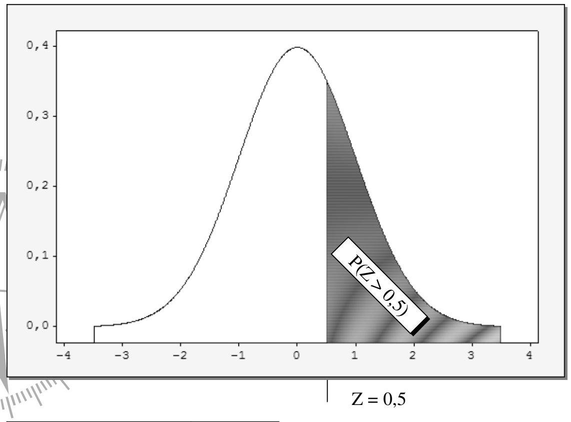
Luas Daerah … | ⇪SAP

suniantara.wordpress.com

Luas Daerah di Bawah Kurva Normal

- Jika peubah acak Z menyebar normal baku – Z ≈ Normal (0; 1) – maka hitunglah peluang-peluang berikut:

  (a) P(Z < 0,5); (b) P(Z > 0,5); (c) P(0,5 < Z < 1,25)



Tabel Normal Baku

z	0,00	0,01
0,3	0,6179	0,6217
0,4	0,6554	0,6591
0,5	$\boxed{0,6915}$	0,6950
0,6	0,7257	0,7291

Dari tabel di atas dapat dihitung:

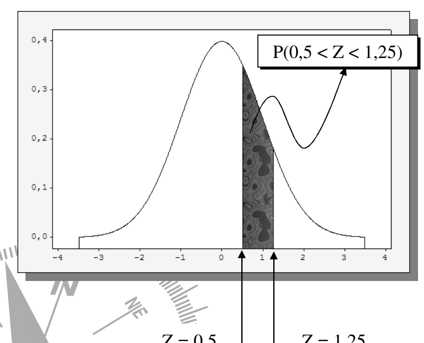
(a) P (Z < 0,5) = <u>0,6915</u>

(b) P (Z > 0,5) = 1 – P (Z < 0,5)
= 1 – 0,6915
= <u>0,3085</u>

⇨ Luas Daerah … ⇧SAP

Luas Daerah di Bawah Kurva Normal

Menghitung nilai dari P(0,5 < Z < 1,25):



Tabel Normal Baku

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736
0,5	$\boxed{0,6915}$	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	$\boxed{0,8944}$

Dari tabel di atas dapat dihitung:

P (0,5 < Z < 1,25) = P (Z < 1,25) – P(Z < 0,5)
= 0,8944 – 0,6915
= <u>0,2029</u>

⇨ Aplikasi Normal ⇧SAP Tabel Normal ⇦

Contoh Aplikasi Distribusi Normal (1)

Sebuah perusahaan memroduksi bohlam listrik yang diketahui umurnya menyebar normal dengan dengan μ = 800 jam dan σ = 40 jam. Hitunglah peluang sebuah bohlam yang dihasilkannya memiliki umur pemakaian antara 778 – 835 jam (Walpole: 189).

Pada permasalahan di atas, jika X menyatakan umur bohlam maka X ≈ Normal (800; 40); dan peluang yang dicari P(778 < X < 835).

Transformasi: Z = (X – μ) / σ;

Maka:

z_1 = (778 – 800) / 40 = - 0,55

z_2 = (835 – 800) / 40 = 0,85

P(778 < X < 835) = P(-0,55 < Z < 0,85)
= P(Z < 0,85) – P(Z < -0,55)
= 0,8023 – 0,2912
= 0,5111

Tabel Normal Baku

z	0,04	0,05	0,06
-0,6	0,2611	0,2578	0,2546
-0,5	0,2946	0,2912	0,2877
-0,4	0,3300	0,3264	0,3228
-0,3	0,3669	0,3632	0,3594
-0,2	0,4052	0,4013	0,3974
-0,1	0,4443	0,4404	0,4364
-0,0	0,4840	0,4801	0,4761
0,0	0,5160	0,5199	0,5239
0,1	0,5557	0,5596	0,5636
0,2	0,5948	0,5987	0,6026
0,3	0,6331	0,6368	0,6406
0,4	0,6700	0,6736	0,6772
0,5	0,7054	0,7088	0,7123
0,6	0,7389	0,7422	0,7454
0,7	0,7704	0,7734	0,7764
0,8	0,7995	0,8023	0,8051

⇨ Aplikasi Normal | ⇧SAP

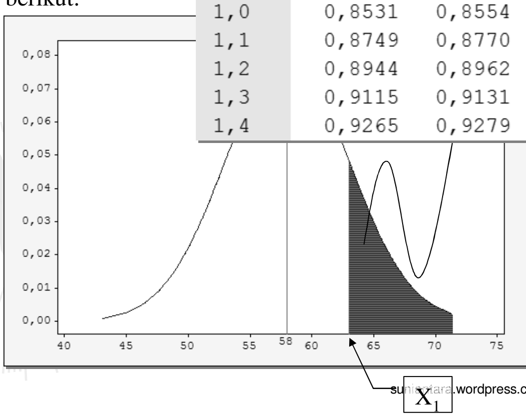
suniantara.wordpress.com

Contoh Aplikasi Distribusi Normal (2)

Hasil ujian mata kuliah Statistika Komputasi diketahui mengikuti sebaran normal dengan μ = 58 dan σ = 5. Jika diinginkan peserta ujian yang memperoleh nilai A hanya 12 persen; maka berapakah nilai terendah untuk memperoleh nilai A?

Jika X menyatakan ... Misal nilai te-rendah untuk memperoleh ... Perhatikanlah kurva berikut:

z	0,05	0,06	0,07	0,08
0,8	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106
0,9	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365
1,0	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599
1,1	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810
1,2	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997
1,3	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162
1,4	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306



/ σ, maka:

= 0,12

= 0,12

⇒ P (Z ≤ Z_1) = 1 – 0,12

⇒ P (Z ≤ Z_1) = 0,88

⇒ Z_1 = 1,175 (Interpolasi)

⇒ Jadi, X_1 = $\mu + Z_1 \sigma$
= 58 + 1,175 (5)
= 63,875
≈ 64 (Batas A)

suniantara.wordpress.com

⇧SAP | Aplikasi No r… ⇦

Hampiran Normal pada Distribusi Binomial

- Bila peubah acak X ≈ Binom (n; p) dengan nilai tengah μ = n p dan ragam σ^2 = n p (1-p), dan bila didefinisikan peubah acak Z sebagai:

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

  maka untuk $n \to \infty$, peubah acak Z ≈ Normal (n p; √[n p (1-p)]).

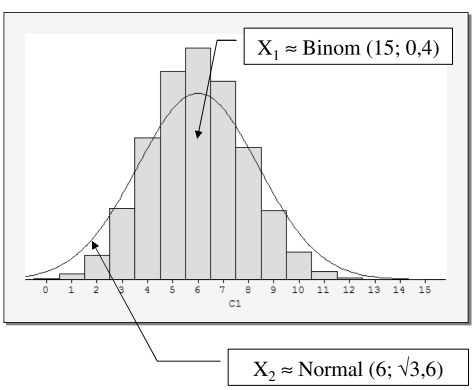
- Kondisi di atas dikatakan Hampiran Normal pada Distribusi Binomial, di mana Z akan memberikan hampiran yang sangat baik pada X bila *n* besar dan *p* dekat pada nilai ½

- Bahkan, bila *n* kecil pun sepanjang *p* tidak 'terlalu dekat' pada nilai 0 atau 1 hampiran normal pada distribusi binomial masih memberikan hasil yang cukup baik.

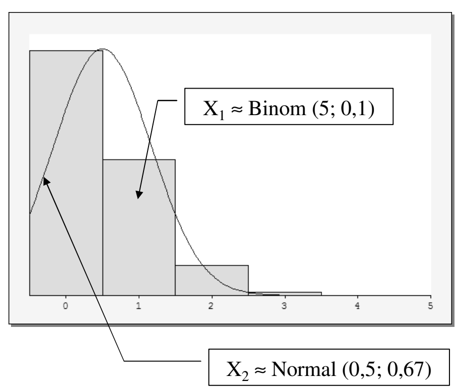
⇨ Kurva Normal | ⇪SAP

Hampiran Normal pada Distribusi Binomial (2)

Jika X_1 ≈ Binom (15; 0,4) dan X_2 ≈ Normal (6; √3,6); maka histogram dari Fungsi Peluang X_1 dan X_2 terlihat seperti gambar berikut:



Jika X_1 ≈ Binom (5; 0,1) dan X_2 ≈ Normal (0,5; 0,67); maka histogram dari Fungsi Peluang X_1 dan X_2 terlihat seperti gambar berikut:



Jika **np > 5** dan **n(1-p) > 5**, maka hampiran akan 'baik'!

⇨ Try by Yourself | ⇪SAP

Try by Yourself

Soal Ujian Masuk PTN terdiri dari 100 soal pilihan ganda. Setiap soal disediakan 4 jawaban dan hanya 1 jawaban yang benar. Tentukanlah peluang dari kejadian-kejadian berikut:

- Jika seorang peserta ujian menjawab seluruh soal, maka: (a) peluang menjawab benar antara 25 hingga 35 soal? (b) peluang menjawab salah paling banyak 25 soal?
- Jika peserta lainnya hanya menjawab 50 soal, maka: (c) peluang menjawab benar antara 15 hingga 20 soal? (d) peluang menjawab benar paling sedikit 15 soal?

a

Misal didefinisikan peubah acak X_1 sebagai jumlah jawaban yang benar dari 100 jawaban; maka $X_1 \approx$ Binom (100; 0,25) dengan $\mu = 25$ dan $\sigma = \sqrt{18{,}75} = 4{,}33$.

Jika X_1 dihampiri oleh peubah acak $Y_1 \approx$ Normal (25; 4,33), maka peluang yang dicari dapat dinyatakan sebagai:

$$P(25 \le X_1 \le 35) = \sum_{x=25}^{35} Binom(x;100;0,25)$$

$$= P(24{,}5 \le Y_1 \le 35{,}5) = P\left(\frac{24{,}5-25}{4{,}33} \le Z \le \frac{35{,}5-25}{4{,}33}\right)$$

$$= P(-0{,}115 \le Z \le 2{,}425) = P(Z \le 2{,}425) - P(-0{,}115 \le Z)$$

$$= 0{,}99235 - 0{,}45420 = 0{,}53815$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483
-0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925

⇧SAP