

SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

**学士学位论文**

THESIS OF BACHELOR



论文题目：球体热传导方程的有限元解法

学生姓名: 周慧

学生学号: 5100209117

专 业: 机械工程及自动化

指导教师: 曾进

学院(系): 数学系

球体热传导方程的有限元解法

摘要

本文将球面上的‘立方球体’方法拓展到球体上，形成一种新的球体剖分方法来解决球体上的瞬态热传导方程。这种剖分方法从球心到球面网格逐渐加密并且避免了极坐标表示时会出现的奇性，使得空间尺度的划分均匀，适用于生物细胞，地球物理等领域。考虑立方体投影为球体，将球体上的瞬态热传导方程放在正方体上求解，由于正方体的规则性，采用8节点的六面体单元，利用等参变换，数值积分和后差分公式得到此类问题的数值解。其中方程的边界条件先考虑球面上恒温的情况，以此与该情况下的解析解进行比较来检验方法的正确性和误差，最后给出没有解析解情况下的数值解。结果表明在足够的网格单元下，数值解可以逼近解析解，由此说明了该方法的可行性。

关键词：立方球体，瞬态热传导方程，有限元

**A FINITE ELEMENT METHOD OF HEAT CONDUCTION EQUATION ON THE SPHERE**

**ABSTRACT**

This paper referenced the thinking of cubed sphere and expands it to the three-dimensional sphere, which becomes a novel finite element discretization of domains with sphere. The mesh density of the discretization will increase from the center to sphere and can be used in the field of biological cell, geophysics and so on. In order to solve the heat conduction equation on the sphere, we project a cube onto a sphere and solve it on the cube. As the regularity of discretization on the cube, the problem on the cube is easier to solve than it on the sphere. During the process, 8-node hexahedral element, coordinate transformation and volume integral will be used. This mesh method avoids the singularity of polar representation. We apply the method to the heat equation with the first boundary condition first. Then, the numerical solution could be compared with the analytical solution.to teat the correctness of the method. After that, the method will be utilized on the problems without the analytical solutions. The results show that under sufficient grid cell, the numerical solution can approximate analytical solutions, which show the feasibility of the method.

**Key words:**  cubed sphere, transient heat conduction equation, finite element method

目录

[第1章 绪论 1](#_Toc389134548)

[1.1 研究的问题与背景 1](#_Toc389134549)

[1.2 本文的研究工作 1](#_Toc389134550)

[第2章 瞬态热传导问题 4](#_Toc389134551)

[2.1 有限元的一般格式 4](#_Toc389134552)

[2.2 立方体上的有限元 6](#_Toc389134553)

[2.3 球体上的有限元 9](#_Toc389134554)

[第3章 数值结果 10](#_Toc389134555)

[3.1 立方体上的数值解 10](#_Toc389134556)

[3.2 球体上的数值解 12](#_Toc389134557)

[第4章 推广应用 14](#_Toc389134558)

[参考文献 17](#_Toc389134559)

# 绪论

## 研究的问题与背景

有限元方法在科学与工程领域有广泛的应用，其解决的一类问题有瞬态热传导问题。由于瞬态热传导方程在化学，经济，生物等领域的数学模型中以不同的形式出现和应用，如化学领域中的反应扩散方程。本文将这一类问题统一归为一类，其形式如下：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (1.1‑1) |

其中,为常数，为拉普拉斯算子，为直角坐标系中的温度场函数。 为非齐次项。考虑在区域 上，有第一类边界条件的热传导问题：

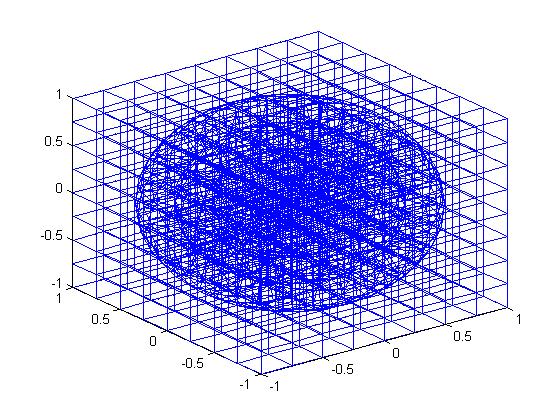
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (1.1‑2) |

其中， 为区域 的边界曲面，是定义在 上的已知函数。

若求解区域为球体，该类球对称问题通常转化到极坐标系下求解，但是对于有限元方法，球体的极坐标表示会带来奇异性，例如球心（原点）会投影成半径为零的面。这种投影方式导致网格的疏密度变化剧烈，奇异点附近解的性态无法得到精确描述，影响了有限元空间尺度的划分。因此为了去除奇异点，C.Ronchi[[[1]](#endnote-1)] 提出了‘立方球体’的球面划分方法，其主要思路是将球面投影为外切立方体面，球面被分为六个相同的区间，笛卡尔坐标系转换为角坐标系。在工程上，该方法可用于求解球面上的浅水波方程[[[2]](#endnote-2)]，球壳上的热对流问题[[[3]](#endnote-3)]等等。Tuncer Necibe[[[4]](#endnote-4)] 由这一想法拓展出了一种新的有限元离散化方法，立方体面上的网格与球面上的网格可以建立等价映射，由此，球面上的求解可以投影到立方体面上来求解。这种方法可以解决了球面或椭球面上的有限元计算，根据Web of Science，CNKI和Google Scholar中对于Cubed Sphere和Heat Conduction Equation的搜索，关于此方法的文献有[[[5]](#endnote-5)][[[6]](#endnote-6)][[[7]](#endnote-7)][[[8]](#endnote-8)]，近年来也有对此立方球体法的改进[[[9]](#endnote-9)] ，其采用了多维的有限体积法。本文的主要思想方法与文献[7]一致，但借助范数使得这一想法更简明。

## 本文的研究工作

本文采用了Tuncer Necibe的投影方法，将单位立方体网格映射到单位球体上。其中，立方体网格为六面体单元。与之不同的是，本文采用离散点对离散点的投影方式，而不采用区域对区域的投影方式。所以，立方体在这种映射下的像并不完全是球体，而是一个近似球体的多面体，本质上是在这个多面体上用立方体上的方法解微分方程。



**图 1‑1 立方体-球体**

采用Tuncer Necibe的有限元方法中的投影方式。令单位球体上的坐标 与单位立方体上的坐标 , 存在映射*P*, 使得：

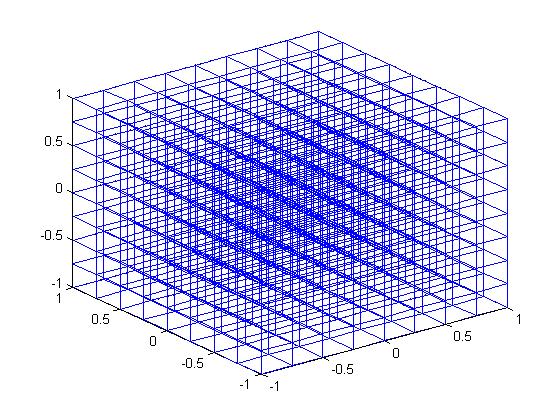
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (1.2‑3) |

其中，， 。在数值积分时，球体上的微分单元 转换为立方体上的微分单元 ; 偏导数经链式法则： 。这些转换都由雅可比矩阵：

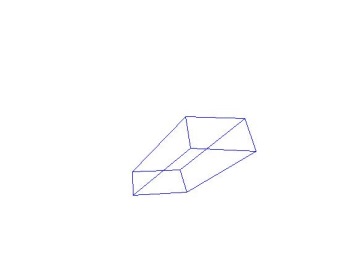
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (1.2‑4) |

来完成：， 。值得注意的是此方法需要将球体分为六个区域，分别对应 ，并在原点处有定义。在每个区域上分别进行数值积分。

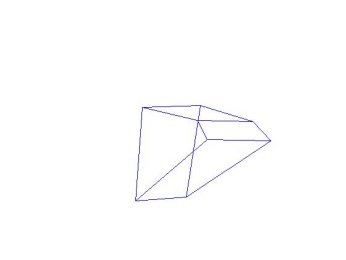
与之不同的是，本文改用点对点的映射方式。立方体（**图 1‑2**）上的8节点正方体单元在这种映射下发生变形，大部分变形为六面体（**图 1‑3**），部分位于棱上的单元变形较严重（**图 1‑4**），少数位于角上的单元变形为六棱锥（**图 1‑5**）。这三种类型的单元组合成为一个球体（**图 1‑6**）。



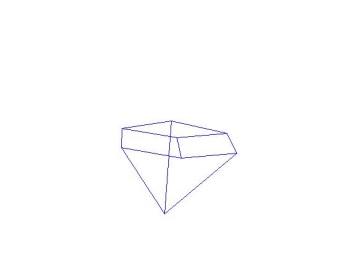
**图 1‑2 立方体**



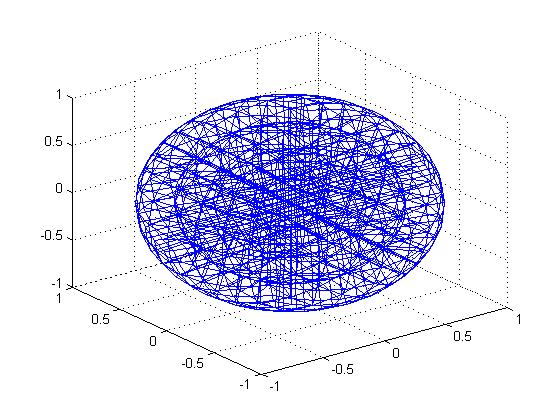
**图 1‑3面内正方体单元的投影效果**



**图 1‑4棱上正方体单元的投影效果**



**图 1‑5角上正方体单元的投影效果**



**图 1‑6 球体**

# 瞬态热传导问题

## 有限元的一般格式

考虑问题(1.1‑2)，微分方程 的等效积分形式，即

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.1‑1) |

其中 ， 是任意函数。按Galerkin方法选择任意函数，设 上已满足条件 则 ，令 为权函数，对域 内积分的 项进行分部积分，可得：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.1‑2) |

将空间域 离散为有限个单元体，在典型单元内温度 可近似地用节点温度 插值得到，即

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.1‑3) |

将(2.1‑3)代入(2.1‑2)可得 个节点温度 的有限元求解方程：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.1‑4) |

这是一组以时间 为变量的线性常微分方程组，式中 是热容矩阵， 是热传导矩阵， 和 都是对称正定矩阵； 是温度载荷列阵， 是节点温度列阵， 是节点温度对时间的导数列阵。矩阵 ，， 的元素都由单元的相应的矩阵元素集成，即

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.1‑5) |

式中，单元的矩阵元素由下列各式给出：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.1‑6) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.1‑7) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.1‑8) |

至此，已将时间域和空间域的偏微分方程问题在空间域内离散为 个节点温度 的常微分方程的初值问题。对于给定温度值的边界 上 个节点，方程组(2.1‑4)的相应项应引入条件：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.1‑9) |

式中， 是 上 个节点的编号。

考虑边界条件(2.1‑9)，就一般方程(2.1‑4)，可以采用对角元素置1法修正热传导和热容矩阵:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.1‑10) |

式中， 为Kronecker符号，即 ，， 表示赋值符号， 为 的第 列向量。[[[10]](#endnote-10)]

对于一阶常微分方程组，采用直接积分法：首先将时间域 等分为 个时间步长， ，已知初始温度列阵 ，假设 时刻的解 已经求得，计算 时刻的 。利用两点循环公式：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.1‑11) |

式中，，从 出发，可以依次递推求得节点温度列阵 中的各个瞬时值 。[[[11]](#endnote-11)]

## 立方体上的有限元

考虑如**图 1‑2**所示的单位立方体区域 上的有限元，求解如下问题：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.2‑12) |

式中， 为区域 的边界， 上定义的 不随时间变化。

对单位立方体采用8节点正方体单元划分，每条棱上分8段，总共有 个点， 个正方体单元。对每个点和单元编号，并以矩阵的形式储存坐标与编号，有节点矩阵和单元矩阵：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.2‑13) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.2‑14) |

其中节点矩阵 存储了节点的坐标，单元矩阵 存储了单元上节点的编号。

本文选择8节点六面体单元的插值函数如下：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.2‑15) |

式中，，， 。满足 ； 。其中 为Kronecker符号。由式(2.1‑3)，令

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.2‑16) |

则由(2.1‑6), (2.1‑7)，单元热传导和热容矩阵 , 可表示为：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.2‑17) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.2‑18) |

为了便于数值积分，引入等参元。考虑等参变换 ：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.2‑19) |

式中， 为六面体单元的体心，。等参变换将六面体单元转换为规则的单位正方体单元，即单元区域 。考虑导数之间的变换 , 为雅可比矩阵，在这里即

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.2‑20) |

考虑体积微元的变换，

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.2‑21) |

将(2.2‑19)代入(2.2‑16)，(2.2‑21)代入式(2.2‑17), (2.2‑18)，可得：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.2‑22) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.2‑23) |

对于三维六面体单元的数值积分，本文采用Irons积分，其公式为：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.2‑24) |

式中，，，， 为权系数，，， 为积分点坐标。本文采用积分点数为27的公式： ； ； ； ； ； ； ，其精度阶次为7。

由此，单元热传导和热容矩阵 , 计算完毕。为了得到总体热传导和热容矩阵 , ，需要将单元矩阵集成到总体矩阵的 装配矩阵 ，根据单元矩阵 中记录的单元节点编号，可得到第 个单元的装配矩阵 ，其形式如下：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.2‑25) |

由(2.2‑14)，单元装配矩阵满足 ，其它元素为0，。于是可得到总体热传导和热容矩阵：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.2‑26) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.2‑27) |

至此，将(2.2‑26)，(2.2‑27)代入(2.1‑4)，得到该问题的有限元求解方程：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.2‑28) |

利用(2.1‑10)和(2.1‑11)，方程得解。

## 球体上的有限元

考虑单位球体区域 上的有限元，求解如下问题：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.3‑29) |

式中， 为区域 的边界， 上定义的 不随时间变化，为常值。

已知单位立方体区域 上的剖分，即有(2.2‑13)与(2.2‑14)。对 上的节点采用映射(1.2‑3)， 得到一个离散化的多面体区域 ，其上的单元剖分形式沿用 上的剖分方式，即(2.2‑14)也是区域 剖分的单元矩阵。而区域 上节点矩阵经映射得到区域 上的节点矩阵：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.3‑30) |

这种映射方式下，多面体区域 近似球体区域 即 ，可以将区域 上的问题放在区域 上求解，即问题(2.3‑29)可转化为：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.3‑31) |

式中， 为区域 的边界， 为插值函数，满足 。

我们通过点对点的映射得到了球体上的节点矩阵和单元矩阵，代入上文所述的立方体上的有限元方法可对上述问题(2.3‑31)求解，其解可近似问题(2.3‑29)的解，且剖分单元密度的越大，近似程度越高。

# 数值结果

## 立方体上的数值解

考虑单位立方体区域 上的瞬态热传导问题：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.1‑1) |

式中， 为区域 的边界。由于问题的第一类边界条件为强制边界条件，方程的解在足够长时间后应达到稳态，即当时间 ， 。 为关于时间 的单调递增函数，且离边界 越近的点越先达到稳态。

一般地，对于在长方体区域上有第一类边界条件的瞬态热传导问题：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.1‑2) |

式中，区域 为 。该问题有解析解：

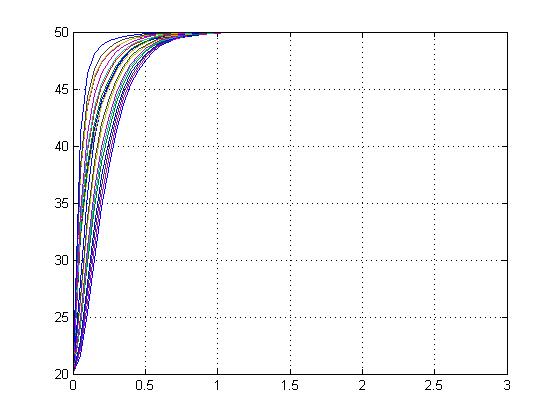
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.1‑3) |

其中， 。

由此，令 ，问题(3.1‑1)有解析解：

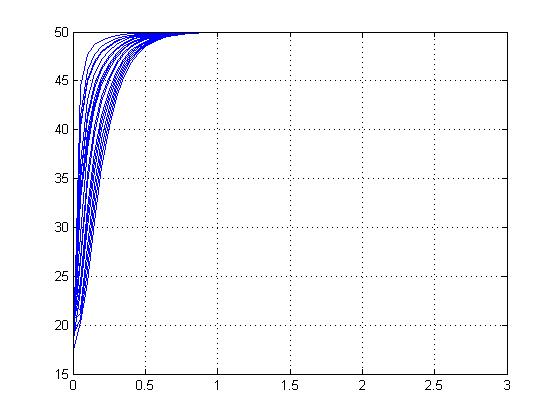
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.1‑4) |

若对于问题(3.1‑1)采用立方体的有限元方法，由(2.1‑11)，令时间步长 ，使用后差分公式，即 ，可得数值解 如**图 3‑1**，



**图 3‑1 (3.1‑1)的数值解**

图中，横坐标为时间，纵坐标为温度。每条曲线代表每个节点，故共有729条。同理由(3.1‑4)，令 ,即取前 项求和，可得每个节点的近似解析解 如**图 3‑2**，



**图 3‑2 (3.1‑1)的近似解析解**

对于问题(3.1‑1)的数值解 与解析解 进行误差分析：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.1‑5) |

其中，，对任意 满足 有：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.1‑6) |

其中， 为单调递减数列，，，当 为偶数时，，由Abel引理: 可得，

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.1‑7) |

故

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.1‑8) |

已知 和节点的坐标，代入(3.1‑5)和(3.1‑8)可得问题(3.1‑1)的解在样本点的误差为

值得注意的是，在原点处的误差 。

## 球体上的数值解

考虑单位球体区域 上的瞬态热传导问题：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.2‑9) |

式中， 为区域 的边界。

一般地，对于球体区域上有第一类边界条件的瞬态热传导问题：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.2‑10) |

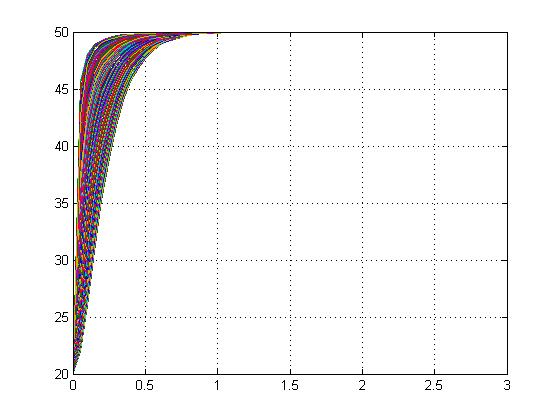
有解析解：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.2‑11) |

令 ，可得问题(3.2‑9)的解析解：

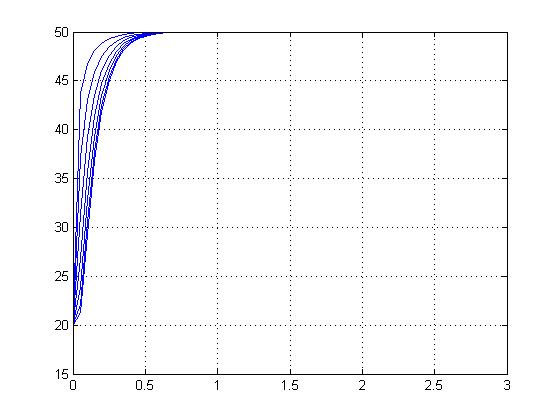
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.2‑12) |

若对于问题(3.2‑9)采用球体上的有限元，由(2.1‑11)，令时间步长 ，使用后差分公式，即 ，可得数值解 如**图 3‑3**，



**图 3‑3 (3.2‑9)的数值解**

由于将区域 剖分为4096个单元，4913个节点，故图中共有4913条曲线。由(3.2‑12), 令 ,即取前 项求和，可得每个节点的近似解析解 如**图 3‑4**，



**图 3‑4 (3.2‑9)的近似解析解**

对问题(3.2‑9) 的数值解 与解析解 进行误差分析：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.2‑13) |

其中，，由Abel引理，对任意 满足 有：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.2‑14) |

已知 和节点的坐标，代入(3.2‑13)，(3.2‑14)可得问题(3.2‑9)的解在样本点的误差为

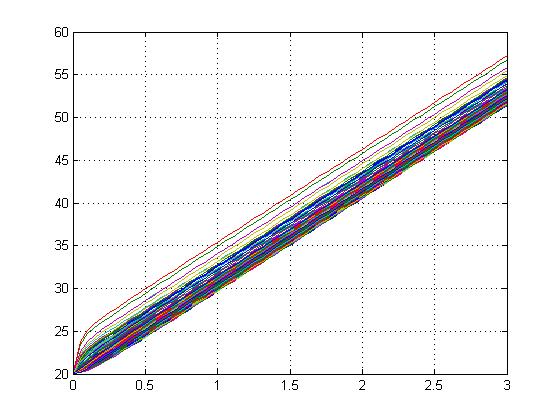
值得注意的是，在原点处，误差 。

# 推广应用

将有限元方法应用在单位球体区域 上， 为区域 的边界， 表示边界的外法线方向，则具有第二，第三类边界条件的瞬态热传导问题：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (4‑1) |

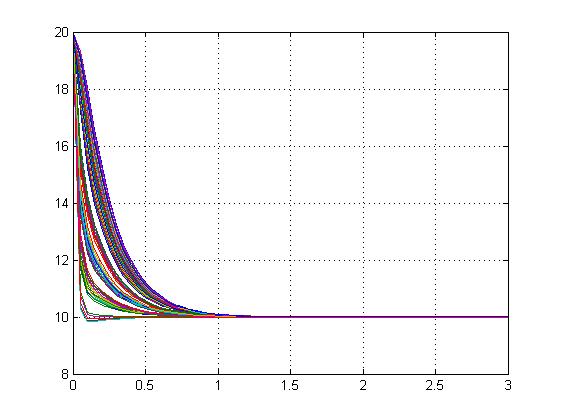
令 ，数值解如**图 4‑1**，



**图 4‑1 第二类边界条件**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (4‑2) |

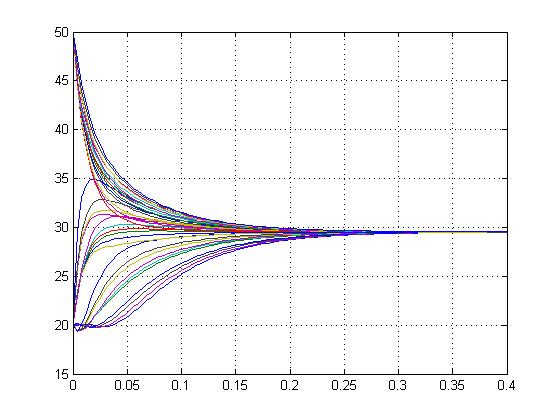
令 ，数值解如**图 4‑2**，



**图 4‑2 第三类边界条件**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (4‑3) |

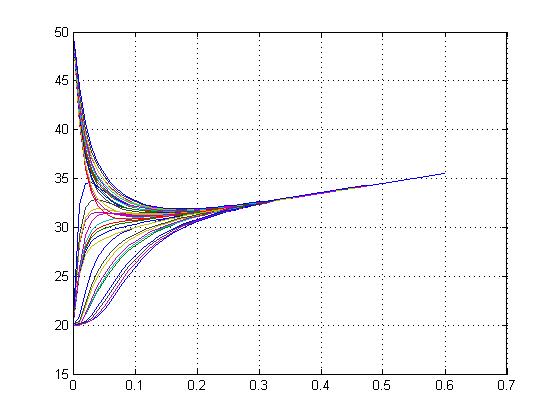
令 ，数值解如**图 4‑3**，



**图 4‑3 绝热边界条件**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (4‑4) |

令 ，数值解如**图 4‑4**



**图 4‑4 内热源**

参考文献

1. [] Ronchi C, Iacono R, Paolucci P S. The “cubed sphere”: A new method for the solution of partial differential equations in spherical geometry[J]. Journal of Computational Physics, 1996, 124(1): 93-114. [↑](#endnote-ref-1)
2. [] Taylor M, Tribbia J, Iskandarani M. The spectral element method for the shallow water equations on the sphere[J]. Journal of Computational Physics, 1997, 130(1): 92-108. [↑](#endnote-ref-2)
3. [] Choblet G. Modelling thermal convection with large viscosity gradients in one block of the ‘cubed sphere’[J]. Journal of Computational Physics, 2005, 205(1): 269-291. [↑](#endnote-ref-3)
4. [] Tuncer N. A novel finite element discretization of domains with spheroidal geometry[J]. 2007. [↑](#endnote-ref-4)
5. [] Nair R D, Thomas S J, Loft R D. A discontinuous Galerkin transport scheme on the cubed sphere[J]. Monthly Weather Review, 2005, 133(4). [↑](#endnote-ref-5)
6. []徐亚博. 球面上偏微分方程的数值求解研究[D]. 中北大学, 2005. [↑](#endnote-ref-6)
7. []张贝, 张怀, 石耀霖. 生成球体六面体有限元计算网格的一种优化方法[J]. 中国地球物理学会第二十七届年会论文集, 2011. [↑](#endnote-ref-7)
8. []朱桂芝, 张怀, 石耀霖. 优化地球三维有限元计算网格的一种方法[J]. 中国科学院研究生院学报, 2006, 23(5): 676-680. [↑](#endnote-ref-8)
9. [] Ivan L, De Sterck H, Northrup S A, et al. Multi-dimensional finite-volume scheme for hyperbolic conservation laws on three-dimensional solution-adaptive cubed-sphere grids[J]. Journal of Computational Physics, 2013, 255: 205-227. [↑](#endnote-ref-9)
10. [] 吴清松, 计算热物理引论[M]. 中国科学技术大学出版社. [↑](#endnote-ref-10)
11. [] 王勖成, 有限单元法[M]. 清华大学出版社. [↑](#endnote-ref-11)